Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2016, Vol. 33 (2), nº 93, 7-30*

Una trayectoria hipotética de aprendizaje para las expresiones algebraicas basada en análisis de errores

Mª Victoria Amador-Saelices
Universidad Complutense de Madrid
Jesús Montejo-Gámez
Universidad de Granada

Resumen. *Problema-Introducción: Hemos observado errores graves en el uso de expresiones algebraicas en estudiantes de secundaria. Objetivo general: analizar los relacionados con el lenguaje algebraico para prevenirlos. Metodología: Desarrollamos una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) para el lenguaje algebraico en 1º E.S.O. y reflexionamos sobre los resultados obtenidos tras ponerla en práctica, lo que nos permite completar una iteración del Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas. Utilizamos las herramientas del análisis de errores y los caminos de aprendizaje para diseñar las tareas de instrucción asociada a la Trayectoria Hipotética. Resultados y conclusiones: Un diseño instruccional que incidiera más en el uso de las expresiones algebraicas como lenguaje podría ayudar a prevenir los errores estudiados.*
Palabras clave: *enseñanza del álgebra, formación de profesores, Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, caminos de aprendizaje, análisis de errores.*

A Hypothetical Learning Trajectory for algebraic expressions based on analysis of errors

Abstract. *Problem-Introduction: We have observed serious errors concerning algebraic expressions in Secondary School students. Main goal: to analyze errors related to algebraic language, in order to prevent them. Metodology: We develop a Hypothetical Learning Trajectory for the algebraic language in the 1st year of the Secondary School and think about the results obtained after putting it into practice, which allows us to complete one iteration of the Mathematics Teaching Cycle. We use the analysis of errors and the learning paths to design instructional tasks associated with the Hypothetical Learning Trajectory. Results and conclusions: An instructional design which is more focused on the use of algebraic expressions as a language could help to prevent the errors we have studied.*
Keywords: *teaching of algebra, teachers formation, hypothetical learning trajectory, learning paths, analysis of errors.*

JUSTIFICACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El contexto educativo de este trabajo es la iniciación al manejo del lenguaje algebraico de los estudiantes de 1º E.S.O. Buscamos analizar cómo se desarrolla el primer contacto de los alumnos con las expresiones algebraicas y mejorar su aprendizaje a través de la optimización de las tareas de instrucción para adaptarlas a sus conocimientos. Nuestra investigación tiene una finalidad doble: por una parte deseamos conocer cómo se produce el aprendizaje del lenguaje algebraico en alumnos de 1º E.S.O. Por otra parte, perseguimos construir herramientas didácticas que optimicen el aprendizaje. Los errores que cometen los estudiantes al enfrentarse a tareas relacionadas con el tema contienen la información básica que utilizamos para interpretar cómo se desarrolla su aprendizaje.

Justificación

La importancia de las matemáticas en la sociedad actual resulta indudable, ya no solo por las destrezas numéricas que podemos necesitar para desenvolvernos en la vida cotidiana, sino sobre todo porque nos ayudan a comprender la gran complejidad que encierra la realidad que nos rodea.

La descripción adecuada de situaciones reales en términos puramente matemáticos nos permite aprovechar la potencia de las matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana. El lenguaje algebraico es el lenguaje propio de las matemáticas, por lo que la formulación de expresiones algebraicas es la primera destreza que debemos adquirir para poder desarrollar modelos matemáticos eficientes. Por otra parte, el manejo de expresiones algebraicas favorece la abstracción y el razonamiento y dominar el lenguaje algebraico resulta fundamental para desarrollar la competencia matemática.

El currículo que establece la LOE para la Comunidad de Madrid refleja a la perfección esta prioridad (Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid, 2007), ya que 2 objetivos del área y 1 criterio de evaluación, además de todos los contenidos del Bloque de Álgebra, están dedicados a las expresiones algebraicas. Los profesores de secundaria deben, en consecuencia, poseer un conocimiento exacto de cómo los alumnos aprenden a trabajar con el lenguaje algebraico y disponer de herramientas docentes que faciliten el aprendizaje y motiven de manera adecuada la importancia de las expresiones algebraicas para el desarrollo matemático global de los alumnos.

Nuestro interés por estudiar este tema tiene, además, una motivación de índole personal y profesional. Hemos sido testigos de los malos resultados que obtuvieron los alumnos de un grupo de 2º E.S.O. en un examen de polinomios. La observación de los errores cometidos puso de manifiesto carencias que no habríamos sabido predecir a priori, lo que nos convenció de la utilidad de tener en cuenta los fallos observados en estos alumnos de cara a afrontar la formación algebraica de los alumnos de otros cursos de secundaria. Este hecho nos animó a trabajar el lenguaje algebraico en 1º E.S.O., que es el curso donde los estudiantes establecen su primer contacto con la abstracción matemática. Nuestra consigna docente es lograr un diseño de la instrucción en el aula que sirva para prevenir en los alumnos de primer curso de secundaria los errores cometidos por los estudiantes de segundo.

La preocupación como docentes por evitar los errores de los alumnos constituye asimismo una inquietud científica que nos impulsa a tratar de comprender qué vías sigue el aprendizaje del manejo del lenguaje algebraico. Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (Simon, 1995) son una herramienta metodológica que nos permite explorar de forma integrada las dos vertientes de nuestra investigación.

Planteamiento del problema

Nuestro interés se focaliza sobre dos cuestiones que materializan esta dualidad.

- **Cuestión 1**: ¿Cómo se produce el aprendizaje y por qué los alumnos cometen determinados errores?
- **Cuestión 2:** ¿Cómo se deben diseñar las tareas de instrucción para evitar estos errores?

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Simon (1995) describe los aspectos clave para planificar las clases de matemáticas a través de la noción de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. Se trata de una herramienta de diseño instruccional que describe desde una perspectiva constructivista cómo profesores, investigadores y desarrolladores del currículo pueden pensar sobre el diseño y el uso de las tareas matemáticas para promover el aprendizaje conceptual matemático.

Tal y como las presenta Simon, las THA son de gran utilidad tanto en la investigación como en la programación de la instrucción en el aula (Gravemeijer, 2004; Steffe, 2004). Para desarrollar las tareas asociadas a una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, Simon, Tzur, Heinz y Kinzel (2004) elaboran un constructo denominado reflexión sobre la relación actividad-efecto*,* que se basa en la noción de abstracción reflexiva de Piaget. En el contexto de formación inicial de profesorado la noción de THA debe adaptarse, ya que los profesores en formación inicial "no tienen experiencia docente y, en general, no tienen acceso a la práctica en el aula de matemáticas" (Gómez y Lupiáñez, 2007, p. 83). Para llevar a cabo dicha adaptación se introducen los caminos de aprendizaje (véase también Gómez, González y Romero, 2014) en los que la noción de capacidad, que definiremos en la Sección 2., toma relevancia fundamental. Gómez y sus colaboradores encuentran las capacidades asociadas a un tema a través de herramientas del análisis didáctico (Lupiáñez y Rico, 2008). En este trabajo seguimos parcialmente esta línea, ya que aprovechamos que las capacidades están íntimamente relacionadas con los errores en el proceso de aprendizaje de las matemáticas (Gómez y Lupiáñez, 2007) para definirlas a través del análisis de los errores que cometen los alumnos al realizar tareas sobre expresiones algebraicas. En torno a estas capacidades desarrollamos los caminos de aprendizaje y a partir de ahí obtenemos las tareas de nuestra THA.

