Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2015, Vol. 32(3), nº 91, 7-24*

Formas de razonamiento que emergen al resolver problemas de máximos y mínimos con un SGD

Aarón Reyes-Rodríguez
(Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México)

Verónica Vargas-Alejo, César Cristóbal-Escalante y Víctor Soberanis-Cruz
(Universidad de Quintana Roo, México)

Resumen. *En este artículo se caracterizan las formas de razonamiento que desarrollan estudiantes de primer semestre de una licenciatura en matemáticas al resolver problemas de máximos y mínimos. Los resultados indican que las funcionalidades dinámicas que ofrece GeoGebra propiciaron una ampliación en las formas de razonamiento en relación con el ambiente de lápiz y papel. Los cambios radican esencialmente en que la tecnología digital ofrece mayores recursos a los estudiantes para abordar los problemas, ya que no es necesario el uso explícito de un modelo algebraico para aproximar la solución.*
Palabras clave. *Razonamiento, tecnología, entendimiento, máximos y mínimos*

Ways of reasoning that emerge when students solve problems of maxima and minima with a DGS

Abstract: *In this paper we characterized the ways of reasoning showed by freshmen mathematics students when they solved maxima and minima problems. The results indicate that GeoGebra's dynamic features promoted an expansion in students' ways of reasoning in relation to a pencil and paper environment. Digital technology provide more resources to students to address problems since they did not require, in a first approach, the explicit use of an algebraic model.*
Keywords: *Reasoning, technology, understanding, maxima and minima*

INTRODUCCIÓN

El estudio de la variación y el cambio es un elemento importante en la formación matemática de los estudiantes de todos los niveles educativos, ya que estas ideas constituyen un eje que permite articular conceptos centrales de la disciplina, tales como función y derivada. Los fenómenos en los que está presente la variación y el cambio como el crecimiento de poblaciones, las fluctuaciones económicas, la propagación de enfermedades o las relaciones entre perímetro y área de figuras geométricas proporcionan contextos idóneos para que los estudiantes lleven a cabo procesos de modelización, así como la identificación de patrones, invariantes y estructuras. El análisis de estos fenómenos se puede abordar con distintos niveles de profundidad, incluso desde la educación básica, con la finalidad de que los estudiantes construyan los fundamentos que favorezcan la comprensión de conceptos clave del cálculo diferencial e integral, durante el bachillerato o la universidad (Camacho y Santos, 2004).

La toma de decisiones se encuentra ligada estrechamente con el análisis de la variación y el cambio, ya que constantemente tenemos que elegir entre lo “mejor” y lo “peor”. Muchos problemas de toma de decisiones se presentan de esta manera; por ejemplo, al determinar qué forma dar a una lancha para que ofrezca la menor resistencia en el agua; al establecer las medidas de un recipiente cilíndrico, elaborado con cierta cantidad de material, para que tenga un volumen máximo (Courant y Robbins, 2006); al seleccionar el mejor plan de telefonía celular, con base en el precio y los beneficios que ofrece (minutos y MB para navegar por internet) o la mejor administradora de fondos de pensión, con base en las tasas de rendimiento y los porcentajes de comisión.

Propuestas curriculares de carácter internacional como los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2000) y los *Common Core State Standards for Mathematics* (http://www.corestandards.org/) señalan la importancia de que los estudiantes adquieran habilidades para utilizar el lenguaje matemático en el diseño de herramientas conceptuales, reutilizables y modificables, que apoyen la construcción de un entendimiento profundo de la variación conjunta dos o más variables, y que sean capaces de interpretar esas relaciones entre cantidades en términos de un fenómeno de referencia, con la finalidad de tomar decisiones. Es decir, los estudiantes deben ser capaces de interpretar y representar matemáticamente afirmaciones tales como “la inflación está decreciendo”, “el desempleo se incrementó con respecto al mismo trimestre del año anterior” o “el área de un rectángulo de perímetro fijo aumenta a medida que el cociente de las longitudes de sus lados se acerca a uno”.

ANTECEDENTES

Los problemas de máximos y mínimos han sido el objeto de estudio de diversas investigaciones. En algunos casos se ha analizado el papel de las representaciones en la resolución de este tipo de problemas (Schoenfeld, 1985) o la relevancia de los métodos que no emplean cálculo diferencial (Niven, 1981; Birnbaum, 1982; Tomás-Blanquer, 2002). En otros casos, los problemas de máximos y mínimos han mostrado ser útiles para determinar si los estudiantes entienden conceptos como función (Lagrange y Artigue, 2009) o derivada (Kosić-Jeremić, 2012; Brijlall y Ndlovu, 2013).

Por otra parte, las estrategias utilizadas por los estudiantes para maximizar o minimizar alguna función, mediante tecnologías digitales tales como los Sistemas de Álgebra Computacional (CAS), se ha utilizado como indicador para determinar si el uso de estas herramientas puede incrementar la capacidad de los estudiantes para pensar matemáticamente (Han y Chang, 2007). También hay aportaciones que analizan las diferentes formas de solucionar problemas de máximos y mínimos en contextos geométricos (Andreescu, Mushkarov y Stoyanov, 2006) o la manera en que la construcción y análisis de diversas rutas de solución de estos problemas puede apoyar el aprendizaje de profesores o estudiantes (Leikin, 2010). Así mismo, existen investigaciones cuya finalidad es caracterizar los problemas sobre máximos y mínimos que aparecen en libros de texto (Gonzáles-Astudillo, 2004; González-Astudillo y Sierra-Vázquez, 2004).

Con base en la revisión de la literatura se identificó que existen pocos trabajos enfocados en analizar los procesos mentales, o formas de razonamiento, que llevan a cabo estudiantes o profesores al resolver problemas de máximos y mínimos (Brijlall y Ndlovu; 2013), o interesados en determinar la medida en qué las tecnologías digitales moldean las características de esos procesos. Considerar las formas de razonamiento que los estudiantes desarrollan al resolver problemas como objeto de investigación resulta relevante, ya que las matemáticas están integradas esencialmente por formas sistemáticas de razonamiento y argumentación (Kaput y Roschelle, 2013) que se emplean para analizar patrones, establecer relaciones entre conceptos mediante afirmaciones matemáticas; para determinar la certeza, generalidad y validez de esas afirmaciones, y como mecanismos que permiten el avance de la disciplina (D'Ambrosio, 2013).

