Zestaw 9

Zeszyt 1

Jacek Stańdo
Kinga Gałązka

Rozwijanie myślenia matematycznego w kontekście edukacji biologicznej

- Nagromadzenie danych to nie jest jeszcze nauka
- Jak wielka jest przenikliwość ludzkiego umysłu

Analiza merytoryczna
Elżbieta Miterka

Recenzja
Jolanta Lazar

Redakcja językowa i korekta
Joanna Mueller

Projekt graficzny, projekt okładki
Wojciech Romerowicz, ORE

Skład i redakcja techniczna
Grzegorz Dębiński

Projekt motywu graficznego „Szkoły ćwiczeń"
Aneta Witecka

ISBN 978-83-65967-00-8 (Zestawy materiałów dla nauczycieli szkół ćwiczeń – matematyka)
ISBN 978-83-65967-36-7 (Zestaw 9. Korelacje treści nauczania z matematyki z zagadnieniami przedmiotów przyrodniczych)
ISBN 978-83-65967-37-4 (Zeszyt 1. Rozwijanie myślenia matematycznego w kontekście edukacji biologicznej)

Warszawa 2017
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Spis treści

Wstęp: natura „jest napisana” w języku matematycznym

Prekursorem stosowania metod doświadczalnych w badaniu zjawisk przyrodniczych, był żyjący na przełomie XVI i XVII wieku włoski uczony Galileo Galilei zwany Galileuszem. Aby w pełni pojmować świat, zgłębiał astronomię, filozofię, matematykę i astrologię. Poczynił wiele odkryć w dziedzinie wiedzy zwanej dzisiaj fizyką. Głosił nowatorskie poglądy, według których zagadnienia przyrodnicze nie powinny być rozwiązywane w sposób spekulatywny, ale na drodze empirycznej, popartej rozumowaniem prowadzącym do ustalenia prawidłowości, współistnienia i skutków zdarzeń, a wszystko to powinno być opisane językiem matematyki.

W przyrodzie matematyka jest dostrzegana wszędzie – w kształtach organizmów żywych i w zjawiskach dynamicznych. Zachwycają nas kulista kropla rosy, symetryczny liść czy sześcienny plaster miodu.

W biologii wykorzystuje się nie tyle pojedyncze twierdzenia matematyczne, ile aparat matematyki, który jest językiem do opisywania otaczającego nas świata. Biolog sięgnie do wzorów matematycznych, gdy będzie chciał określić liczebność populacji, tempo jej przyrostu czy spadku. W genetyce matematyka jest przydatna do obliczania i przedstawiania stosunków fenotypowych oraz genotypowych. I o czym wie chyba każdy – do obliczania prawdopodobieństwa uzyskania potomstwa o określonych cechach.

Modelowanie matematyczne wspomaga symulacje komputerowe procesów życiowych, pozwala zrozumieć działanie komórki lub złożone procesy biochemiczne. Ma też szerokie zastosowanie praktyczne w inżynierii genetycznej roślin i bakterii. Obecnie można nawet kupić specjalny model matematyczny do modyfikowania i opracowywania nowych antybiotyków.

Niedawno powstała kolejna dziedzina biologii – biologia systemowa, która stosuje narzędzia matematyki (głównie teorię grafów) do komputerowego modelowania systemów biologicznych: od komórek do całych organizmów. Dzięki temu można obserwować, jaki wpływ na całą sieć ma jeden jej zmodyfikowany komponent (np. gen).

W biologii szkolnej zastosowanie matematyki jest nieco mniej widoczne. Dzieje się tak może dlatego, że na edukację biologiczną przypada niewiele godzin lekcyjnych, więc z konieczności do omówienia wybiera się treści czysto przyrodnicze. Matematykę stosuje się niejako mimochodem, najczęściej do graficznej ilustracji zebranych danych. A i odwrotnie nie jest lepiej – w podręcznikach licealnych wspomina się zwykle o zastosowaniu biologii w matematyce przy omawianiu potęg o wykładnikach całkowitych ujemnych lub logarytmów.

Celem tej publikacji jest pokazanie sposobów, metod i form rozwijania u uczniów myślenia matematycznego w kontekście edukacji biologicznej oraz zainspirowanie nauczycieli do tworzenia zajęć edukacyjnych z matematyki wykorzystujących przykłady jej zastosowania w biologii. Publikacja nie ma charakteru zbioru zadań, ale jest to w pewnym stopniu skarbnica tematów i pomysłów, z których może skorzystać nauczyciel, rozwijając je lub adaptując do potrzeb swoich uczniów. Tytuły rozdziałów to cytaty z Galileusza. Mamy nadzieję, że skłonią czytelnika do refleksji nad holistycznym pojmowaniem rzeczywistości.

Ze względu na niewielką objętość zeszytu i szeroki krąg odbiorców (nauczycieli szkół podstawowych, gimnazjów i szkół ponadpodstawowych) nie jesteśmy w stanie omówić wszystkich szkolnych aspektów matematyczno-biologicznych. Zatem w pracy znalazły się tylko wybrane zagadnienia, o różnym stopniu trudności, które wydają się najbardziej interesujące dla uczniów i nie wymagają specjalistycznego przygotowania biologicznego od nauczycieli matematyki.

Ostatnia część zawiera materiały praktyczne – zadania do wykorzystania w danym dziale przedmiotowym, pomysły na lekcje, karty pracy itp. Proponowany materiał ma różne stopnie trudności i nie jest przypisany do żadnego etapu edukacyjnego. Opisuje on bowiem pewien problem, a to, jak zostanie zinterpretowany, uszczegółowiony, rozwinięty i wykorzystany, jest sprawą inwencji nauczyciela.

Mamy nadzieję, że niniejszy zeszyt usystematyzuje i wzbogaci wiedzę biologiczną nauczycieli matematyki, co zaowocuje tworzeniem interesujących i niebanalnych zajęć edukacyjnych, które będą wzorcowymi przykładami holizmu edukacyjnego.

Nagromadzenie danych to nie jest jeszcze nauka

Kiedy pytamy o związki matematyki z biologią, większość osób odpowiada bez namysłu: „symetria” i „wielokąty”. Rzeczywiście, jest to najbardziej naturalna, również dla uczniów, geometryzacja otaczającej nas przyrody. Piękne, kolorowe kształty lepiej przemawiają do uczących się niż sucha teoria na temat przekształceń geometrycznych czy własności wielokątów. Jak zatem można wykorzystać tę naturalną ciekawość dzieci i młodzieży, by przekuć ją w rzeczywistą wiedzę? Dzięki uczeniu się matematyki mimo woli – z wykorzystaniem dotyku i węchu, z użyciem fotografii, obserwacji, rysunków, na drodze stawianych hipotez i wyciąganych wniosków.

Wielokąty

Zacznijmy rozmawiać o wielokątach w czasie wyprawy na ukwieconą łąkę. Poprośmy, aby uczniowie zaobserwowali najpierw, po ile płatków mają rosnące tam kwiaty. Zwykle młodzi ludzie są zaskoczeni tym, że w przyrodzie dominują rośliny o kwiatach pięciopłatkowych. Obserwacja ta zaburza ich poczucie symetrii (powinno być po cztery lub sześć płatków!) i przekonanie, że to kwadrat i trójkąt są podstawowymi wielokątami. Sześciokąt byłby jeszcze dla nich do przyjęcia, ale nie pięciokąt!

Kwiaty pięciopłatkowe

Jako ciekawostkę można opowiedzieć o zależności między płatkami pięciopłatkowych kwiatów: odległość między co drugim płatkiem podzielona przez odległość między sąsiednimi płatkami jest stała i wynosi ok. 1,6, czyli jest złotą liczbą.

Jeśli zajęcia zorganizujemy wraz z osobą uczącą biologii, to uzasadnione będzie omówienie przy okazji całej budowy kwiatów.

W świat wielokątów foremnych wprowadzimy uczniów, gdy poprosimy, aby położyli kwiat na kartce papieru i narysowali odpowiadający mu wielokąt, łącząc odcinkami końce płatków.

Wielokąty w kwiatach

Gdy uczniowie skończą badanie własności otrzymanych wielokątów (np. korzystając z wcześniej przygotowanych kart pracy), możemy pokazać im, jak powstaje pentagram, i opowiedzieć o jego tajemniczych własnościach.

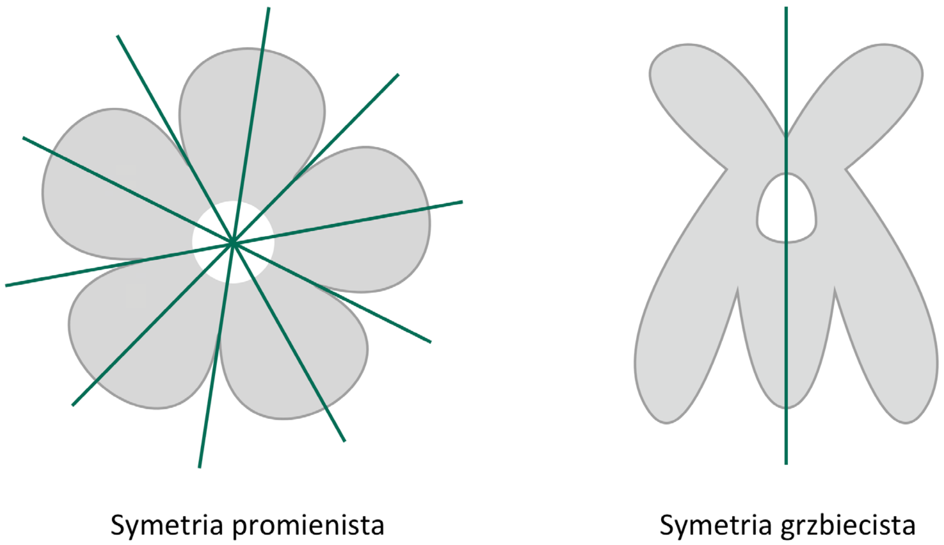
Uczniowie ze szkoły ponadpodstawowej mogą samodzielnie narysować pentagram, obliczyć długości odcinków w pentagramie i miary kątów, a następnie sformułować wnioski.

Symetria

Naturalnym ciągiem dalszym zajęć „kwiatowych” będzie wprowadzenie zagadnienia symetrii i podanie jej odpowiedników najczęściej spotykanych w opisywaniu przyrody: symetrii promienistej (przykład – kwiaty tulipana i zawilca) oraz grzbiecistej (przykład – kwiat groszku pachnącego).

„Symetria promienista, polisymetria, aktynomorfizm – cecha budowy organizmu, która charakteryzuje się tym, że roślina lub jej organy są zbudowane tak samo oraz są rozmieszczone równomiernie względem hipotetycznego punktu centralnego lub długiej osi ciała. W takiej roślinie można wyznaczyć wiele płaszczyzn symetrii, względem których zachodzi zgodność budowy obu stron” (Wikipedia: symetria promienista).

„Kwiat grzbiecisty – kwiat posiadający taką budowę i układ poszczególnych części okwiatu, że ma tylko jedną płaszczyznę symetrii” (Wikipedia: kwiat grzbiecisty).



Rys. 1. Symetria promienista i symetria grzbiecista

Jak powiedział Galileusz, nagromadzenie danych to nie jest jeszcze nauka, zatem dobrze by było, aby zajęcia terenowe kończyły się w szkole rozwijaniem zdobytych wiadomości oraz umacnianiem ich częścią teoretyczną i zadaniową. W ramach pracy domowej uczniowie mogą poszukać w najbliższym otoczeniu przykładów występowania kształtów omawianych na zajęciach.

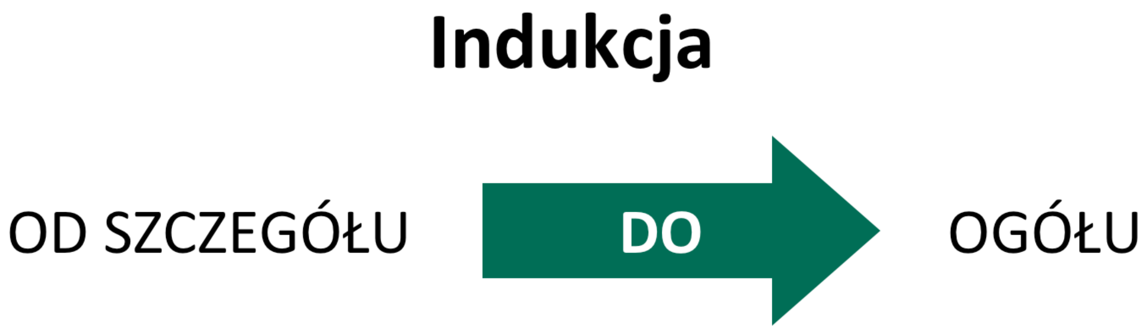
Pentagramy w przyrodzie

Na użytek tak pomyślanych zajęć warto mieć zapas zadań i problemów o różnym stopniu trudności, stymulujących u uczniów aktywność myślenia matematycznego. Dostrzeganiu, wyjaśnianiu i uogólnianiu prawidłowości oraz prowadzeniu prostych rozumowań będą sprzyjały zadania bazujące na poznanych wcześniej konkretnych przykładach, ale już w pełni abstrakcyjne, np.