Exponemos a continuación qué es una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, cuáles son sus elementos e introducimos las ideas que nos son útiles para diseñar nuestra THA, haciendo hincapié en el concepto de capacidad, los caminos de aprendizaje asociados a una tarea y el grafo de un objetivo de aprendizaje. Comentamos también algunos trabajos

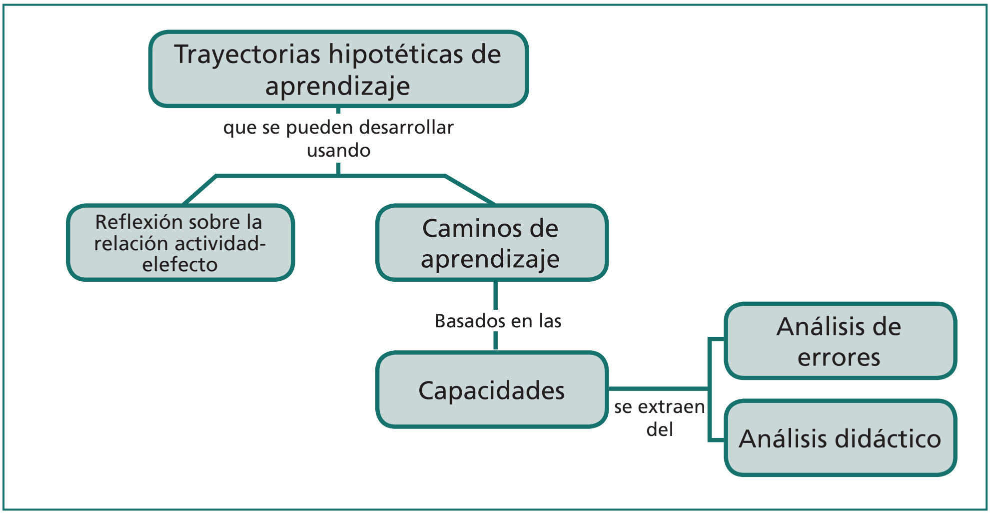


Figura 1. Esquema del fundamento teórico del trabajo.

dedicados al análisis de errores, que es la herramienta básica que nos permite describir las capacidades asociadas a las expresiones algebraicas en 1º E.S.O. De esta forma completamos el fundamento teórico de nuestro trabajo, que puede verse sintetizado en la figura 1.

Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje

La noción de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje fue introducida por Simon (1995) como respuesta a la necesidad de conjugar el enfoque tradicional, que contempla una educación basada en objetivos preestablecidos, con una metodología constructivista (Gravemeijer y van Eerde, 2009). El propósito es establecer una predicción de cómo los alumnos pueden ir aprendiendo un contenido de matemáticas en función de sus conocimientos previos y desarrollar tareas para que se produzca el aprendizaje de forma eficaz. En particular, planificar el aprendizaje de ciertos contenidos a través de una THA implica asumir que las tareas son el elemento clave del proceso de instrucción.

Según Simon (1995), una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje se construye en torno a tres elementos: (a) el objetivo de aprendizaje, (b) las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje y (c) las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. Estos tres elementos no tienen la misma jerarquía como componentes de una THA. El objetivo de aprendizaje se suele tener de antemano y marca una pauta de los otros dos elementos, mientras que la selección de las tareas y las hipótesis son interdependientes: la formulación de las tareas se basa en las hipótesis que tengamos acerca del proceso de aprendizaje y a su vez estas hipótesis pueden verse alteradas cuando los alumnos resuelven las tareas (Simon y Tzur, 2004). Una THA es hipotética, por tanto, en el sentido de que la trayectoria de aprendizaje real de los estudiantes no tiene por qué ajustarse a la prevista teóricamente. De esta manera es natural establecer una secuencia

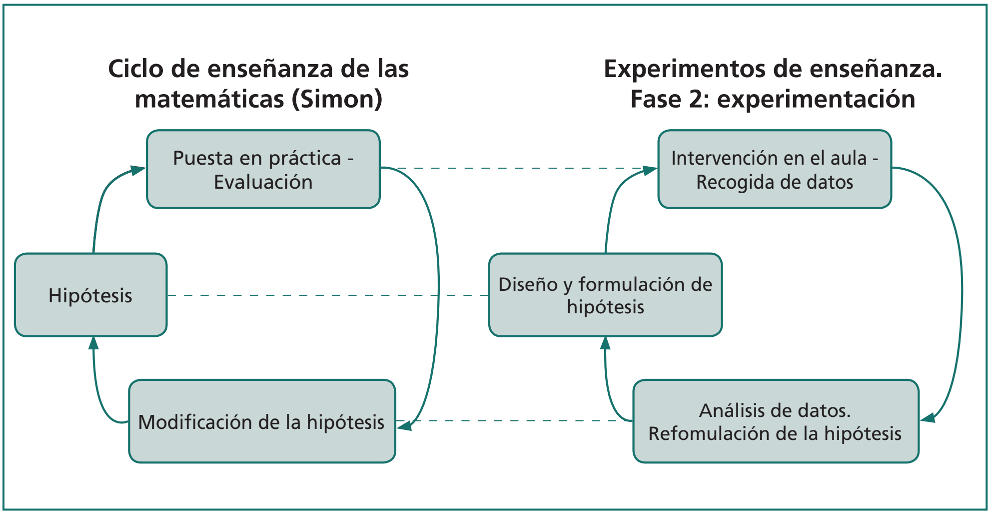


Figura 2: Paralelismo existente entre los experimentos de enseñanza (Molina et. al, 2011) y el Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas (Simon, 1995).

hipótesis-puesta en práctica-evaluación y modificación de las hipótesis

que da lugar a un proceso iterativo denominado Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas. Según Simon esta es la metodología idónea para enseñar matemáticas. De la Vega, Valls y Ciscar (2007) y posteriormente Gravemeijer y van Eerde (2009) destacan que existe un paralelismo entre el Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas y los denominados experimentos de enseñanza, que son los estudios de investigación más frecuentes en la investigación de diseño. Puede observarse este paralelismo en la Ilustración 2 y consultarse más información sobre la investigación de diseño y los experimentos de enseñanza en Molina, Castro, Molina y Castro (2011) y las referencias allí citadas.

La noción de THA proporciona una herramienta metodológica que permite responder a nuestra doble inquietud docente e investigadora. Sin embargo, como indican Simon y Tzur (2004) "la descripción de la THA no llega a proporcionar un marco para pensar en el proceso de aprendizaje ni para diseñar o seleccionar tareas matemáticas" (p. 92). Por tanto, proponer una THA supone afrontar dos desafíos: cómo formular las hipótesis y cómo diseñar las tareas.

Caminos de aprendizaje

Para decidir qué tareas debe incluir una THA para enseñar el lenguaje algebraico debemos partir de un objetivo de aprendizaje. Gómez et al. (2014) señalan que

> un objetivo de aprendizaje expresa expectativas que involucran conexiones entre los conceptos y procedimientos del tema matemático, los sistemas de representación en que se representan y los fenómenos que organiza. (p. 325)

Sin embargo, los objetivos de aprendizaje suelen formularse en frases sintéticas cuyo significado parece evidente (Lupiáñez, 2009). Es necesario, por tanto, tener información más detallada sobre qué significa que el estudiante logre un objetivo de aprendizaje. Para recabar este tipo de información de forma ordenada trabajaremos con capacidades, caminos de aprendizaje y grafo del objetivo (Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín, 2005; Gómez y Lupiáñez, 2007; Lupiáñez y Rico, 2008; Gómez et al., 2014).

Capacidad asociada a un tema

Utilizamos la noción de capacidad para analizar la gran cantidad de conexiones entre conocimientos que implica alcanzar un objetivo de aprendizaje.

> Definimos una capacidad como una expectativa del profesor sobre el conjunto de conocimientos elementales y de procedimientos rutinarios que los estudiantes tienen que aprender sobre un tema de las matemáticas escolares. (Gómez et al., 2014, p. 321)

Las capacidades constituyen el nivel de concreción más alto acerca de los resultados esperables del aprendizaje de un tema de matemáticas que vamos a considerar.