La consideración de las herramientas digitales en el aprendizaje es importante porque las formas de razonamiento y argumentación cambian con el tiempo y son altamente sensitivas al tipo de medios y sistemas de representación que se utilizan durante el proceso de construcción del conocimiento. La introducción de las tecnologías digitales en el ámbito educativo está reconfigurando las formas de aprender matemáticas, al favorecer la construcción de relaciones o conexiones nuevas entre conceptos e ideas, lo cual constituye el medio para alcanzar mayores niveles de entendimiento (Hiebert, et al., 1997).

Específicamente, el uso de las tecnologías digitales puede favorecer que los estudiantes reflexionen sobre los conceptos matemáticos y comuniquen ideas mediante el uso e interacción de múltiples representaciones. Los *Sistemas de Geometría Dinámica* (SGD) proporcionan un dominio epistémico donde la visualización del movimiento y la variación pueden orientar y propiciar la identificación de propiedades, relaciones, invariantes y conexiones estructurales (Leung, Baccaglini-Frank y Mariotti, 2013). En un ambiente dinámico, los estudiantes pueden exhibir nuevas formas de expresividad, asociadas con la exploración de relaciones, mediante el apoyo de la herramienta, así como nuevas formas de entendimiento basadas en la capacidad de un sistema computacional para reaccionar a las acciones ejecutadas por el usuario y proporcionarle retroalimentación en tiempo real (Hegedus y Moreno-Armella, 2009).

Así, el objetivo de este artículo consiste en documentar y caracterizar las formas de razonamiento que desarrollan estudiantes de primer semestre de una licenciatura en matemáticas al resolver problemas donde se tiene que maximizar o minimizar el área o el perímetro de una familia de rectángulos que satisfacen ciertas condiciones, en un ambiente de lápiz y papel y al utilizar un SGD. Específicamente, interesa determinar si las funcionalidades dinámicas que ofrece GeoGebra puede propiciar una ampliación de los tipos y formas de razonamiento matemático que desarrollan los estudiantes, considerando el desarrollo o evolución del razonamiento y no sólo las características de éste.

Las preguntas que guiaron el desarrollo del trabajo son: ¿Cómo interpretan los estudiantes los datos de un problema y cuáles son las características del proceso de razonamiento empleado para obtener una solución? ¿Qué argumentos emplean los estudiantes para justificar resultados? ¿En qué medida el uso de GeoGebra modifica los procesos de razonamiento en relación con aquellos desarrollados en un ambiente de lápiz y papel?

MARCO CONCEPTUAL

Sostenemos que las matemáticas son el estudio culturalmente compartido de los patrones y los lenguajes, el cual constituye un medio a través del cual el ser humano trata de entender el mundo que le rodea. Además, consideramos que el avance del conocimiento matemático se lleva a cabo mediante el desarrollo de formas sistemáticas de razonamiento y argumentación (Kaput y Roschelle, 2013). El *principio de mediación instrumen*tal (Wertsch, 1993), el cual establece que toda actividad cognitiva está mediada por el uso de herramientas, es uno de los componentes principales del marco de investigación. Este principio implica que los *affordances* (Gibson, 1977) o cualidades de los artefactos utilizados durante el proceso de aprendizaje, favorecen formas particulares de interacción entre el estudiante y el conocimiento matemático, y por este hecho las restricciones y facilidades de los medios representacionales que proporciona cada herramienta juegan un papel crítico en la forma en que se construye y organiza el conocimiento, así como en las características de éste. En consecuencia, se espera que existan diferencias entre las formas de razonamiento que llevan a cabo los estudiantes al resolver problemas con el apoyo de un SGD, en relación con un medio estático como el de lápiz y papel.

Otro elemento del marco conceptual es la caracterización del *razonamiento* como la línea de pensamiento que se sigue para producir afirmaciones y obtener conclusiones al resolver un problema (Lithner, 2008). No es posible tener acceso directo a esos procesos de pensamiento, por tal razón se tomará como indicador de los mismos a las acciones que llevan a cabo los estudiantes y que se encuentran plasmadas en sus producciones escritas. Una herramienta útil para analizar una secuencia de razonamiento la constituyen las cuatro etapas por las que se transita al resolver un problema (Polya, 1945), ya que permiten segmentar el proceso de razonamiento, con la finalidad de facilitar el proceso de análisis de datos.

- *Etapa 1.* Entendimiento del problema. El resolutor se enfrenta a una situación para la que no conoce un camino o ruta que le permita obtener una respuesta de forma inmediata. Debe entonces identificar la información proporcionada en el enunciado del problema y determinar si ésta es suficiente, redundante o incompleta.
- *Etapa 2.* Concepción de un plan. Con base en sus conocimientos previos el resolutor lleva a cabo procesos mentales entre los que se encuentra el recordar, elegir, construir, descubrir, adivinar, entre otros, con la finalidad de determinar las herramientas y los posibles caminos que lo pueden ayudar a avanzar en el proceso de solución.

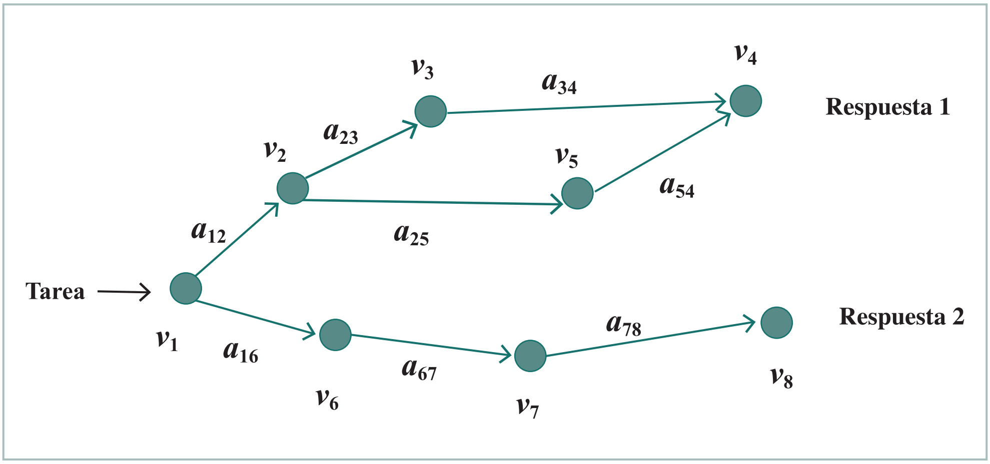


Figura 1. Rutas de solución de una tarea con dos respuestas (adaptado de Lithner, 2008).

