Utilizando gráficas y tablas para comparar distintos procesos de elección

Alberto Arnal-Bailera
Universidad de Zaragoza

RESUMEN: *Analizamos un problema aparentemente sencillo: un grupo de vecinos deciden entre una de tres opciones posibles para pintar la escalera. Se propone un proceso en el que introduce dos preguntas para efectuar la decisión. Realizamos un análisis matemático de la equidad de este proceso y las diferencias con el proceso de una sola pregunta.*
PALABRAS CLAVE: *Toma de decisiones, matemáticas electorales, representaciones gráficas.*

Using graphics and tables to compare different processes of choice

ABSTRACT : *We analyze a seemingly simple problem: the process for a group of neighbors for deciding between one of three options to paint the stairs. However, the president of the community proposes a process that introduces two questions rather than one to make the decision. We perform a mathematical analysis of the equity of this process and the differences with one question process.*
KEYWORDS: *decision making, electoral mathematics, graphic representations.*

INTRODUCCIÓN

Se admite comunmente que la educación matemática tiene tres finalidades principales: Formativa (contribuyendo al desarrollo de capacidades generales y de razonamiento lógico de los estudiantes), funcional (por ejemplo contribuyendo a responder a situaciones de la vida diaria como consumidor o futuro elector) e instrumental (contribuyendo al desarrollo y a la formalización de las ciencias experimentales, tecnológicas y sociales).

La Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón, por la que se prueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria, resume la persecución de estas finalidades en la intención de desarrollar la competencia matemática, esto es promover el uso la argumentación y el lenguaje preciso y riguroso propio de las matemáticas así como las herramientas propias de esta ciencia, como las representaciones gráficas, para resolver problemas cotidianos que tengan de que ver con su vida personal o social y también con otros ámbitos del conocimiento.

Entre los procesos de toma de decisión más estudiados están los referidos a procesos electorales (Álvarez y Alonso, 2010; Álvaro, 2001; Girón y Bernardo, 2007; Hernández, 2001). Apenas hemos encontrado sobre las distintas posibilidades que se plantean en elecciones directas entre varias opciones, a pesar de que también se presentan en el contexto electoral español en la elección de senadores. Fernández y Fernández (1999) analizan un texto histórico que describe un proceso de elección entre varios candidatos a un mismo puesto. La razón podría estar en la simplicidad con la que habitualmente se desarrolla un proceso de elección entre varias opciones. Por ejemplo en Suiza durante los últimos 170 años se han realizado numerosas consultas a la población sobre reformas de leyes y la disyuntiva que se plantea es "sí" o "no". Si la estructura de la consulta es una pregunta con varias respuestas, se puede actuar de varios modos, entre ellos: la opción más votada es la elegida (elección de senadores en España, listas abiertas…) o bien asignar un determinado valor a la opción preferida y valores inferiores a la segunda y sucesivas, al modo de los concursos televisivos de Eurovisión por ejemplo o el descrito en Fernández y Fernández (1999).

Nos ocupamos aquí del análisis comparativo de los procesos para tomar una decisión en una comunidad de vecinos en la que quieren pintar la escalera debiendo los vecinos elegir entre tres colores posibles. Hay dos propuestas sobre cómo desarrollar el proceso de toma de la decisión, una votación con tres opciones, eligiéndose la más votada, y una votación más compleja con dos preguntas, en la primera de las cuales se vota sí o no a un determinado color y en la segunda solo votan los que no querían el primero, eligiendo entre los otros dos. A primera vista ya vemos que la falta de simetría del proceso afectará de algún modo a su ecuanimidad. Propondremos distintas representaciones gráficas y tablas que contribuirán a poner de relieve las diferencias entre las dos propuestas y cómo en muchas ocasiones la decisión está muy influenciada por el propio proceso.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideramos un problema típico en una comunidad de vecinos: Hace ya varios años que se pintó la escalera por última vez y parece razonable volver a pintarla. Los colores entre los que tienen que elegir son el amarillo, el verde y el naranja. Se proponen dos procesos para tomar la decisión sobre el color:

- Primera: Un vecino propone que se hagan papeletas con tres opciones, pintar de amarillo, de verde y de naranja. Cada vecino marca qué color prefiere se meten en una caja y se cuentan las papeletas favorables a cada opción.
- Segunda: El presidente de la comunidad de propietarios alega que el naranja es muy distinto de los otros dos colores al ser un color cálido y los otros dos fríos. Por ello propone un proceso distinto mediante dos preguntas:

- 1ª pregunta: ¿Quiere Vd. que se pinte la escalera de naranja?
- 2ª Responda solo en caso de que haya respondido de modo negativo a la primera pregunta, ¿Prefiere que se pinte de amarillo o de verde?