Camino de aprendizaje para una tarea

> Un camino de aprendizaje de una tarea es una sucesión de capacidades que el profesor prevé que sus estudiantes activarán al resolver la tarea, junto con los errores en los que pueden incurrir. (Gómez et al., 2014, p. 322)

La noción de camino de aprendizaje es útil para caracterizar el objetivo de aprendizaje, analizar el grado de incidencia de una tarea sobre el aprendizaje de dicho objetivo y evaluar la actuación de los estudiantes. Veamos un ejemplo de camino de aprendizaje para una tarea sobre el lenguaje algebraico.

EJEMPLO 1. Traducir la siguiente expresión del lenguaje natural al algebraico: un número aumentado en ocho.

Realizar esa tarea conlleva activar las capacidades C1, C2, C3, C4, C6, C7, C8 y se pueden cometer los errores E1.1, E1.2, E1.3, E2, E3, E6 y E7. Pueden verse en el anexo II los significados tanto de las capacidades como de los errores. Un camino que puede seguirse para llevar a cabo esta tarea puede verse representado en la figura 3 (izquierda).

Es usual que al comparar diferentes caminos de aprendizaje asociados a tareas relacionadas observemos conjuntos de capacidades que se activan siempre conjuntamente, constituyendo así unidades de significado dentro de los procesos de resolución de tareas. Estos conjuntos que describen un procedimiento particular dentro de la tarea concreta se denominan secuencias de capacidades (Gómez et al., 2014) y llevan asociados los errores propios del conocimiento al que van referidas. En la Ilustración 3 (derecha) puede verse el gráfico con las secuencias de capacidades de la tarea del Ejemplo 1. Las

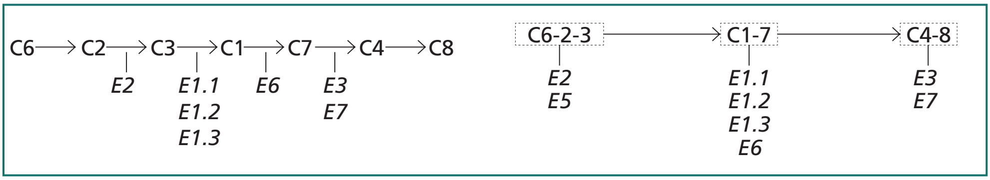


Figura 3: Grafo del camino de aprendizaje (izquierda) y grafo de la secuencia de capacidades (derecha) asociados a la tarea del ejemplo 1.

secuencias de capacidades son las unidades de significado que nos permiten describir objetivos de aprendizaje.

Grafo de un objetivo de aprendizaje

Los grafos de secuencias nos permiten analizar los procedimientos elementales involucrados en un objetivo de aprendizaje y las relaciones entre ellos. Para hacerlo basta con asociar al objetivo un conjunto de tareas prototipo, es decir, aquellas "*tales que si un estudiante las resuelve, entonces consideramos que dicho estudiante ha alcanzado el objetivo*" (Gómez et al., 2014). Una representación conjunta de los grafos de dichas tareas prototipo muestra de forma ordenada el conjunto de procedimientos que el alumno debe exhibir para que consideremos que ha logrado el objetivo de aprendizaje propuesto. Un gráfico de estas características se puede utilizar para proponer y calibrar la contribución de una tarea al logro de un objetivo de aprendizaje.

Análisis de los errores

Para decidir cómo formular las hipótesis sobre el aprendizaje en el contexto de formación de profesores no podemos recurrir a la experiencia profesional que puede ser muy corta o inexistente. Además, siempre es necesario disponer de una herramienta objetiva para analizar cómo se produce el aprendizaje de los alumnos.

Nuestra inquietud proviene de la observación de errores surgida en el ejercicio de la labor docente. Barbero, Fuentes, Azcárate y Ortiz (1993) señalan que observar los errores de los alumnos ayuda a conocer dónde están las dificultades. En relación con los caminos de aprendizaje, las dificultades y las capacidades están relacionadas.

> [Dificultades y capacidades] son las dos caras de una misma moneda. Cuando afirmamos que "un escolar tiene la capacidad para...", estamos mirando una cara de la moneda. La otra cara corresponde a la afirmación "el escolar tiene una dificultad al...". Tanto la capacidad, como la dificultad se evidencian cuando el escolar aborda una tarea. (Gómez y Lupiáñez, 2007, p.93)

Esta conexión entre capacidades y errores, entendiendo los errores como manifestación de las dificultades, relaciona íntimamente nuestra inquietud inicial (por qué los alumnos cometen ciertos errores y cómo pueden evitarse) con la noción nuclear (capacidades) de la herramienta metodológica que vamos a emplear (caminos de aprendizaje). Esto nos invita a utilizar el análisis de los errores para establecer las hipótesis de nuestra THA y seleccionar y clasificar las capacidades asociadas al aprendizaje de las expresiones algebraicas. Pero, ¿podemos aprovechar los errores de los alumnos para obtener información sobre qué y cómo han aprendido y usar esta información para prevenir los errores? Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1996) señalan que

> El análisis de errores tiene un doble interés: de una parte, sirve para ayudar a los profesores a conducir mejor la enseñanza–aprendizaje del álgebra, insistiendo en aquellos aspectos en los que los alumnos cometen errores, y de otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias para la corrección de los mismos. (p.109)

Existen diversos autores en la literatura que estudian y clasifican errores en la iniciación al álgebra. Socas (2011) estudia las dificultades que tienen los alumnos con el lenguaje algebraico desde dos perspectivas: los errores con origen en un obstáculo y los errores que tienen su origen en una ausencia de significado, bien debido a la complejidad de los objetos matemáticos o dificultades asociadas a actitudes emocionales hacia el álgebra. Hidalgo (2002) indica que existen errores en el aprendizaje del álgebra que se repiten y se pueden clasificar. Propone tres bloques de errores con el fin de elaborar en un futuro una unidad didáctica basada en los errores analizados: el bloque 1 está referido a errores en la equivalencia entre lenguaje habitual y algebraico, el bloque 2 contiene errores en el manejo de expresiones algebraicas y el bloque 3 está relacionado con los errores en la resolución de problemas. Nuestro trabajo sigue más bien esta segunda dirección, aunque nos centramos más en los primeros bloques a causa del objetivo de aprendizaje seleccionado.

En resumen, conocer el alcance real de un objetivo de aprendizaje en matemáticas requiere un estudio en profundidad de las capacidades que engloba dicho objetivo, las secuencias de dichas capacidades que se activan de forma conjunta y los posibles caminos de aprendizaje asociados a tareas que el profesor considera prototipo del objetivo de aprendizaje. El análisis de los errores que cometen los alumnos a la hora de realizar las tareas representativas del objetivo de aprendizaje es para nosotros la herramienta vertebradora de dicho estudio.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo de este trabajo es analizar el proceso de enseñanza–aprendizaje de las expresiones algebraicas en la iniciación al álgebra comprendiendo cómo se produce el aprendizaje y aprovechando esta comprensión para prevenir errores frecuentes. Para ello iniciamos el Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas mediante el diseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y la reformulación de las hipótesis a partir de la evaluación. Más concretamente, deseamos:

1) Construir una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para las expresiones algebraicas (utilizando las herramientas teóricas descritas en la Sección 2) y ponerla en práctica con alumnos de 1º E.S.O.,

2) Evaluar los resultados y reformular las hipótesis iniciales para completar una iteración del Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas.

Los resultados de nuestra investigación son aquellos que se desprenden de la evaluación de los alumnos que siguen el diseño instruccional asociado a nuestra THA, que nos conducen a una reformulación de las hipótesis sobre el aprendizaje de las expresiones algebraicas de los alumnos de 1º E.S.O.