- *Etapa 3.* Implementación del plan o estrategia de solución. El resolutor ejecuta la ruta planteada en la fase anterior, lo cual lo puede llevar a obtener una respuesta o a reconsiderar la ruta de solución.
- *Etapa 4.* Visión retrospectiva. Una vez obtenida la respuesta se analizan las razones para justificar por qué la respuesta es correcta y se pueden plantear extensiones o generalizaciones del problema.

Una secuencia de razonamiento se puede pensar como una gráfica dirigida (Figura 1) en la que un vértice representa tanto un estado momentáneo de conocimiento como una sub-tarea. Cada arco representa la implementación de una estrategia que implica el tránsito desde un estado de conocimiento a otro estado de conocimiento . Una razón es entonces la justificación que sustenta la transición entre dos vértices de la gráfica entre los cuales existe un arco (Lithner, 2008). Con la Figura 1 se ilustra la secuencia de razonamiento para una tarea que tiene dos respuestas (vértices 4 y 8), una de las cuales (la respuesta 1) se puede obtener por dos caminos diferentes.

METODOLOGÍA

Una tarea es una actividad cualquiera, mientras que un problema es una tarea para la cual no existe un procedimiento o algoritmo que permita obtener la solución de forma inmediata. Sin embargo, dadas las características de las tareas empleadas en este artículo, problemas que se pueden encontrar en libros de texto de cálculo diferencial (e.g. Philips, 1990), las palabras “tarea” y “problema” se utilizarán como sinónimos. Como parte del enunciado de cada problema se solicitó a los estudiantes argumentar por qué la respuesta es correcta, con la finalidad de que paulatinamente internalizaran el proceso de justificación y argumentación como un hábito de pensamiento (Cuoco, Goldenberg y Mark, 1996).

El uso de tareas provenientes de libros de texto para analizar el razonamiento desarrollado por los estudiantes, se justifica por el hecho de que la forma de enunciar o abordar las tareas en el salón de clase puede incrementar o disminuir la demanda cognitiva de estas (Stein y Smith, 1998). Resolver problemas con un SGD ofrece oportunidades a los estudiantes para desarrollar actividades centrales del pensamiento matemático entre las que se encuentran el explorar, identificar y expresar relaciones entre objetos matemáticos, en términos de aproximaciones visuales, numéricas, gráficas y algebraicas. Características propias de GeoGebra tales como los deslizadores, el arrastre, los lugares geométricos y los comandos de medida pueden favorecer la visualización y análisis del cambio. Así, los estudiantes tienen la oportunidad de desarrollar formas creativas de razonamiento al examinar patrones de variación que emergen como resultado de arrastrar objetos en una configuración dinámica (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013) y conceptualizar estructuras invariantes en los fenómenos de cambio, las cuales son actividades clave de construcción de un conocimiento estructurado (Leung, 2008).

Los problemas

En el primer problema se solicitó a los estudiantes encontrar el rectángulo de perímetro mínimo entre todos los rectángulos de área 12, en el resto de los problemas se pidió encontrar el rectángulo de área máxima entre: (2) todos los rectángulos inscritos en una circunferencia, (3) todos los rectángulos de perímetro 20, (4) todos los rectángulos inscritos en una semicircunferencia y (5) todos los rectángulos inscritos en un triángulo equilátero.

Población y muestra

En esta investigación participaron 19 estudiantes de primer semestre, inscritos en una Licenciatura en Matemáticas Aplicadas en una universidad pública de México. Las edades de los estudiantes oscilaban entre 17 y 19 años. Todos los estudiantes habían cursado la asignatura de cálculo diferencial durante el bachillerato y habían resuelto problemas de máximos y mínimos mediante procedimientos algorítmicos. La información se recolectó en el marco de un curso denominado “razonamiento matemático”, el cual tuvo una duración de 16 semanas, con una carga de cuatro horas a la semana, y cuya finalidad fue que los estudiantes adquirieran los fundamentos básicos para elaborar conjeturas y justificar resultados matemáticos. Además del curso de razonamiento matemático, los estudiantes cursaban las asignaturas de cálculo elemental y geometría analítica. En este artículo, utilizaremos la letra E seguida de un subíndice, por ejemplo E_{15}, para referirnos a cada uno de los estudiantes.

Proceso de implementación

La resolución de los problemas utilizando lápiz y papel se llevó a cabo durante la primera semana de clase, en una sesión de dos horas (*primera fase*). Se entregó a los estudiantes una hoja de trabajo con el enunciado de las tareas y se les indicó que podían trabajar individualmente o en parejas. Todos los estudiantes decidieron resolver los problemas de forma individual. A partir de la segunda semana de actividades y hasta la sexta semana (segunda fase), los estudiantes trabajaron con GeoGebra, centrando la atención en funcionalidades de la herramienta tales como el arrastre, el uso de deslizadores y lugares geométricos, con la finalidad de detectar invariantes en configuraciones dinámicas simples. Todas las actividades que se abordaron fueron de geometría, sin que se revisaran problemas de máximos y mínimos.

Algunas de las tareas que se abordaron en esta fase fueron: (1) conjeturar que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° al trazar un triángulo cualquiera y arrastrar sus vértices; (2) determinar cuántos triángulos diferentes se pueden construir dados los segmentos de longitudes 6, 8, 10 y 12 cm, con el objetivo de conjeturar la desigualdad del triángulo, (3) conjeturar el teorema del ángulo inscrito, (4) establecer una relación entre un cuadrilátero ABCD y el cuadrilátero HKLM formado por las intersecciones de las mediatrices de los lados del cuadrilátero ABCD (Olivero, 2006). Este trabajo previo a la tercera fase, tuvo la finalidad de que los estudiantes lograran cierto grado de apropiación de las características del DGS, ya que usar una herramienta para hacer matemáticas requiere una apropiación específica de ésta (Laborde, 2003).

En la séptima semana de clases (tercera fase) se pidió a los estudiantes que resolvieran los mismos problemas pero ahora utilizando GeoGebra, durante una sesión de dos horas. Es importante señalar que la mayoría de ellos no recordaban haber resuelto estos problemas en la primera semana del curso. Las actividades se llevaron a cabo en un laboratorio de cómputo, donde cada uno de los participantes contó con una computadora personal y tuvo la oportunidad de trabajar individualmente o en pareja. Antes de concluir la sesión de trabajo, los estudiantes elaboraron y entregaron un reporte escrito en el que explicaron el procedimiento utilizado para resolver el problema, justificando por qué las respuestas que obtuvieron son correctas.

