

## Reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas en la enseñanza de las funciones

María Burgos Navarro  
Pablo Flores Martínez  
Universidad de Granada

**Resumen:** *Son muchos los motivos por los que los procesos reflexivos deberían formar parte de la práctica docente. El profesor de matemáticas se encuentra a diario con situaciones problemáticas que deberá afrontar tomando decisiones fundamentadas que afectarán a su desempeño educativo y requerirán analizar su comportamiento y reorientar la práctica docente de la forma más eficaz y responsable.*

*En este artículo presentamos una experiencia llevada a cabo como parte de un curso del máster de Didáctica de la Matemática, cuyo objetivo fue mostrar a los docentes el proceso reflexivo como vía de desarrollo profesional que les capacite para revisar su propia práctica docente. Describimos el proceso reflexivo en el contexto-problema de la enseñanza de las funciones en último curso de bachillerato.*

**Palabras clave:** *formación de profesores, profesor de matemáticas reflexivo, funciones.*

## Reflection in mathematics teacher practices on functions education

**Abstract:** *There are many reasons that motivate the use of reflection processes as part of the teaching practice. Mathematics teachers fall almost every day into problematic situations that must resolve by taking fundamental decisions. These decisions will interfere with their teaching duties, and will require to analyze their own behaviour and to reorient their instructional practice in a more efficient and responsible way.*

*In this manuscript we present an experiment developed as part of a course in the Master "Didáctica de la Matemática". The aim of the experiment was to show the teachers the reflection process as professional experience that allows them to revise their own teaching abilities. We describe the reflection process in the scope of teaching functions in the last academic course of high school.*

**Keywords:** *teacher training, reflective mathematics teacher, functions.*

## INTRODUCCIÓN

En el desempeño de la labor educativa, el profesor debe afrontar continuamente situaciones imprevistas para las que no tiene una respuesta inmediata ni pre-establecida. Los estudiantes son diferentes como individuos, con intereses, necesidades y limitaciones distintas. Con la práctica docente, el profesor, aumenta su experiencia y su conocimiento profesional. Este conocimiento debe estar fundamentado, de cara a que el profesor disponga de criterios para diferenciar conocimientos subjetivos y conocimientos institucionalizados, tanto de sus alumnos como de los propios contenidos matemáticos y de su forma de enseñanza.

En esta línea adquiere gran importancia incentivar la tarea reflexiva del docente, que acepte esta práctica como parte de un proceso continuo de aprendizaje, en el que se revisen creencias, se tome distancia de los problemas y se consideren nuevas perspectivas que le lleven a reformular sus dudas o preocupaciones como profesional responsable.

En este trabajo presentamos un proceso reflexivo llevado a cabo en el contexto de la asignatura Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor de Matemáticas del máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

El ciclo de reflexión desarrollado en el curso, comenzó con la formulación precisa, por parte de cada uno de los profesores participantes, entre ellos la primera autora, de situaciones problemáticas que habían supuesto un conflicto o dificultad real en algún momento de su experiencia docente. Se establecía de la forma más clara posible el contexto, el sujeto afectado (alumno, profesor), la acción (aprendizaje, enseñanza) y finalmente la cuestión que respondía al dilema profesional.

El segundo paso en un proceso de reflexión requiere un distanciamiento que permita clarificar los presupuestos que han llevado al profesor a formular su problema profesional. Se trata pues de desentrañar nuestra postura, filtrando el aspecto emocional y evitando cualquier predisposición que dificulte la aceptación de aportes externos. En este momento del ciclo implementado, se requería la colaboración de los demás profesores a través del Foro, de forma que cada participante debía indicar una creencia que apreciaba que estaba influyendo en el planteamiento del problema de cada uno de sus compañeros, formulándola mediante la expresión: “*Yo creo que... cree que....*”.

Revisar las creencias que otros compañeros intuyen que condicionan nuestra percepción del problema, analizar con cuál de ellas nos sentimos identificados, cuáles compartimos o cuáles nos hacen dudar, porque no hemos sido conscientes de que influyen en nuestra visión personal del problema, nos permite tomar distancia del mismo.

