Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2019, nº 102, 7-23*

La desviación media: estrategias empleadas por estudiantes de secundaria en una situación didáctica

Jocelyn D. Pallauta
Universidad de Granada

Daniela Bonilla
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Daniela Olivares
Universidad de La Serena

Resumen: *Se presentan las estrategias puestas en juego por un grupo de estudiantes chilenos de secundaria (16 a 17 años), para la toma de decisiones en torno a la representatividad de las medidas de centralización. El diseño de la situación didáctica y su aplicación están fundamentadas en la Teoría de Situaciones Didácticas. El análisis de las respuestas entregadas informa sobre las debilidades evidenciadas en el lenguaje y argumentos empleados en la resolución, además de las ideas intuitivas que poseen sobre la dispersión, que permitirían el estudio y profundización de otras medidas de dispersión como la varianza y la desviación estándar.*
Palabras clave: *Situación didáctica, medidas de dispersión, enseñanza secundaria.*

The average deviation: strategies used by secondary students in a didactic situation

Abstract: *We present the strategies put into play by a group of Chilean secondary school students (16 to 17 years old), to make decisions about the representativeness of centralization measures. The design of the didactic situation and its application are based on the Theory of Didactical Situations. The analysis of the answers informs about the weaknesses evidenced in the language and arguments used in the resolution, besides the intuitive ideas that they have about dispersion, which would allow them to study and deepen in other measures of dispersion such as variance and standard deviation.*
Keywords: *Didactical situation, measures of statistical dispersion, secondary education*

ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

La estadística se ha convertido en una herramienta fundamental en el ámbito personal, profesional y en la investigación, dada la cantidad de información con la que los ciudadanos deben convivir en lo cotidiano (Batanero, Godino, Vallecillos, Green y Holmes, 1994). Por este motivo resulta necesario poseer conocimientos básicos para el análisis e interpretación de información, con el objeto de lograr una adecuada toma de decisiones.

En el marco del modelo que proponen Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013) para el desarrollo de un razonamiento estadístico, basado en diferentes autores, se destaca la idea de la variación, entendiendo que la variabilidad aleatoria es un concepto importante en la Estadística, dado que el razonamiento estadístico posibilita el detectar las fuentes que la producen. Es decir, el razonamiento estadístico persigue explicar y establecer las causas de la variación para a partir de allí poder realizar inferencias y predicciones, por lo que resulta de importancia que el estudiante tenga conocimientos que le permitan tener estas competencias en situaciones determinadas.

Las investigaciones apuntan a la importancia del rol de la variación en la estadística. Wild y Pfannkuch (1999) sostienen que la variación se constituye en un aspecto primordial, dado que esta noción se conecta con diferentes conceptos estadísticos en el ámbito del análisis exploratorio de datos, como la dispersión, centralización y distribución. Por otro lado, Cobb y Moore (1997), advierten la importancia de tener presente que cuando se calcula una medida de dispersión, los datos no son sólo números, sino que obedecen a un contexto, en el que se requiere una adecuada interpretación de los valores obtenidos, con el objeto de tomar mejores decisiones en determinadas situaciones.

En este escenario, el estudio de la variación y las medidas de dispersión es relevante en la inferencia estadística. No obstante, las investigaciones de esta temática en educación estadística son escasas (Batanero, López-Martín, González-Ruiz y Díaz-Levicoy, 2015) y en los niveles como la secundaria, prácticamente inexistentes.

Estudios en Didáctica de la Estadística, acusan que la enseñanza de las medidas de centralización y dispersión, se ha limitado a la aplicación de fórmulas, sugiriendo que los profesores carecen de una comprensión profunda de estos conceptos, lo que les dificulta poder ofrecer a sus estudiantes propuestas de enseñanza donde estas medidas cobren sentido (Silva y Coutinho, 2008). Sánchez (2013) y Batanero *et al.* (2015) confirman estas observaciones, agregando que aunque los alumnos son capaces de determinar diferentes medidas de dispersión, presentan dificultades en comprender los procesos y los conceptos involucrados, lo que posteriormente se agudiza con el estudio de la inferencia.

Por consiguiente, Garfield y Ben-Zvi (2008) y Estepa y del Pino (2013) identifican en la enseñanza una desvinculación de las medidas de dispersión respecto a las de centralización, pese a su complementariedad en el análisis exploratorio de los datos. En una experiencia realizada por Orta y Sánchez (2013) con estudiantes de secundaria (14 años), los autores detectaron que resulta muy complejo interpretar la dispersión en contextos de riesgo, porque los estudiantes tienden a realizar comparaciones con valores particulares, evidenciando de esta manera que el tema no es sencillo, principalmente cuando se trata de interpretar la dispersión para la toma de decisiones en un contexto determinado.

Finalmente, los estudios antes mencionados y otros respecto a la variación estadística (Sánchez, Borim y Coutinho, 2011) dan cuenta de la falencia de tratar la dispersión como el aprendizaje de fórmulas tales como: rango, desviación media, desviación estándar o y/o variancia. Es importante extender propuestas alrededor de la dispersión, que involucren el desarrollo de habilidades de interpretación de acuerdo a un contexto presentado.