Vamos ahora a realizar un análisis exhaustivo de las posibles distribuciones de las opiniones de los vecinos y cómo se traducen en una decisión u otra en función del proceso empleado.

Consideramos primero una pequeña comunidad de vecinos de 19 vecinos (caso discreto) y veremos después si las conclusiones extraídas son extrapolables cuando el proceso se planteara a un número grande de personas, para este caso trabajaremos con los porcentajes de vecinos (caso continuo).

UN NÚMERO PEQUEÑO DE VECINOS, EL CASO DISCRETO

En la comunidad de vecinos de nuestro ejemplo hay 19 vecinos. Nadie es indiferente y todo el mundo toma partido por una u otra opción. Estas distintas formas de pensamiento las podemos representar en una tabla de doble entrada (ver Tabla 1), poniendo en las columnas las distintas cantidades de vecinos que quieren pintar de verde, y en las filas las de los que quieren pintar de amarillo. El resto hasta 19 son los que quieren pintar de naranja. Así en la celda (i,j) podemos identificar el número de vecinos a favor de pintar de naranja cuando hay i vecinos a favor de pintar de verde y j a favor de pintar de amarillo.

Vamos a llamar distribución de votos a la terna formada por los votos recibidos por cada color, expresados estos en número o en porcentaje.

En la intersección de la columna 7 (vecinos favorables al verde) con la fila 5 (vecinos favorables al amarillo), hay un 8 que señala que el resto de los vecinos hasta 19 quieren pintar de naranja. Las celdas sombreadas en gris son distribuciones imposibles ya que sumarían más de los 19 votos totales.

Estas distintas distribuciones de las opiniones de los vecinos son previas al comienzo del proceso de decisión, pero no se van a interpretar de un mismo modo según sea el proceso de toma de decisiones (tabla 1).

Veamos ahora cómo queda la tabla anterior, en la que vamos a sustituir en cada celda el número de personas que quieren pintar de naranja por el resultado final de la decisión tomada por la comunidad según sea el proceso que se siga para la toma de decisiones.

Primer proceso de elección, elección simultánea entre las tres opciones:

En esta primera forma de elección, la propuesta por el vecino, gana la opción más votada, por ejemplo en la casilla donde confluyen la columna 3 y la fila 7 observamos un número 9 (ver Tabla 1) o una letra N (ver Tabla 2). Esto quiere decir que cuando hay 3 vecinos a favor de pintar de verde y 7 a favor de pintar de amarillo, quedan 9 a favor de pintar de naranja y esta es la decisión adoptada por la comunidad (tabla 2).

Tabla 1. Distribuciones de votos de los vecinos.

Vecinos favorables al color amarillo

19	0																			
18	1	0																		
17	2	1	0																	
16	3	2	1	0																
15	4	3	2	1	0															
14	5	4	3	2	1	0														
13	6	5	4	3	2	1	0													
12	7	6	5	4	3	2	1	0												
11	8	7	6	5	4	3	2	1	0											
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0										
9	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0									
8	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0								
7	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0							
6	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0						
5	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0					
4	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0				
3	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0			
2	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0		
1	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
0	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Vecinos favorables al color verde

Tabla 2. Color elegido según las distribuciones de votos. Primera forma de elección.

Vecinos favorables al color amarillo

19	A																			
18	A	A																		
17	A	A	A																	
16	A	A	A	A																
15	A	A	A	A	A															
14	A	A	A	A	A	A														
13	A	A	A	A	A	A	A													
12	A	A	A	A	A	A	A	A												
11	A	A	A	A	A	A	A	A	A											
10	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A										
9	N		A	A	A	A	A	A	A		V									
8	N	N	N		A	A	A	A		V	V	V								
7	N	N	N	N	N		A		V	V	V	V	V							
6	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V						
5	N	N	N	N	N	N	N		V	V	V	V	V	V	V					
4	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V				
3	N	N	N	N	N	N	N	N		V	V	V	V	V	V	V	V			
2	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V		
1	N	N	N	N	N	N	N	N	N		V	V	V	V	V	V	V	V	V	
0	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Vecinos favorables al color verde

Tabla 3. Color elegido según las distribuciones de votos. Segunda forma de elección.