PROPUESTA DE TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE

Para desarrollar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje actuamos como investigadores al definir con precisión el problema, reflexionar sobre la cuestión consultando la bibliografía, buscar herramientas para atacarlo, establecer hipótesis como consecuencia de este proceso de estudio, diseñar las actividades de instrucción para construir una THA y analizar los resultados de la evaluación para formular las hipótesis y poder así optimizar la instrucción. Asimismo, actuamos como docentes al poner en práctica en aula dicha instrucción en el colegio Mater Purissima de la Comunidad de Madrid, en las tres líneas de 1º E.S.O. (79 alumnos). Se trata de un colegio situado en el Sur de Madrid, concretamente en el barrio de Usera. Los alumnos, que son principalmente de clase media-baja, son en gran proporción españoles (aproximadamente un 10% son hijos de inmigrantes). Una gran cantidad de ellos pertenecen a familias desestructuradas, aunque no presentan un índice de fracaso escolar destacado.

Como ya hemos indicado, articulamos nuestra propuesta en torno a un objetivo de aprendizaje, un conjunto de hipótesis y unas tareas. El análisis de los errores que cometen alumnos de 2º de E.S.O., un total de 84 alumnos que estudiaron el tema de expresiones algebraicas el curso pasado, y la reflexión sobre estos errores nos llevan a dos procesos simultáneos en los que maduramos las hipótesis y concebimos las tareas de instrucción.

Teniendo en cuenta el objetivo y las consideraciones hechas en la Sección 2, elaboramos un test con tareas de traducción de expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico, que es prototipo del objetivo de aprendizaje. El test (Amador, Montejo-Gámez y Ramírez, 2015) nos sirve para (a) formular nuestras hipótesis sobre el aprendizaje, (b) establecer las tareas de instrucción que proponemos a los alumnos de 1º E.S.O., (c) evaluar el aprendizaje de estos alumnos y (d) reformular así nuestras hipótesis iniciales. De este modo, construimos una THA, la ponemos en práctica en el aula y utilizamos la información obtenida para reflexionar y redefinir nuestras hipótesis iniciales, completando así una iteración del Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas. (a) y (c) se llevan a cabo pasando el test a los alumnos de 2º E.S.O. y 1º E.S.O. respectivamente. A partir de los resultados obtenidos se describe (d). El diseño instruccional requiere un análisis detallado de las tareas del test que estudiamos por medio de los caminos de aprendizaje asociados a estas tareas.

Objetivo de aprendizaje

El objetivo de aprendizaje sobre el que vamos a realizar la investigación es el siguiente: *escribir expresiones algebraicas para describir relaciones numéricas y geométricas descritas en lenguaje natural utilizando un vocabulario adecuado.*

Hipótesis sobre el aprendizaje

Tomando cada tarea del test y estudiando todos los tipos de respuestas de los alumnos de 2º E.S.O. elaboramos la lista de errores que puede consultarse en el anexo II. El análisis de los errores nos lleva a la reflexión acerca de las hipótesis sobre el aprendizaje. Concretamente, podemos definir pautas que nos ayudan a comprender cómo se produce el aprendizaje del álgebra, que comentamos a continuación.

En primer lugar, es muy común la tendencia de los alumnos a dar resultados numéricos en lugar de expresiones algebraicas. Observamos que no utilizan adecuadamente letras para designar cantidades indeterminadas: ante la tarea de expresar "un número par" en el lenguaje algebraico, el 67.567 % escriben números pares concretos. Además, trabajando con expresiones algebraicas que describen una igualdad, hay alumnos que la resuelven: ante la tarea de expresar "un número más su doble más su triple es igual a doce" en el lenguaje algebraico, el 47.292 % da como resultado un número.

Por otra parte, existen errores de vocabulario: asociados a palabras menos usuales en el castellano (un 31.081 % de los alumnos deja en blanco la tarea de traducir al lenguaje algebraico "la suma de dos números consecutivos") y asociados a la relación entre las palabras y la operación que estas representan (aumentar, disminuir).

También existen errores relacionados con nociones geométricas, como utilizar la fórmula del perímetro para expresar el área de un rectángulo (y viceversa) o escribir la fórmula del área de un triángulo cuando se le pide el área de un rectángulo.

Los alumnos de este estudio muestran dificultades a la hora de escribir operaciones aritméticas en horizontal. Destaca en este sentido la omisión de los paréntesis en las expresiones algebraicas que lo requieren: ante la tarea de traducir al lenguaje algebraico "el área de un rectángulo de base x y altura x + 6", el 45.945 % de los estudiantes no escribe el paréntesis.

Además de estos errores, es palpable la gran inseguridad que los alumnos han sentido a la hora de responder al test: hay una gran cantidad de respuestas en blanco y detectamos también alta variabilidad en los errores encontrados: ante la tarea de traducir al lenguaje algebraico "la diferencia entre 7 y un número" los estudiantes asocian "diferencia" con hasta cinco operaciones diferentes de la resta. Pueden verse ejemplos de estos errores más frecuentes en el anexo I.

La reflexión sobre los errores encontrados nos lleva a formular las siguientes hipótesis sobre el aprendizaje de las expresiones algebraicas, que expresamos en clave de dificultades y posibles soluciones:

- **Hipótesis 1.** Los alumnos tienen dificultades en el uso de las letras como variables y no ven la utilidad de las expresiones algebraicas para la formulación matemática de situaciones reales. Es necesario mostrarles la potencia del uso de letras para designar valores desconocidos o indeterminados y la potencia del lenguaje algebraico como una herramienta de generalización.

- **Hipótesis 2.** Los alumnos tienen dificultades relacionadas con la relación entre la terminología del lenguaje natural y las operaciones matemáticas asociadas. Es necesario trabajar y reforzar el vocabulario aritmético en el lenguaje usual.
- **Hipótesis 3.** Los alumnos tienen dificultades relacionadas con la aplicación de fórmulas geométricas básicas, como área y perímetro de cuadrados, rectángulos y triángulos. Es necesario trabajar y reforzar la formulación de propiedades geométricas.
- **Hipótesis 4.** Los alumnos tienen dificultades a la hora de operar. Es necesario incidir en las propiedades aritméticas, en particular en la diferencia entre usar y no usar paréntesis.

La detección de los errores presentados y el desarrollo de estas hipótesis han ocurrido en paralelo con la preparación de las actividades que contribuyen a prevenir los errores observados. Explicamos cómo lo hacemos en el siguiente apartado.

Tareas de instrucción. Caminos de aprendizaje

Para diseñar las tareas de instrucción de nuestra THA caracterizamos el objetivo de aprendizaje a través de caminos de aprendizaje. Dichos caminos se escriben en términos de los errores observados y de las capacidades asociadas a dichos errores. Establecemos así capacidades que hemos dividido en cuatro categorías: (a) capacidades referidas a la concepción y manejo de expresiones algebraicas como una herramienta de formulación, (b) y (c) capacidades relacionadas con la terminología y con la geometría, y (d) capacidades que involucran habilidades aritméticas.

Como hemos comentado, es suficiente con dar los caminos de aprendizaje que conjeturamos para las tareas prototipo. Para algunas de ellas pronosticamos solo un camino de aprendizaje posible, como en el Ejemplo 1. Este es el caso del grafo de la izquierda en la figura 4, para el que prevemos la activación ordenada de las capacidades relacionadas con el manejo de las expresiones algebraicas (C2, C3, C4, C6, C7, C8, C12 y C13) y la de interpretación de la palabra "consecutivos", relacionada con la terminología (C20). Por su parte, hay tareas cuyo camino queda descrito por un grafo con dos ramas, que reflejan dos estrategias posibles para realizar estas tareas. Como ejemplo tenemos el caso del grafo de la derecha en la Ilustración 4, donde consideramos que el alumno puede bien conocer la fórmula del perímetro (rama superior, asociada a la capacidad geométrica C25) o bien describir gráficamente la situación y calcular el perímetro interpretando la definición desde el gráfico (rama inferior, asociada a otras capacidades geométricas como C28 y C29). Puede consultarse la lista completa de capacidades en el anexo II. En Amador, Montejo-Gámez y Ramírez (2015), además, se pueden ver los grafos de los caminos de aprendizaje de todas las tareas del test con el que trabajamos.