Tomando en cuenta las necesidades de la sociedad actual, referente a temas que involucran conocimientos estadísticos, diferentes países han incorporado en sus lineamientos curriculares el estudio de la dispersión. En Estados Unidos, en los estándares propuestos por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) para la enseñanza de la matemática, en el bloque de Datos y Azar aparecen objetivos que abordan la utilización e interpretación de las diferentes medidas de centralización y dispersión para el análisis de datos. Por ejemplo, uno de los objetivos consiste en "seleccionar y usar métodos estadísticos apropiados para analizar datos, manifestar, buscar, usar e interpretar medidas de centro y dispersión, incluyendo la media y el rango intercuartil" (NTCM, 2000, p.248). Mientras que en el currículo de matemática chileno, el eje de Probabilidad y Estadística también incorpora tópicos asociados a la dispersión, así como habilidades relacionadas con que: "todos los y todas las estudiantes aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos" (MINEDUC, 2015, p.100).

La presente investigación tiene por objetivo evidenciar los argumentos y el lenguaje que priorizan los estudiantes cuando se enfrentan a una situación didáctica para la enseñanza de la desviación media en secundaria.

En este artículo, se describe el proceso de implementación de una propuesta para la enseñanza de la desviación media con estudiantes de secundaria chilenos, con elementos que aporta la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD: Brousseau, 2007). Se realiza una ingeniería didáctica para el análisis de los datos. Dichos resultados se complementan tangencialmente con la visión de lenguaje matemático que nos presenta Godino (2003).

Las producciones fueron categorizadas, basados en las estrategias y el lenguaje empleado para comunicar la solución al problema propuesto. En el sentido de Godino (2003) se tomó en cuenta el lenguaje, como una de las seis entidades primarias que intervienen en la práctica matemática, entendida como las notaciones, gráficos, entre otros, empleados como medio que permite comunicar, validar la solución, junto con generalizarla a otros problemas.

DESCRIPCIÓN DEL MARCO TEÓRICO:

a) Teoría de Situaciones Didácticas

Para el diseño y análisis de la implementación de la propuesta didáctica se consideraron elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007).

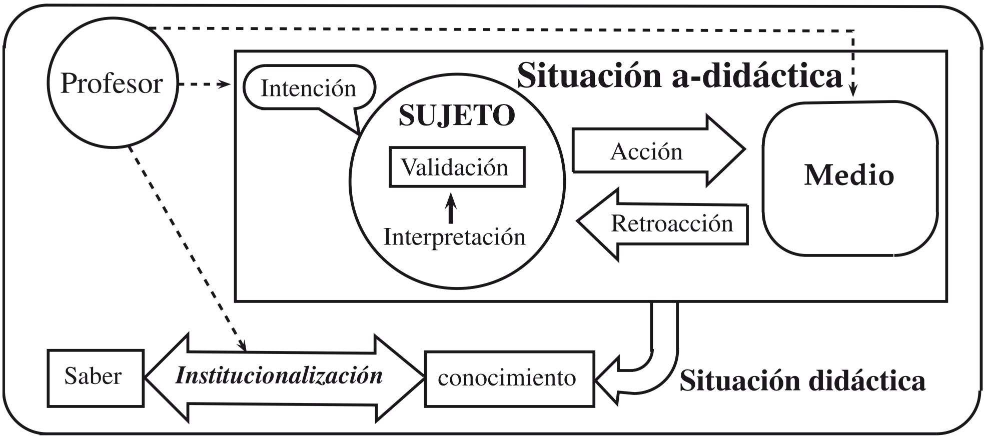


Figura 1. Relación entre situación didáctica y a-didáctica. Tomado de Acosta, Monroy y Rueda (2010).

Este enfoque tiene como objetivo indagar el sistema didáctico, constituido por tres entes: profesor- alumno- saber y sus interacciones (Figura 1), focalizándose en la dimensión cognitiva y epistemológica vinculada a la construcción del conocimiento matemático.

"Una situación es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado" (Brousseau, 2007, p. 17). En el contexto escolar, se considera una situación como el entorno del estudiante, diseñado y manipulado por el profesor, que pretende ser utilizada como una herramienta en el proceso de enseñanza- aprendizaje. Para Brousseau, el medio son los materiales que dispone el estudiante y con los que interactúa para construir su propio conocimiento. El profesor es quien facilita el medio.

La situación didáctica o problema que se le plantea al estudiante es diseñada y propuesta por el profesor, y tiene la intencionalidad de que los conocimientos antiguos pierdan alcance y generen en el sujeto la necesidad de aprender algo nuevo. El profesor debe guiar este proceso por medio de las devoluciones, invitando al alumno a asumir la responsabilidad sobre su aprendizaje al enfrentar la situación-problema (a-didáctico) y a acatar las consecuencias de esta transferencia (Brousseau, 2007).