En este momento, se trataba de buscar información clara, significativa, en la que se apreciara aspectos novedosos que ayudasen a contemplar el problema desde una postura próxima a la percepción personal, pero de una forma amplia, que ayudase a completar nuestra visión y acercarnos a una solución del problema.

También en esta fase del ciclo reflexivo, se produjo una interacción a través del Foro, donde otros participantes aportaron sugerencias de textos, teorías o experiencias personales que pudieran ayudarnos a confrontar el problema con otras perspectivas.

Cada participante pudo recoger las aportaciones que le habían sugerido sus compañeros a través de la plataforma y finalmente reformular su problema profesional, como consecuencia del ciclo reflexivo realizado.

A continuación describimos brevemente el marco teórico en que se apoya este trabajo, para describir después, los resultados de las distintas etapas del ciclo recorrido para profundizar sobre el problema profesional planteado por la primera autora del trabajo. Por último, examinamos las aportaciones de este ciclo de reflexión a nuestro desarrollo profesional.

## **REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS**

Como hemos mencionado antes, la reflexión es una potente herramienta en la formación y desarrollo profesional de los docentes, ya que requiere que mediten de forma sistemática sobre su práctica e indaguen sobre la interpretación de sus problemas profesionales desde las distintas aportaciones procedentes de la didáctica de la Matemática. El profesor reflexivo presenta una abierta disposición a enfrentar los conflictos que acontecen en su vida profesional, por medio de la revisión continua de su práctica.

La concepción de profesional reflexivo procede de las ideas de Donald Schön. Para Schön (1992) el profesional afronta situaciones problemáticas de su práctica, mediante procesos de distanciamiento y toma de decisiones que no pueden explicarse exclusivamente a partir de su conocimiento teórico. Este proceso, que consiste tanto en una reflexión “en la acción” como “sobre su acción”, es el que Schön destaca como específico del comportamiento práctico responsable. La reflexión en la acción a que hace referencia Schön, es un proceso sistemático que permite actuar frente a un evento que necesita solución en un momento dado, por medio de la toma de decisiones basadas en experiencias anteriores sobre situaciones similares o relacionadas. Por otro lado, la reflexión sobre la acción, sucede después y alejada de ésta, lo que aporta tiempo y distancia para el análisis de la situación antes de tomar decisiones. Con esta actuación reflexiva, el práctico actúa de manera sistemática y responsable.

El profesor es un profesional práctico, tanto por la inmediatez de su toma de decisiones para afrontar los problemas de su práctica, como por la importancia de sus actuaciones frente a los logros. Por tanto, procede afrontar el desarrollo profesional del profesor como un proceso de creación de hábitos de reflexión, para aprender desde el desempeño práctico de su función docente, adquiriendo nuevas formas de actuar que le permitan dar solución a los conflictos que motivaron su análisis (Perrenoud, 2004).

A partir de las ideas de Perrenoud (2004), Flores (2007) señala como características del profesor reflexivo:

- percibe situaciones de su práctica que necesiten otra manera de actuar;
- se distancia de esas situaciones para poder analizarlas;
- explicita y examina los elementos que condicionan esas situaciones, considerando los que derivan de sus creencias.
- busca otras formas de interpretar la situación, recurriendo a diferentes fuentes (compañeros de trabajo, documentos oficiales, libros de textos, investigaciones, etc.)

Para que el profesor llegue a ser un profesional reflexivo, se han planteado diversos recursos desde la formación docente. Smyth (1991) propone un esquema de acción reflexiva en un ciclo compuesto de cuatro fases:

1. Definir el problema con precisión.
2. Indagar que teorías propias subyacen al mismo.
3. Confrontar las creencias y planteamientos conscientes en el problema con otras formas de contemplarlo.
4. Reconstruir la cuestión.