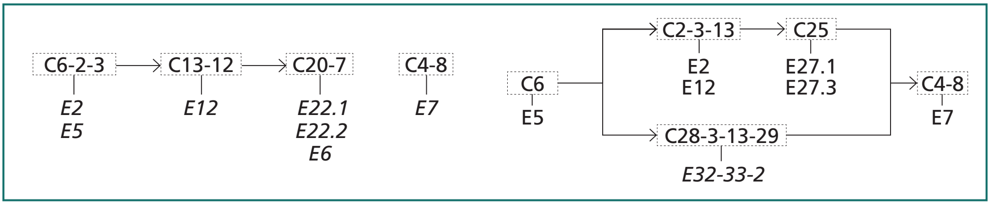


Figura 4: Dos caminos de aprendizaje para tareas de traducción de expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico: "la suma de dos números consecutivos" (izquierda), relacionada con la terminología y "El perímetro de un cuadrado de lado x" (derecha), de contexto geométrico.

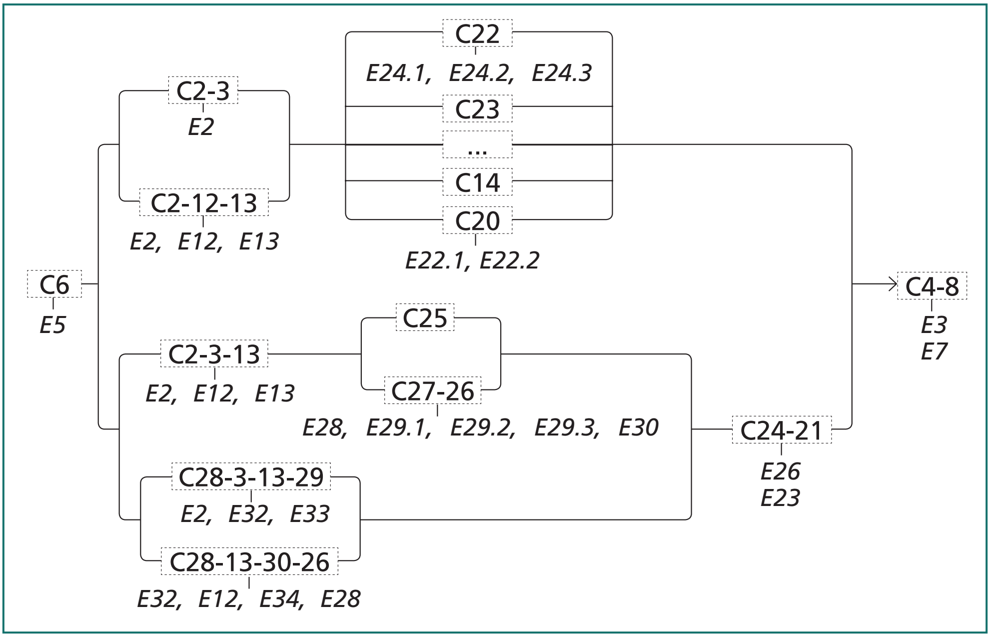


Figura 5: Grafo de nuestro objetivo de aprendizaje.

Grafo del objetivo de aprendizaje

El grafo de nuestro objetivo de aprendizaje muestra las diferentes capacidades que deben activarse en un alumno cuando este ha aprendido a traducir expresiones del lenguaje natural al algebraico y de los errores en los que puede incurrir cuando no se ha producido el aprendizaje. Aquel que se obtiene a partir del análisis de errores está conformado por la reunión de los grafos de todos los caminos que pronosticamos para las tareas del test y puede verse en la figura 5.

La rama superior representa las capacidades relacionadas con la terminología que deben desarrollar los alumnos (los lados en paralelo C22, C23, etc. muestran capacidades y errores referidos al vocabulario), mientras que en la rama inferior los dos caminos paralelos de abajo describen capacidades relacionadas con la geometría. Al igual que en

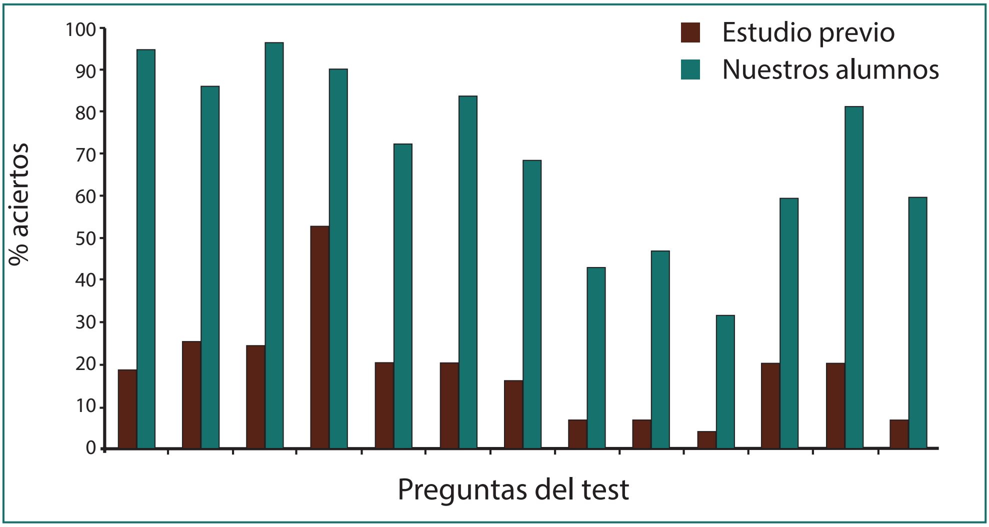


Figura 6: Comparativa entre los porcentajes de respuestas correctas entre los alumnos del estudio previo y los alumnos que siguieron la THA.

la Ilustración 4 (derecha), se observan las dos estrategias útiles para resolver las tareas de contexto geométrico. El resto de capacidades deben activarse en ambas ramas.

Este grafo constituye una herramienta efectiva para evaluar cualquier actividad que queramos proponer en relación al objetivo de aprendizaje. Para ello, debemos observar qué capacidades se activan a la hora de realizar la tarea y compararlas con las secuencias de capacidades incluidas en los posibles caminos del grafo. De esta manera seleccionamos las tareas de instrucción de nuestra THA, que pueden consultarse en Amador (2015).

PUESTA EN PRÁCTICA Y REFORMULACIÓN DE LAS HIPÓTESIS

Una vez trabajadas en el aula las tareas de instrucción, observamos la incidencia de los errores de que motivaron nuestro estudio, ya que tanto el éxito de nuestra investigación como la reformulación de nuestras hipótesis dependen de la corrección de los errores. A continuación, resumimos la comparación entre las respuestas de los alumnos que trabajaron a partir de las tareas de la THA y las de los alumnos del estudio previo (que se expone más extensivamente en Amador, 2015).

Resultados de los alumnos que siguieron nuestra instrucción

Ante la cuestión de si nuestra THA incrementa el número de respuestas correctas, observamos que nuestro alumnos dan un número mayor de respuestas correctas que los alumnos del estudio previo en todas las tareas, como puede verse en la figura 6.

Además de un aumento significativo del número de respuestas correctas, vemos una disminución de tareas sin responder y una menor variabilidad en los errores cometidos: hay menos tipos diferentes de errores y cada uno de ellos aparece con menor frecuencia. También observamos la desaparición casi absoluta de respuestas numéricas y una mejora moderada en el uso de la terminología y de las actividades de contexto geométrico. No hemos detectado disminución de errores asociados a omisión de paréntesis o habilidades aritméticas.