- Narysuj odpowiedni wielokąt i na jego bazie zbuduj pięcioramienną gwiazdę. Jak najłatwiej znaleźć miary kątów tej gwiazdy? Czy narysowana figura ma osie symetrii? Jeśli tak, to ile?
- Jak za pomocą przystających trójkątów równobocznych otrzymać sześcioramienną gwiazdę? A sześciokąt foremny? Ile osi symetrii ma każda z tych figur?
- Ile osi symetrii ma trójkąt równoboczny? Ile ma kwadrat? A ile pięciokąt foremny? Czy dostrzegasz jakąś prawidłowość? Jeśli tak, to zapisz, ile osi symetrii będzie miał n-kąt foremny.
- Na ile najmniej trójkątów możesz podzielić czworokąt foremny? A pięciokąt foremny? A sześciokąt? Czy dostrzegasz jakąś prawidłowość? Jeśli tak, to zapisz, na ile najmniej trójkątów można podzielić n-kąt foremny.
- Korzystając z poprzedniego zadania, zapisz wzór, dzięki któremu będzie można obliczyć sumę miar kątów n-kąta foremnego.
- Znajdź wzór na pole n-kąta foremnego (szkoła ponadpodstawowa, zakres rozszerzony).
- Znajdź wzór na długości przekątnych n-kąta foremnego (szkoła ponadpodstawowa, zakres rozszerzony).

Indukcja

Sposoby pracy uczniów zaproponowane w pierwszej części tego rozdziału stymulują indukcyjne myślenie uczących się. W badaniach empirycznych indukcja sprowadza się do formułowania ogólnych teorii na podstawie niewielu doświadczeń i obserwacji.



Rys. 2. Schemat postępowania indukcyjnego

Jest to wnioskowanie, które bazując na stwierdzeniu, że zbadany obiekt ma pewną cechę (przy braku przesłanek negatywnych), wyprowadza wniosek, że każdy obiekt tego samego rodzaju posiada tę cechę.

Jeśli nie ma obiektów innego rodzaju (oprócz tych, które zostały zbadane), mówimy o wnioskowaniu przez indukcję zupełną. W przeciwnym razie mamy do czynienia z indukcją niezupełną.

Przy omawianiu z uczniami zajęć warto zwrócić uwagę, że jeśli chce się uogólniać stawiane hipotezy, to należy przeprowadzić ponownie eksperymenty, ale z uwzględnieniem dalszych czynników mających wpływ na dane zjawisko. Bowiem prawdopodobieństwo prawdziwości wniosków wyciągniętych przez indukcję niezupełną rośnie bowiem w miarę zróżnicowania badanych obiektów/zjawisk.

A jednak się kręci

A jednak się kręci – tymi słowami, parafrazując powiedzenie Galileusza, możemy podsumować rozmowy z ekologami, którzy już od lat przewidują zagładę ludzkości, nieprzestrzegającej elementarnych zasad współżycia z przyrodą ożywioną i nieożywioną. Zagadnienia ekologiczne zajmują poczesne miejsce w edukacji biologicznej w szkołach wszystkich typów, choć nie zawsze przynoszą oczekiwane rezultaty. Użycie aparatu matematycznego w tym przypadku pomaga w uświadomieniu młodzieży skali zagrożeń wynikających z umyślnego bądź nieumyślnego lekceważenia elementarnych zasad ochrony środowiska.

Jednym z pomysłów prowokujących uczniów do analizy wpływu człowieka na różnorodność biologiczną mogą być opisane poniżej zajęcia prowadzone metodą stolików zadaniowych wspólnie przez nauczycieli biologii i matematyki. W przypadku tej propozycji warto zadbać o to, aby zadania, które będą rozwiązywać uczniowie, zostały dostosowane do zakresu ich wcześniejszych wiadomości i umiejętności. Dyskusja, która będzie podsumowaniem zajęć, powinna pozwolić uczniom na stawianie pytań i formułowanie problemów powiązanych z życiem codziennym. Użycie języka matematycznego, w odróżnieniu od języka naturalnego, którym z reguły posługuje się biologia, pozwoli na budowanie hipotez dobrze zdefiniowanych procedur oraz na dowodzenie ich prawdziwości bądź nieprawdziwości. Pobudzi też do głębszych refleksji.

Jeśli chodzi o aspekt matematyczny zajęć, to dzięki pracy zespołowej uczniowie nie tylko utrwalą umiejętności wykonywania działań arytmetycznych i zamiany jednostek, lecz także pogłębią zdolności komunikowania się, rozwiązywania problemów w twórczy sposób, planowania i organizowania wspólnego uczenia się. W przypadku grupy uczniów bardziej zainteresowanych matematyką można formułować trudniejsze zadania matematycznie, o niejednoznacznych rozwiązaniach, zmuszające uczniów do dyskusji i szukania najoptymalniejszego rozwiązania.

Ekologia nad Wartą – dobre praktyki

Opisane zajęcia były fragmentem warsztatów ekologiczno-matematycznych przeprowadzonych przez Autorkę dla uczniów Szkoły Podstawowej nr 2 z Wielunia na terenie Załęczańskiego Parku Krajobrazowego nad rzeką Wartą.

Uczniowie pracują w grupach metodą stolików zadaniowych. Na stolikach leżą przygotowane wcześniej niezbędne akcesoria. Treść problemów do zbadania umieszczona jest w kopertach opatrzonych numerami grup. Po przeanalizowaniu i rozwiązaniu wszystkich zadań każda grupa zobowiązana jest do ułożenia zagadki ekologiczno-matematycznej rozwijającej tematykę zajęć. Niezbędne dane grupa pozyskuje z zasobów internetowych. Podsumowaniem warsztatów są: wspólne rozwiązanie ułożonych zagadek, dyskusja i wykonanie mapy myśli obrazującej wnioski wyciągnięte przez uczących się.

Stolik 1

Problem 1

Przed wami stoją trzy szklane pojemniki.

- Do pojemnika oznaczonego numerem 1 wlejcie wodę z kranu.
- Do pojemnika oznaczonego numerem 2 wlejcie wodę przyniesioną z rzeki.
- Do pojemnika oznaczonego numerem 3 wlejcie wodę zebraną z kałuży (o ile uda się wam znaleźć kałużę).

Zbadajcie jakość każdej wody.

- Jaki ma kolor?
- Czy wydziela zapach?
- Czy znajdują się w niej jakieś zanieczyszczenia?
- Jaką ma kwaśność (użyjcie papierka lakmusowego)?

Przedyskutujcie odpowiedzi na pytania:

- Której wody użyjecie do podlewania kwiatów? Dlaczego?
- Która posłuży do picia? Dlaczego?
- Która nada się do mycia rąk? Dlaczego?

Problem 2

- Pomiary prowadzone wczoraj przez jedną z grup uczniów wykazały, że do mycia rąk każdy z was zużywa jednorazowo ok. 2 dm^3 wody, a ręce myje co najmniej cztery razy na dobę. Obliczcie, ile litrów wody łącznie zużywają dziennie członkowie waszej grupy.
- W jednej szklance mieści się ćwierć litra wody. Ile szklanek wody zużywa wasza grupa dziennie do mycia rąk?
- Woda z kapiącego kranu może napełnić litrowy pojemnik w ciągu godziny. Ile litrów wody wycieknie z jednego niedokręconego kranu w ciągu doby? Ilu uczniów mogłoby umyć jednorazowo ręce w tej wodzie?

Problem 3

- Jakie refleksje nasunęły się wam po rozwiązaniu problemów 1 i 2? Porozmawiajcie o tym.
- Zobrazujcie graficznie uprzednio uzyskane dane i wnioski z nich wypływające.

Stolik 2

Problem 1

Przez Załęcze Wielkie płynie Warta. Z Wartą połączony jest staw, w którym pan Jurek hoduje ryby. Po obu stronach rzeki stoją domy mieszkalne. W miasteczku znajdują się też szkoła, farbiarnia i mleczarnia.

- Pozyskajcie z internetu plan opisywanej okolicy, wydrukujcie go.
- Na planie zaznaczcie kierunek prądu Warty oraz proponowane przez was ujęcie wody pitnej dla mieszkańców.

Problem 2

Nad Wartą znajduje się 45 obiektów odprowadzających ścieki do wód powierzchniowych i do ziemi. Aż 40 z tych obiektów odprowadza w ciągu doby m^3 ścieków. Dwa obiekty odprowadzają 0,5m^3 ścieków, a pozostałe po 40 m^3 ścieków.

- Oblicz, ile metrów sześciennych ścieków łącznie produkują te obiekty.
- Z Załęcza Wielkiego odprowadzanych jest 5m^3 ścieków. Jaki to procent ogólnej ilości ścieków?

Problem 3

Według danych z serwisu internetowego powiatu wieluńskiego w ośrodku, na terenie którego się znajdujemy, w 2014 roku zużycie wody na dobę wynosiło 25 m^3. W 2015 roku objętość ta wzrosła o 20 proc. W 2016 roku znowu wzrosła – tym razem o .

- Obliczcie, ile teraz wynosi dzienne zużycie wody w tym ośrodku.

- Wyobraźcie sobie, że przed wami stoi prostopadłościenny pojemnik na tę wodę. Jaką on ma wysokość, jeżeli jego podstawa ma wymiary 2 m na 2 m?

Stolik 3

Problem 1

W pudle oznaczonym numerem waszej grupy znajdują się śmieci, które wczoraj zostały przez was wyrzucone.

- Oszacujcie ich łączną wagę i obliczcie, ile kilogramów śmieci wyrzuciła przeciętnie osoba z waszej grupy.
- Czy którychś z tych śmieci można było nie wyrzucać, a zamiast tego dałoby się wykorzystać powtórnie? Co o tym sądzicie?

Problem 2

Oszacujcie, na podstawie wcześniejszych rozważań, ile kilogramów śmieci wyrzucą dzisiaj wszyscy uczestnicy warsztatów. Co o tym sądzicie?

Problem 3

Procentowa zawartość wyrzuconych przez was śmieci

Rodzaj śmieci	Zawartość procentowa niektórych wyrzucanych śmieci w ogólnej masie śmieci
Papier	20%
Tworzywa sztuczne	15%
Opakowania szklane	5%
Spożywcze	30%
Inne	30%

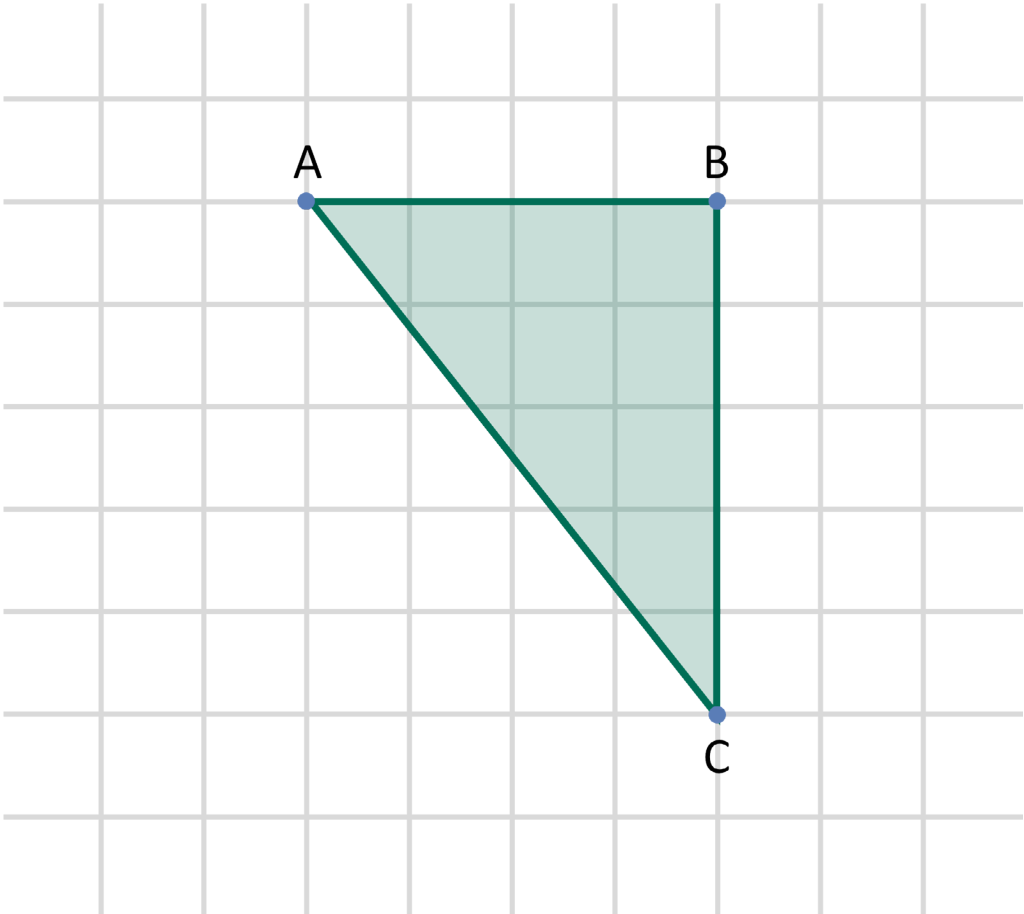
Na podstawie powyższych danych sporządźcie procentowy diagram kołowy zawartości wyrzucanych śmieci.

Stolik 4

Problem 1

- Na bibule zaznaczcie atramentem dwie plamy. To wysypiska śmieci.
- Spowodujcie „opad” deszczu, spryskując bibułę wodą.
- Zaobserwujcie, co się dzieje z wysypiskiem. Co o tym sądzicie?
- Jaki związek zachodzi między lokalizacją wysypiska a stanem środowiska w najbliżej okolicy?