Vecinos favorables al color amarillo

19	A																			
18	A	A																		
17	A	A	A																	
16	A	A	A	A																
15	A	A	A	A	A															
14	A	A	A	A	A	A														
13	A	A	A	A	A	A	A													
12	A	A	A	A	A	A	A	A												
11	A	A	A	A	A	A	A	A	A											
10	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A										
9	N	A	A	A	A	A	A	A	A		V									
8	N	N	A	A	A	A	A	A		V	V	V								
7	N	N	N	A	A	A	A		V	V	V	V	V							
6	N	N	N	N	A	A		V	V	V	V	V	V	V						
5	N	N	N	N	N		V	V	V	V	V	V	V	V	V					
4	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V				
3	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V			
2	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V		
1	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
0	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Vecinos favorables al color verde

En total hay 210 distribuciones posibles de los votos acerca de las tres opciones. En 9 de ellas que hay empate entre dos opciones (en blanco). Hay 67 distribuciones de los votos que hacen ganadora a cada una de las tres opciones.

Se observa la confirmación matemática de lo se intuía a partir de la pregunta, ninguna de las tres opciones recibe un trato diferente de las otras dos.

Segundo proceso de elección, doble pregunta.

En esta segunda forma de elección, la propuesta por el presidente, hay dos preguntas, por lo que hay que hacer un análisis un poco más pausado para ver cuál es la opción elegida en cada caso. Por ejemplo en la casilla donde confluyen la columna rotulada con un '3' y la fila rotulada con un '7' observamos un número 9 (ver Tabla 1) o una letra N (ver Tabla 2). Esto quiere decir que cuando hay 3 vecinos a favor de pintar de verde y 7 a favor de pintar de amarillo, quedan 9 a favor de pintar de naranja. Por tanto en la primera pregunta hay 9 vecinos a favor de pintar de naranja y 10 en contra, con lo que este color se desecha. En la segunda pregunta solo votan los contrarios al naranja, ganando los partidarios del color amarillo y esta es la decisión adoptada por la comunidad. Notar que el color de la pintura finalmente elegida es apoyada solo por 7 vecinos frente a 9 que apoyaban el naranja.

Cabe destacar que en casos como el anterior varía la decisión de la comunidad según cuál sea la forma de elección, hay 18 casos similares a este, en los que en ganaba la opción 'color naranja' en la primera forma de elección para pasar a ganar el amarillo o el verde en la segunda forma de elección. Estos casos están remarcados en las Tablas 1 y 2.

También ahora hay 210 distribuciones posibles de los votos acerca de las tres opciones, aunque ahora solo hay empate en 5 de ellas. La opción naranja solo gana cuando tiene 10 votos o más en la primera elección, lo que ocurre en 55 de las distribuciones.

Las opciones amarillo y verde tienen cada una 75 distribuciones favorables y presentan una simetría entre ambas. Cada uno de los dos conjuntos de 75 distribuciones se puede descomponer en dos subconjuntos, 55 de ellas corresponden a situaciones en las que la mayoría de los vecinos están a favor del color amarillo o verde respectivamente, como en el caso de la opción naranja. El resto de las distribuciones corresponden a situaciones en las que, sin tener mayoría absoluta ninguno de los colores, unidos los partidarios de amarillo y verde superan a los partidarios del naranja en la primera pregunta para luego decidir en la segunda pregunta solamente entre estas dos opciones.

Se observa la confirmación matemática de lo se intuía a partir de las dos preguntas, la opción naranja recibe un trato diferente de las otras dos, un trato mucho peor ya que solamente puede ganar en caso de obtener la mayoría absoluta de los votos en la primera pregunta.

Observamos (ver Tabla 4) como la primera forma de elección guarda una simetría perfecta entre las tres opciones a elegir, mientras que la segunda "quita" algunas distribuciones favorables a la opción naranja para aumentar las de verde y amarillo.

Tabla 4. Comparación entre las dos formas de elección-discreto

Formas de elección → ↓ Distribuciones	Primera	Segunda
Favorables a verde	67	75
Favorables a amarillo	67	75
Favorables a naranja	67	55
Empates	9	5
Totales	210	210

UN NÚMERO GRANDE DE VECINOS, EL CASO CONTINUO

¿Cómo quedaría este análisis si el número fuera mucho mayor? Consideraremos ahora como variables los porcentajes de votos para cada color.