Según esta teoría, diferenciamos en la propuesta de enseñanza cuatro fases o etapas de implementación: 1) situación de *acción*, en la que se presenta el contexto, la tarea a realizar y el estudiante activa su red conceptual para dar solución a la situación-problema que se plantea; 2) situación de *formulación* y *comunicación*, en la que el estudiante fija una estrategia para obtener la solución a la situación-problema planteada, que ha sido probada, llevada a cabo y que comunica al resto de estudiantes; 3) situación de *validación,* en la que se justifica el proceso de resolución llevado a cabo frente al del resto de compañeros en situación de debate; y 4) situación de *institucionalización,* en la que el docente fija y formaliza el conocimiento, en nuestro caso de la desviación media, en base a las diferentes estrategias y resoluciones que hayan surgido a lo largo de la sesión por parte de los estudiantes.

b) El lenguaje matemático (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2003; Godino, Batanero y Font, 2007)

El enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2003; Godino, Batanero y Font, 2007), ha abordado la dificultad de la significación y la representación. En este contexto, el lenguaje tiene un rol importante desde la perspectiva representacional e instrumental. Sin embargo, desde esta teoría el lenguaje sólo forma parte en rol de la representación, el que es compartido con otros objetos como: situaciones-problemas, acciones, conceptos, propiedades y argumentos.

En la resolución de problemas matemáticos, Godino (2003) señala que en su solución, generalización, o para detallar a otro sujeto se requiere el empleo del lenguaje, el que se encuentra compuesto de términos, expresiones, notaciones, gráficos, entre otros.

Los símbolos, permiten representar objetos abstractos y situaciones concretas. También se considera como elemento lingüístico las disposiciones tabulares, gráficos, grafos, esquemas, ilustraciones, entre otros los que serían clasificados como tipos de lenguaje gráficos.

El autor considera que el lenguaje no solo tiene atributos como medio de representación, sino que también es un instrumento de la actividad matemática.

MÉTODO

La metodología empleada en la investigación es la Ingeniería Didáctica, por su utilidad para analizar situaciones didácticas. Farfán (1997), declara que la Ingeniería Didáctica se constituye en una metodología de investigación dentro de la Didáctica de las Matemáticas, la que se puede aplicar a los productos de enseñanza basados o derivados de ella y para guiar la experimentación en clase.

Los informantes lo conforman 35 estudiantes que cursaban su tercer año de enseñanza media (16-17años), de un colegio particular subvencionado chileno, los que se distribuyeron en grupos de 5 integrantes, por afinidad. La muestra fue no probabilística, por disposición.

Algunos de los insumos utilizados para la construcción de la Ingeniería Didáctica, fueron las dificultades observadas en diferentes estudios respecto a la utilidad de la noción de dispersión para la interpretación y análisis de datos, además de la importancia de vincular las medidas de centralización en el estudio de la dispersión, lo que permite finalmente una mejor toma de decisiones en determinados contextos.

Para el análisis de las producciones de los estudiantes se empleó el análisis de contenido como análisis metodológico profundo de textos en su contexto, siguiendo etapas (Mayring, 2000) y de modo sistemático, puesto que el objetivo es inferir y describir la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción por medio de indicadores, los que pueden ser cuantitativos o no (Bardin, 1996). Para ello, la revisión bibliográfica, y el marco teórico permitieron definir las categorías de análisis y comprobar su validez (Ghiglione y Matalón, 1989). Durante el análisis se registra, de manera paralela, el lenguaje utilizado en la construcción del argumento que permitía tomar la decisión, finalizando con la elaboración de tablas para resumir los resultados y obtener conclusiones.

SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA DESVIACIÓN MEDIA

Los estudiantes respondieron a la siguiente situación didáctica (ver Figura 2) que consistió en justificar la decisión de cuál de dos series de datos, con igual media y rango, presenta menor dispersión en un contexto de juego. Cada serie de datos, se corresponde a la posición que ocupan 5 bolas que se lanzan por un carril y ocupan un depósito numerado del 10 al 20, pudiendo albergar cada depósito hasta 5 bolas.
‘Como parte de un jurado te toca decidir quién es el ganador o ganadora del juego.
Las reglas son las siguientes:
R1: Compiten dos participantes Pedro y María
R2: Cada competidor lanza 5 bolitas de derecha a izquierda por el carril, en turnos.
R3: Gana aquel competidor cuyas bolitas estén más cercanas al promedio de ellas.’