Problem 2



Nieopodal Załęcza, w Kamionce, znajduje się gminne wysypisko śmieci. W okolicy wysypiska gleba jest tak zanieczyszczona, że na każdym 1 m^2 gleby znajduje się 1 kg żelaza, 9 g manganu, 4 g cynku, 3 g miedzi, 20 dag ołowiu, 1 g niklu.

Pani Aniela ma działkę położoną niedaleko wysypiska. Działka jest w kształcie trójkąta, takiego jak na rysunku. Obliczcie, ile kilogramów zanieczyszczeń znajduje się na tej działce. Przyjmijcie, że długość jednej kratki jest równa 10 m. Co o tym sądzicie?

Stolik 5

Problem 1

- Rozdajcie kartki, które wyjęliście z koperty.
- Nie wolno pokazywać waszych kart innym ani zaglądać do kart koleżanek i kolegów.
- Zapoznajcie się z informacjami na kartach. Możecie o nich rozmawiać. Wolno pytać, odpowiadać na pytania, głośno czytać informacje.
- Waszym zadaniem jest znaleźć zapisane na kartach pytania i odpowiedzieć na nie.

Pani Załęczańska ma na imię Jolanta.	Córka państwa Załęczańskich nie mieszka z rodzicami.	Pan Załęczański mieszka z żoną i synem w Załęczu Wielkim.
Syn państwa Załęczańskich ma na imię Adam.	Adam ma 15 lat.	Rodzina państwa Załęczańskich lubi wygody.
Pani Załęczańska codziennie się kąpie.	Adam codziennie bierze prysznic.	Pani Jola kąpie się tylko w wannie.
Pan Załęczański ma na imię Marcin.	Pan Marcin codziennie bierze prysznic.	Rodzina państwa Załęczańskich mieszka w domku jednorodzinnym.
Pani Załęczańska sześć razy w tygodniu gotuje obiad.	Gdy pani Jola gotuje obiad, pan Marcin robi ręczną przecierkę.	Raz w tygodniu pani Jola pierze w pralce 5 kg bielizny.

Pan Marcin dwa razy w tygodniu myje samochód.	Pan Marcin korzysta z toalety cztery razy dziennie.	Pani Jola korzysta z toalety pięć razy dziennie.
Adam korzysta z toalety sześć razy dziennie.	Rodzina państwa Załęczańskich codziennie jada wspólnie kolację i obiad.	Adam zmywa po kolacji.
Na zmywanie po kolacji potrzeba 15 l wody.	Na zmywanie po obiedzie potrzeba 20 l wody.	Na przygotowanie obiadu zużywa się 25 l wody.
Na pranie ręczne zużywa się 20 l wody.	Korzystanie z toalety to zużycie 20 l wody.	Na kąpiel w wannie potrzeba 150 l wody.
Na mycie samochodu pan Marcin zużywa 40 l wody.	Na każdy 1 kg bielizny pralka zużywa 25 l wody.	Ile m3 wody zużywa rodzina Załęczańskich w ciągu tygodnia?

Jakim ułamkiem całej zużytej w ciągu tygodnia wody jest woda zużyta przez pana Marcina w ciągu tygodnia do mycia samochodu?	Pani Jola raz w tygodniu podlewa ogródek.	Na jednorazowe podlanie ogródka potrzeba 120 l wody.
Ile litrów wody zużywa w ciągu tygodnia rodzina państwa Załęczańskich na kąpiel?	Ile litrów wody zużywa rodzina państwa Załęczańskich w ciągu tygodnia?	Ile litrów wody zużywa w ciągu tygodnia rodzina Załęczańskich do prania w pralce?
Córka państwa Załęczańskich ma na imię Krysia.	Krysia mieszka na stałe w Anglii.	Ile litrów wody tygodniowo zaoszczędziłaby rodzina Załęczańskich, gdyby wszyscy brali prysznic zamiast kąpać się w wannie?
Adam interesuje się piłką nożną.	Pan Marcin codziennie ogląda przez 2 godziny telewizję.	Pani Jola nie lubi zupy ogórkowej.
Dom państwa Załęczańskich stoi pod lasem.	Pan Marcin raz w tygodniu robi zakupy.	Raz w tygodniu rodzina Załęczańskich jada obiady u babci.

Nie możesz człowieka nauczyć niczego. Możesz mu tylko pomóc odnaleźć to w sobie

Matematyka w ogrodzie

Prawdziwy matematyk, patrząc na świat, dostrzega jego piękno poprzez struktury uporządkowane. Trochę jak muzyk, który opisuje swoje uczucia nutami. Każdy z nas ma bowiem inną wrażliwość estetyczną, muzyczną i… matematyczną. Szkoła pozwala nam ją w sobie odnaleźć. Matematyczna wyobraźnia nie sprowadza się do wykonywania operacji na liczbach, one są raczej środkiem, a nie celem. Aparat pojęciowy matematyki jest na tyle bogaty, że w umyśle człowieka wytwarza swoiste obrazy, które nie każdy potrafi uzewnętrznić. Ale jeśli już komuś się to uda, powstają twory geometryczne o trzech lub więcej wymiarach, najczęściej oparte na symetrii. Najrozmaitsze symetrie opisuje teoria grup, o której nie mówi się w matematyce szkolnej (ale w sposób ukryty wykorzystuje jej własności), a której narzędzia świadomie lub nieświadomie stosowali od wieków architekci ogrodów, wykorzystujący powtarzalność symetrii i jej założenia.

Biolog, patrząc na roślinę, widzi jej przydatność organiczną do użycia w parku czy ogrodzie, matematyk może obliczyć, ile będzie kosztował jej zakup. Najświetniejsi architekci krajobrazu (np. André Le Nôtre – projektant ogrodów wersalskich) byli świetnymi botanikami, ale również geometrami. Geometryczna koncepcja ogrodów, zwana ogrodem francuskim, charakteryzuje się monumentalnym designem opartym na geometrycznych kompozycjach alejek, fontann i specjalnie formowanych roślin.

Odwrócona lekcja matematyczno-biologiczna

Nowa podstawa programowa przedmiotu matematyka dla szkoły podstawowej zwraca uwagę, iż zarówno na etapie operacyjnym konkretnym, jak i na etapie myślenia abstrakcyjnego dla ucznia ważne jest poznawanie matematyki za pomocą konkretnych odniesień do rzeczywistości (Por. Podstawa… matematyka, b.r.). W takim kontekście rozwój myślenia matematycznego zaczyna się od doboru odpowiedniego modelu matematycznego do prostej sytuacji i jej opisu za pomocą odpowiednich wzorów oraz zależności, a kończy na prowadzeniu mniej lub bardziej skomplikowanych rozumowań, prowokujących uabstrakcyjnienie postawionych hipotez i wniosków. Tym razem przy omawianiu trudnych zagadnień geometrycznych możemy bazować na naturalnej dla człowieka potrzebie piękna i udoskonalania rzeczywistości.

Zajęcia dla osób na każdym etapie edukacji szkolnej możemy poprowadzić wspólnie z nauczycielem biologii metodą odwróconej lekcji. W tym celu należy poprosić uczniów, aby w internecie lub w innych dostępnych źródłach wiedzy poszukali przykładów roślin wieloletnich, które najczęściej można spotkać w ogrodach typu francuskiego. Kolejnym zadaniem jest przygotowanie prezentacji uzyskanych wiadomości (np. w formie pokazów multimedialnych). Tak sformułowany problem wpisuje się dobrze w sposób realizacji biologii w szkole podstawowej: „przedmiot biologia powinien służyć kształtowaniu postawy ciekawości poznawczej, poprzez zachęcanie uczniów do stawiania pytań, formułowania problemów, krytycznego odnoszenia się do różnych informacji, dostrzegania powiązań nauki z życiem codziennym oraz związku między różnymi dziedzinami wiedzy. Nabyta przez ucznia wiedza (wiadomości i umiejętności) powinna mieć zastosowanie w rozwiązywaniu bliskich mu problemów, a także służyć rozwijaniu świadomości znaczenia biologii w różnych dziedzinach życia” (Podstawa… biologia, b.r.: 21).

Na lekcji biologii uczniowie zastanowią się wspólnie, jakie cechy powinny mieć rośliny, którymi chcemy obsadzić nasz ogród (w przypadku ogrodów typu francuskiego ważne jest nie tylko przystosowanie do odpowiedniego klimatu, ale też to, żeby roślina dawała się formować w odpowiednie kształty). Przy okazji uczniowie poznają i klasyfikują przedstawicieli drzew liściastych oraz iglastych, krzewów itp. W szkole ponadpodstawowej można przy tym porozmawiać o genetycznej modyfikacji roślin specjalnie do celów hodowli ogrodowych.

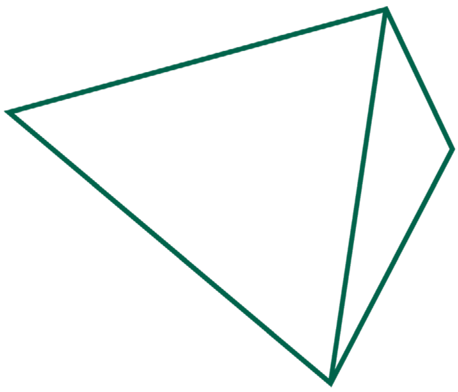
Figury unikursalne

Lekcję matematyki można rozpocząć od rozpoznawania i nazywania figur geometrycznych, w kształcie których są twory ogrodowe, i stawiania problemów geometrycznych do rozwiązania.

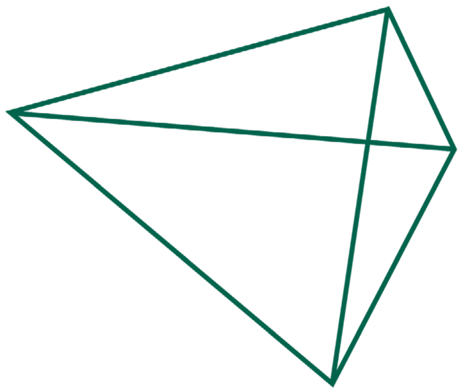
Źródło: vgm8383, licencja: CC BY-NC 2.0

Źródło: Rupert Ganzer, licencja: CC BY-NC-SA 2.0

W klasie IV szkoły podstawowej rozpoczynamy od wprowadzenia pojęcia łamanej (np. rozpoznanie jej odpowiednika stworzonego z ogrodowych ścieżek) – uczniowie mają określić jej podstawowe własności. Zadajemy pytania na temat wzajemnego możliwego położenia boków łamanej, próbujemy też zdefiniować pojęcie. Na dalszych etapach kształcenia rozmawiamy o figurach unikursalnych, nawiązując do teorii grafów. Stopniowo rozwijając myślenie matematyczne w obszarze prostych rozumowań i uogólniania, pokazujemy na zdjęciach (lub slajdach) rzeczywiste odpowiedniki figur geometrycznych, które można narysować bez odrywania ołówka od kartki papieru i bez prowadzenia go dwa razy po tej samej linii (zadanie nawiązujące do rzeczywistej sytuacji: zaprojektuj takie ścieżki w ogrodzie, aby człowiek spacerujący po nich nie przechodził tą samą ścieżką dwukrotnie). Pytamy: czy w ten sposób można narysować dowolny wielokąt? A wielokąt z przekątną? Uczniowie powinni zauważyć, że jednobieżność zależy od liczby węzłów parzystych i nieparzystych, w których spotykają się linie. Aby figura była unikursalna, mogą istnieć co najwyżej dwa węzły nieparzyste.



Czworokąt z jedną przekątną ma dwa węzły parzyste i dwa nieparzyste.
Jest figurą jednobieżną.



Czworokąt z dwoma przekątnymi ma jeden węzeł parzysty i cztery węzły nieparzyste.
Nie jest figurą jednobieżną.

Rys. 3. Czworokąt z jedną przekątną i z dwiema przekątnymi

Takie rozumowanie prowadzi bezpośrednio do twierdzenia Eulera, opisującego zależność między liczbą wierzchołków, ścian i krawędzi grafu płaskiego. To z kolei ułatwia znalezienie zależności między liczbą ścian, wierzchołków i krawędzi wielościanu, czyli pozwala dojść do sformułowania twierdzenia Eulera o wielościanach wypukłych.

Labirynty

Labirynt ogrodowy
Źródło: Andrew Wilkinson, licencja: CC BY-SA 2.0

Pod koniec XVI wieku modne stały się ogrodowe labirynty. Najczęściej wykonane były z kwiatów, niskich krzewów lub około dwumetrowych żywopłotów roślinnych. Zadanie znalezienia wyjścia z labiryntu należy do grupy problemów optymalizacyjnych, które polegają na znajdowaniu najlepszego rozwiązania wśród wielu możliwych rozwiązań spełniających określone warunki.

Zadanie dla uczniów

W prostokącie zamknięty jest labirynt. Ma on tylko jedno wejście/wyjście. Wszystkie jego ściany są równoległe do ścian zewnętrznych (boków prostokąta). W labiryncie z każdego pola istnieje droga prowadząca do wyjścia (nie ma obszarów zamkniętych). Należy znaleźć najkrótszą drogę pozwalającą osobie znajdującej się w labiryncie na wyjście z niego.
Sama treść zadania wydaje się pozornie mało związana z matematyką. Aby znaleźć odpowiedź na postawiony problem, trzeba skorzystać z metod heurystycznych, opierających się na intuicyjnych sposobach wyboru najlepszych, praktycznych rozwiązań, co w niewielkim stopniu wykorzystywane jest na lekcjach matematyki. Jednocześnie można będzie pogłębić wiedzę przy okazji rozważań o figurach unikursalnych i wzbogacić swoje wiadomości za pomocą zaawansowanego aparatu matematycznego.