Vamos a hacer representaciones gráficas en dos ejes cartesianos de la relación entre el porcentaje de población favorable a pintar de amarillo en el eje x y porcentaje de población favorable a pintar de verde en el eje y. Dado el supuesto de no abstención, el resto hasta el 100% de participación en el proceso estará a favor de pintar de naranja. Para simplificar la notación, llamamos V, A o N a las variables que representan el porcentaje de población favorable a pintar de verde, amarillo o naranja, respectivamente.

Notar que podemos utilizar un gráfico en dos dimensiones para representar lo que en realidad son tres variables ya que están unidas por la ecuación $V+A+N=100$, lo que hace

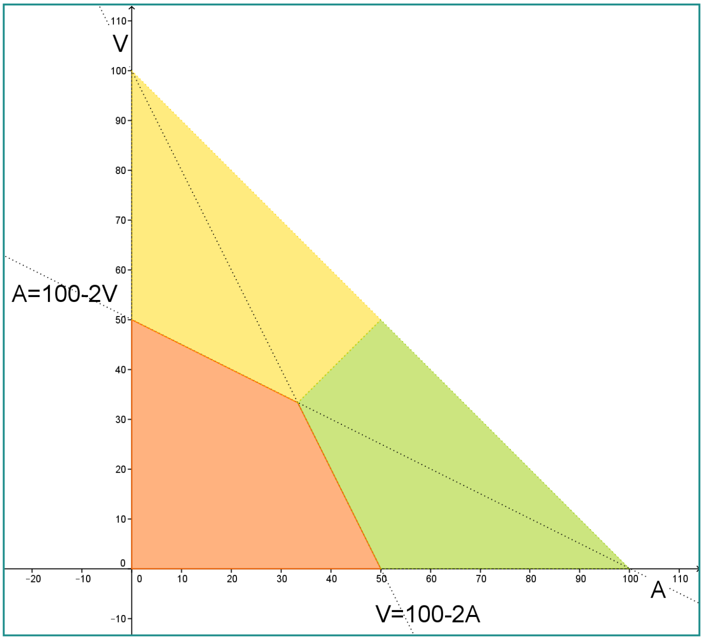

Figura 1. Opción elegida – primera forma de elección.

que si conocemos V y A podamos conocer N y por tanto saber cuál es el color elegido por la comunidad en cada sistema de elección.

La primera representación corresponde a la opción que proponía el vecino, en la que se elegía simultáneamente entre los tres colores. Marcamos con los tres colores las regiones donde gana cada opción. Vamos a representar estas regiones teniendo en cuenta primero que V≥0, A≥0 y que A+V≤100. Además:

- Para ganar la opción V, se tiene que cumplir que V>A y además que V>N. Como N=100-A-V, nos queda que V>100-A-V, simplificando: A>100-2V.
- Para ganar la opción A, se tiene que cumplir que A>V y además que A>N. Como N=100-A-V, nos queda que A>100-A-V, simplificando: V>100-2A.
- Para ganar la opción N, se tiene que cumplir N>A y N>V, aplicando que N=100-A-V, simplificando tenemos: A<100-2V y V<100-2A.

Así, podríamos dibujar un gráfico análogo a la Tabla 2 (figura 1).

Observamos, ver figura 1, que la simetría en la formulación de la pregunta, en la que las tres posibles respuestas tienen papeles simétricos, hace que las áreas de las tres regiones en que queda dividido el triángulo tengan la misma área (5000/3 u^2)

La segunda representación corresponde a la opción que proponía el presidente, en la que se respondía sucesivamente a dos preguntas. Marcamos con los tres colores las regiones donde gana cada opción:

- Para ganar la opción V, se tiene que cumplir que V>A y N<50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50<A+V.