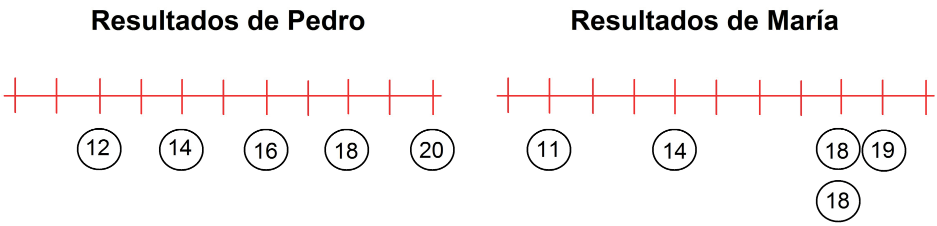


Figura 2. Situación didáctica

ANÁLISIS A PRIORI DEL INSTRUMENTO

La situación de formulación se produce con base en el reconocimiento de las posibles estrategias de resolución del desafío. Se determinaron cuatro estrategias, que pueden ser válidas o insuficientes, estas surgieron de la literatura investigativa y de las respuestas entregadas por los estudiantes en la fase de formulación, lo que desembocó en cuatro categorías de análisis de las producciones proporcionadas por los estudiantes (ver Tabla 1).

También se observó el lenguaje empleado por el estudiante, dado que es un instrumento que promueve la actividad matemática, permite comunicar, validar y generalizar la respuesta encontrada a la situación propuesta, fue posible identificar dos tipos de lenguaje el de tipo natural y gráfico (ver Tabla 2).

Tabla 1. Categorías de análisis de las respuestas.

Categoría	Descripción	Estrategia de resolución
C_1: El estudiante utiliza el concepto de desviación respecto a la media.	El estudiante determina el conjunto de las desviaciones respecto a la media de ambas series de datos.	Estrategia 1: Suma la distancia de cada jugada respecto a la media obtenido por cada competidor, y luego compara ambos resultados.
C_2: El estudiante utiliza medidas de tendencia central.	El estudiante emplea medidas como la media, moda, mediana, máximos y mínimos.	Estrategia 2: Compara valores particulares del conjunto de datos con alguna medida de tendencia central,
C_3: El estudiante utiliza el concepto de desviación media.	El estudiante calcula la desviación media de ambas series de datos.	Estrategia 3: Determina la media de las distancias de los lanzamientos de cada jugador respecto a la media. El ganador es el que obtenga menor valor.
C_4: El estudiante utiliza intervalos centrados en la media.	El estudiante establece una vecindad respecto de la serie de datos inicial (1 al 10).	Estrategia 4: Representa los lanzamientos de ambos jugadores en una recta con todos los posibles resultados, y los compara con respecto a la media de la serie inicial.

Tabla 2. Tipo de lenguaje utilizado en las respuestas.

Lenguaje	Descripción
L_1: El estudiante utiliza el lenguaje natural.	El estudiante se basa en el lenguaje natural para establecer sus conjeturas.
L_2: El estudiante utiliza el lenguaje gráfico.	El estudiante representa en gráficos los resultados obtenidos por separado o en conjunto de ambos jugadores. El estudiante representa en una recta los resultados obtenidos por cada jugador, como medio establecer conjeturas.

DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA A LA LUZ DEL MARCO TEÓRICO

Fase de acción

En la primera fase, los estudiantes conformaron equipos y se les entregó, a cada uno, la tarea que debían realizar. Cada equipo leyó las instrucciones dadas, luego se les asignó un tiempo para buscar soluciones (Figura 3). Las respuestas, en primera instancia, fueron intuitivas y poco elaboradas. Para orientar el trabajo, el profesor les hizo devoluciones,

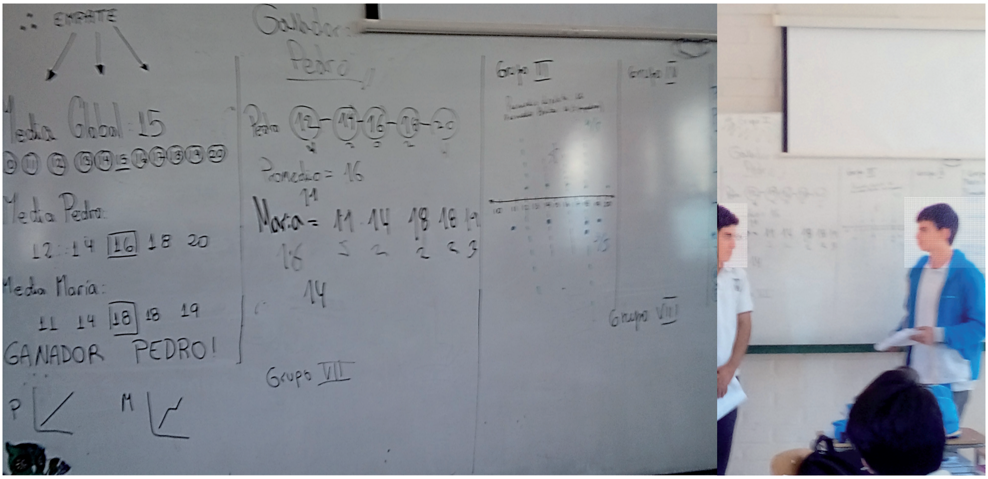


Figura 3. Presentación de respuestas de cada grupo.

por ejemplo: "¿Cómo podemos estar seguros que ese jugador es el ganador?, ¿Crees que ese argumento convencerá a los jueces?", "¿Puedes crear un argumento matemático que permitan fortalecer tu respuesta?" Estas preguntas motivaron una elaboración con argumentos matemáticos para poder dar respuesta a la cuestión. La mayor parte de los grupos se inclinó por respuestas que obedecían a la estrategia 3 (ver tabla 1).