Instrumentos de recolección de la información

La recolección de la información se llevó a cabo mediante producciones escritas elaboradas por los estudiantes, archivos electrónicos de GeoGebra, así como notas elaboradas por el investigador durante la tercera fase. Se llevó a cabo la digitalización de las producciones escritas y posteriormente se resumió la información en tablas basadas en las cuatro etapas por las que se transita al resolver un problema, con la finalidad de identificar la secuencia de razonamiento empleada para abordar cada problema y las características de mayor relevancia que emergieron en cada uno de los contextos (SGD y lápiz y papel). Finalmente, se llevó a cabo un contraste entre las formas de razonamiento para identificar una posible evolución o cambio en las formas de razonamiento, derivada de utilizar GeoGebra.

FORMAS DE RAZONAMIENTO QUE EMERGIERON EN UN AMBIENTE DE LÁPIZ Y PAPEL

La mayoría de los estudiantes no resolvieron completamente ningún problema. El estudiante E_{19} proporcionó la solución correcta a cuatro de los problemas, sin

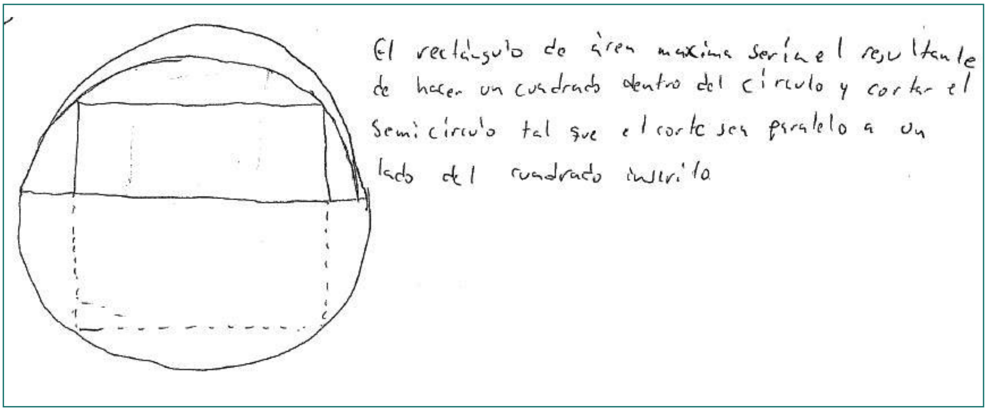


Figura 2. Solución de E19 al problema 4.

embargo, la forma de expresar las respuestas a los problemas 2 y 4 indica que solamente recordó soluciones previas. Este estudiante ya había aprobado un curso de cálculo diferencial en otra universidad, así que las formas de razonamiento que desarrolló al resolver los problemas no son representativas de los integrantes del grupo. La secuencia de razonamiento se caracterizó por la identificación de relaciones entre los problemas propuestos y otros resueltos previamente. El estudiante expresó que el rectángulo de área máxima es aquel que se "asemeja más" al cuadrado formado con las intersecciones de la circunferencia y dos diámetros perpendiculares de ésta. Este estudiante fue capaz de utilizar la solución del problema 2 para resolver el problema 4 (Figura 2) de encontrar el rectángulo de área máxima inscrito en una semicircunferencia, es decir, un aspecto relevante en el proceso de razonamiento radica en el uso de analogías y la identificación de relaciones entre problemas estructuralmente similares.

En términos generales la mayoría de los estudiantes trataron de dar sentido a los problemas elaborando una representación gráfica que capturara los elementos y relaciones esenciales especificadas en el enunciado. Todos los estudiantes realizaron representaciones adecuadas de los problemas que intentaron resolver. En lo que respecta al diseño de una estrategia de solución, se observaron diferentes formas de razonamiento. En algunos casos, junto con la representación gráfica, los estudiantes únicamente escribieron fórmulas o realizaron cálculos aritméticos, lo cual indica que no fueron capaces de determinar qué es lo que varía, o cómo varían los atributos de una familia de figuras geométricas, ni de establecer relaciones entre esas variaciones. Las abreviaturas D, DV, CP, ALG, R y A indican estrategias que caracterizan a las diferentes formas de razonamiento, las cuales se basan en construir un dibujo en el que se integran los datos del problema (sin considerar la variación de atributos **D** o haciendo referencia a ella, **DV**), considerar casos particulares (generalmente figuras con lados enteros), procedimientos algebraicos, recordar soluciones previas y usar analogías, respectivamente.

Para resolver los problemas 1 y 3 el estudiante E_1 únicamente realizó un dibujo en el que se integran los datos del problema (**D**) e hizo el cálculo del área y el perímetro

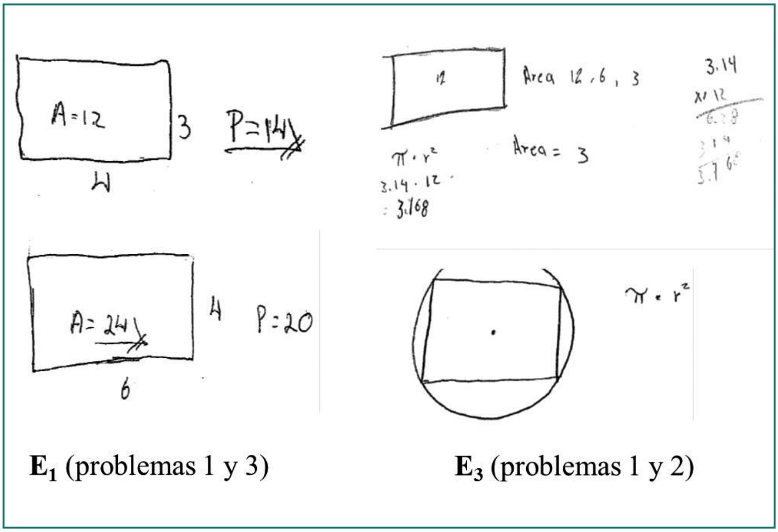


Figura 3. Representaciones en las que no hay evidencia de una reflexión acerca de la variación y el cambio.