Si bien el Ciclo de Smyth parece focalizar la atención sobre la actuación individual del profesor, es interesante considerar que se puede facilitar su ejecución mediante la realización conjunta con otros profesionales docentes. Es por eso que, durante un curso de investigación sobre el conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, llevamos proponiendo facilitar que los participantes realicen un ciclo de Smyth a partir de un problema profesional (Flores, 2007). Este proceso comienza cuando el profesor identifica un problema profesional surgido en el desempeño de su práctica. Para poder ser afrontado y compartido por los demás, el problema debe ser descrito de la forma más precisa posible. Después, en la fase de información, se acota el problema, haciendo que quien lo plantea indague sobre los presupuestos y teorías prácticas que sustentan su interpretación. La confrontación requiere la participación de otros que ayuden al práctico reflexivo a valorar otras formas de entender la situación. El procesamiento de la información recibida, siempre filtrado por la funcionalidad que el profesor reflexivo le adjudica, lleva a terminar el ciclo formulando nuevas formas de considerar el problema y elaborando propuestas para posibles soluciones o actuaciones, que estarán sujetas a revisión a través de nuevos ciclos como el descrito.

## **EL CICLO DE REFLEXIÓN: ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES**

En esta sección describimos la experiencia de la primera autora durante el taller de reflexión, por lo que estará redactado en primera persona.

### **Definición del problema profesional**

Durante mi experiencia docente, he podido comprobar, de forma habitual que, muchos alumnos al final del bachillerato o incluso al llegar a los primeros cursos de carrera técnica universitaria, desligan las funciones y sus propiedades de sus representaciones gráficas. Para ellos, es más o menos sencillo realizar cálculos a partir de su expresión analítica, es decir, pueden reconocer o determinar el dominio de la función, o sus asíntotas, obtener su función derivada y a partir de ella determinar sus extremos relativos e intervalos de monotonía, etcétera, pero, sin embargo, la representación gráfica de las funciones les resulta una “tarea ardua” y con frecuencia, es la parte “olvidada” en los exámenes. Por otro lado, tienen serias dificultades para reconocer determinadas propiedades a partir de una representación gráfica; responder a las preguntas “¿qué tipo de función puede responder a esta gráfica?” o “¿cuál es el dominio y la imagen de la función con esta representación gráfica?” puede tener un alto índice de fracaso.

El primer momento del ciclo reflexivo se refiere a la definición clara de la situación que se va a analizar, detallando para ello, el sujeto al que afecta y a la acción involucrada. A raíz de la actuación práctica que acabamos de relatar, establecemos:

Contexto: Enseñanza de las funciones. Los alumnos de último curso de bachillerato, saben realizar cálculos con la expresión analítica de una función (determinar su dominio, imagen, asíntotas, límites, monotonía, máximos y mínimos...). Sin embargo existe una desconexión con la representación gráfica de la misma. Con frecuencia, no saben representarla o no identifican en la gráfica, lo que han obtenido sobre la expresión analítica de la misma.

Sujeto: Profesor.

Acción: Enseñanza.

Cuestión: ¿Cómo puedo explicar las funciones para que no exista esa ruptura y que el alumno reconozca en la representación gráfica los elementos de estudio?

### Distanciarse y mirar hacia atrás para clarificar presupuestos.

En el segundo momento del ciclo de reflexión, para delimitar el problema y analizar las concepciones o presupuestos que subyacen a nuestra interpretación del mismo, los compañeros formularon ciertas creencias que, a su juicio, estaban influyendo en el problema que había planteado. A continuación reflejamos las creencias manifestadas (cuadro 1).