W treści zadania nie jest sprecyzowane, w którym punkcie labiryntu znajduje się osoba chcąca z niego wyjść. Należy zatem podać algorytm, który z każdego punktu labiryntu doprowadzi ją jak najszybciej do wyjścia. Ustalenie najważniejszych elementów algorytmu nie powinno sprawić uczniom kłopotu: każdy odcinek drogi może być przebyty tylko raz, a poszukiwana strategia musi gwarantować jak najszybsze wyjście z labiryntu.
Najlepsze rezultaty poszukiwania rozwiązania daje praca w niewielkich grupach – uczący się mogą przedstawiać do rozważenia różne propozycje (np. znany sposób – należy iść wzdłuż ścian, trzymając stale tę samą rękę na ścianie), aż w końcu zrozumieją, że wychodzenie „na ślepo” nie jest najlepszą, a już na pewno nie najefektywniejszą metodą wyjścia z labiryntu. Ustalany algorytm uczniowie mogą sprawdzać i doskonalić za pomocą komputera. W rezultacie powinni otrzymać algorytm będący szczególnym przypadkiem algorytmu Dijkstry (problem komiwojażera), służącego do wyznaczania najkrótszej drogi w dowolnej sieci połączeń, w której odległości między punktami są nieujemne.

Bryły w ogrodzie

Podziwianie ogrodowych krajobrazów można połączyć z rozpoznawaniem poszczególnych roślin (biologia), kształtów (stereometria) i zadaniami geometrycznymi. Konstruktywistyczne podejście do kształcenia matematycznego zwraca uwagę na konstruowanie wiedzy w połączeniu z działalnością praktyczną. W ten sposób czynności manualne przekształcane są w wewnętrzne czynności umysłowe. Uruchamiają się indywidualne mechanizmy w konfrontacji z nowym wyzwaniem, nową trudnością. Uczeń tworzy samodzielnie algorytmy postępowania, buduje własny język myślenia matematycznego.

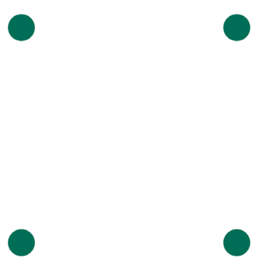
Poniżej kilka problemów inspirowanych sztuką projektowania ogrodów, pokazujących, jak można budować zadania wielopoziomowe (od najprostszych, przeznaczonych dla dzieci ze szkoły podstawowej, do trudniejszych, wymagających formalnych dowodów).

Rośliny w ogrodzie uformowane w geometryczne figury

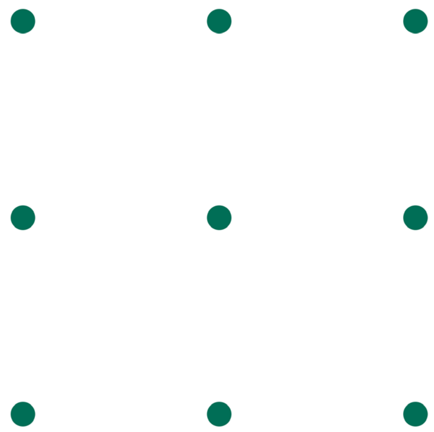
Zadania

Problem 1

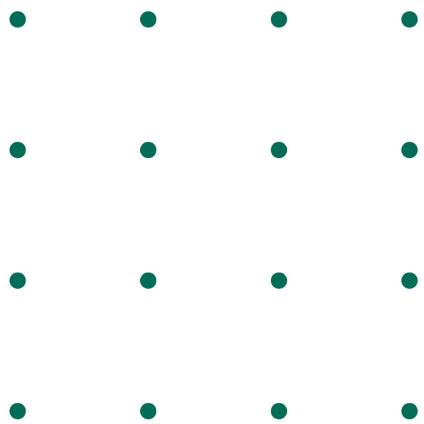
- W ogrodzie posadzone są cztery drzewa, tak jak na rysunku. Ogrodnik chce wytyczyć ścieżki, tak aby każde dwa drzewa stały przy jednej ścieżce. Ile najmniej ścieżek musi wytyczyć?



- W ogrodzie posadzonych jest dziewięć drzew, tak jak na rysunku. Ogrodnik chce wytyczyć ścieżki, tak aby każde trzy drzewa stały przy jednej ścieżce. Ile najmniej ścieżek musi wytyczyć?



- W ogrodzie posadzonych jest szesnaście drzew, tak jak na rysunku. Ogrodnik chce wytyczyć ścieżki, tak aby każde dwa drzewa lub każde cztery drzewa stały przy jednej ścieżce. Ile najmniej ścieżek musi wytyczyć?



Problem 2

- Pan Dwojakowski chce, aby w jego ogrodzie były dwie alejki. W maksymalnie ilu punktach będą mogły się przecinać?
- Pan Trojakowski chce, aby w jego ogrodzie były trzy alejki. W maksymalnie ilu punktach będą mogły się przecinać?
- Pan Czworakowski chce, aby w jego ogrodzie były cztery alejki. W maksymalnie ilu punktach będą mogły się przecinać?
- Pan Stukowski chce, aby w jego ogrodzie było sto alejek. W maksymalnie ilu punktach będą mogły się przecinać?
- Pan Nenkowski chce, aby w jego ogrodzie było n alejek. W maksymalnie ilu punktach będą mogły się przecinać?

Wnioskowanie przez analogię

Powyższe zadania „ogrodowe" są przykładem problemów rozwijających u uczniów zdolność wnioskowania przez analogię. „Wnioskowanie przez analogię to wnioskowanie o posiadaniu pewnej cechy przez dany przedmiot na podstawie jego podobieństwa do innych przedmiotów mających tę właśnie cechę" (*Słownik…*: wnioskowanie przez analogię, b.r.).

Myślenie przez analogię sprzyja skutecznemu uczeniu się, gdyż wymaga dostrzegania relacji i różnic, dokonania analizy zaobserwowanych własności, odkrycia reguły i jej wykorzystania.

Jak wielka jest przenikliwość ludzkiego umysłu

Modelowanie matematyczne zjawisk przyrodniczych

Umiejętności związane z modelowaniem matematycznym zjawisk przyrodniczych nadają się do celów kształcenia matematycznego zarówno w szkole podstawowej, jak i ponadpodstawowej, choć w nieco innym ujęciu. W szkole podstawowej jest to wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji do opisywania prostych sytuacji przyrodniczych. W szkole ponadpodstawowej uczeń opisuje w sposób teoretyczny dane zjawisko na podstawie uzyskanej wcześniej wiedzy (model heurystyczny), a następnie tworzy nowe struktury matematyczne, które mają być próbą odzwierciedlenia modelu heurystycznego. Nie jest to łatwe dla przeciętnego ucznia, który budując model heurystyczny sytuacji biologicznej, musi zdecydować, jakie procesy związane z danym zjawiskiem może pominąć, gdyż nie wpłyną na końcowy efekt.

Właściwy wybór pozwoli na zmniejszenie liczby zmiennych i parametrów użytych do zapisania równania lub innej struktury matematycznej. Parametry zwykle wyznacza się doświadczalnie (np. za pomocą pomiarów). Dla rozwoju myślenia matematycznego ucznia ważne są oba etapy modelowania – systematyzowanie i wykorzystanie wiedzy już nabytej oraz tworzenie na jej bazie nowej wiedzy i nowych umiejętności.

Modele matematyczne najczęściej wykorzystywane w kontekstach biologicznych opierają się na równaniach różniczkowych (równań takich nie ma w podstawie programowej), modelach stochastycznych lub elementach teorii grafów (o czym była mowa w poprzednich rozdziałach). W praktyce szkolnej używany jest zwykle opis dyskretny zjawisk (czyli to, co dzieje się w określonym momencie, np. takim, w którym wykonywany był pomiar), często z wykorzystaniem ciągów, których wyrazy należą do zbioru liczb naturalnych dodatnich. Aby zbudowany model matematyczny obiektów biologicznych spełnił swoją funkcję, powinien mieć jednoznaczne rozwiązanie, uwzględniające zakładane warunki początkowe. Do weryfikacji modelu służą zaprojektowane wcześniej eksperymenty (według koncepcji falsyfikowalności model można również obalić za pomocą eksperymentu).

Konstruktywizm edukacyjny zakłada zwiększenie samodzielności uczniów w dociekaniach naukowych. W ten nurt dobrze wpisuje się analiza gotowego modelu przyrodniczego.

Dzięki niej uczący się poznaje nowe techniki matematyczne i symulacji, a także nabiera niezbędnej intuicji oraz doświadczenia w konstruowaniu własnych modeli. Budując model matematyczny, uczeń korzysta z podstawowych modeli, modyfikuje je w zależności od potrzeb i analizuje w oparciu o poznane wcześniej techniki.

W naukach biologicznych wykorzystywane są różnego typu modele matematyczne, począwszy od wywodzących się z analizy ciągów liczbowych technik dotyczących układów dynamicznych, równań różniczkowych, a na wykorzystaniu teorii grafów, łańcuchów Markowa i teorii gier kończąc.

Modelowanie populacji

Dobrym ćwiczeniem uaktywniającym różne etapy myślenia matematycznego jest tworzenie przez uczniów modelu opisującego ekosystem, w którym występuje tylko jedna populacja, i rozważanie dynamiki tej populacji.

W ogólnym przypadku można przyjąć następujący opis heurystyczny dla danej populacji (na podst. Foryś, 2011):

- populacja jest jednorodna, składa się z genetycznie identycznych osobników rozmnażających się partenogenetycznie;
- osobnik rodzi się w pełni ukształtowany, zdolny do rozrodu i może rozmnażać się w dowolnym wieku;
- momenty rozmnażania są w dowolnym przedziale czasu rozłożone jednostajnie;
- każdy osobnik wydaje na świat potomstwo co t jednostek czasu, t jest ustalone i jednakowe dla wszystkich osobników;
- każdorazowo jeden rodzic ma x osobników potomnych.

Zadaniem uczniów będzie opisanie równaniem (liniowym) średniej liczebności populacji w ustalonej jednostce czasu (wybieramy model dyskretny, ponieważ model ciągły wymaga ułożenia równania różniczkowego, a tego nie wymagamy od uczniów). Warto, aby w podsumowaniu ćwiczenia nauczyciel zwrócił uwagę, że rozważana populacja może rozrastać się nieograniczenie (co powinno wynikać z zapisanych przez uczniów równań), natomiast w rzeczywistości jej liczebność determinują czynniki zewnętrzne, np. pojemność siedliska.

Uwzględniwszy niektóre procesy, które wpływają hamująco na nieograniczony przyrost populacji, można zaprezentować uczniom opis hipotetycznej sytuacji i polecić zapisanie oraz zinterpretowanie graficznie odpowiedniego równania kwadratowego (jest to dobre ćwiczenie przy okazji omawiania własności funkcji kwadratowej w szkole ponadpodstawowej).

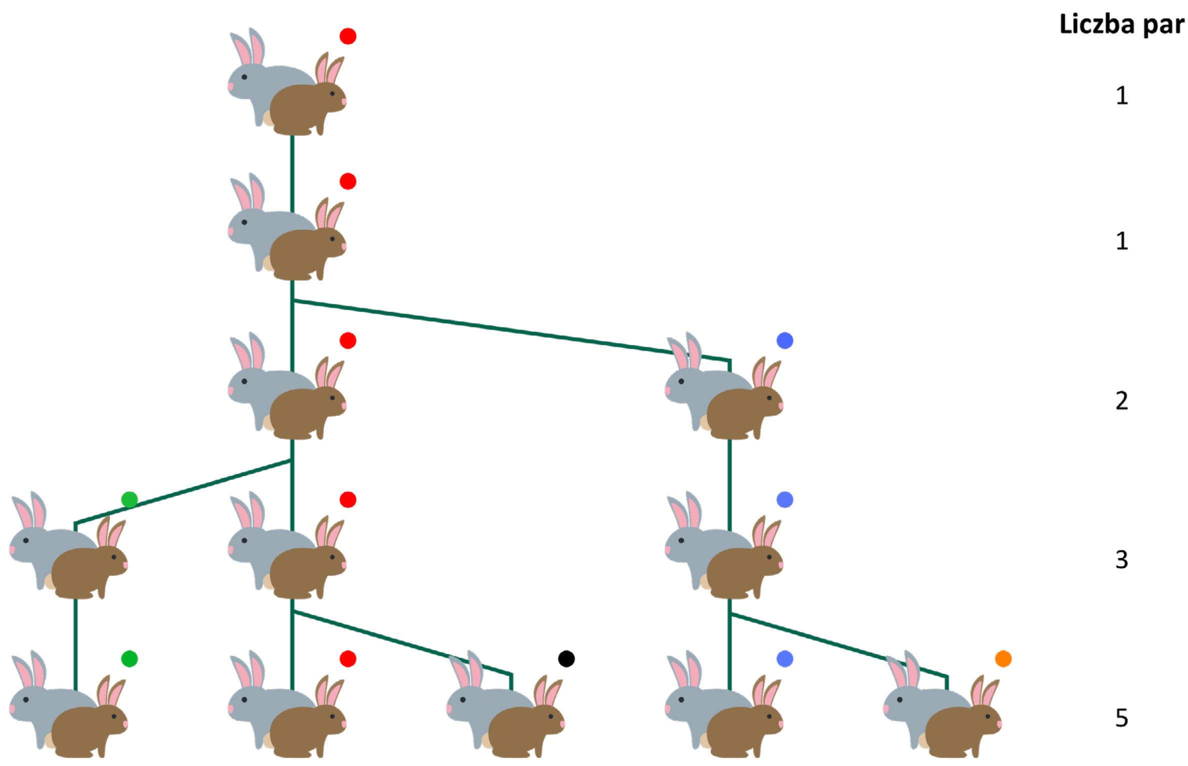
Ciąg Fibonacciego

Rozszerzając zagadnienia populacyjne, zasugerujmy uczniom rozważenie sytuacji, w której w populacji rozróżniamy osobniki w różnym wieku (populacja niejednorodna): osobniki niedojrzałe (w wieku przedreprodukcyjnym) i dojrzałe (w wieku reprodukcyjnym). Problem możemy uszczegółowić, opierając się na pomyśle żyjącego na przełomie XII i XIII wieku uczonego Leonarda z Pizy (zwanego Fibonaccim).