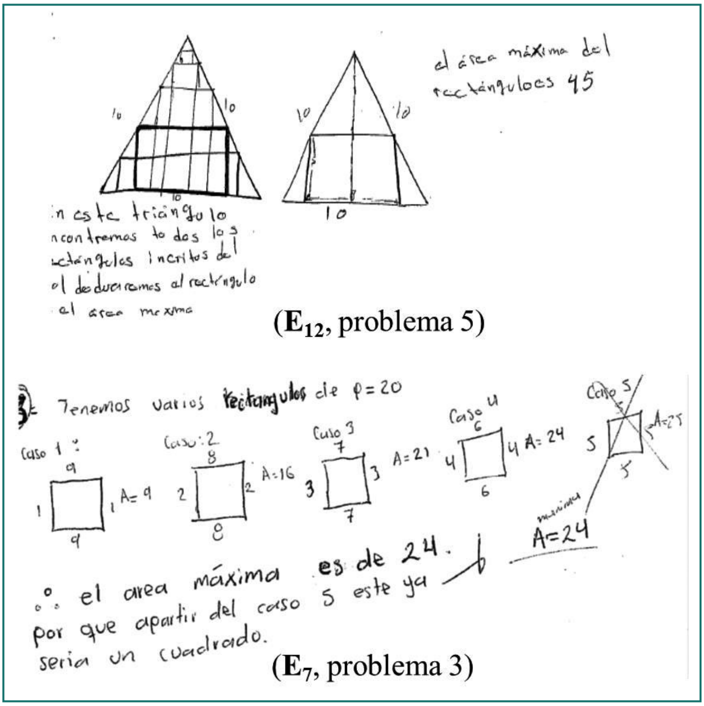
en cada caso. Una forma de razonamiento similar fue exhibida por E_3 al resolver el problema 2, ya que además del dibujo, únicamente escribió la fórmula para calcular el área de una circunferencia y realizó cálculos para obtener al área de un rectángulo de área 12 (Figura 3). Estos estudiantes no identificaron que el problema hace referencia a una familia de rectángulos que tienen diferentes perímetros o áreas, incluso E_{14} expresó explícitamente que todos los rectángulos inscritos en una circunferencia tienen la misma área:

- Cómo determinar un área si no se sabe la medida de una circunferencia y *aun así todos los rectángulos saldrían de la misma medida* [énfasis añadido] al menos que sea una elipse en el caso de que los rectángulos de mayor tamaño estén dentro y los rectángulos pequeños en la menor podría ser posible (comentario de E_{14} utilizado como justificación de que no es posible resolver el problema 2).

Algunos estudiantes, como E_1 y E_2 únicamente intentaron resolver aquellos problemas en los que el enunciado indica medidas específicas para el perímetro, el área o longitudes de los lados de las figuras involucradas, sin que haya intentado abordar el resto de los problemas. Esta forma de pensamiento centrada en el uso de fórmulas, y en la cual se considera que un problema no se puede resolver si no se cuenta con datos numéricos específicos, se presentó también en otros estudiantes como E_{10} y E_{14}.

> [Para resolver el problema es necesario] conocer cuál es el área de la circunferencia para conocer cuál es el área que va a ocupar el rectángulo, y posteriormente utilizar las fórmulas para conocer el resultado. *Debemos conocer las dimensiones del triángulo* [énfasis agregado] para trazar nuestro rectángulo [inscrito] (comentario de E_{10} utilizado para justificar que no es posible resolver el problema 2).

En otros casos sí hay evidencia de que los estudiantes consideraron la variación y el cambio en los atributos de las figuras geométricas, como parte del proceso de entendimiento



(E_{12}, problema 5)

(E_7, problema 3)

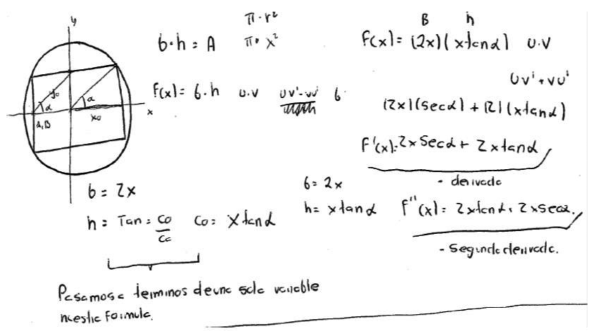
Figura 4. Rutas de solución basadas en la construcción de casos particulares.

del problema. Estos estudiantes consideraron diversos casos particulares (**CP**), específicamente figuras con lados de longitud entera, como estrategia para obtener la respuesta (Figura 4). Como resultado adicional, se puede observar que algunos estudiantes tenían una concepción errónea de rectángulo como una figura "con dos lados largos y dos lados cortos", y por esta razón eliminaron del conjunto de resultados posibles al rectángulo en el cual todos sus lados miden cinco centímetros (extremo inferior derecho de la figura 4).

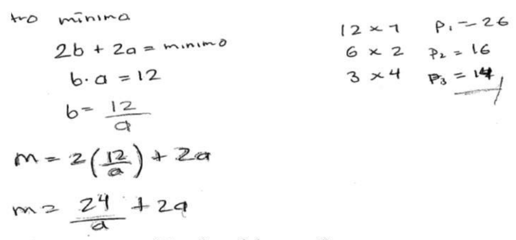
Otras formas de razonamiento que emergieron son aquellas en las que la construcción de una posible ruta de solución se basó en la realización de procedimientos algebraicos (**ALG**) con la finalidad de establecer una función que relacionara los datos que aparecen en el enunciado y aplicar las técnicas del cálculo para encontrar el máximo o mínimo. Los estudiantes que utilizaron esta aproximación solamente lograron plantear dicha función y en algunos casos intentaron derivar para llevar a cabo el procedimiento rutinario usual para calcular máximos y mínimos (Figura 5), el cual se revisa comúnmente en los cursos y textos de cálculo de nivel bachillerato (Stewart, 2008; Santaló y Carbonell, 1982).

En la Tabla 1 se muestra un concentrado de las estrategias utilizadas por los estudiantes al tratar de construir una ruta de solución. Las casillas sombreadas corresponden a problemas que los estudiantes no intentaron resolver, aquellas marcada con D indican problemas cuya ruta de solución consiste en un dibujo que captura los datos y relaciones especificadas en el enunciado, pero sin que se considere la variación y el cambio en los atributos de la figura.

Comentarios. Dado que la mayor parte de los estudiantes no explicitaron en sus producciones escritas la forma de comprender los datos, y no llevaron a cabo una visión



$\mathbf{E_{17}}$ (problema 2)



$\mathbf{E_{18}}$ (problema 1)

Figura 5. Rutas de solución basadas en procedimientos algebraicos.

retrospectiva del proceso de solución, la información relacionada con los procesos de razonamiento se determinó con base en el diseño e implementación de las estrategias de solución.