*Yo creo que María cree que:*

- Los alumnos de bachillerato mecanizan el procedimiento y no comprenden los conceptos, por eso no reconocen las características de la función en la representación de la misma
- Hay que dar mayor importancia de la que se da al estudio práctico en el estudio de funciones.
- Los alumnos:
  - estudian la función de manera diferente a partir de la expresión analítica que a partir de la gráfica,
  - estudian los elementos en la función analítica, pero no saben representarlos en la gráfica,
  - determinan de manera mecánica los elementos de la función en su expresión gráfica.
- Los alumnos dominan la representación gráfica de funciones en Bachillerato.
- Los conceptos se deben enseñar apartados de sus representaciones.
- Los estudiantes no saben interpretar gráficas aunque sepan trabajar de forma analítica las funciones.
- Los alumnos deben saber representar una función a partir de sus propiedades y deben obtener sus propiedades a partir de la representación gráfica.
- Los alumnos mecanizan los procedimientos para el estudio de funciones pero, en realidad, no reconocen el verdadero significado de cada concepto de estudio. Por lo tanto, no lo identifican con la gráfica

Después de haber leído las creencias que habían aportado los compañeros, decidí distribuir las tres categorías siguientes, y obligarme a explicitar los argumentos que me hacen tomar esta postura, con lo que estaré poniendo en claro las creencias con las que afronto el problema:

- a) las que descarto, porque no las siento;
- b) las que acepto, porque efectivamente “las creo”, y
- c) las que me hacen dudar o influyen en mi forma de ver el problema (antes y después).

Descarto:

- *Que los alumnos dominan la representación gráfica de funciones en Bachillerato.* Creo que “dominar la representación gráfica”, supone ser capaz de, a partir de los cálculos derivados de la expresión analítica de la función, elaborar la representación de ésta y distinguir sus características notables: dominio, imagen, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, curvatura, etc. También, supone reconocer en una determinada gráfica, estos elementos sin disponer de su descripción algebraica.
- *Que los conceptos se deben enseñar apartados de sus representaciones.* Creo que un concepto se aprende si se puede representar o cambiar entre un sistema de representación y otro. Es decir, un alumno habrá comprendido el concepto de límite si, como procedimiento, puede calcularlo a partir de la expresión de la función, y como concepto puede verlo en la gráfica de ésta.

Creo que (en este caso unifico varias aportaciones de mis compañeros que, de una forma u otra, aluden al mismo presupuesto):

- *Los estudiantes mecanizan los procedimientos y no saben representar o reconocer (interpretar) las características de la función en la gráfica.* Esta creencia, que comparto, se basa en mi experiencia como docente, en lo que he comprobado que son capaces de hacer los estudiantes y de las dudas que ellos me han consultado.
- *No comprenden los conceptos, por eso no reconocen las características de la función en la representación de la misma.* Como he mencionado antes, no hay comprensión de un concepto si no se puede representar y traducir de un sistema de representación a otro.

Me hacen dudar (porque en el momento de formular el problema no las había pensado así):

- *Los alumnos estudian la función de manera diferente a partir de la expresión analítica que a partir de la gráfica.* Esta afirmación no puedo plantearla como parte de mis presupuestos, pero tampoco puedo rechazarla, porque me hace reflexionar y formularme nuevas preguntas que no había tenido en cuenta al plantear mi problema profesional: ¿Qué ven los alumnos detrás de la expresión analítica de una función? ¿y detrás de la gráfica?, ¿cuál es su concepto de función?
- *Los alumnos determinan de manera mecánica los elementos de la función en su expresión gráfica.* En ningún momento antes me había planteado que se pudiera interpretar mecánicamente una gráfica. En la situación problema, me cuesta identificar la componente procedimental a la hora de determinar características de una función a partir de su representación. ¿Realmente puede ser así?
- *Hay que dar mayor importancia de la que se da al estudio práctico en el estudio de funciones.* Sin duda estoy de acuerdo con esta afirmación, pero, no me había

planteado que estuviera detrás de la desconexión entre la expresión analítica de la función y la representación gráfica de la misma. Ahora bien, ¿ayudaría dar más presencia al estudio práctico a evitar este problema?

Recabar información, indagar motivos para aceptar o rechazar las creencias, nos lleva a distanciarnos de cómo afrontamos la enseñanza del contenido matemático, en nuestro caso, las funciones, y nos predispone a considerar razones por las que existe una ruptura entre la expresión analítica y la gráfica de las funciones.