Reformulación de las hipótesis

En vista de los resultados obtenidos, reescribimos las hipótesis sobre el aprendizaje de la siguiente manera:

- **Hipótesis 1R.** Unas tareas de instrucción que profundizan en el uso de letras para designar variables y en el uso de expresiones algebraicas como lenguaje previenen el error de buscar resultados numéricos.
- **Hipótesis 2R.** Unas tareas de instrucción que trabajan la traducción entre el lenguaje usual y las operaciones matemáticas ayudan a prevenir errores relacionados con la terminología.
- **Hipótesis 3R.** Unas tareas de instrucción que inciden en propiedades geométricas básicas ayudan a prevenir errores de formulación matemática en contextos geométricos.
- **Hipótesis 4R.** Unas tareas de instrucción que no trabajan de manera directa propiedades aritméticas no son suficientes para proporcionar una formación algebraica sólida.

CONCLUSIONES

La comprensión de cómo se produce el aprendizaje de unos contenidos matemáticos determinados está estrechamente relacionada con el diseño y optimización de las actividades de instrucción necesarias para propiciar dicho aprendizaje. En este trabajo, la dependencia docencia–investigación que induce el constructo Trayectoria Hipotética de Aprendizaje nos ha permitido estudiar cómo se produce el aprendizaje de las expresiones algebraicas en los alumnos de 1º E.S.O. conjugando la investigación sobre el aprendizaje y la labor de mejora docente. En este contexto los caminos de aprendizaje pueden ser una herramienta útil para caracterizar un objetivo de aprendizaje y materializar tareas que puedan servir para alcanzar dicho objetivo. El estudio de los errores que cometen los alumnos al realizar estas tareas nos permite conjeturar las capacidades asociadas a este tema y, por tanto, es un instrumento adecuado para concretar una THA.

La observación de los errores invita a pensar que los alumnos de educación secundaria presentan dificultades relacionadas con la terminología que afectan a su aprendizaje del lenguaje algebraico, pero no siempre están directamente relacionados con el álgebra, ya que los alumnos de nuestro estudio escriben incorrectamente palabras del lenguaje ordinario ("consecutivos", "cinco veces", por ejemplo) en términos de las operaciones asociadas (sumar uno o multiplicar por cinco, respectivamente), aplican de forma incorrecta fórmulas geométricas básicas y cometen errores a la hora de hacer cálculos complejos. En particular, omiten el uso de paréntesis cuando estos son necesarios.

La puesta en práctica de nuestra THA nos muestra que unas tareas de instrucción que hacen hincapié en el uso de las expresiones algebraicas, como traducción de frases del lenguaje natural al matemático, dan seguridad a los alumnos y reducen la cantidad y la variabilidad de los errores que cometen a la hora de formular situaciones dadas en lenguaje natural. En base a nuestro estudio, pensamos que se debería reforzar la terminología, las propiedades geométricas y, sobre todo, las habilidades aritméticas de los alumnos de 1º E.S.O. para que estos se puedan introducir de forma satisfactoria en el aprendizaje del álgebra.

REFERENCIAS

Amador, M. V. (2015). Una trayectoria hipotética de aprendizaje para las expresiones algebraicas basada en análisis de errores. (Trabajo Fin de Máster, documento no publicado). Universidad Complutense de Madrid. Recuperado el 5 de noviembre de 2015 de http://ugr.es/local/jmontejo/MVAmador_TFM2.pdf

Amador, M. V., Montejo-Gámez, J. y Ramírez, M. (2015). Análisis de errores y caminos de aprendizaje en la iniciación al álgebra para alumnos de 1º E.S.O. Comunicación presentada en las 17 JAEM, Cartagena, España.

Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A. G. y Ortiz, M. A. (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Madrid: Síntesis.

Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid, 2007. Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, 29 de mayo de 2007, número 126, pp. 48-139.

De la Vega, M. L. C., Valls, J. y Ciscar, S. L. (2007). Interacción y análisis de la enseñanza: aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. Investigación en la Escuela, 61, 5-22.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. Mathematical thinking and learning, 6(2), 105-128.

Gravemeijer, K. y van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. The Elementary School Journal, 109(5), 510-524.

Gómez, P., González, M. J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 18(3), 319-338.

Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. PNA, 1(2), 79-98.

Hidalgo-Carranza, Mª José (2002). Memoria del periodo de docencia e investigación del programa de doctorado "Enseñanza de las ciencias experimentales y de las matemáticas" (trabajo no publicado). Universidad de Extremadura.

Lupiáñez, J. L. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Tesis doctoral, Universidad de Granada. Granada.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. PNA, 3(1), 35-48.

Lupiáñez, J. L., Rico, L., Gómez, P. y Marín, A. (2005). Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Conferencia presentada en V Congresso Ibero-americano de Educaçao Matemática (CIBEM) (18-22 Jul 2005). Oporto, Portugal

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 29(1), 75-88.

Simon, M.A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. Mathematical thinking and learning, 6(2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. Journal for research in mathematics education, 6(3) 305-329.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria: Aportaciones de la investigación. Números, 77, 5-34.

Socas, M., Camacho Machín, M., Palarea Medina, M. y Hernández Domínguez, J. (1996). Iniciación al álgebra. Madrid: Síntesis

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 129-162.

ANEXO I: EJEMPLOS DE LOS ERRORES DE LOS ALUMNOS DEL ESTUDIO

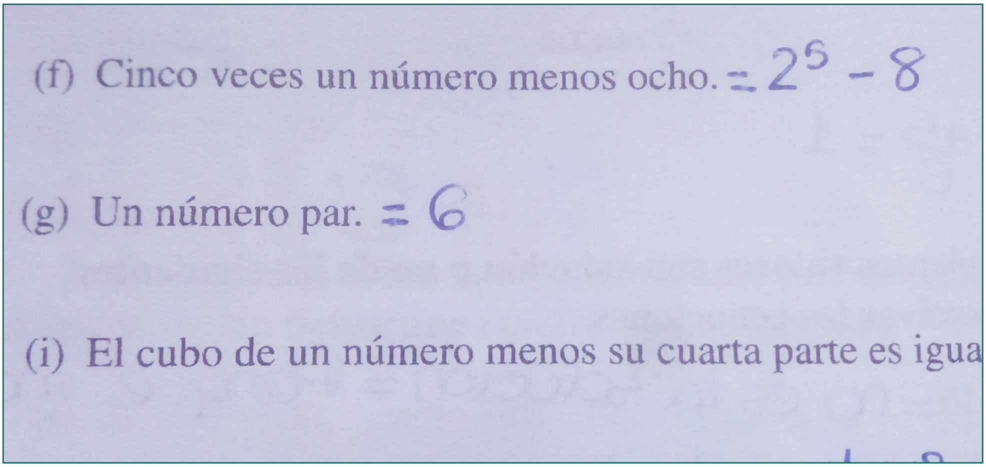


Figura I.1: Ejemplos de respuesta ante las tareas de traducir al lenguaje algebraico "la suma de dos números consecutivos" y "la suma de un número y su siguiente es 9".