Los datos de la tabla indican que los problemas 2, 4 y 5 fueron los problemas que presentaron mayor nivel de dificultad para los estudiantes, dado que no se especifica la medida de algún atributo de la circunferencia o del rectángulo inscrito, en el caso de los problemas 2 y 4; o del triángulo equilátero y el rectángulo inscrito, en el problema 5 (ver tabla 1). En estos tres problemas los estudiantes, en general, no identificaron el cambio en el perímetro y el área del rectángulo inscrito, ni la relación entre la variación de estos atributos, es decir, hubo dificultades en la etapa de comprensión del problema y por esta razón, en la mayoría de los casos realizaron únicamente un dibujo en un intento por dar sentido a la información proporcionada en el enunciado del problema.

En el caso de los problemas 1 y 3, en los que se proporciona como dato, la medida específica de un atributo del rectángulo (el perímetro o área), la estrategia más utilizada para abordar la actividad consistió en la consideración de casos particulares, es decir, rectángulos cuyas medidas de sus lados son números enteros. La respuesta del problema consistió en elegir al caso particular que tuviera la mayor área o perímetro, respectivamente. Esta forma de razonamiento permite observar que los estudiantes no fueron capaces de determinar que la familia de rectángulos que debía considerarse en el problema contaba con una mayor cantidad de elementos, ya que existen rectángulos cuya área es 12 o su perímetro es 20, pero que no tienen lados enteros.

Tabla 1. Estrategias utilizadas un ambiente de lápiz y papel.

	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5
E_1	D		D		
E_2	DV		DV		
E_3		D			
E_4	CP	D		D	D
E_5	CP		CP		DV
E_6	CP		CP		
E_7	CP	D	CP		
E_8	CP	D	CP	D	CP
E_9	CP	D	CP		CP
E_{10}	D	D	X	D	D
E_{11}	CP	D	CP	DV	DV
E_{12}	D	D	D	D	DV
E_{13}		D		D	D
E_{14}	CP	DV	CP		DV
E_{15}	D	DV			
E_{16}	D	DV	D	DV	
E_{17}	CP	ALG	CP	DV	A
E_{18}	ALG y CP	ALG	ALG	DV	DV
E_{19}	CP	R	CP	A	CP

FORMAS DE RAZONAMIENTO QUE EMERGIERON AL UTILIZAR GEOGEBRA

La sesión en que los estudiantes resolvieron los problemas utilizando el software dinámico se llevó a cabo durante la octava semana del curso, durante una sesión de dos horas. A la sesión únicamente asistieron 15 de los 19 estudiantes (faltaron E_2, E_6, E_{15} y E_{16}). La mayoría de los estudiantes decidió trabajar en parejas a excepción de E_{10}, E_{18} y E_{19}. El uso de GeoGebra permitió a todos los estudiantes considerar la variación y el cambio, ya que las funcionalidades propias de la herramienta, particularmente el arrastre favoreció la visualización de una mayor cantidad de integrantes de la familia de objetos geométricos bajo consideración, además de visualizar el cambio en los atributos, al realizar una medición de estos y arrastrar un punto de la construcción. Por otra parte, el uso de medidas también favoreció la consideración de la variación conjunta entre cantidades y la elaboración de conjeturas respecto de cómo se relacionan esas variaciones.

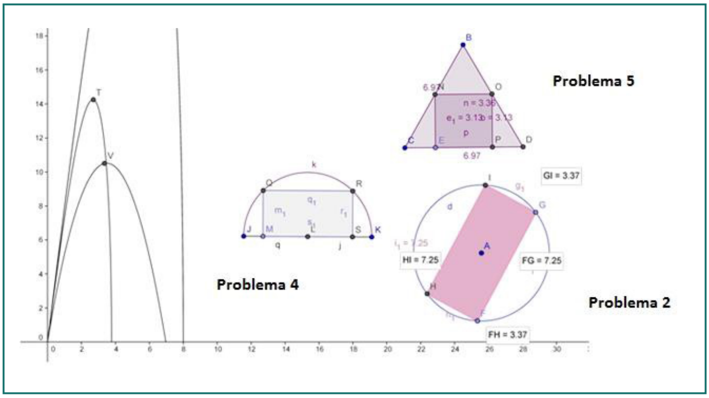


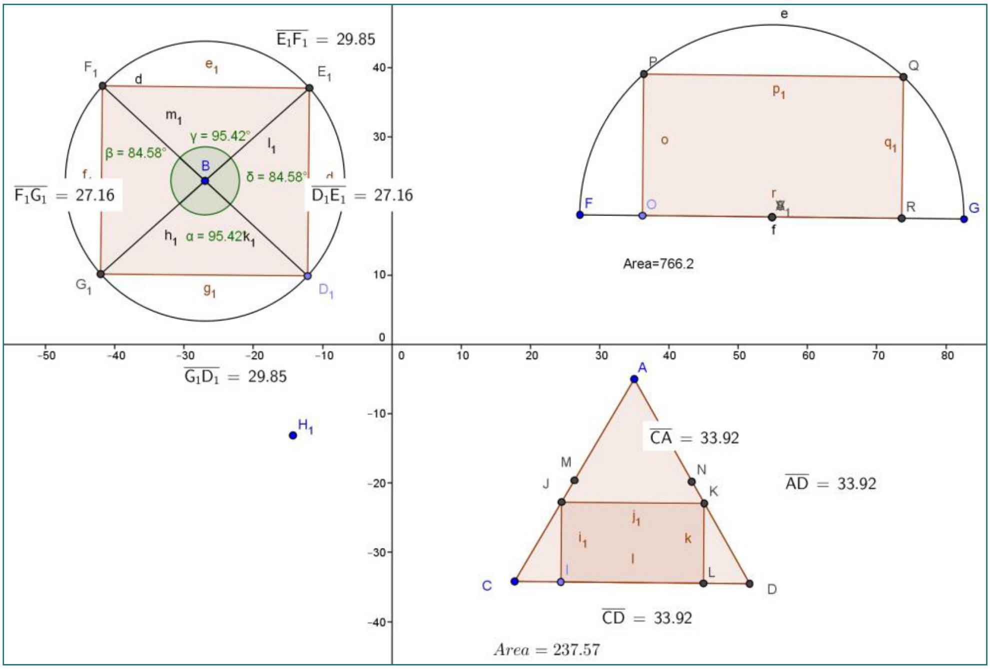
Figura 6. Configuración dinámica utilizada por E8 y E12.