## Confrontación

El próximo momento se refiere a la confrontación, que en términos de Smyth (1991) supone la percepción de otras prácticas y teorías, buscando responder a la pregunta *¿Qué otras formas hay de percibir esta práctica?*

Esta confrontación se realiza mediante un proceso de apertura hacia otras experiencias, pero siempre desde la expectativa de darles sentido. Por tanto, no basta con el estudio de la literatura (libros, artículos de investigación), en parte sugerida por los compañeros, sino que se trata de una lectura crítica, que sólo acepta aquellas aportaciones que resultan sugerentes al práctico.

A continuación resumo las apreciaciones más importantes que he extraído de las diferentes lecturas propuestas: Arce y Ortega (2013), Blázquez y Ortega (2001), Leinhart et al (1990), Pecharromán y Ortega (2010), Shell Centre (1990).

- El estudio y representación de funciones requiere dos procesos no necesariamente consecutivos, que tienen que coordinarse. Por un lado el paso de la expresión algebraica a la determinación de características -con repercusión gráfica; por otro, la identificación de la repercusión gráfica en el registro algebraico, y la coordinación entre los aspectos parciales.
- La interpretación de las características de una función a partir de su gráfica es una actividad decisiva para lograr la coordinación anterior, que se realiza de manera poco frecuente en la enseñanza.
- Motivar por parte de los estudiantes el uso de estrategias basadas en la intuición, en el sentido común y la interpretación de situaciones de la realidad, ayuda a los estudiantes a mirar la gráfica de forma global como una expresión de la relación entre dos cantidades mutuamente cambiantes.
- Poder interpretar con soltura una gráfica, apreciarla como un registro que suministra información sobre el fenómeno, más allá de considerarla solo como la plasmación de las cualidades obtenidas mediante el proceso formal de obtención de los elementos que se usan para estudiar las funciones (dominio, continuidad y asíntotas, extremos, monotonía, curvatura,...) requiere de una serie de pasos de gran complejidad cognitiva: diferenciar elementos aislados y comparar unos con otros en funciones discretas, apreciar variaciones conjuntas, extremos y sus transiciones, en procesos continuos, etc. Es importante tomar conciencia de qué información en una gráfica requiere por parte del aprendiz, haber interiorizado esta serie de pasos.

- Algunas de las incorrecciones en las representaciones gráficas, pueden reflejar deficiencias en el esquema conceptual que el alumno tiene de conceptos como el de función, asíntota, o las características de determinados tipos de funciones. Los alumnos, necesitan disponer de muchas oportunidades para discutir ideas y errores conceptuales, presentar pruebas y discutir explicaciones, de cara a desarrollar las destrezas interpretativas necesarias.

## Reformulación

En esta última fase, me planteo ¿de qué otras formas puedo enseñar las funciones a partir de las creencias manifestadas y en base al estudio de las referencias propuestas?

En este momento de planificación de mejoras, de reconstrucción de la práctica profesional, como consecuencia del análisis reflexivo de las etapas anteriores, considero importante:

- evitar tratar las representaciones gráficas y algebraicas como sistemas simbólicos distintos y apoyarme en ambas desde el inicio para construir el concepto de función.
- usar la representación gráfica como medio para generar la visualización inicial de los conceptos, de modo que los estudiantes vayan incorporando los nuevos conceptos asociados a las funciones a través de la conjunción de los distintos sistemas de representación.
- plantear tareas donde se enuncien propiedades de una función exclusivamente a través de su representación gráfica
- dar mayor peso en mi práctica a la interpretación cualitativa de gráficos que modelizan situaciones reales, buscando en los estudiantes el interés por la representación gráfica, e incentivando en ellos el uso de estrategias intuitivas descriptivas.
- incorporar en mi práctica docente software, como puede ser GeoGebra, que facilite la construcción y estudio de las representaciones gráficas, evitando las limitaciones que conlleva una enseñanza basada únicamente en la representación con lápiz y papel.