Fase de formulación

En la segunda fase, los estudiantes elaboraron diferentes argumentos para justificar la elección del ganador. Cada grupo debió realizar concesos para decidir la estrategia que presentarían, como equipo, al curso. Las argumentaciones, se basaron en interpretaciones de los datos a través de gráficos, uso de intervalos centrados en la mediana de la serie inicial de datos, cálculo de distancias de cada lanzamiento con respecto a la media, promedio de las distancias de cada lanzamiento respecto a la media del conjunto, entre otras. Esto motivó la incertidumbre de algunos equipos, respecto a qué estrategia mostrar, en estos casos, el profesor les propuso que cada uno, dentro del grupo, les explicara a su compañeros su justificación y juntos tomaran una determinación.

Fase de validación

En la tercera fase, un representante de cada equipo explicó la estrategia empleada, junto con el jugador que consideraba el vencedor (Figura 3). La mayoría coincidía en que era Pedro. La justificación presentada fue discutida y evaluada por el grupo curso. Los mismos estudiantes reconocieron argumentos que carecían de fundamentos o no se ajustaban a las reglas exigidas. También identificaron errores como cálculos incorrectos, gráficos incompletos o errados en su construcción. A pesar de esto, el argumento empleado, en algunos casos, continuaba siendo válido para dar respuesta a la tarea planteada.

Fase de Institucionalización de la desviación media

En la fase final, se les pidió a los estudiantes que observaran cada una de las estrategias presentadas por sus compañeros y señalaran cuál de ellas fue la que mejor representaba al conjunto de todas las soluciones mostradas. Entre ellas se encontraba la estrategia 4 (Tabla 1). Varios señalaron el mismo argumento (Estrategia 4), a lo que se les preguntó el motivo. Entre las razones manifestaron que la consideraban útil para diferentes conjuntos de datos. Posteriormente, se les pidió que pensaran una descripción general para el procedimiento realizado, y luego trataran de redactarlo en su cuaderno. Uno de los estudiantes se animó a compartir su respuesta "es la media de las distancias de cada lanzamiento respecto a la media".

Se le consultó la opinión al grupo curso, ¿Qué opinan al respecto?, ¿Alguno escribió algo diferente?, un estudiante levantó la mano solicitando la palabra, señalando que "es la media de la diferencia de cada dato, respecto a la media aritmética del conjunto de datos". Otro le rebatió diciendo "no puede ser la diferencia, porque también podría tomar valores negativos". Tomando en cuenta este aspecto, los estudiantes afirmaron que la diferencia debe ser siempre un valor positivo, a lo que se les preguntó ¿Qué debe pasar para que la diferencia sea siempre positiva?, esto les permitió recordar el concepto de valor absoluto.

Finalmente, el profesor, basándose en las ideas que surgieron desde los estudiantes, los invitó a institucionalizar los conceptos de desviación respecto a la media, y desviación media.

Desviación respecto a la media

La desviación respecto a la media corresponde a la diferencia en valor absoluto entre cada valor de la variable estadística y la media aritmética, se denota D_i, $D_i = |x - \overline{x}|$

Desviación media

La desviación media, corresponde a la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones respecto a la media. La desviación media se representa por $D\overline{x}$, se calcula

$$D\overline{x} = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{|x_i - \overline{x}|}{n}$$

ANÁLISIS A POSTERIORI DE LOS RESULTADOS

Las respuestas entregadas para resolver la situación didáctica, de siete grupos con 5 estudiantes organizados como: G1, G2, G3, G4, G5, G6 y G7 fueron clasificadas en cuatro categorías anteriormente expuestas (ver Tabla 1.). Cabe mencionar que este proceso se realizó a partir de estrategias dadas por grupos de alumnos, posterior a que fueron planteadas algunas devoluciones por parte del profesor.

En la situación de formulación, solo tres grupos (G1, G2, G3) resolvieron de forma exitosa la tarea, uno de ellos G1) alcanza, de forma intuitiva, el concepto desviación media, mientras que cuatro grupos (G4, G5, G6 y G7) utilizaron alguna medida de tendencia central con un dato particular del conjunto para justificar sus respuestas, evidenciando una debilidad para poder hacer comparaciones de grupos de datos. El resumen con los conceptos empleados por los estudiantes para responder a la situación es expuesto en la Tabla 3.