Las formas de razonamiento que emergieron en este ambiente fueron más variadas, en relación con el ambiente de lápiz y papel. Las estrategias utilizadas por los estudiantes fueron uso de casos particulares (CP), realización de consideraciones geométricas basadas en la visualización (VG), visualización de medidas de atributos (M), visualización de medidas de atributos con una referencia (MR), la visualización de lugares geométricos y medidas (LGyM), así como el uso de analogías (A). Finalmente, las casillas sombreadas indican que el estudiante no intentó resolver el problema. En algunas aproximaciones la solución se basó en la visualización de un lugar geométrico que representa la relación entre dos variables en la configuración dinámica que capturara los elementos y relaciones expresados en el enunciado del problema (**LGyM**). En general esta aproximación se utilizó para abordar los problemas 2, 4 y 5 (Figura 6).

En la aproximación anterior, un aspecto relevante del proceso de razonamiento incluye el elegir la variable independiente. En el caso de la solución de E_8 y E_{12}, eligieron la distancia FH, QM y EP como variables independientes de los problemas 2, 4 y 5, respectivamente. El uso de GeoGebra permitió a los estudiantes llevar a cabo una combinación de aproximaciones visuales y empíricas, ya que mediante la identificación del "vértice" del lugar geométrico fue posible determinar cuándo se alcanza valor máximo, además de los valores que toman los atributos correspondientes, como se aprecia en la descripción del proceso de solución y la justificación de la solución al problema 2, proporcionada E_8 y E_{12}, quienes reconocieron que trabajar con GeoGebra apoya el proceso de resolver problemas, debido esencialmente a las facilidades de visualización de la herramienta.

> Primeramente se observa al construir el rectángulo inscrito en una circunferencia, moverlo en distintas maneras y después ir observando cómo cambia el área, ubicar más o menos el área máxima que se puede alcanzar, finalmente se asegura la respuesta cuando se observa la parábola (reporte de E_8 y E_{12}).

Otro tipo de razonamiento utilizado consistió en visualizar directamente la variación del área de las figuras, y una vez que mediante el arrastre se aproximó a la solución. Se procedió luego a buscar entre todas las medidas posibles en la configuración



cuáles tenían alguna característica en particular (la mitad, un tercio o un cuarto de alguna otra medida, ángulos de 45°, 60° o 90°), con la finalidad de establecer una relación entre las dos variables. Esta aproximación fue utilizada por los estudiantes E_4 y E_{17} y por E_7 y E_{13} (Figura 7), quienes en la descripción del proceso de solución del quinto problema mencionan que colocaron como referencia a los puntos medios de dos de los lados del rectángulo y observaron que cuando los vértices del rectángulo inscrito estaban por debajo o por encima de esos puntos de referencia el área del rectángulo decrecía. Para estos estudiantes, uno de los elementos que distingue el trabajo de un ambiente dinámico es la posibilidad de arrastrar los objetos y observar cómo varían los atributos de tales objetos.

> La diferencia de hacer estos ejercicios en lápiz y papel que hacerlos en la computadora de geogebra es que es más rápido y puedes comprobarlos ya que el rectángulo se puede mover por cualquier punto del círculo o del triángulo y hacerlos manualmente pues no (reporte de E_7 y E_{13}) (ver figura).

Los estudiantes reconocieron que una de las diferencias fundamentales al trabajar en un ambiente dinámico, en relación con el trabajo de lápiz y papel es que el uso del SDG les permite experimentar y considerar casos que no son enteros, además de que facilita la realización de operaciones aritméticas rutinarias con mayor precisión.

> La diferencia entre hacer este ejercicio en la computadora es que puedes ir moviendo los puntos y las distancias para experimentar y llegar a una conclusión en base a la práctica, ya que a lápiz es más difícil ir haciendo esto…Al realizar el problema a lápiz no se pueden tomar en

> cuenta muchos resultados que no son enteros, ya que son más difíciles de calcular debido a la inexactitud que puede llegar a tener el hecho de hacer las operaciones a mano (reporte de E_{19}).
>
> […] mediante Geogebra es más sencillo observar las figuras con detalle, además se puede trazar el lugar geométrico para así poder conocer de manera más acertada el área máxima y de esta manera realizar observaciones más profundas de cada problema, en cambio resolviendo los problemas a lápiz es más complicado imaginar la figura y por tanto las conjeturas requieren de mayor análisis (reporte de E_8 y E_{12}).

A pesar de contar con la herramienta, algunos estudiantes como E_8 y E_{12}, E_4 y E_{17} no pudieron elaborar una configuración dinámica que capturara las relaciones entre los datos de los problemas 1 y 3, así que recurrieron a considerar casos particulares con valores enteros, los cuales organizaron en una tabla, a partir de ahí seleccionaron como respuesta aquellos que arrojaban el valor mínimo del perímetro y el máximo del área respectivamente. En el caso de los estudiantes E_1 y E_5 únicamente resolvieron los problemas 1 y 3 usando esta misma estrategia.

Otra ruta de solución consistió en realizar consideraciones geométricas con base en la observación de relaciones al mover la configuración dinámica que elaboraron los estudiantes. Para abordar el segundo problema, E_4 y E_{17}, se dieron cuenta de que todos los rectángulos inscritos en una circunferencia, tenían la característica común de que sus diagonales pasaban por el centro de la circunferencia. Con base en esta observación, utilizaron la estrategia de considerar un problema más simple, maximizar el área de un triángulo rectángulo tal que la hipotenusa es un diámetro y el otro vértice es un punto de la circunferencia.

Los estudiantes justificaron que esto ocurre cuando el triángulo rectángulo es isósceles, por lo que el área máxima del rectángulo original se obtiene cuando el rectángulo inscrito es un cuadrado. Estos estudiantes utilizaron la analogía entre este problema y el 4 para proporcionar la solución de este último. En esta misma línea de ideas, para resolver el problema 1, E_{18} consideró que minimizar el perímetro requiere que los lados del rectángulo sean lo más pequeño posible y esto ocurre cuando ambos lados son iguales.

> Por el segundo problema sabemos que el área máxima de un rectángulo inscrito en una circunferencia es un cuadrado, ahora como tenemos una circunferencia el rectángulo de área máxima es la mitad, es decir su base es el doble de su altura, su base se encuentra sobre el diámetro de la semicircunferencia (reporte de los estudiantes E_4 y E_{17}).
>
> Para que el perímetro sea mínimo a y b tienen que ser lo más pequeño posible. Si disminuimos una medida la otra aumenta, por lo que lo mejor es que midan lo mismo. Así tenemos $a=b=\sqrt{12}$ (reporte de E_{18}).

En la Tabla 2 se muestra un resumen de las estrategias que orientaron el proceso de razonamiento de los estudiantes. Se puede observar que con el uso de un SGD, los estudiantes tuvieron mayores recursos para resolver los problemas, y utilizar una amplia diversidad de aproximaciones para obtener una solución.