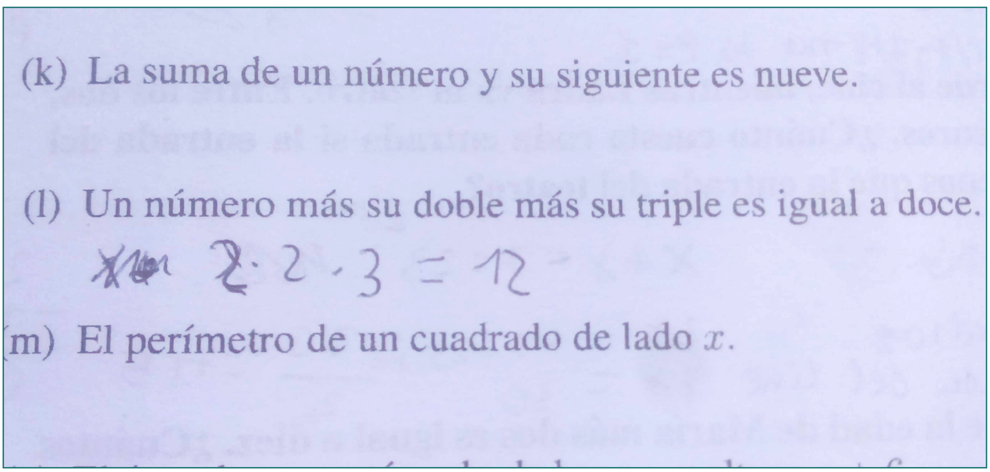
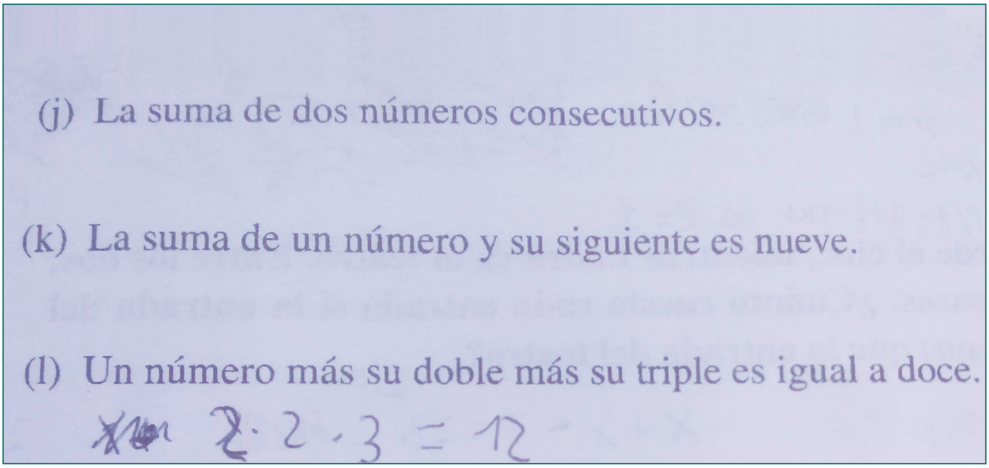


Figura I.2: Ejemplo de respuesta ante la tarea de expresar "un número más su doble más su triple es igual a doce".



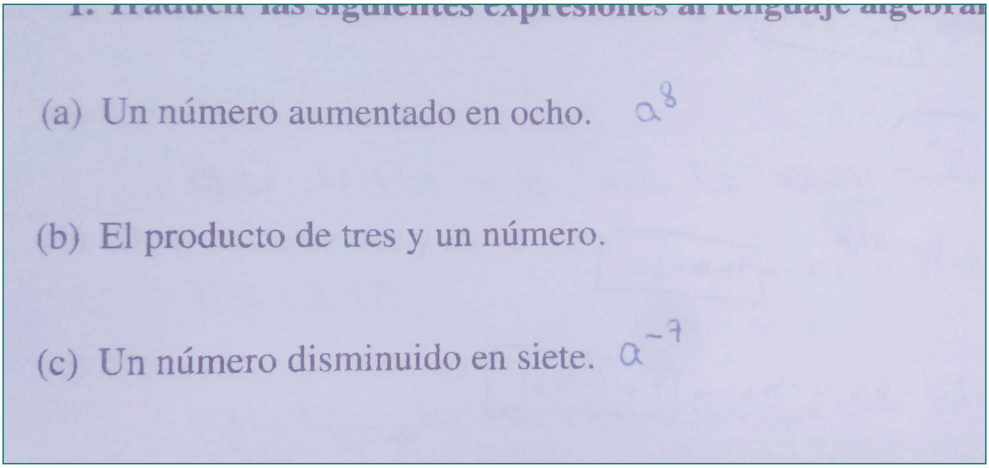
(j) La suma de dos números consecutivos.

(k) La suma de un número y su siguiente es nueve.

(l) Un número más su doble más su triple es igual a doce.

$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Figura I.3: Ejemplo de respuesta ante la tarea de traducir al lenguaje algebraico "la suma de dos números consecutivos".



1. Traducir las siguientes expresiones al lenguaje algebrai

(a) Un número aumentado en ocho. a^8

(b) El producto de tres y un número.

(c) Un número disminuido en siete. a^{-7}

Figura I.4: Ejemplos de otros errores de vocabulario.

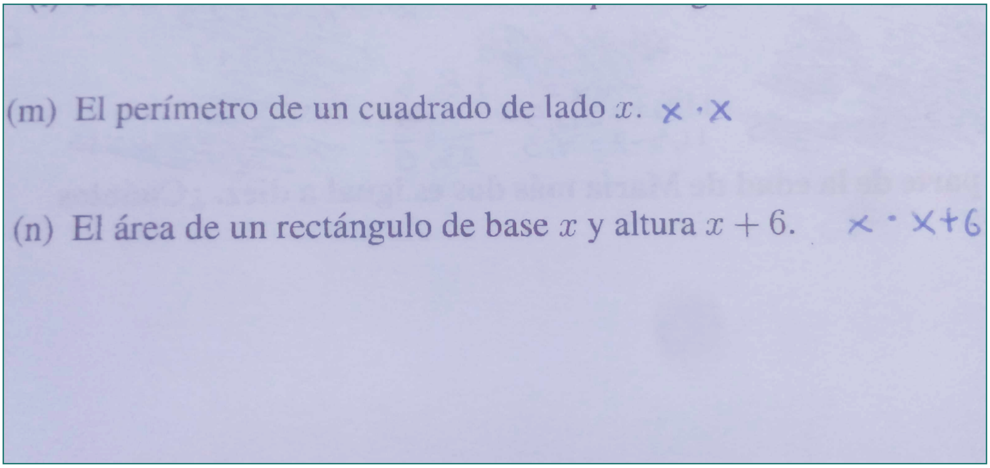


Figura I.5: Ejemplo de la omisión de paréntesis necesarios.

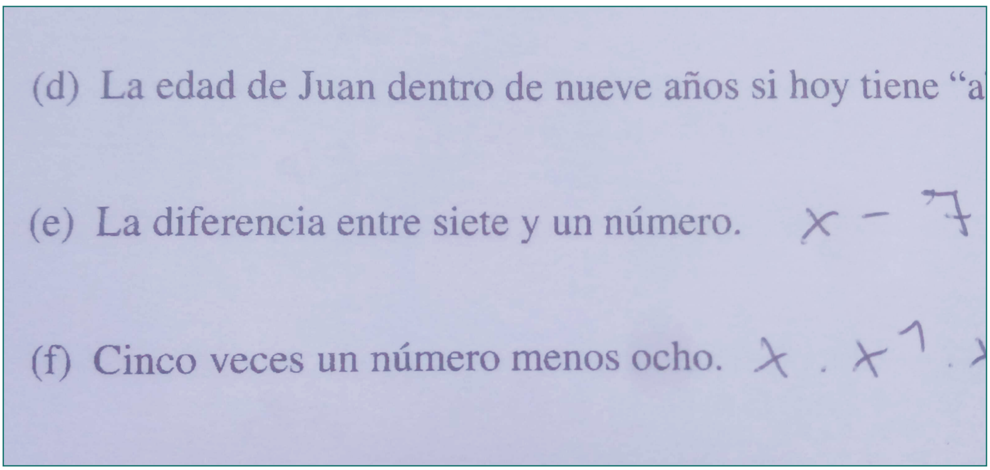


Figura I.6: Ejemplo de respuesta ante la tarea de traducir al lenguaje algebraico “la diferencia entre 7 y un número”.