Finalmente, la cuestión inicial basada en la creencia de que

*los estudiantes mecanizan los procedimientos y no comprenden los conceptos, de forma que no pueden representar o reconocer (interpretar) las características de la función en la gráfica,*

adquiere una nueva formulación:

*¿cómo puedo trabajar en clase las funciones para que la visualización permita la interpretación inicial de los conceptos y su definición formal se alcance como parte de un aprendizaje significativo de los mismos a través de los distintos sistemas de representación?*

## CONCLUSIONES

No cabe duda de la importancia de la reflexión para la práctica profesional del docente (Flores, 2000 y 2007; Schön, 1992). Como afirma Smyth (1991, p. 293), los profesores “pueden utilizar sus propias capacidades para formular e implementar programas de cambio”.

El profesor de Matemáticas reflexivo tiene la capacidad de analizar su propia práctica docente, distinguiendo el sistema de creencias que fundamentan su actuación. Extrae de la Didáctica de las Matemáticas, de forma crítica y fundamentada, los aspectos que le resultan más apropiados a la hora de explicar sus actuaciones.

En este artículo, hemos presentado el proceso de reflexión sobre un problema profesional de la primera autora, bajo la supervisión del segundo autor y profesor de la asignatura del máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en relación a la enseñanza de las funciones para alumnos de segundo curso de bachillerato.

El proceso de reflexión aborda la difícil tarea de confrontar al profesor con nuevas formas de ver los problemas, manteniendo su idiosincrasia (su carácter de profesional práctico, no sujeto a ser reproductor de teorías), pero a la vez, permitiéndole avanzar en su conocimiento y desarrollo profesional.

La experiencia desarrollada en el taller reflexivo, sin duda cubre estas expectativas y para nosotros ha sido muy significativa. Reflexionar sobre nuestras propias creencias y contar con la colaboración de compañeros docentes con experiencias similares (o no), concepciones diversas y puntos de vista distintos, para alejarnos de nuestras circunstancias y observar cómo se ve desde fuera nuestro problema, ha sido una práctica novedosa que nos ha favorecido tanto como sujeto activo del ciclo de reflexión, como colaborador al “enunciar lo que yo creo que cree mi compañero”.

El proceso de reflexión persigue la conjunción operativa entre el conocimiento práctico, necesario para la acción, y el conocimiento teórico que sirve de argumento al práctico. Esto requería por nuestra parte, filtrar los aportes teóricos y seleccionar lo que apreciábamos como valioso, a través de una lectura crítica que lo aproxime a nuestra propia actuación.

En suma, del ciclo de reflexión salimos con una nueva formulación del problema, en mi caso, cómo establecer el sistema de representación gráfica como medio de aprendizaje, y una propuesta fundamentada de posibles soluciones a nuestro problema profesional o vías de actuación, que de nuevo podrían dar lugar a un futuro ciclo de reflexión.

Pero el conocimiento profesional que adquirimos con el taller de reflexión, no se limita únicamente a nuestro problema profesional, ya que se completa con la puesta en común por parte de los participantes del curso de las experiencias sobre sus propios ciclos de reflexión (desde la formulación de sus problemas prácticos hasta la reformulación de los mismos).

## REFERENCIAS

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 8(2), 61-73.

- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. Vol 4. N°3, 219-236. *RELIME*. ISSN: 1665-2436. México DF
- Shell Centre for Mathematical Education (1990). *El lenguaje de las funciones y las gráficas*. Madrid, MEC, Servicio Editorial Publicaciones del País Vasco.
- Flores, P. (2000) Reflexión sobre problemas profesionales surgidos durante las prácticas de enseñanza. *Revista EMA*, 5(2), 113-138.
- Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *Revista PNA*, 1(4), 139-158.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Pecharromás-Gómez, C. (2009). *Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas* (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid, Castilla y León.
- Pecharromás, C. y Ortega, T. (2010) Diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. *Enseñanza de las ciencias*, 28(2), 215-226.
- Perrenoud, J. P. (2004). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar*. Barcelona: Grao.
- Schön, D. (1992). Formar profesores como profissionais reflexivos. En A. Nóvoa (Org.). *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Dom Quixote.
- Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista Educación*, 294, 275-300.