Comentarios. El uso del software ofrece un dominio epistémico que favorece que los estudiantes extiendan sus formas de pensar acerca de los problemas, ya que les permite superar algunas ideas erróneas que aparecen al trabajar en un ambiente de lápiz y papel, por ejemplo, que los cuadrados no son rectángulos o que todos los rectángulos inscritos en una circunferencia tienen "las mismas medidas" (las mismas longitudes de lados, el mismo perímetro o la misma área).

Por otra parte, las capacidades dinámicas del software promueven que los estudiantes reflexionen en torno a la variación y el cambio de las medidas de los atributos de los integrantes de una familia de objetos geométricos. Por otra parte, el uso de la herramienta, particularmente los *affordances* que permiten la visualización de relaciones, la medición de atributos y el uso de lugares geométricos para visualizar la relación entre dos conjuntos de cantidades que varían de forma conjunto permitió ampliar la cantidad de problemas que los estudiantes pueden abordar y favoreció la diversificación de estrategias utilizadas.

Tabla 2. Estrategias utilizadas con el uso de un SGD.

	Problema 1	**Problema 2**	**Problema 3**	**Problema 4**	**Problema 5**
E_1 y E_5	CP		CP		
E_3 y E_{11}	M	M	M	M	M
E_4 y E_{17}	CP	VG	CP	A	MR
E_7 y E_{13}		M		M	MR
E_8 y E_{12}	CP	LGyM	CP	LGyM	LGyM
E_9 y E_{14}	LGyM				M
E_{10}		M		M	
E_{18}	VG	M	M	M	
E_{19}	M	M	M	M	

REFLEXIONES FINALES

Existe evidencia que el resolver problemas con un SGD propició cambios en las formas de razonamiento que desarrollan los estudiantes en relación con un ambiente de lápiz y papel, estos cambios radican esencialmente en que la tecnología digital ofrece mayores recursos a los estudiantes para abordar los problemas, ya que no es necesario el uso explícito de un modelo algebraico para aproximar la solución de un problema. Asimismo, como lo reconocieron los propios estudiantes, las facilidades para explorar y visualizar relaciones entre medidas de los atributos de objetos geométricos fue un elemento que apoyó que los estudiantes lograran abordar y resolver con éxito más problemas, que cuando resolvieron las tareas únicamente con lápiz y papel.

REFERENCIAS

Andreescu, T., Mushkarov, O. y Stoyanov, L. (2006). *Geometric problems on maxima and minima*. Boston: Birkhäuser.

Birnbaum, I. (1982). Maxima and minima without calculus. *Mathematics in School, 11*(3), 8-9.

Brijlall, D. y Ndlovu, Z. (2013). High school learners' mental construction during solving optimisation problems in Calculus: A South African case study. *South African Journal of Education, 33*(2), 1-18.

Camacho, M. y Santos, M. (2004). El estudio de fenómenos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas. *Revista UNO, 37*, 105-122.

Courant, R., y Robbins, H. (2006). ¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales. México: Fondo de Cultura Económica.

Cuoco, A., Goldenberg, A. P. y Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 375-402.

D'Ambrosio, U. (2013). Phylosophy and background. En S. J. Hegedus y J. Roschelle (eds.), *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics*, 1-3. Dordrecht: Springer.

Gibson, J. J. (1977). The theory of affordances. En R. Shaw y J. Bransford (eds.), *Perceiving, acting, and knowing: Toward an ecological psychology*, 67-82. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

González-Astudillo, M. T. (2004). Los problemas de optimización en la enseñanza secundaria de España durante el siglo XX. *Atas XIII Encontro de Investigação em Educação Matemática*, 33-58. Beja, Portugal: Sociedade Portuguesa de Investição em Edução Matemática (SPIEM).

González-Astudillo, M. T., y Sierra-Vázquez, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408.

Han, S. y Chang, K.-Y. (2007). Problem solving with a computer algebra system and the pedagogical usage of its obstacles. En J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park, & D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 1, 249-256. Seoul, Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Hegedus, S. J. y Moreno-Armella, L. (2009). Introduction: the transformative nature of "dynamic" educational technology. *ZDM Mathematics Education, 41*, 397-398.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. y Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Kaput, J. J. y Roschelle, J. (2013). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context.En S. J. Hegedus y J. Roschelle (eds.), *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics*, 13-26. Dordrecht: Springer.

Kosić-Jeremić, S. (2012). Teaching mathematics at faculties of engineering in Bosnia and Herzegovina viewed through teaching and solving extremal problems - A case study. *IMVI Open Mathematical Education Notes, 2*, 39-50.

Laborde, C. (2003). Technology used as a tool for mediating knowledge in the teaching of mathematics: The case of Cabri-Geometry. En W.-C. Yang, S.-C. Chu, T. de Alwis y

M.-G. Lee (eds.), *Proceedings of 8th Asian Technology Conference in Mathematics: Technology Connecting Mathematics*. Hsinchu, Taiwan: ATCM Inc.

Lagrange, J.-B. y Artigue, M. (2009). Students' activities about functions at upper secondary level: A grid for designing a digital environment and analyzing uses. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education*. Thessaloniki, Greece: PME.

Leikin, R. (2010). Learning through teaching through the lens of multiple solution tasks. En R. Leikin y R. Zazkis (eds.), *Learning through teaching mathematics: Development of teachers' knowledge and expertise in practice*, 69-90. Dordrecht: Springer.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematics Learning, 13*, 135-157.

Leung, A., Bacaglini-Frank, A. & Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 439-460.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The Council.

Niven, I. (1981). *Maxima and minima without calculus*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Olivero, F. (2006). Hidding and showing construction elements in a dynamic geometry software: A focusing process. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehliková (eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psichology of mathematics Education*, vol. 4, 273-280. Prague, Czech Republic: Charles University.

Phillips, H. B. (1990). *Elementos de cálculo infinitesimal*. México: Instituto Politécnico Nacional.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Santaló, M. y Carbonell, V. (1982). *Cálculo diferencial e integral*. México: Joaquín Porrúa Editores.

Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiasts, 10* (1 y 2), 279-302.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Stein, M. K. & Smith M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268-275.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.

Tomás-Blanquer, F. R. (2002). Método de determinación de máximos y mínimos previo a la enseñanza del cálculo diferencial. *Suma, 40*, 87-90.

Wertsch, J. V. (1993). *Voices of the Mind: a sociocultural approach to mediated action*. Cambridge: Harvard University Press.