Zadanie

„Pewien człowiek wziął parę królików i umieścił je w miejscu otoczonym ze wszystkich stron murem. Ile par królików urodzi się z tej pary w ciągu roku, jeśli założymy, że z każdej pary po miesiącu rodzi się nowa para, która staje się płodna po upływie kolejnego miesiąca?” (na podst. *Liber abaci*).

Pozwólmy uczniom samodzielne poszukać rozwiązania, np. metodą dywanika pomysłów lub śnieżnej kuli, zgodnie z mentorską rolą nauczyciela. Będzie to dobry wstęp do teorii ciągów. Na zakończenie pokażmy rozwiązanie zamieszczone przez Fibonacciego w jego słynnej księdze *Liber abaci*.



Rys. 4. Ilustracja ciągu Fibonacciego

Liczby 1,1,2,3,5… ustalone przez uczonego tworzą ciąg nazywany **ciągiem Fibonacciego**, a liczby go tworzące określa się **liczbami Fibonacciego**.

Znalezienie przez uczniów wzoru ogólnego ciągu pozwoli na zdefiniowanie rekurencyjnego sposobu opisywania ciągów.

W tym miejscu warto zachęcić uczących się do pracy metodą projektów – poszukania innych biologicznych odniesień ciągu Fibonacciego (liczby Fibonacciego opisują na przykład liczbę płatków stokrotki, pędów roślin w kolejnych fazach wzrostu czy spiral w owocach ananasa).

Rozważań dotyczących modelowania populacji nie uważamy za zamknięte, zgodnie z założeniami szkoły ćwiczeń – zdolni uczniowie mogą budować modele uwzględniające więcej grup wiekowych, oddziaływania między dwiema populacjami w układzie symbiozy lub konkurencji itp.

Bakterie i ciągi

Niektóre bakterie posiadają zdolność rozmnażania bezpłciowego. Po osiągnięciu odpowiedniej wielkości dzielą się – z jednej bakterii powstają dwie identyczne. Nowo powstałe bakterie rosną i w odpowiednim czasie dzielą się, itd.

Zadanie 1 dla ucznia

Wyobraź sobie, że masz pojemnik, w którym znajduje się jedna bakteria Pseudomonas natriegens[1]. Co 9,8 min powstają z niej dwie komórki pochodne. Po upływie kolejnych 9,8 min te dwie komórki znów dzielą się na pół – teraz są już w pojemniku cztery bakterie. Każda z tych bakterii po upływie kolejnych 9,8 min znowu ulegnie podziałowi. Oblicz, ile bakterii znajdzie się w pojemniku po upływie:

a) godziny,
b) doby.

Łatwo zobaczyć, że do opisania procesu podziału bakterii można wykorzystać ciąg geometryczny, którego pierwszy wyraz jest równy 1, a iloraz 2.

Zadanie 2 dla ucznia

Pałeczki okrężnicy[2] mają długość ok. 2 , średnicę ok. 0,8 i masę ok. 6,65g. Dzielą się bardzo szybko – następne pokolenie otrzymuje się w ciągu 20 min.

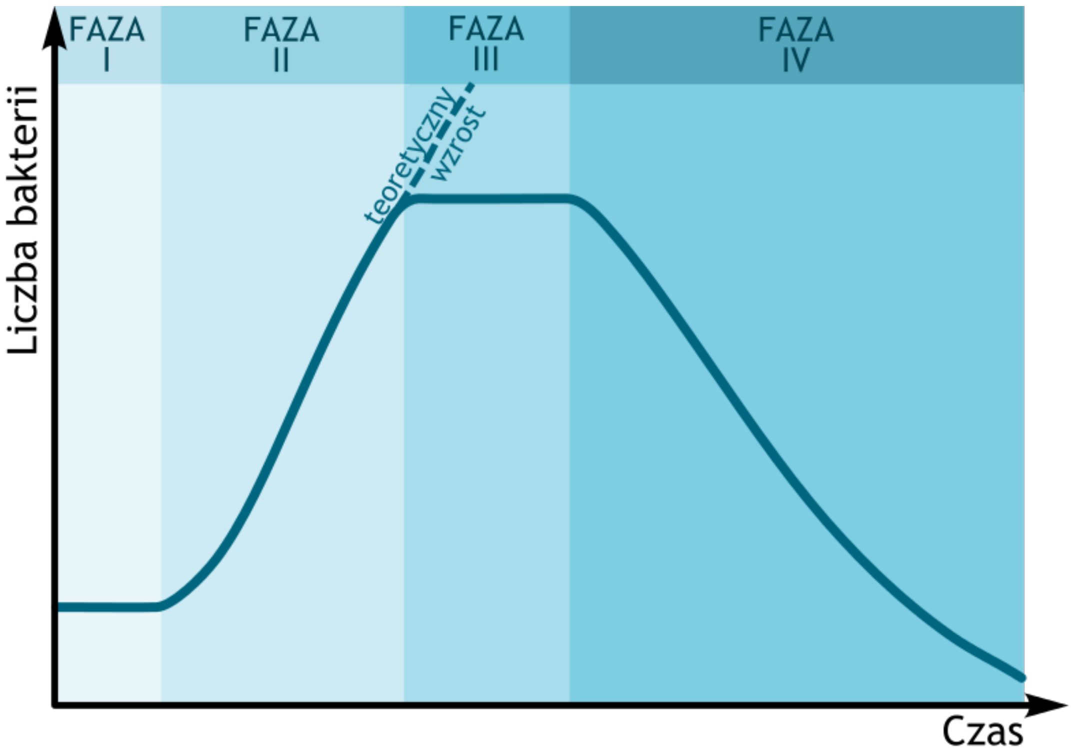
W jakim czasie masa kolonii powstałej z jednej bakterii okrężnicy dorównywałaby masie Ziemi? Zakładamy, że bakterie nie giną.

Jakie wymiary miałby sześcian zawierający te bakterie?

1 Pseudomonas natriegens to rodzaj bakterii przyjmujących kształt prostych lub nieznacznie wygiętych pałeczek. Występują powszechnie w glebie, powietrzu, wodzie. Należą do grupy najszybciej podwajających się bakterii (na podst. Wikipedia: Pseudomonas natriengens).

2 Pałeczka okrężnicy – bakteria beztlenowa, wchodzi w skład flory bakteryjnej jelita grubego człowieka. W określonych warunkach może wykazać własności chorobotwórczość dla człowieka.

Naturalne wydaje się, że po rozwiązaniu tak postawionego zadania wywiąże się dyskusja, czy jest możliwe, aby masa bakterii przewyższyła masę Ziemi. I tu jest miejsce na zaprezentowanie krzywej wzrostu bakterii.



Rys. 5. Krzywa wzrostu bakterii (Wikipedia)

W trakcie omawiania biologicznej interpretacji wykresu warto zwrócić uwagę na związane z tym aspekty matematyczne (np. krzywa wykładnicza – faza intensywnego wzrostu), przy czym mogą przydać się wiadomości zdobyte podczas zajęć na temat modelowania populacji.

Genetyka i matematyka

Podstawy genetyki klasycznej są zapewne dobrze znane każdemu nauczycielowi, bo kto z nas nie próbował określić prawdopodobnego wzrostu czy koloru oczu swoich hipotetycznych dzieci. Uczniowie na lekcjach biologii zapewne poznają legendarną historię, która doprowadziła czeskiego zakonnika Gregora Mendla do sformułowania teorii całkowitej dominacji genów. Mendel krzyżował uprawiany w ogrodzie groszek o strąkach zielonych z groszkiem o strąkach żółtych i zauważył, że jeśli krzyżuje się dwie rośliny – jedną „czysto żółtą", a drugą „czysto zieloną" – to w następnym pokoleniu otrzymuje się rośliny o strąkach zielonych, natomiast przy dalszym krzyżowaniu ze sobą tak otrzymanych roślin w kolejnym pokoleniu 3/4 osobników ma strąki zielone, a 1/4 żółte (na podst. Foryś, 2011).

Proste obliczenia dotyczące barwy strąków czy kwiatów groszku można adoptować do problemów dotyczących genów sprzężonych z płcią. Jest to o tyle ciekawe, że do chorób związanych z płcią należą m.in. hemofilia czy daltonizm.

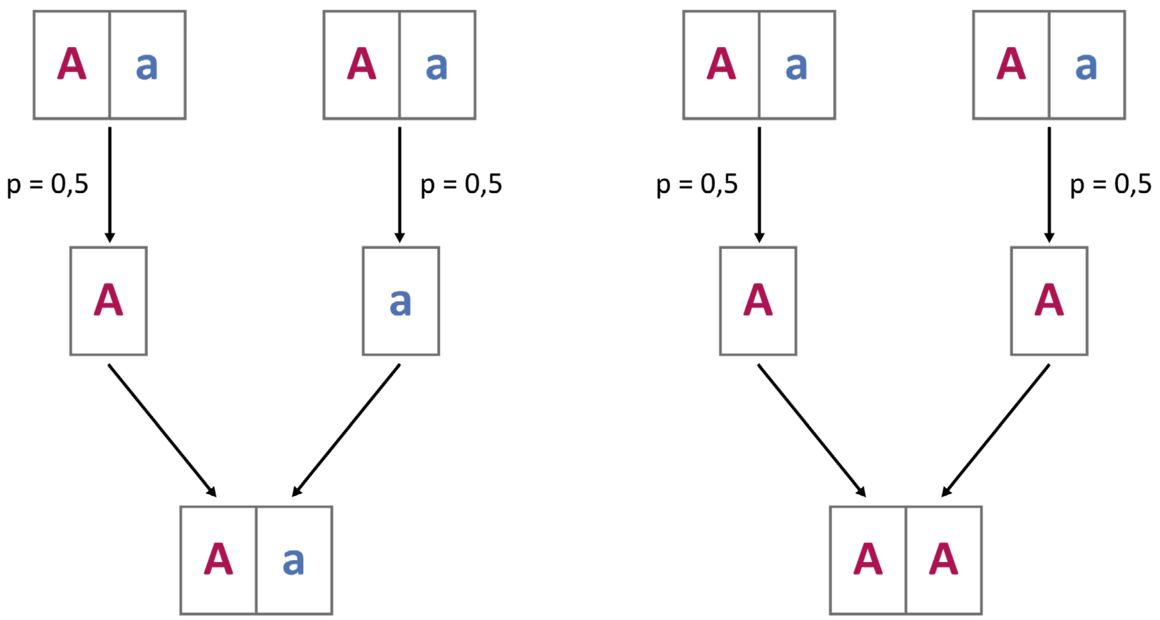
Jako pracę domową możemy polecić młodzieży ze szkoły ponadpodstawowej sporządzenie graficznego modelu doświadczenia Mendla, przy założeniu, że osobniki łączą się losowo i potomek dziedziczy losowo po jednym genie od każdego z rodziców, a wybór genów od rodziców jest niezależny. Rozważania na temat prawdopodobieństwa uzyskania danego genotypu przez potomka ustalonej pary rodziców mogą być powtórzeniem wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa zdobytych w szkole podstawowej. Dla uczniów zdolniejszych możemy przygotować zadanie polegające na określeniu genotypu rodziców, gdy znamy genotypy potomstwa. Rozwiązanie opiera się na ciągu doświadczeń od siebie zależnych (wynik kolejnego zależy od wyniku poprzedniego), co w rezultacie doprowadza do łańcucha Markowa.

Studium przypadku – związek genetyki z prawdopodobieństwem

Na podstawie: Żak M., Zapisane w genach, czyli o zastosowaniu matematyki w genetyce (prezentacja).

Informacje wstępne

Informację genetyczną przenoszą geny. Gdy zna się genotyp rodziców, można przewidzieć genotyp dzieci. Geny przekazywane są losowo, zatem z prawdopodobieństwem 0,5.



Rys. 6. Przekazywanie genów

Każdy z genotypów można więc otrzymać, zgodnie z regułą mnożenia, z prawdopodobieństwem p = 0,50,5 = 0,25.

Problem

Czy brązowoocy rodzice mogą mieć niebieskookie dziecko?

Załóżmy, że niebieskie oczy mają osoby o genotypie NN, a brązowe – osoby o genotypie NB albo BB.

Oboje rodzice mają genotyp NB.