Tabla 3. Clasificación de los conceptos matemáticos y estrategias utilizadas por los grupos

Categoría	Grupo	Total de estudiantes
C_1: El estudiante utiliza el concepto de desviación respecto a la media.	G_2	5
C_2: El estudiante utiliza medidas de tendencia central.	$G_{4,}$ $G_{5,}$ G_6 y G_7	20
C_3: El estudiante utiliza el concepto de desviación media.	G_1	5
C_4: El estudiante utiliza intervalos centrados en la media.	G_3	5

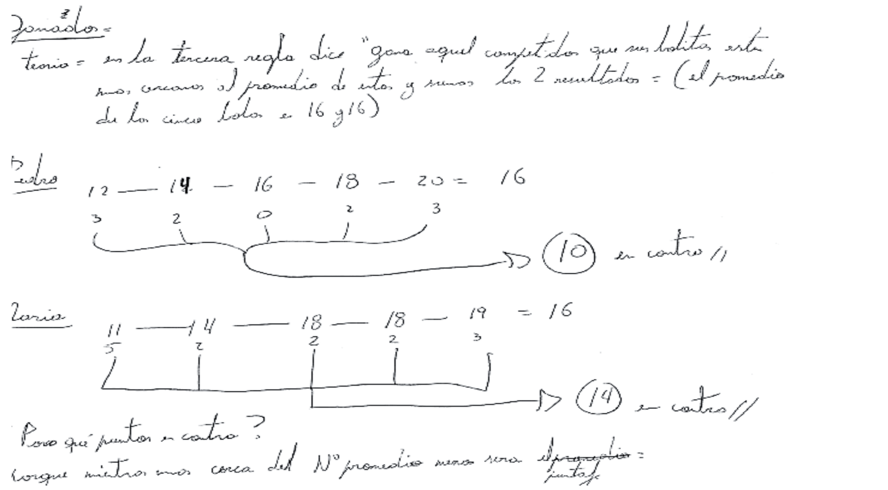
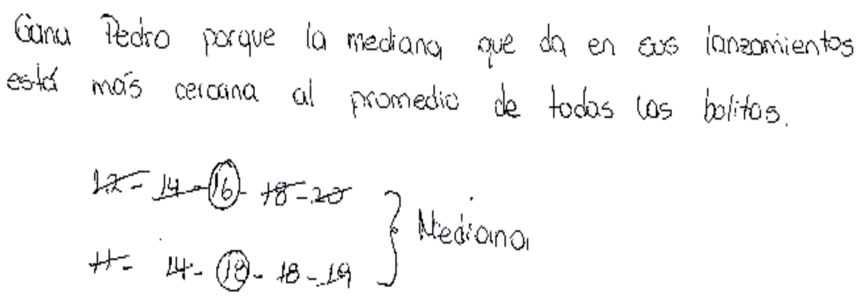
Detectamos que la mayoría de los grupos se aferran a las estrategias asociadas a comparar sólo valores particulares de las series de datos con medidas de tendencia central (media, mediana, máximos y mínimos), lo que genera que decidan basados sólo en esa comparación, la que en muchos casos carece de sentido, como la respuesta del grupo G_6 , en la que considera a Pedro ganador porque la media de los resultados es 16, y como fue el único que acertó a este carril, lo convierte en vencedor, sin tomar en cuenta la regla R3 (ver Figura 2), evidenciando una dificultad en realizar comparaciones de grupos de datos considerando cada grupo como una unidad o distribución.

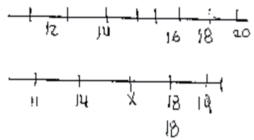
A continuación, mostramos cada una de las respuestas entregadas por los grupos asociada a la categoría correspondiente (ver Tabla 5)

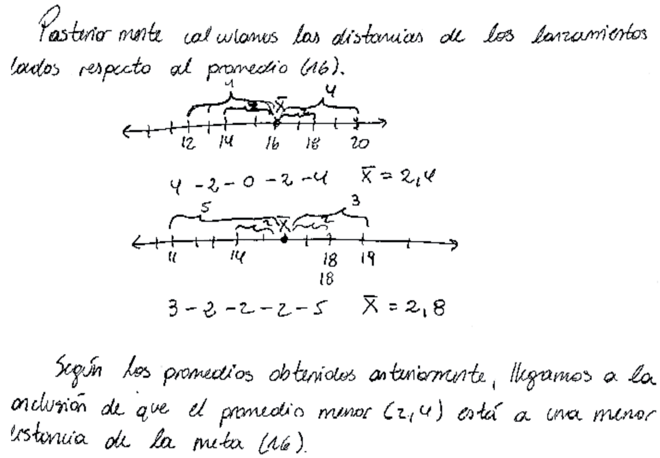
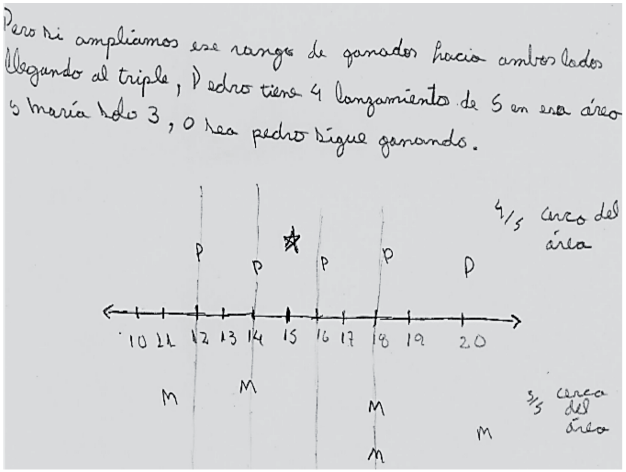
En nuestro análisis, también exploramos el lenguaje que utilizaron los estudiantes para comunicar y validar sus respuestas. Pudimos apreciar que todos los grupos, en un principio emplearon un lenguaje natural, mientras que en la minoría de los casos el de tipo gráfico (ver Tabla 4).