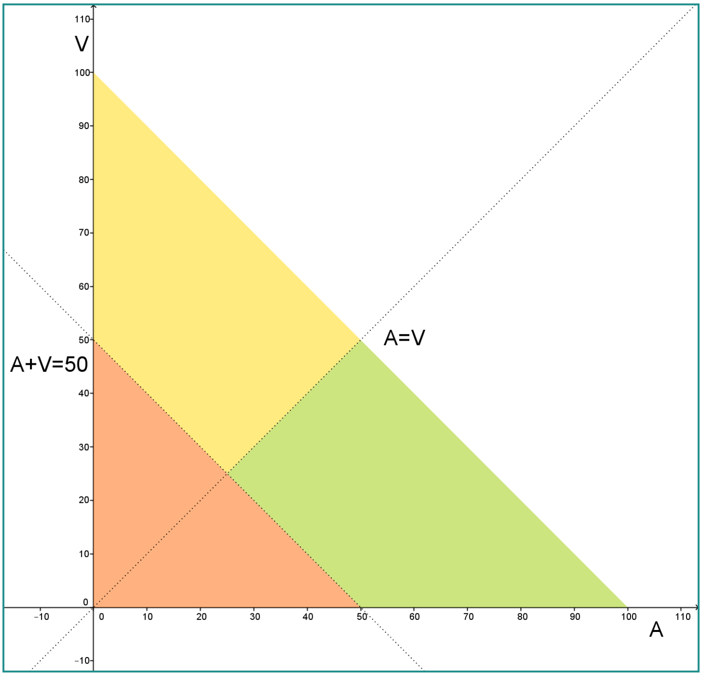

Figura 2. Opción elegida – segunda forma de elección.

- Para ganar la opción A, se tiene que cumplir que V<A y N<50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50<A+V.
- Para ganar la opción N, se tiene que cumplir N>50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50>A+V.

Así, podemos dibujar un gráfico análogo a la Tabla 3 en el que observamos, ver Figura 2, que el hecho de que para ganar la opción color naranja deba obtener mayoría en la primera pregunta se traduce gráficamente en que el área que representa su región asociada ha perdido área, quedando ahora en 1250 u^2. Las otras dos regiones tienen áreas iguales, 1875 u^2 cada una. Estas áreas han sido calculadas directamente por el programa de geometría dinámica GeoGebra.

Las zonas amarilla o verde (ver Figura 3) corresponden respectivamente a distribuciones de voto que con el primer proceso de elección daban como resultado pintar de naranja y con la segunda forma dan como resultado pintar de amarillo o verde:

Las diferencias entre un gráfico y otro permiten describir de modo cualitativo y cuantitativo las diferencias entre un tipo y otro de formas de elección de la pintura (ver Figura 3): por un lado es injusto que una de las opciones (color naranja) tenga que tener mayoría absoluta para poder ser elegida, por otro la diferencia de áreas entre las regiones verdes o amarillas de uno y otro gráfico (ver Tabla 5) darían una primera aproximación al tamaño de la injusticia de la segunda forma de elección y de la simetría de la primera. Aunque esta injusticia es mucho mayor si tenemos en cuenta que es previsible que las distintas distribuciones de % entre unas opciones y otras no sean uniformes y la mayor

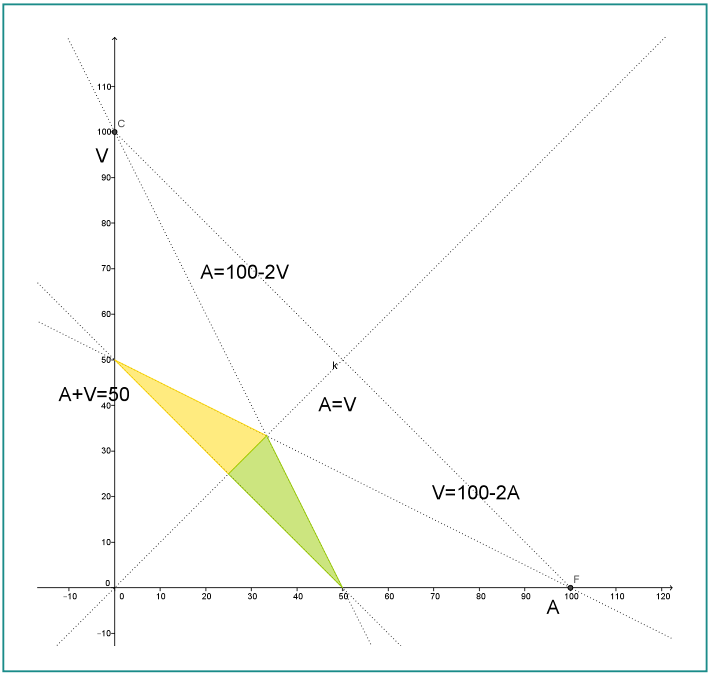

Figura 3. Diferencia entre la primera y segunda formas de elección.

parte de las ocasiones haya una cierta disputa entre unos colores y otros, lo que en términos de probabilidad se expresaría dando mayor probabilidad a la región que cambia de color que la que le correspondería exclusivamente en razón de su área.