	N	B
N	NN	NB
B	NB	BB

Prawdopodobieństwo = 25%

	N	B
B	NB	BB
B	NB	BB

Prawdopodobieństwo = 0

Prace badawcze

Aby skłonić uczniów ze starszych klas szkoły ponadpodstawowej do pogłębienia tematyki związanej z wykorzystaniem matematyki w biologii, warto podsunąć im ciekawe tematy prac badawczych. Na przykład zagadnienia dotyczące modelowania układu odpornościowego człowieka czy modelowania łańcuchów pokarmowych w ekosystemach.

Wiele młodych ludzi interesuje się obecnie teorią gier. Można więc przygotować dla uczniów problemy związane z odpowiedzią na pytanie, kiedy rywalizującym ze sobą osobnikom bardziej opłaca się stosować strategię walki, kiedy uniku i od czego to zależy. Aby znaleźć rozwiązanie, będą musieli odwołać się do teorii gier (strategie ewolucyjne stabilne).

Dla przyszłych lekarzy interesujące może okazać się podanie przykładów praktycznego wykorzystania prawa Hardy'ego-Weinberga (jest to prawo określające stosunki pomiędzy frekwencją alleli a częstością genotypów w populacji oraz warunki, w jakich stosunki te będą zachowane) czy rozważenie matematycznych modeli rozprzestrzeniania się i występowania chorób zakaźnych (np. jako studium przypadku).

Rozumowanie dedukcyjne

Budując modele matematyczne sytuacji biologicznych, uczniowie będą posługiwali się głównie myśleniem dedukcyjnym. Myślenie dedukcyjne to sposób wnioskowania, który pozwala na wyprowadzenie jednych twierdzeń z innych już prawdziwych lub z przyjętych aksjomatów. Wnioskowanie dedukcyjne na ogół nie prowadzi do odkrywania nowych twierdzeń, ale dobrze utrwala i rozszerza poznane treści.

Matematyka jest alfabetem, za pomocą którego Bóg opisywał Wszechświat

Samopodobieństwo

Nauczyciela matematyki interesuje głównie praktyczna strona zastosowania jego przedmiotu w biologii. To, co przyrodnicy opisują językiem naturalnym, matematyk chce usystematyzować, ubrać w definicje i twierdzenia. Język sformalizowany pozwala bowiem na używanie do budowy i weryfikowania hipotez dobrze określonych procedur. Łatwiej jest dowieść prawdziwości hipotezy lub ją obalić, gdy zostanie opisana w konkretny sposób. Rzeczowa prezentacja danych skłania do głębszych refleksji i wniosków, które można następnie sprawdzić doświadczalnie.

Układy biologiczne charakteryzują się dużym stopniem złożoności. Aby je opisać, należy uwzględnić tak wiele warunków, że w większości wypadków narzędzia matematyczne okazują się zbyt ubogie, by je wykorzystać. I odwrotnie – użycie konkretnej metody matematycznej z reguły oznacza przypisanie opisywanemu układowi dodatkowych cech, których biolog nie zakładał.

Przykładem może być dynamika procesów ekologicznych, którym matematyka przypisuje różnego rodzaju stabilności. Tworzenie bardziej skomplikowanych modeli możliwe jest dzięki symulacjom komputerowym opartym na założeniach matematycznych.

To właśnie symulacjom komputerowym zawdzięczamy powstanie fraktali – obiektów, które od kilkunastu lat robią furorę w różnych dziedzinach wiedzy. Geometrycznie fraktal można zinterpretować jako figurę samopodobną, czyli taką, której części są podobne do całości. Fraktale są dla uczniów ciekawymi obiektami, gdyż zaburzają ich pojęcie wymiaru.

Dla figur samopodobnych określa się wielkość zwaną wymiarem samopodobieństwa, będącą uogólnieniem klasycznej definicji wymiaru. I co ciekawe – wymiar samopodobieństwa nie musi wyrażać się liczbą naturalną!

Przykład

Przykład[14]

Wiadomo, że stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.
Na przykład figura płaska A (wymiaru 2) podobna do figury B w skali 3 ma pole dziewięć razy większe od figury B.

$9 = 3^2$ lub $2 = \log_3 9$

W przestrzeni stosunek objętości brył jest równy sześcianowi skali podobieństwa.
Na przykład bryła A (wymiaru 3) podobna do bryły B w skali 2 ma osiem razy większą objętość od bryły B.

$8 = 2^3$ lub $3 = \log_2 8$

Gdy analizuje się przykład, można zauważyć, że wymiar samopodobieństwa figury daje się określić jako logarytm o podstawie równej skali podobieństwa i liczbie logarytmowej wskazującej, ile razy większa od figury wyjściowej (lub jaką częścią figury wyjściowej) jest figura podobna do niej w tej skali.

Fraktale

Dla fraktala jego wymiar Hausdorffa jest większy niż wymiar topologiczny. Dla przykładu wymiar fraktalny płuc szacuje się na ok. 2,97, a powierzchni mózgu na ok. 2,79.
Rozmawiając z uczniami o samopodobieństwie (na przykład przy okazji wprowadzania pojęcia logarytmu), można poprosić ich o podanie przykładów fraktali. Na pewno większość z nich odpowie, że znane im to zbiór Cantora czy trójkąt Sierpińskiego (uczniowie spotykają się z tymi obiektami, zdobywając pierwsze szlify w programowaniu, gdyż mają one prostą definicję rekurencyjną).
Ciekawe będzie odwołanie się do przykładów przyrodniczych i pokazanie liścia paproci lub kalafiora.

Strukturę fraktali trudno jest opisać za pomocą geometrii euklidesowej ze względu na ich „poszarpany" wygląd. Nazwa „fraktal" pochodzi od łacińskiego frangere – łamać.

Dla wielu uczniów dużym zaskoczeniem jest to, że istnieją figury o ułamkowych wymiarach. Poznanie takich obiektów znacznie poszerza ich horyzonty myślowe, rozwija wyobraźnię przestrzenną, kieruje myślenie matematyczne na nowe obszary.

Przykłady obiektów i zjawisk biologicznych, które można opisać za pomocą fraktali, to:

- sekwencje kodu w DNA
- struktury drzewiaste w organizmach żywych – płuca, naczynia krwionośne, neurony;
- system korzeniowy roślin;
- korona drzew
- trajektorie ruchu zwierząt.

Wymiar fraktalny jest stosowany do badania wielu elementów biologicznych, np. złożoności komórkowej organizmów, może też stać się narzędziem informującym choćby o tym, w jakich warunkach rosło drzewo.

Fraktale świetnie da się wykorzystać w pracach projektowych, wykonywanych na przykład metodą WebQuest.

Podsumowanie

Związek matematyki z różnymi dziedzinami biologii ma charakter integracji wiedzy. Korzyści z tego czerpie zarówno biologia, jak i matematyka. Ćwiczenia matematyczno-biologiczne pozwalają na rzeczywiste zastosowanie teoretycznych rozważań. Bardzo istotne są więc w szkole rozmowy matematyków z biologami i wspólne ustalanie wprowadzanych treści. Sensowne korelowanie zagadnień (w przeciwieństwie do powielania lub konfliktu interpretacji) pozwoli na rozwijanie u uczących się pasji matematyczno-przyrodniczych, zdolności planowania i umiejętności realizacji holistycznych prac projektowych.

Gdy wprowadza się na zajęciach matematyczne elementy biologii, trzeba pamiętać, aby przekazywane wiadomości były poprawne naukowo. Należy też mieć na uwadze, że na każdym etapie edukacyjnym język przekazywanych treści powinien być inny, podobnie jak zestaw wykorzystywanych środków dydaktycznych. Z tego względu zadań, ćwiczeń i problemów przedstawionych w niniejszej pracy nie można traktować jako narzuconych przykładów. Są to raczej wyznaczniki matematycznych i biologicznych trendów szkolnych.

Do zadań zgromadzonych w banku pomysłów proponujemy najczęściej tylko jedno–dwa polecenia, gdyż w zależności od poziomu edukacyjnego uczniów danej grupy nauczyciel sam może ustalić zakres kształtowanych umiejętności i ułożyć swoje polecenia.

Zgromadzone zadania można więc wykorzystać tak, by rozwijać zarówno myślenie matematyczne praktyczne, obrazowe, jak i hipotetyczno-dedukcyjne. Te trzy poziomy myślenia są ze sobą nierozerwalnie połączone. Kolejne rozwiązywane problemy wzajemnie się przenikają, co prowadzi uczącego z jednego poziomu do następnego. Interioryzacja czynności konkretnych pozwala na przejście do czynności wyobrażeniowych, a te umożliwiają osiągnięcie pożądanego poziomu abstrakcji.

Bank pomysłów

Zadania arytmetyczne

Zadanie 1 – zaokrąglenia

Najmniejszym koniem świata jest konik miniaturowy żyjący w USA. Jest on 3,3 razy niższy od kangura czarnego, który osiąga 180 cm wzrostu. Oblicz, ile centymetrów wzrostu ma konik miniaturowy. Wynik zaokrąglij do jedności.

Zadanie 2 – ułamki dziesiętne

Włosy ludzkie rosną z prędkością około 0,03 mm dziennie. Oblicz, jakie długie miałabyś/miałbyś włosy, gdybyś je zapuszczała/zapuszczał od ukończenia pierwszego roku życia.

Zadanie 3 – procenty

Czarne koty kojarzone są z czarami, dlatego jeszcze sto lat temu zwierzęta te stanowiły tylko 2% liczby wszystkich kotów w Polsce. Dziś czarne koty to $\frac{2}{5}$ wszystkich polskich kotów. Jakim ułamkiem wszystkich kotów były czarne koty sto lat temu? Jakim procentem wszystkich kotów obecnie są czarne koty?

Zadanie 4 – procenty

Tabela przedstawia skład chemiczny organizmu człowieka.

Skład chemiczny organizmu człowieka	
Pierwiastek	Ilość w %
Tlen	65
Węgiel	18
Wodór	10
Azot	3
Mikroelementy	4

a) Wykonaj procentowy diagram kołowy składu chemicznego organizmu człowieka, korzystając z podanych danych.
b) Oblicz masę węgla zawartego w twoim ciele.

Zadanie 5 – potęgi

Średnica ludzkiego włosa jest równa ok. $1,5 \cdot 10^{-4}$ m. Średnica nici pajęczej wynosi ok. 0,03 mm.

a) Ile milimetrów ma średnica włosa ludzkiego?
b) Jaką grubość miałby włos ludzki powiększony milion razy?
c) Co jest grubsze – nić pajęcza czy włos ludzki? Ile razy?

Wyrażenia algebraiczne, równania

Zadanie 1 – równanie

Bobry i rysie to zwierzęta chronione w Polsce. Cztery rysie ważą tyle, co trzy bobry. Pięć bobrów jest o 80 kg cięższych od czterech rysi. Ile waży ryś?

Zadanie 2 – nierówność

Dwa barany się spotkały
I tak z sobą rozmawiały:
– Jestem od ciebie dwa razy cięższy –
powiedział baran pierwszy.
– Gdy naraz na wadze staniemy,
to więcej niż 120 kilogramów ważyć będziemy –
drugi na to odpowie,
drapiąc się po głowie.
Oblicz, miłośniku wierszy,
ile ważył baran pierwszy?

Zadanie 3 – wyrażenia algebraiczne

Możesz zmniejszyć ilość odpadów wytwarzanych w twoim gospodarstwie domowym, gdy będziesz kupować produkty bez opakowań. Jeśli w ciągu tygodnia kupisz o dwa produkty w opakowaniach mniej i zastąpisz je produktami bez opakowań, to zależność między liczbą y zaoszczędzonych w ten sposób opakowań a liczbą x tygodni opisze wzór:

A. $y = 2x$
B. $y = x - 2$
C. $y = 2x - 2$
D. $y = x + 2$

Zadanie 4 – wyrażenia algebraiczne

Borys waży 49,5 kg, a jego współczynnik masy ciała WMC jest równy 22. Oblicz wzrost Borysa. Wykorzystaj podany wzór.

WMC = (masa ciała w kg) : (wzrost w m)^2

Funkcje

Zadanie 1 – sporządzanie wykresu funkcji

W tabelce zapisane są niektóre dane na temat zalecanej długości snu (na podst. Wikipedia: sen).