Respecto al tipo de lenguaje empleado en las producciones, lidera el lenguaje natural, seguido por el de tipo gráfico. Consideramos importante considerar esta variable, dado

Tabla 5. Evidencias de las respuestas de los grupos en cada categoría.

Categoría	Grupo	Evidencia	Estrategia
C_1	G_2		Estrategia 1: Suma la distancia de cada jugada respecto a la media obtenido por cada competidor, y luego compara ambos resultados.
C_2	G_4		Estrategia 2: Compara valores particulares del conjunto de datos, con alguna medida de tendencia central.

C_2	G_5	* Pedro tendio a estar mas cerca de la mediana 16, mientras que maria obtuvo mediana 18 * En el gráfico Pedro calculó sus lanzamientos y fueron constantes * en el grafico maria intento calcular Para obtener media 15, Pero desafortunadamente se le repitio 18 * Pedro obtuvo lo que queria * Por el Promedio no se Pudo saber el ganador Por lo cual se utilizo la mediana * Pedro gana Por que se aproxima mucho mas al 15	Estrategia 2 (cont.): Compara valores particulares del conjunto de datos, con alguna medida de tendencia central.
	G_6	* Gano Pedro porque el promedio entre lanzamientos entre ambos es de 16 y el único que le achuntó a ese carril. P= 80 : 5 = 16 M= 80 : 5 = 16 	
	G_7	Al sumar la bola número 10 y 20, nos da 30 y al dividirlo el promedio nos da 15, pasa lo mismo. En el caso de Pedro y Kaua, en el caso de Pedro si suma la bolita 12 y 20 nos da 32 y al dividirlo nos da 16. En el caso de Kaua el número 11 y el 19 nos da 30. y al dividirlo nos da 15 igual que el promedio del carril	

C_3	G_1		Estrategia 3: Determina la media de las distancias de los lanzamientos de cada jugador respecto a la media. El vencedor es que obtenga menor valor.
C_4	G_3		Estrategia 4: Representa los lanzamientos de ambos jugadores en una recta con todos los posibles resultados, y los compara con respecto a la media de la serie inicial.

que las investigaciones reportan las dificultades en la comprensión de las medidas de dispersión, sin embargo, apreciamos una carencia de tipos de lenguajes usados por los estudiantes para comunicar su respuesta. Se detecta, además, dificultades en la construcción de gráficos (Figura 4), lo que repercute en la respuesta a la situación didáctica.

En cuanto al lenguaje, entendido como la forma en que se comunica mediante términos, expresiones, símbolos, notaciones, tablas, etc. el enunciado, el procedimiento y la solución de un problema matemático (Godino, 2003), consideramos que presenta diversas dificultades (Figura 4). Por ejemplo, el gráfico () construido por G_5 presenta errores en su construcción que dificultan la visualización de la información, impidiendo extraer conclusiones que permitan resolver la situación. También evidenciamos, prácticamente una ausencia de lenguaje algebraico, el que se demuestra en la simbología utilizada, la que no obedece a un criterio apropiado. Esta situación genera una alerta por la edad de los estudiantes.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En nuestros resultados, coincidimos con las dificultades evidenciadas en diferentes investigaciones (Garfield y Ben-Zvi, 2008; Orta y Sánchez, 2013), en relación a que los estudiantes utilizan estrategias en que sólo toman en cuentan un valor particular de la serie de datos y lo comparan con medidas de tendencia central (Tabla 5). Pareciera ser que los aprendices tienen impedimento en realizar comparaciones de grupos de datos, en que consideren cada grupo como una unidad. En nuestro caso, lo atribuimos a que, a la fecha de implementación del diseño, solo conocían las medidas de centralización y el rango, de allí que se limitaran en aplicar conceptos conocidos, evitando explorar otras estrategias que les permitieran responder de manera apropiada a la situación.

El abordar la enseñanza de la dispersión no es tarea sencilla, dado que se carece de una compresión profunda de estos conceptos, a pesar de la importancia que poseen en la inferencia estadística. Lamentablemente, en muchos lugares, estos conceptos sólo son abordados por medio de la aplicación de fórmulas, sin darle el sentido e interpretación apropiada.

Evidenciamos que el uso del lenguaje algebraico es escaso en los estudiantes, pues, es generalmente propio del docente, que es en muchos casos el encargado de entregar la definición y fórmula. Se considera apropiado incentivar el uso de diversas formas de lenguaje en los objetos estadísticos.