Tabla 5. Comparación entre las dos formas de elección – continuo.

Formas de elección → ↓ Áreas	Primera	Segunda
Favorables a verde	$1666,\hat{6}$ u^2	1875 u^2
Favorables a amarillo	$1666,\hat{6}$ u^2	1875 u^2
Favorables a naranja	$1666,\hat{6}$ u^2	1250 u^2
Totales	5000 u^2	5000 u^2

Aunque resulta claro, hay que explicitar que el papel jugado por cada color podría ser intercambiado en la opción del presidente y perjudicar así las opciones de ganar de los partidarios del verde o del amarillo en lugar de las opciones de los partidarios del naranja, por ejemplo planteando:

- 1ª pregunta: ¿Quiere Vd. que se pinte la escalera de verde?
- 2ª en caso de que haya respondido de modo negativo a la primera pregunta, ¿Prefiere que se pinte de amarillo o de naranja?

CONCLUSIONES Y APLICACIÓN EN EL AULA

Hacemos notar en este artículo la posibilidad de complicar un proceso a priori sencillo y la necesidad en ese caso de hacer una reflexión pausada de los efectos matemáticos de esa complicación y cómo afecta a la oportunidad de ser elegida cada opción posible.

Aunque en general no podemos ordenar los procesos de elección entre varias opciones hasta el punto de llegar a decir si uno es mejor o peor que otro, en este caso sí resulta claro que la propuesta del Presidente de la Comunidad de vecinos es directamente injusta puesto que no es simétrica, dando mayor número de posibilidades de ganar a unos colores que a otros.

Hemos mostrado además, cómo esta falta de simetría afecta a la justicia del proceso también en el caso de un número elevado de electores, aprovechando así para mostrar un ejemplo de la relación entre un problema discreto y su equivalente continuo y las claras similitudes entre las representaciones gráficas y las tablas que aparecen en un caso y otro.

Las matemáticas, atendiendo a su finalidad funcional, deben apoyar el proceso de toma de decisiones de los futuros electores –tanto en sus elecciones políticas como en las de contextos más cotidianos como este–, dotándoles de herramientas matemáticas y capacidades argumentativas contribuyendo así a la formación de un espíritu crítico que les permita comprender situaciones en las que se plantean elecciones. Para ello, debemos mostrar a los alumnos situaciones de la vida cotidiana relacionadas con los procesos de elección, sean o no de tipo político, promoviendo un análisis matemático detallado de la justicia o injusticia de los mismos.

Nuestra propuesta didáctica en torno a las matemáticas electorales, a desarrollar en futuros artículos, incluiría:

1) Estudio de los efectos de la vigente Ley d´Hont sobre la diferente representación de los electores según si su opción es o no mayoritaria. Estudio de otras leyes de reparto de representantes y comparación entre ambas. Ambos estudios podrían contextualizarse fácilmente considerando las últimas elecciones del municipio del Centro que se trate.
2) Estudio de cómo otros procesos de elección más simples son también susceptibles de ser enfocados de diversos modos y que el utilizar uno u otro no es inocente en absoluto.

REFERENCIAS

Álvarez, M. y Alonso, J.M. (2010). Las elecciones generales de 2008 y el juego del parlamento. *Suma,* 63, 7-15.

Alvaro, M. (2001) Los sistemas de votación y su problemática. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 50, 293-300.

Confédération suisse. Initiatives populaires. Recuperado el 1 de agosto de 2014, de http://www.bk.admin.ch/themen/pore/vi/index.html?lang=fr

Hernández, E. (2001). Matemáticas y sistemas electorales. En Hernández, J. (coord.) *La enseñanza de las matemáticas a debate: referentes europeos* (pags. 69-85). Madrid: Subdirección General de Información y Publicaciones.

Fernández, E. y Fernández, F. (1999) La teoría de votación y la "memoria matemática sobre el cálculo de la opinión en las elecciones" del Dr. D. Joseph Isidoro Morales. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales",* 45, 295-310.

Girón, F. J. y Bernardo, J. M. (2007). Las matemáticas de los sistemas electorales. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 1, 21-34.