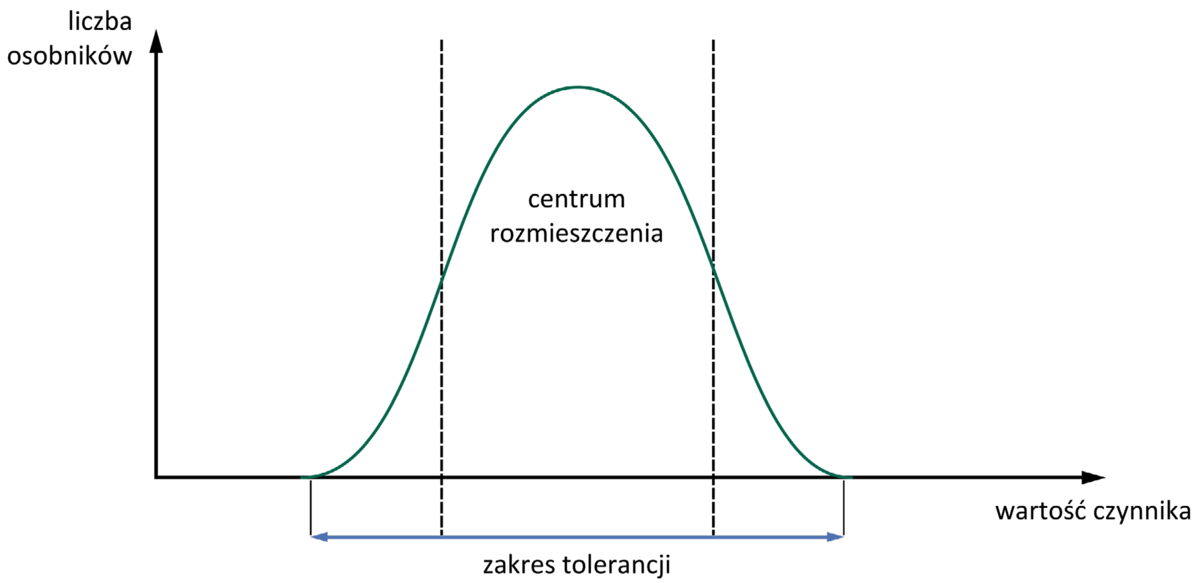
Rekomendowana długość snu

	Wiek	Zalecana liczba godzin snu na dobę
noworodek	0–3 miesiące	15
niemowlę	4–11 miesięcy	13
małe dziecko	1–2 lata	12
przedszkolak	3–5 lat	11
dziecko w wieku szkolnym	6–13 lat	10
nastolatek	14–17 lat	9
młody dorosły	18–25 lat	8
dorosły	26–64 lata	8
osoba starsza	powyżej 64 roku życia	7

a) Sporządź wykres zależności między wiekiem człowieka a zalecaną dla niego liczbą godzin snu.
b) Ile godzin dziennie powinien spać uczeń w twoim wieku?
c) W jakim wieku człowiek powinien spać najdłużej?
d) Ile godzin w tygodniu powinien przesypiać człowiek w wieku 20 lat?

Zadanie 2 – interpretowanie wykresu funkcji

Rysunek przedstawia krzywą tolerancji ekologicznej.

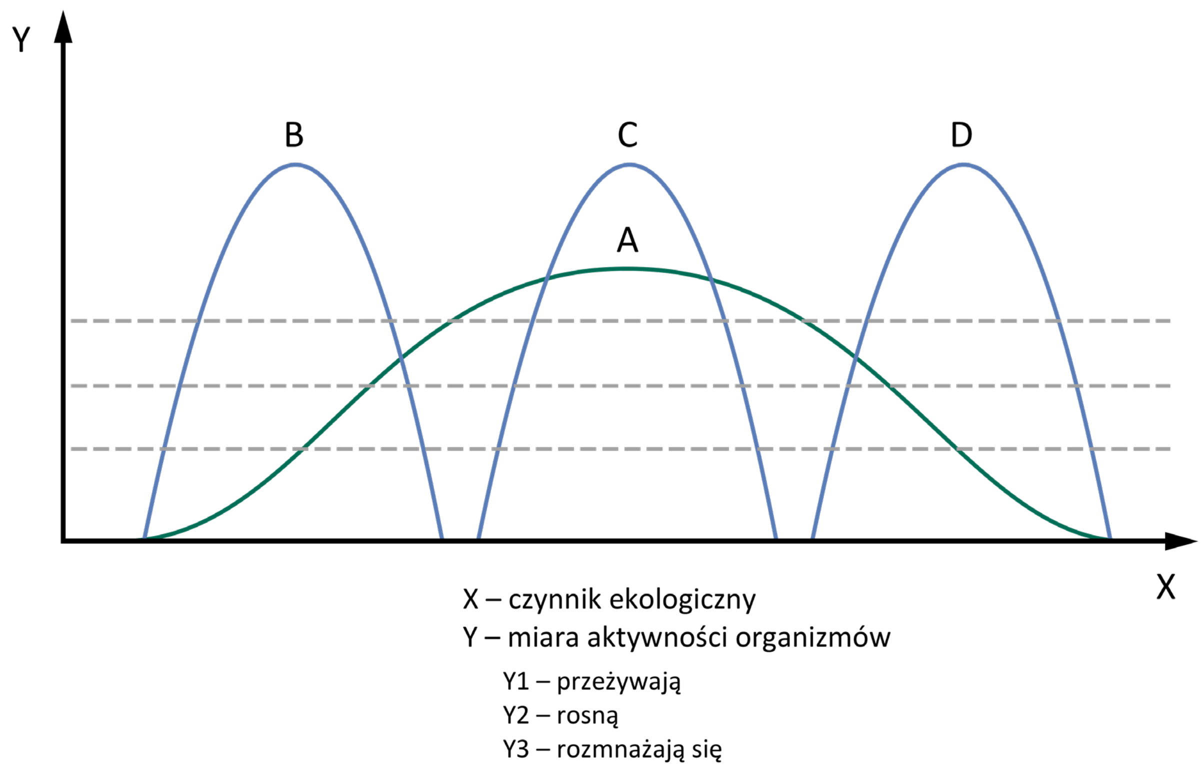


Rys. 9. Krzywa tolerancji ekologicznej

Zaznacz na wykresie: optimum, minimum i maksimum wartości działającego czynnika.

Zadanie 3 – odczytywanie danych z wykresu

Rysunek przedstawia wykres ilustrujący różny rozwój organizmów w zależności od natężenia czynnika środowiska.



Rys. 10. Rozwój organizmów w zależności od czynników środowiska

a) Uzupełnij zdanie, wpisując w miejsce kropek odpowiednio A, B lub C (skorzystaj z rysunku).

Z punktu widzenia szerokości zakresu tolerancji ekologicznej wyróżnia się oligostenobionty (...), polistenobionty (…), eurybionty (…), mezostenobionty (…).

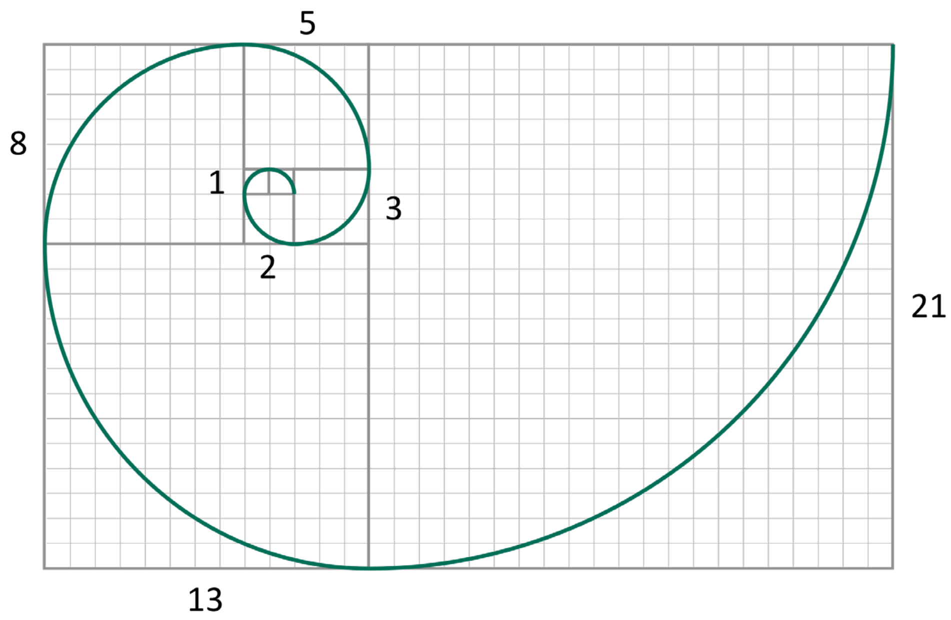
b) Uzupełnij zdanie, wpisując w miejsce kropek jeden z wyrazów zapisanych w nawiasie.

Zakres tolerancji jest określony przez dwie wartości skrajne: dolny punkt krytyczny, czyli… (maksimum, minimum), oraz górny punkt krytyczny, czyli…(maksimum, minimum).

Ciągi

Zadanie 1 – ciąg Fibonacciego

Na rysunku przedstawiona jest spirala konstruowana na bazie kolejnych kwadratów.



Rys. 12. Spirala ilustrująca ciąg Fibonacciego

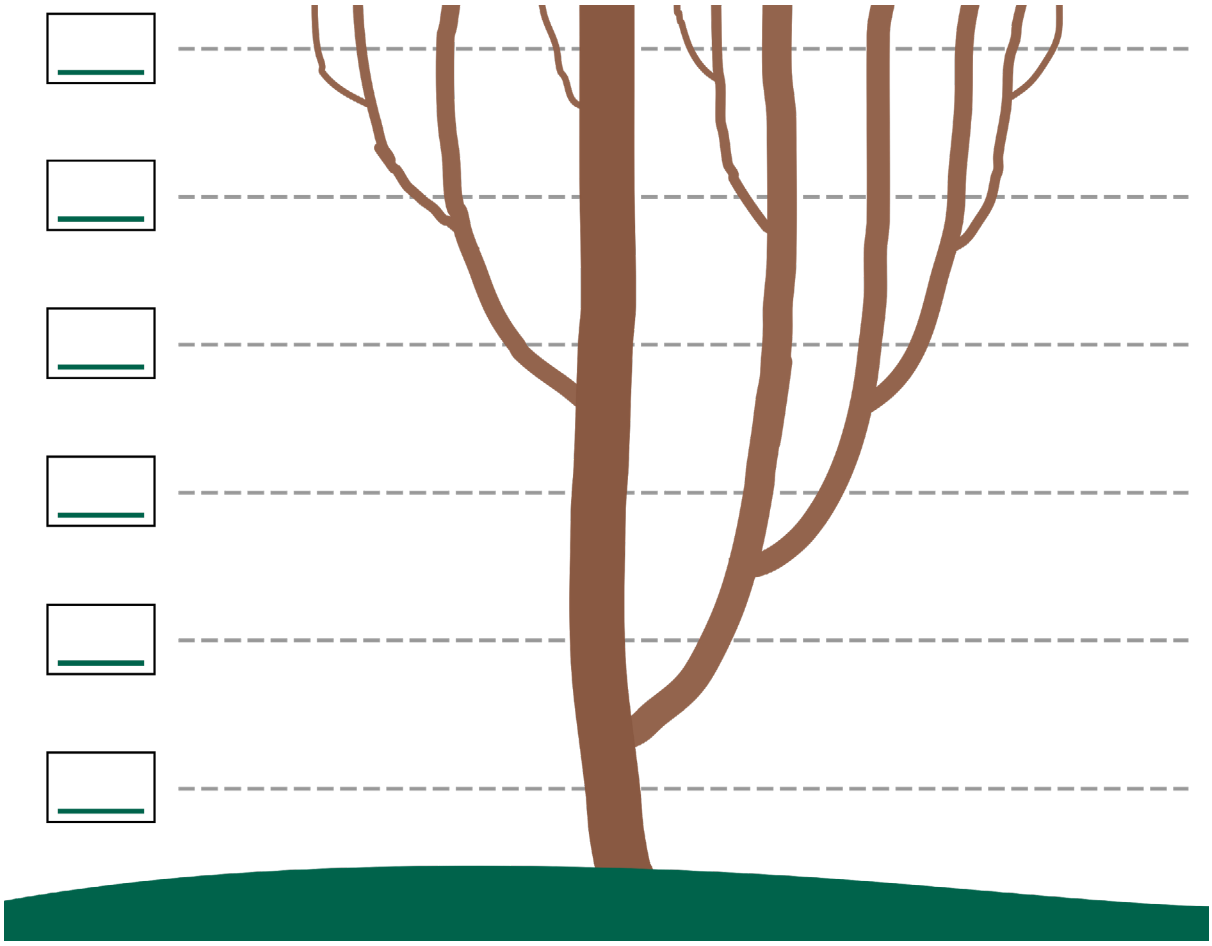
Wypisz w kolejności niemalejącej liczby określające długości boków kwadratów przedstawionych na rysunku.

Jaką długość będzie miał bok kolejnego kwadratu?

Co zauważasz?

Zadanie 2 – ciąg Fibonacciego

Rysunek przedstawia, w jaki sposób przyrastają w kolejnych latach pędy w roślinie jednostajnie przyrastającej.



Rys. 13. Przyrastanie pędów w roślinie jednostajnie przyrastającej

W kratki wpisz liczby określające, ile jest pędów rośliny w kolejnych latach.

Co zauważasz?

Geometria płaska

Zadanie 1 – pole koła

Zapach kwitnącej dzikiej róży nos ludzki potrafi wyczuć nawet z odległości 40 m. Wyobraź sobie, że stoisz pośrodku okrągłego placu o polu powierzchni 4800 m^2, obsadzonego dookoła kwitnącymi dzikimi różami. Jak myślisz – czy masz szansę poczuć zapach tych kwiatów?

Zadanie 2 – symetria

Która z figur na ilustracjach ma środek symetrii?

Która jest osiowosymetryczna?