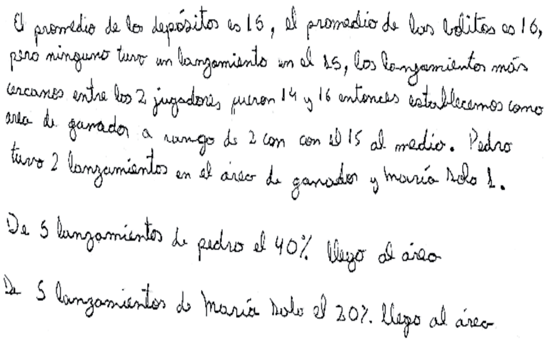
La propuesta, compuesta de cuatro etapas, ofrece un diseño para profesores factible de replicar en sus aulas, lo que permite a los estudiantes acercarse al concepto de dispersión. Así se pretende orientar el actuar del docente en cuanto a su labor, y potenciar las devoluciones en el proceso de enseñanza, dado que, en una primera instancia, los estudiantes tienden a responder que hay más variabilidad o dispersión en un conjunto de datos basados por sus conocimientos comunes que por un conocimiento estadístico.

Respecto a las respuestas, las estrategias que utilizaron los estudiantes fueron diferentes, en su mayoría parcialmente correctas, pues contenían errores (en cálculos o en gráficos); otras estrategias correctas fueron el uso de intervalos centrados en la media de la

Tabla 4. Clasificación de los tipos de lenguajes utilizadas por los grupos.

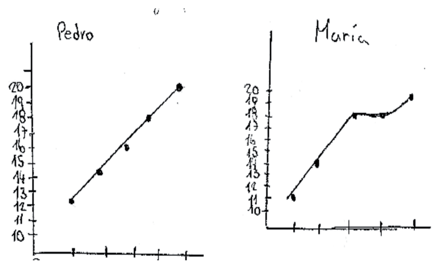
Lenguaje	Grupo	Total de estudiantes
L_1: El estudiante utiliza el lenguaje natural.	G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 y G_7	35
L_2: El estudiante utiliza el lenguaje gráfico.	G_1, G_3, G_5, G_6 y G_7	25

L_1

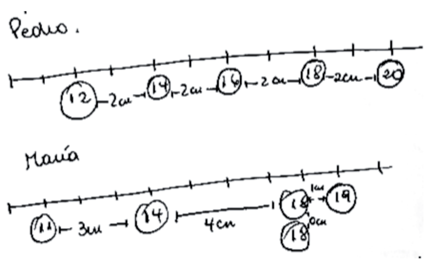


G_3

L_2



G_5



G_7

Figura 4. Ejemplos de tipos de lenguaje utilizados

serie inicial de datos. Es conveniente señalar que la mayor parte de los estudiantes, vinculó su respuesta con alguna medida de tendencia central como la mediana o la media.

Finalmente, las producciones de los estudiantes informan de las ideas que poseen sobre la dispersión, en su mayoría incompletas, pero evidencian que el concepto es intuitivo y, por tanto, puede facilitar el estudio de otras medidas como la varianza y la desviación estándar.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, M., Monroy, L. y Rueda, K. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. *Revista Integración, 28* (2), 173–189.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. Madrid: Akal Ediciones.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de didáctica de las Matemáticas*, *83*, 7-18.

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R. y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties understanding statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *25*(4), 527-547.

Batanero, C., López-Martín, M., González-Ruiz, I. y Díaz-Levicoy, D. (2015). Las medidas de dispersión en el estudio de la inferencia estadística. En Vásquez, C., Rivas, H., Pincheira, N., Rojas, F. (Eds.), *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 312-316). Sociedad Chilena de Educación Matemática: Villarrica.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cobb, G. W., y Moore, D. S. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly*, *104*(9), 801-823.

Estepa, A., y Del Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números, Revista de didáctica de las Matemáticas* (83), 43-63.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. New York: Springer.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado el 20 de agosto del 2018 de: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Ghiglione, R. y Matalón, B. (1989). *Las encuestas sociológicas*. México: Trillas.

Mayring, P. (2000). Qualitative content analysis. *Forum qualitative social research*, *1*(2), 159-176.

MINEDUC (2015). *Bases curriculares 7º básico a 2° medio.* Santiago: Ministerio de Educación.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics. Reston*, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Orta, J.A. y Sánchez, E. (2013). Interpretación de la dispersión de datos en contexto de riesgo por estudiantes de secundaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 421-430). SEIEM: Bilbao.

Sánchez, E. S. (2013). *Elementos de estadística y su didáctica a nivel bachillerato*. México: Secretaría de Educación Pública, Subsecretaría de Educación Media Superior.

Sánchez, E., Borim, C., y Coutinho, C. (2011). Teachers understanding of variation. En C. Batanero, G. Burril, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study* (pp. 211-222).Springer: The Netherlands.

Silva, C. y Coutinho, C. (2008). Reasoning about variation of a univariate distribution: a study with secondary mathematics teachers. En Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. y Rossman, A. (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study:Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education: Monterrey.

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-248.