ANEXO II: ERRORES Y CAPACIDADES (AMADOR, MONTEJO-GÁMEZ Y RAMÍREZ, 2015)

Errores

- E1: No asocia "aumentar" con la operación de sumar.
  - E1.1: Asocia "aumentar" con la operación de multiplicar.
  - E1.2: Asocia "aumentar" con la operación de elevar a cierta potencia.
  - E1.1: Asocia "aumentar" con el signo + pero no con la operación de sumar.
- E2: No utiliza letras para designar cantidades indeterminadas.
- E3: Ignora parte de la expresión del lenguaje natural.
- E4: No asocia "disminuir" con la operación de restar.
  - E4.1: Asocia "disminuir" con la operación de dividir.
  - E4.2: Asocia "disminuir" con la operación de elevar a potencias negativas.
  - E4.3: Asocia "disminuir" con el signo - pero no con la operación de restar.
  - E4.4: Asocia "disminuir" con una raíz.
  - E4.5: Asocia "disminuir" con elevar.
- E5: Proporciona resultados numéricos.
- E6: No utiliza operaciones aritméticas.
- E7: Escribe cualquier expresión algebraica en forma de ecuación.
- E8: No asocia "producto" con la operación de multiplicación.
  - E8.1: Asocia el producto con la suma.
  - E8.2: Asocia el producto con el cociente.
- E9: Asocia "y" con la operación de sumar.
- E10: No utiliza el producto como una operación binaria.
- E11: No asocia "dentro de" a la operación de sumar.
  - E11.1: Asocia "dentro de" a la operación de multiplicar.
  - E11.2: Asocia "dentro de" a la operación de elevar.
  - E11.1: Asocia "dentro de" a la operación de restar.
- E12: Añade letras que no deben estar.
- E13: Cambia la letra dada por otra.
- E14: No asocia "diferencia" con la operación de restar.
  - E14.1: Asocia "diferencia" con la operación de sumar.
  - E14.2: Asocia "diferencia" con el signo "menos" pero no con la operación de restar.
  - E14.3: Asocia "diferencia" con la operación de dividir.
  - E14.4: Asocia "diferencia" con la operación de multiplicar.
  - E14.5: Utiliza la palabra "diferencia" como equivalente a "distinto".
- E15: Cambia el orden de minuendo y sustraendo en una diferencia.
- E16: No asocia "cinco veces" con multiplicar por cinco.
  - E16.1: Asocia "cinco veces" con potencia.
  - E16.2: Asocia "cinco veces" con otras operaciones.
- E17: No asocia "número par" a multiplicar por dos.
  - E17.1: Asocia "número par" a elevar al cuadrado.

  - E17.2: Asocia "número par" a sumar dos.
- E18: Escribe la cuarta parte de un número como 1/4.
- E19: No asocia el cubo con la potencia tres.
  - E19.1: Asocia el cubo de un número con el cuadrado de un número.
  - E19.2: Asocia el cubo con otras operaciones.
- E20: No asocia "la cuarta parte de un número" con dividir entre cuatro.
  - E20.1: Asocia "la cuarta parte" con la potencia cuarta.
  - E20.2: Asocia "la cuarta parte" con otras operaciones.
- E21: Cambia la información dada.
- E22: No escribe correctamente dos números consecutivos.
  - E22.1: Toma "números consecutivos" como dos números iguales.
  - E22.2: Toma "números consecutivos" con otras operaciones..
- E23: Concatena operaciones numéricas de forma equivocada.
- E24: No escribe "el doble de un número" de manera correcta.
  - E24.1: Identifica "el doble de un número" con el número dos.
  - E24.2: Identifica "el doble de un número" con el cuadrado de ese número.
  - E24.3: Identifica "el doble de un número" con otras operaciones.
- E25: No escribe "el triple de un número" de manera correcta.
  - E25.1: Identifica "el triple de un número" con el número tres.
  - E25.2: Identifica "el triple de un número" con el cubo del número.
  - E25.3: Identifica "el triple de un número" con otras operaciones.
- E26: Opera mal.
- E27: Escribe el perímetro de un cuadrado incorrectamente.
  - E27.1: Multiplica los cuatro lados del cuadrado para calcular el perímetro de un cuadrado.
  - E27.2: Escribe el área del cuadrado para calcular el perímetro de un cuadrado.
  - E27.3: Escribe dos por el lado para calcular el perímetro de un cuadrado.
  - E27.4: Escribe otras operaciones para calcular el perímetro de un cuadrado.
- E28: No escribe paréntesis en productos en los que algún factor es una suma.
- E29: Escribe incorrectamente la fórmula del área de un rectángulo.
  - E29.1: Escribe fórmulas sin sentido aparente en lugar de la fórmula del área de un rectángulo.
  - E29.2: Escribe el área del triángulo en lugar de la fórmula del área de un rectángulo.
  - E29.3: Escribe el perímetro del rectángulo en lugar de la fórmula del área de un rectángulo.
- E30: Escribe el perímetro cuando le preguntan por el área.
- E31: No escribe correctamente "el siguiente de un número".
  - E31.1: Toma el número y su siguiente como iguales.
  - E31.2: Toma "el siguiente de un número" como una variable independiente.
  - E31.3: Comete otros errores al escribir "el siguiente de un número".
- E32: Hace una descripción gráfica equivocada de una situación geométrica descrita en el lenguaje natural.
- E33: Escribe incorrectamente el perímetro de un cuadrado a partir de su representación gráfica.

- E34: Escribe incorrectamente el área de un rectángulo a partir de su representación gráfica.

Capacidades

Relacionadas con el vocabulario aritmético:

- C1: Denotar "aumentar" con la operación de sumar.
- C5: Denotar "disminuir" con la operación de restar.
- C9: Denotar "producto" con la operación de multiplicar.
- C10: Reconocer la función de "y" como conjunción (y no como suma).
- C11: Denotar "dentro de" con la operación de sumar.
- C14: Denotar la "diferencia" con la operación de restar.
- C16: Denotar"n veces" con la operación de multiplicar por n.
- C17: Denotar un "número par" con la operación de multiplicar por 2.
- C18: Denotar "la n-ésima parte" con dividir entre n.
- C19: Denotar "cubo" con una potencia de exponente 3.
- C20: Escribir "números consecutivos" como aquellos cuya diferencia es 1.
- C22: Denotar "el doble" con la operación de multiplicar por 2.
- C23: Denotar "el triple" con la operación de multiplicar por 3.
- C31: Denotar "siguiente" con sumar 1.

Relacionadas con el vocabulario geométrico:

- C25: Expresar adecuadamente la fórmula del perímetro de un cuadrado.
- C27: Expresar adecuadamente la fórmula del área de un rectángulo.
- C28: Representar gráficamente de forma adecuada una situación geométrica descrita en el lenguaje natural.
- C29: Expresar adecuadamente el perímetro de un cuadrado a través de la interpretación de un gráfico.
- C30: Expresar adecuadamente el área de un rectángulo a través de la interpretación de un gráfico.
- *Referidas a la concepción y manejo de expresiones algebraicas como lenguaje*:
- C2: Identificar cantidades desconocidas en un texto escrito en el lenguaje natural.
- C3: Emplear letras para representar cantidades desconocidas.
- C4: Incluir adecuadamente toda la información recibida.
- C7: Emplear las operaciones aritméticas como reflejo de su denominación en el lenguaje natural.
- C6: Utilizar las expresiones algebraicas como lenguaje en lugar de proporcionar resultados numéricos.
- C8: Utilizar las expresiones algebraicas como lenguaje en lugar de buscar "soluciones" a través del signo "=".

- C12: Utilizar solo una letra para describir cantidades desconocidas pero relacionadas.
- C13: Utilizar el mínimo número de letras necesarias al escribir las expresiones algebraicas.

Expresan habilidades aritméticas:

- C15: Respetar las propiedades de las operaciones involucradas al expresarlas.
- C26: Utilizar paréntesis para expresar productos en los que algún factor es una suma.
- C24: Operar correctamente.
- C21: Concatenar igualdades de forma adecuada.