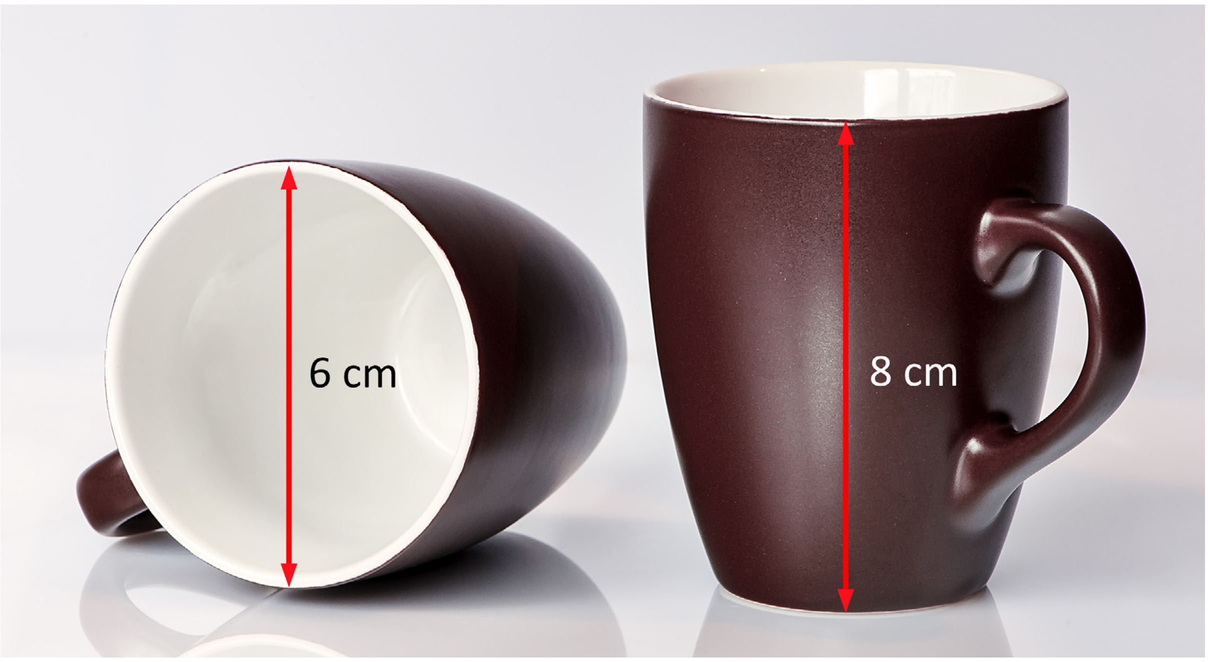
Stereometria

Zadanie 1 – objętość kuli

Największe na świecie gniazda budują bieliki amerykańskie. Jedna z takich par uwiła gniazdo w kształcie półkuli o średnicy aż 2 m. Oblicz objętość tego gniazda.

Zadanie 2 – objętość walca

Dzienne zapotrzebowanie fizjologiczne człowieka na wodę wynosi 2,26 dm^3. Jeżeli przyjmiemy, że woda dostarczana jest do naszego organizmu tylko w postaci soków, to ile kubków soku należałoby wypić, aby zaspokoić dzienne zapotrzebowanie organizmu na wodę?



Zadanie 3 – obwód kuli

Łączna długość naczyń krwionośnych człowieka wynosi około 96000 km. Jak myślisz – gdyby sporządzić sznur tej długości, to czy można by nim opasać kulę ziemską? Jeśli tak, to ile razy?

Odczytywanie i interpretowanie danych

Zadanie 1 – odczytywanie danych z tabeli

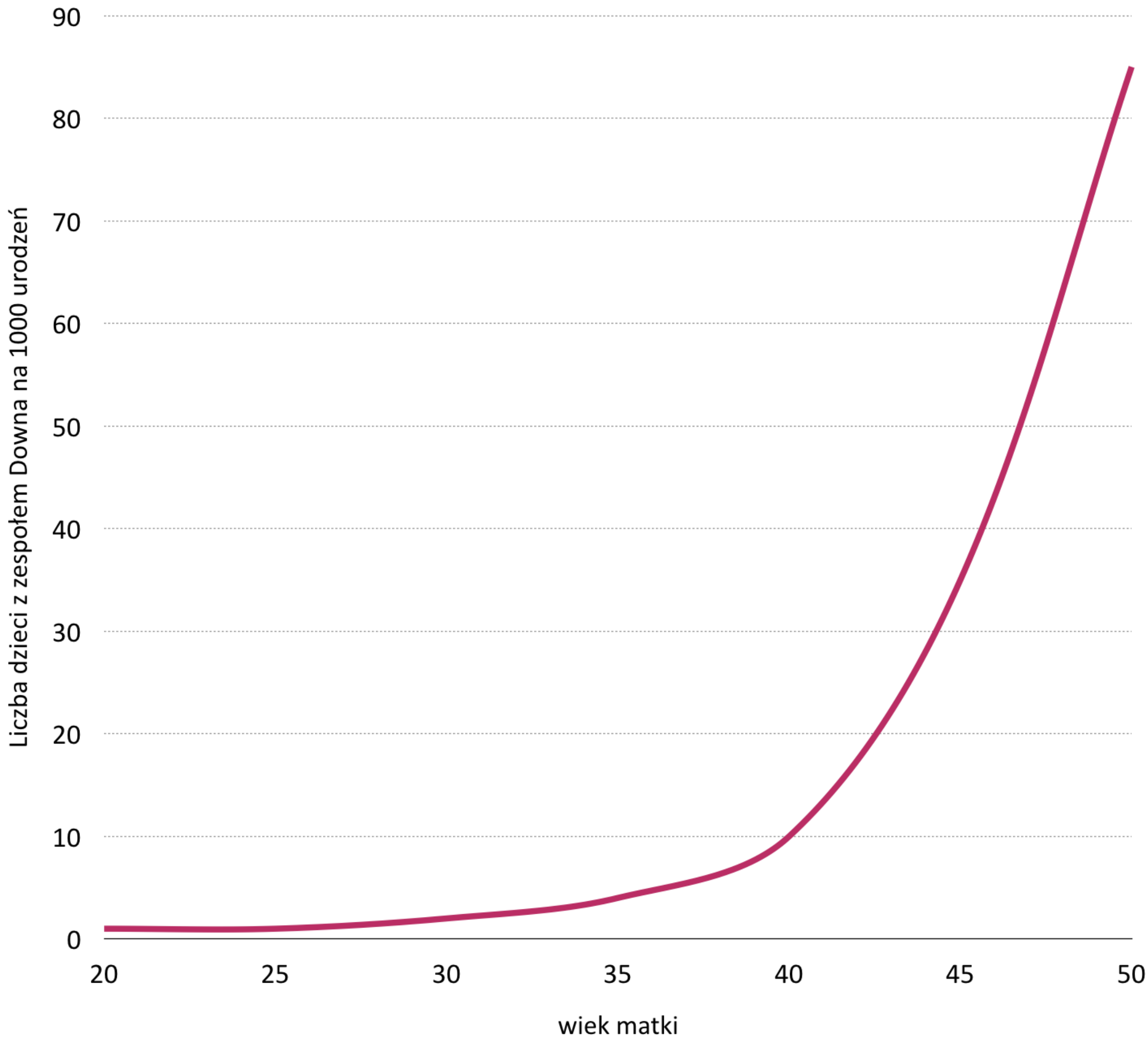
Tabela przedstawia procentową zawartość objętościową tlenu, dwutlenku węgla i azotu w powietrzu wdychanym i wydychanym.

Powietrze	Tlen	Dwutlenek węgla	Azot
wdychane	21	0,03	78
wydychane	16	5	78

a) Człowiek wdycha za każdym razem około pół litra powietrza. Ile tlenu wdycha? Ile azotu?
b) Jaką część objętości wdychanego tlenu zużywa organizm człowieka?
c) Jak myślisz – dlaczego uzasadnione jest stosowanie zabiegu sztucznego oddychania, mimo że osobie reanimowanej wprowadza się do płuc powietrze wydychane?

Zadanie 2 – odczytywanie danych z wykresu

Wykres przedstawia zależność między wiekiem matek a liczbą dzieci urodzonych z zespołem Downa.



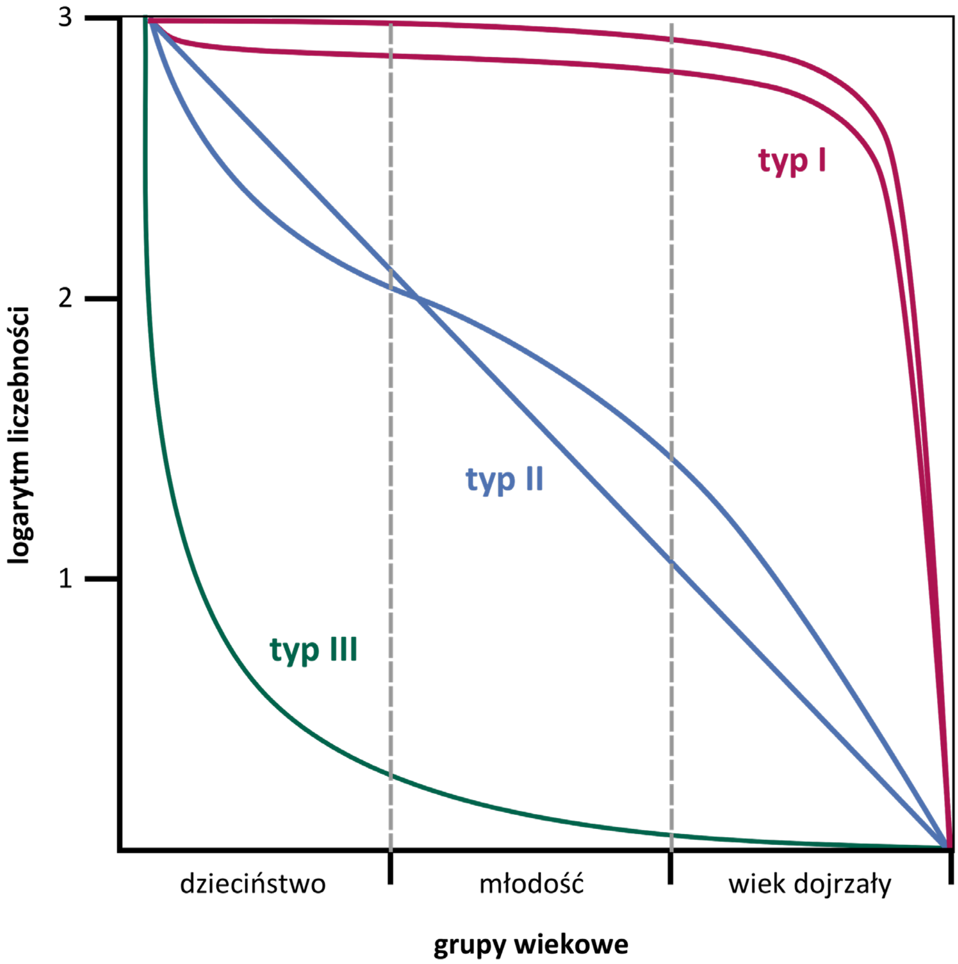
Rys. 14. Związek między wiekiem matki a występowaniem Zespołu Downa u nowonarodzonego dziecka (na podst. Wikipedia: Zespół Downa).

Na podstawie wykresu określ, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Prawdopodobieństwo wystąpienia zespołu Downa u dziecka wzrasta wraz z wiekiem matki.		
Prawdopodobieństwo wystąpienia zespołu Downa u dzieci matek mających 30 lat jest mniejsze niż u dzieci matek mających 20 lat.		

Zadanie 3 – interpretowanie danych z wykresu

Wykres przedstawia trzy typy krzywych przeżywania.



Rys. 15. Wskaźniki przeżywalności (na podst. Wikipedia: krzywa przeżywalności).

Dopasuj opis do typu, którego wykres zaznaczony jest na rysunku. Uzupełnij tabelkę.

Opis	Numer typu
Ten typ opisuje najmniejszą przeżywalność osobników najmłodszych (np. grzyby, ikra ryb gwarantująca przetrwanie gatunku dzięki liczebności potomstwa).	
Typ wyróżnia się dużą przeżywalnością osobników młodych i jej spadkiem u osobników starszych (np. duże ssaki troszczące się o potomstwo).	
Ten typ charakteryzuje się takim samym prawdopodobieństwem przeżywalności u osobników młodych i starszych (np. pewne gatunki ptaków).	

Zadanie 4 – odczytywanie i interpretowanie danych

W tabeli przedstawiono zależność między grupą krwi człowieka a możliwościami jej dawania/ pobierania.

	Może dać krew ludziom z grupą	Może być biorcą krwi od ludzi z grupą
0	0, A, B, AB	0
A	A, AB	0, A
B	B, AB	0, B
AB	AB	0, A, B, AB

Uzupełnij zdania.

a) Uniwersalni dawcy mają grupę krwi…
b) Osoba z grupą krwi A może być biorcą krwi od ludzi z grupy…

Bibliografia

Foryś U., (2016), *Matematyka w biologii*, Warszawa: WNT.

Foryś U., (2011), *Modelowanie matematyczne w biologii i medycynie*, Warszawa: Uniwersytet Warszawski.

Mason J., (2016), *Matematyczne myślenie*, Warszawa: WSIP.

Podstawa programowa kształcenia ogólnego. Szkoła podstawowa. Matematyka, [online, dostęp dn. 10.11.2017, pdf. 3,9 MB].

Podstawa programowa kształcenia ogólnego. Szkoła podstawowa. Biologia, [online, dostęp dn. 10.11.2017, pdf. 3,9 MB].

Siwek H., (2005), *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, Warszawa: WSIP.

Stewart I., Tall D., (2017), *Podstawy matematyki*, Warszawa: Prószyński i S-ka.

Wrzosek D., (2010), *Matematyka w biologii*, Warszawa: Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego.

Żak M., (2011), *Zapisane w genach, czyli o zastosowaniu matematyki w genetyce*, Warszawa: Uniwersytet Warszawski.

Spis ilustracji

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Ośrodek Rozwoju Edukacji

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny