Ágoston Kolos Csaba

Hogyan hat a bizonytalanság és a vevőkör nagysága együttesen az árakra?

Operációkutatás Tanszék

Témavezető: Kovács Erzsébet

Budapesti CORVINUS Egyetem

Közgazdaságtani Ph.D. program

Hogyan hat a bizonytalanság és a vevőkör nagysága együttesen az árakra?

Ph.D. értekezés

Ágoston Kolos Csaba

Budapest, 2005

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

Feleségemnek

Köszönetnyilvánítás

A dolgozat legelején szeretném köszönetemet kifejezni azoknak a személyeknek, akik sokat segítettek az értekezés megírásában.

Elsőként feleségemnek aki a dolgozat megírásának kezdetétől a végéig támogatott és bátorított. Sokszor átnézte a félig kész munkát, elmondta véleményét, tanácsokat adott és kijavította a szövegben előforduló hibákat és elírásokat.

Rögtön utána témavezetőmnek, Kovács Erzsébetnek, aki végigkísérte a kutatásomat értékes megjegyzésivel, tanácsaival. Az eddig született összes munkámat ismeri és az elvárhatót messze meghaladóan segített az elkészült anyagok jobbá tételében.

Szeretném kifejezni köszönetemet ismerőseimnek, kollégáimnak. Külön említést érdemel Kánnai Zoltán, akihez bármikor fordulhattam, ha a matematikai jellegű bizonyítások során nehézségeim támadtak. Ezen a téren sok segítséget kaptam Kisvarga Józseftől is.

Hálás vagyok azért, hogy elkészült részleteket több embernek – többek között Solymosi Tamásnak, Komáromi Évának, Megyeri Krisztinának, Pintér Miklósnak, Gömöri Andrásnak és Benedek Gábornak – is oda tudtam adni, hogy megvitassuk az addig elkészült művet, és tanácsukat kérjem a további irányhoz.

Külön szeretnék köszönetet mondani Arató Miklósnak és Krámli Andrásnak, hogy a disszertáció leadása előtt nem sokkal ki tudtak segíteni az egyik bizonyításnál felmerült kérdéssel kapcsolatban.

Ágoston Kolos

A dolgozatban használt jelölések

(a, b)	nyílt intervallum
$[a, b]$	zárt intervallum
$[x]$	egészrész függvény
$f'_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	f függvény i. változója szerinti parciális deriváltja
C	Az eladó induló vagyona
u	Az eladó vagyon iránti hasznossága
U	Az eladó hasznossága bizonytalan kimenetek esetén
v	A vevő (érdeklődő) vagyon iránti hasznossága
V	A vevő (érdeklődő) hasznossága bizonytalan kimenetek esetén
$\overline{P}$	A legmagasabb ár, amennyiért az eladó termékét el lehet adni
K	Kár bekövetkezésekor a biztosító ekkora összeget fizet a biztosítottnak
q	A káresemény bekövetkeztének valószínűsége
$\tilde{P}$	Az az ár, amely esetén az eladónak közömbös, hogy értékesíti-e a terméket vagy sem
P^{*pm}	Nyereségmaximalizáló (kockázatsemleges) eladó esetén az optimális ár
P^{*n}	n-szereplős piac esetén az optimális ár.

1. Bevezetés

Az egyetemen aktuárius[1] szakirányon végeztem, talán innen eredeztethető a biztosítási piacokhoz való vonzódásom. A biztosítás elméletére így két oldalról is rálátásom nyílt: egyik oldalról a konkrét aktuáriusi kalkulációk felől, amikor különböző típusú biztosítások díjkalkulációját kellett elsajátítanunk. Másik oldalról pedig a közgazdasági elmélet felöl, ahol a biztosítási piac egy állatorvosi ló, hiszen nagyon sokféle mikroökonómiai problémát be lehet mutatni biztosítási piacokon keresztül. A két terület hatással is van egymásra, de Magyarországon a biztosítást a szakma inkább matematikai-statisztikai(-pénzügyi-számviteli-marketing) területnek tekinti, a biztosítás mikroökonómiai elmélete nem domináns része az érdeklődési körüknek. A mikroökonómusok kedvelt területe a biztosítási piac, de szóhasználatuk a közgazdasági terminológiát követi, amelytől részben eltér az aktuárius terminológia. A dolgozatban (végzett aktuáriusként) a biztosítási piacot mikroökonómiai eszközökkel elemzem. Bízom benne, hogy az eredmények mind az elméleti mikroökonómusok, mind a biztosítási szakma számára érdekes eredményeket tartalmaz.

A dolgozatom elején szeretném a biztosítás mikroökonómiai megjelenéseit számba venni.

A biztosítás legelső megjelenése a bizonytalan döntések vizsgálatához köthető, de az állítás fordítva is igaz: a bizonytalanság melletti döntések vizsgálatának legelején már feltűnt a biztosítás. A bizonytalanság melletti döntések elmélete a szentpétervári paradoxonnal kezdődött (lásd pl. [19]). Később megalkották a várható hasznosság elméletét, ahol a döntéshozó a különböző kimenetek hasznosságának várható értéke alapján hozza meg a döntést (Neumann-Morgenstern hasznosságfüggvény, lásd pl. [19]). Az elmélet biztosítási piacokra vonatkozó

[1]Az aktuárius szót ma Magyarországon biztosításmatematikusnak szokták fordítani, de ez a szakma ennél többet jelent, a biztosítási tevékenységben jelentkező kockázatok feltárásával és kezelésével foglalkozik.

vetülete, hogy ha a biztosító a kockázat várható értéknek megfelelő díjat[2] állapít meg, akkor minden kockázatkerülő döntéshozó a teljes biztosítás mellett dönt. Az állítás és bizonyítása megtalálható a dolgozatban a 4.1. Tételben (lásd még pl. [13]).

A bizonytalanság melletti döntések elmélete tovább fejlődött és a biztosításra úgy tekintettek mint a kockázaton való osztozkodásra. Az egyik legalapvetőbb összefüggés, amit meg lehet állapítani az az, hogy ha az egyik fél kockázatkerülő, akkor minden kockázatot ő visel. Ez tulajdonképpen az előző bekezdésben szereplő megállapítás újrafogalmazása. Mindenképpen érdemes megemlíteni Arrow [3] cikkét arra az esetre amikor több kockázatkerülő szereplő osztozkodik a kockázaton. Borch [4] feltételt adott arra, hogy mi jellemzi az optimális osztozkodást több kockázatkerülő döntéshozó esetén. Az általa leírt modellben viszontbiztosítók cserélték el egymás között kockázataikat. Az optimális csere esetén egyesítik a kockázatokat és az összkárt osztják el egymás között.

Kockázaton történő osztozkodásnak tekinthető a biztosítás is. Különösképpen akkor válik érdekessé, ha a biztosító a kockázat várható értékénél magasabb árat határoz meg. Ennek oka az, hogy a biztosítónak szükségszerűen költségei is vannak, amit a biztosítottnak kell fedeznie. A témát bővebben kifejti pl. Raviv [16].

Az aszimmetrikus informáltság és erkölcsi kockázat máig is vizsgált kérdéskör a mikroökonómiában. Az aszimetrikus informáltság legismertebb modellje a megbízó-ügynök modell (lásd pl. [10]). A modellben a megbízó nem tudja közvetlenül megfigyelni az ügyvivő (modern szóhasználattal élve a menedzser) erőfeszítéseit csak a bekövetkezett végeredményt, ami nem független az ügyvivő erőfeszítéseinek nagyságától, de annak nem is determinisztikus függvénye. A megbízó keresi azt a javadalmazási rendszert, amely esetén a saját hasznosságát maximalizálja. A modellt biztosítási helyzetre is lehet alkalmazni: a bekövetke-

[2]Illusztrációképpen megemlítem, hogy az aktuárius terminológia ezt a díjat aktuáriusan fair díjnak, vagy egyszerűen nettó díjnak hívja.

zett kár nagysága függ a biztosított óvintézkedéseitől. A biztosító által fizetett kártérítés is függ a kár nagyságától oly módon, hogy ezzel a biztosítottat a biztosító számára előnyös mértékű óvintézkedések betartására ösztönözze.

Az erkölcsi kockázat biztosítási megjelenési formája az, hogy biztosítással rendelkező döntéshozó viselkedése megváltozik biztosítás megvásárlása után. Szokás (még ma is) ezt a jelenséget a biztosítási csalás egyik esetének tekinteni. Isaac Ehrlich és Gary Becker [8] cikkükben részletesen elemzik a problémát és hangsúlyozzák, hogy téves az erkölcsi kockázat e fajtáját csalásként értelmezni[3].

Shavell [18] cikkében szintén az erkölcsi kockázatot vizsgálja és megállapítja, hogy az erkölcsi kockázat létezése nem tudja megsemmisíteni a biztosítási piacot.

Biztosítási piacok mikroökonómia modelljei közül nem maradhat ki a Rotchild és Stiglitz [17] által leírt modell, amikor a biztosítottak kárbekövetkezési valószínűsége különböző, de a biztosító nem tudja a biztosítottakat megkülönböztetni. Rotchild és Stiglitz a cikkben nem kevesebbet állít, mint hogy ilyen piacokon nem alakul ki egyensúly.

Szívemnek nagyon kedves téma, hogy a biztosítási szerződéseket hogyan lehet mikroökonómiai modellekkel vizsgálni, jellemezni. Kutatásaim során arra voltam kíváncsi, hogy a kockázatközösség nagysága hogyan befolyásolja a szerződést (pl. nagyobb/kisebb önrész stb...). Ezt a kitűzött célt még nem értem el, de a vizsgálódásaim során már így is érdekes jelenségeket fedtem fel. Az eredmények akkor válnak igazán érdekessé, ha összevetjük őket a termékpiacok esetén érvényes összefüggésekkel. A következő fejezetekben a saját eredményeimet közlöm (csak azt jelzem külön ami nem saját eredmény). A modellben több szerződést vizsgálok egyszerre. Több szerződés együttes vizsgálata nem jellemző a szakirodalomra, ezért kevés a szövegben a hivatkozás.

A modellben a biztosítás mai irodalmához képest nagyon egyszerű szerződést választottam. Ennek az az oka, hogy így is meglehetősen nehézkesen kezelhető

[3]Természetesen biztosítási csalás létező jelenség, de világosan el kell különíteni az erkölcsi kockázatot és a biztosítási csalást.

a modell. Természetesen célom a modell kiegészítése. Az egyszerűnek választott szerződésnek az az előnye, hogy a jelenség tiszta formájában figyelhető meg.

2. A vizsgálódás kerete

Ph.D. dolgozatomban azt a témát járom körül, hogy milyen hatással van a piac nagysága az eladási árra. Olyan piacokat vizsgálok, ahol az eladás bizonytalansággal jár, és az eladás után is jelentkezhet kockázat az eladó számára.

Elsősorban biztosítási piacok érdekelnek. Arra vagyok kíváncsi, hogy a biztosítási piacok különböznek-e a többi piactól, vagy velük egyformán viselkednek. Az elemzéseim elvégzése során kiderült, hogy érdekes eredményekre jutok, amikor a termék és a biztosítási piacokat összehasonlítom.

A dolgozatomban monopol piacokat vizsgálok. Ennek elsősorban az az oka, hogy így a verseny hatását kiszűröm. Később látni fogjuk, hogy az elemzések még monopólium esetében is meglehetősen nehézkesek. Természetesen célom az, hogy a kapott eredményeket a későbbiekben megnézzem nem monopol piacokon is.

Az eladó rendelkezik valamekkora induló vagyonnal, aminek nagyságát C-vel jelölöm. Az eladó viselkedését hasznosságfüggvénnyel jellemzem $u(\cdot)$. Bizonytalanság melletti döntések esetén az eladó a várható hasznosságát szeretné maximalizálni (Neumann-Morgenstern hasznosságfüggvény, $U(\cdot)$). Az eladó a nagyobb vagyont többre értékeli ($u' > 0$). Ez az egész dolgozatban így van, ezért külön sehol sem jelzem. Az eladó általában kockázatkerülő ($u'' < 0$), néha kockázatsemleges ($u'' = 0$). Ahhoz, hogy bizonyos jelenségek magyarázatát fel tudjam tárni, az eladóról bizonyos esetekben -didaktikai okokból- fel fogom tenni a kockázatkedvelő tulajdonságot. Mivel a kockázattal szembeni magatartás nem mindig azonos, ezért ezt a tulajdonságot az állításoknál mindig jelzem.

Az eladó viselkedésének vizsgálatában fontos szerep jut a kockázatelutasítás csökkenő mértékének[4] (absolute decreasing risk averse), mely a hasznosságfügg-

[4] A fogalmat Pratt vezette be, bővebben lásd [15].

ménytől a következő tulajdonságot követeli meg:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{u''(x)}{u'(x)}\right) < 0. \tag{1}$$

Fontos kihangsúlyozni, hogy az (1) tulajdonság nem követeli meg a hasznosságfüggvénytől, hogy kockázatelutasító legyen: tekinthetjük például az $e^x - e^{-x}$ hasznosságfüggvényt. Könnyű látni, hogy ez a függvény negatív vagyonra kockázatkerülő, pozitív vagyonra pedig kockázatkedvelő magatartást mutat, ugyanakkor teljesül rá az (1) tulajdonság. Természetesen ahhoz, hogy az (1) tulajdonságot értelmezni lehessen, teljesülnie kell annak, hogy az első derivált mindenhol pozitív.

Az eladó a termékét értékesíteni szeretné a piacon. Amennyiben a termékét nem tudja a vizsgált időszakban értékesíteni a piacon, akkor a későbbiekben nem tud vele mit kezdeni (pl.: megromlik vagy esztétikailag elavul). Ennek az a következménye, hogy a hasznosságában a termék mennyisége nem jelenik meg, hanem csak az érte kapott ellenérték. További feltétel, hogy olyan piacokat vizsgálok, ahol az eladó ki tud szolgálni minden lehetséges vevőt.

Ezek a feltételek első ránézésre meglehetősen szigorúnak és speciálisnak tűnnek, de egészen hétköznapi példákat is tudok mutatni:

- **Szoftverfejlesztő:** a legtipikusabb példa a szoftverfejlesztő. Miután elkészítette a programot a program elkészítésére fordított pénz elveszett, ez a továbbiakban már nem befolyásolja döntését, csak a programért befolyt összeg érdekli. Természetesen az elkészült programot akárhány vásárlónak el tudja adni.

- **Ingatlanközvetítő:** tekintsünk például egy ingatlanközvetítőt, aki bizonyos számú ingatlant megkapott értékesítésre. A szerződés azt mondja ki, hogy az ingatlanok tulajdonosa minden lakásért egy meghatározott összeget akar kapni. Ha az ingatlanközvetítő ezen ár felett értékesíti az ingatlant, akkor a bázison felüli részen egyenlő arányban osztoznak. Amennyiben az ingatlanközvetítő előre rögzített időn belül nem tudja értékesíteni az ingatlant, elveszíti az eladás jogát és az ingatlanok tulajdonosa valaki mást bíz meg az értékesítéssel. A rendelkezésre álló idő rövidsége miatt a közvetítő egy ingatlant csak egy embernek tud kiközvetíteni. Ha ő nem veszi meg, nincs idő újabb (lehetséges) vevő felkutatására. Lényeges, hogy az ingatlanközvetítő minden (komoly) érdeklődőt ki tud szolgálni, tehát nem fordul elő az a helyzet, hogy többen is licitálnak egy lakásra.

- **Sportautókészítő:** egy vállalkozás sportautókat készít. Egy autó előállításának előre meghatározott átlagköltsége van. A sportautók iránt kereslet mutatkozik. Az érdeklődőkkel előre leszerződik az üzem, és a gyártást csak a szerződés megkötése után kezdi meg. Ebben az esetben nem keletkezik egyáltalán fölös készlet, ezért nem lesz jelen a termék mennyisége a hasznosságfüggvényben. Feltesszük, hogy az üzem rendelkezik akkora kapacitással, hogy minden igényt kielégít. Az egységköltség nem függ attól, hogy hány autó gyártására tudott leszerződni.

- **Beduin:** a sivatagban él egy beduin. A területén lévő homok iránt néhányan (pl.: különc amerikai turisták) érdeklődést mutatnak, és hajlandóak lennének pénzt is adni érte. Mivel a sivatagban bőséges mennyiségben található homok, ezért a beduin hasznosságérzetét nem fogja csökkenteni a csekély mennyiségű homok hiánya, amit így értékesít.

- **Biztosító:** a biztosító terméke a biztosítás. Mivel a biztosítók tőkéje nagy, így nagy számú ügyfelet ki tudnak szolgálni. A biztosításnak nincs fizikai megjelenési formája, nem kell raktároznia[5], ezért a termék mennyisége még elvileg sem jelenhet meg a biztosító hasznosságában. Érdemes hangsúlyozni, hogy a biztosító viselkedését is hasznosságfüggvénnyel jellemezzük,

[5] Az informatikai nyilvántartás nehézségeitől tekintsünk el.

tehát a biztosító a modellünkben nem (feltétlenül) kockázatsemleges.

Az eladó értékesítése függ a terméke árától, a piaci kereslettől nem tudja függetleníteni magát. A biztosító rendelkezésére áll egy vásárlási valószínűség függvény ($V(P)$). Ez a függvény megadja, hogy ha a biztosító P árat határoz meg, akkor az érdeklődőknek mekkora aránya vásárolja meg a terméket. A piaci szereplők (érdeklődők) számát jelöljük n-nel. A $D(P) = nV(P)$ függvény ekkor egy hagyományos keresleti függvény. Az elemzéseket én mégsem a keresleti függvénnyel végeztem el, mert az értékesítési bizonytalanságot a keresleti függvény nem jeleníti meg[6].

$V(P)$ vásárlási valószínűség függvényt vissza lehet vezetni egyéni döntésekre: az érdeklődők rezervációs ára különböző, de az eladó nem tudja megkülönböztetni a vevőket, csak aggregált adatokat ismer, azaz ismeri a rezervációk árak eloszlását[7]. Biztosítási piacok esetén $V(P)$ függvényt vissza lehet vezetni a vagyon eloszlására is.

$V(P)$ függvényről felteszem, hogy léteznek olyan $\underline{P} < \overline{P}$ árak, amire $V(\underline{P}) = 1$ és $V(\overline{P}) = 0$. Másképpen megfogalmazva létezik olyan ár, amelyen mindenki hajlandó vásárolni, és létezik olyan, amelyen senki sem. $V(P)$ függvényről felteszem továbbá, hogy folytonosan differenciálható.

[6] Az 5. fejezetben szereplő értékesítési bizonytalanság nélküli modellben hagyományos keresleti függvényekkel végzem az elemzést.

[7] Ez alapján beszélhetünk egyfajta információs aszimmetriáról. Az érdeklődők tisztában vannak saját rezervációs árukkal, az eladó viszont csak ezek eloszlását ismeri.

3. Termékpiac

Ebben a fejezetben termékpiacokat elemzek. Termékpiac az, ahol bizonytalanság csak abban van, hogy az eladó el tudja-e adni a termékét. Értékesítés után az eladó számára semmilyen vagyonváltozás nem jelentkezik. A biztosítási piac természetesen nem ilyen, mivel az értékesítés után is van kockázat, nevezetesen, hogy bekövetkezik-e kár vagy sem.

Termékpiacok esetén P változó a döntéshozó (egy szerződésre jutó) nyereségét jelenti. Az általam felsorolt esetek többségében ez megegyezik a termék árával. Pl. ha a szoftverkészítő számára az értékesítés költségeitől eltekintünk[8], akkor a programért kapott bevétel teljes egészében nyereség lesz (a program kifejlesztésének költségei elveszett költségek, amelyek nem befolyásolják a döntését). A beduin esetében a homok ellenértéke szintén teljes egészében nyereség. A sportautó készítő már más helyzet. Az ő esetében a bevétel nem teljes egészében nyereség, ennek egy része költség. Ezekben az esetekben P alatt a nyereséget kell érteni. A termék ára egyszerű összeadással meghatározható: egységköltség[9] plusz a döntéshozó nyeresége. Az egyszerűség kedvéért P változóra ezekben az esetekben is árként fogok hivatkozni, mert így áttekinthetőbb a dolgozat.

Felteszem, hogy $V(0) = 1$, azaz 0 áron (az eladónak 0 a profitja[10]) mindenki vásárol. Korábban már feltettük, hogy létezik olyan $\overline{P}$ érték, amire $V(\overline{P}) = 0$, azaz létezik olyan magas ár, amin már senki sem hajlandó vásárolni.

3.1. Egyszereplős termékpiac

Tekintsük először azt az esetet, amikor egy érdeklődő van a piacon. Az eladó P árat határozott meg terméke árának. A monopólium hasznosságát a következő

[8] A dolgozat egészében eltekintek a költségektől, tiszta cseregazdaságokat vizsgálok.

[9] Az egységköltségről feltettük, hogy nem függ a sorozatnagyságtól.

[10] Elképzelhető olyan szituáció is, hogy önköltségen sem hajlandó bárki vásárolni. Ezzel az esettel azért nem foglalkozom, mert csak a bizonyításokat bonyolítja, de semmi lényeges változást nem hoz.

képlet adja meg:

$$U(C,P,1) = V(P)u(C+P) + (1-V(P))u(C), \tag{2}$$

ahol U függvény első argumentuma az eladó induló vagyonát jelenti, a második az eladó által meghatározott árat, a harmadik pedig a piaci létszámot. Piaci létszám alatt azt értem, hogy hány (lehetséges) vevő van a piacon. Egyszereplős piac esetén 1, kétszereplős piac esetén 2 ...

A (2) képlet magyarázata: az eladó $V(P)$ valószínűséggel tudja értékesíteni termékét. Ennyi a valószínűsége annak, hogy az érdeklődő rezervációs ára nagyobb (nem kisebb) mint P. Ha az eladó értékesíteni tudja termékét a $C+P$ vagyoni helyzetbe kerül. $1-V(P)$ a valószínűsége annak, hogy a monopólium olyan emberrel találkozik, akinek a rezervációs ára kisebb mint P. Ebben az esetben meghiúsul az értékesítés, a monopólium marad a C vagyoni helyzetben.

3.1. Lemma. *Az $U(C,P,1)$ függvény rögzített C érték mellett P változójában felveszi a maximumát a $[0,\overline{P}]$ intervallumon, továbbá a maximum a $[0,\overline{P}]$ szakasz belső pontja, tehát a derivált értéke 0 ebben a pontban.*

Bizonyítás.

Mivel u és $V(P)$ függvények folytonosan differenciálhatóak, ezért $f(P) = U(C,P,1)$ függvény is az. A Weierstrass tétel szerint az f függvény felveszi a szélsőértékeit a $[0,\overline{P}]$ zárt intervallumon. Tudjuk továbbá, hogy

$$U(C,0,1) = U(C,\overline{P},1) = u(C),$$

és olyan $P \in (0,\overline{P})$ értékekre, melyekre $V(P) > 0$ (tehát $P > 0$)

$$U(C,P,1) =$$
$$= V(P)u(C+P) + (1-V(P))u(C) > V(P)u(C) + (1-V(P))u(C) = u(C).$$

Ilyen P pont biztosan létezik, mert ha minden $P \in (0, \overline{P})$ pontra $V(P) = 0$, akkor ez ellentmond a $V(P)$ függvény folytonosságának, hiszen $V(0) = 1$. A maximumhely tehát a $[0, \overline{P}]$ intervallum belső pontja. Mivel az f függvény a vizsgált szakasz minden pontjában deriválható, ezért a maximumhelynél a deriváltnak 0-nak kell lennie.

$\square$

3.2. Megjegyzés. *A maximumhely egyedisége nehezebb kérdés. Természetesen, ha $f(P) = U(C, P, 1)$ függvény szigorúan konkáv, akkor a maximumhely egyértelmű, de ez nem szükséges feltétel. Nagyon nehéz olyan feltételt adni, amely (elég tágan) biztosítja, hogy a maximumhely egyértelmű. Ennek ellenére a numerikusan vizsgált esetekben nem fordult elő olyan eset, amikor a maximumhely nem egyedi volt (lásd 6. fejezet).*

A dolgozat további részében felteszem, hogy az optimális ár egyedi.

3.3. Állítás. *Egyszereplős termékpiac esetén az eladó olyan P árat határoz meg, amelyre:*

$$-V'(P)(u(C+P) - u(C)) = V(P)u'(C+P). \tag{3}$$

BIZONYÍTÁS.

Deriválom P szerint a (2) kifejezést:

$$U_2'(C, P, 1) = V'(P)u(C+P) + V(P)u'(C+P) - V'(P)u(C), \tag{4}$$

ahol $U_2'(C, P, 1)$ az $U(C, P, 1)$ függvény második argumentuma szerinti deriváltat jelenti.

A 3.1. Lemma állítása szerint a maximumhelyen a függvény deriváltja 0. Egyenlővé teszem (4) kifejezést 0-val. Átrendezés után adódik az állítás bizonyítása.

$\square$

3.4. Megjegyzés. *A 3.3. Állításban nem állítom, hogy nem maximumhelyen nem teljesülhet a (3) összefüggés.*

A (3) összefüggésnek közgazdasági jelentése is van. Az egyenlet bal oldalán álló kifejezés jelentése: ha megváltozik az ár, akkor mennyivel változik a hasznosság amiatt, hogy megváltozik az értékesítési valószínűség. A jobboldalon álló kifejezés jelentése: változik a hasznosság amiatt, hogy drágábban vagy olcsóbban értékesíti az eladó a termékét. Optimumban a két hatásnak meg kell egyeznie.

Egyszemélyes termékpiac esetén a hasznosságmaximumot biztosító árat P^{*1} módon jelölöm. A hasznosságmaximumot adó árra optimális vagy egyensúlyi árként is fogok hivatkozni.

3.5. Állítás. *Ha az $f(P) = U(C, P, 1)$ függvény kvázikonkáv, akkor kockázatkerülő ($u'' < 0$) döntéshozó esetén az egyszereplős termékpiac optimális ára kisebb mint a nyereségmaximumot biztosító ár (P^{*pm}).*

Bizonyítás.

A várható nyereséget a következő összefüggés adja meg:

$$pm(P) = V(P)P. \tag{5}$$

A pm függvényről szintén állítható hogy folytonosan deriválható, tehát a Weierstrass tétel szerint felveszi a szélsőértékeit. Továbbá $pm(0) = pm(\overline{P}) = 0$, és létezik olyan $P \in (0, \overline{P})$, mire $V(P)P > 0$. Az előző megállapításokat figyelembe véve kijelenthető, hogy a nyereségmaximumot biztosító árban a derivált 0. Deriválom az (5) kifejezést, majd a deriváltat egyenlővé teszem 0-val:

$$V'(P)P + V(P) = 0. \tag{6}$$

A (6) kifejezést átrendezem a következő alakra:

$$V(P) = -V'(P)P. \tag{7}$$

Megmutatom, hogy az $U(C, P, 1)$ függvény deriváltja a nyereségmaximumot biztosító ár esetén negatív. Ebből már következik a lemma állítása: az $f(P) = U(C, P, 1)$ függvény kvázikonkáv, ami azt jelenti, hogy a derivált csak egyszer vált előjelet, tehát a hasznosságmaximumot biztosító árnak kisebbnek kell lennie, mint nyereségmaximumot adó ár.

Az $U(C, P, 1)$ függvény deriváltját megadja a (4) kifejezés. A nyereségmaximumot biztosító ár esetén fennáll a (7) összefüggés is. A (4) kifejezésben $V(P)$ helyére behelyettesítem a (7) összefüggést:

$$V'(P^{*pm})\Big(u(C + P^{*pm}) - u(C) - u'(C + P^{*pm})P^{*pm}\Big). \tag{8}$$

A (8) összefüggésben $V'(P^{*pm})$ értéke negatív, tehát az egész kifejezés előjele az $u(C+P^{*pm}) - u(C) - u'(C+P^{*pm})P^{*pm}$ szorzótényező előjelétől függ. $u'(C + P^{*pm})P^{*pm}$ kifejezés az $u(C + P^{*pm}) - u(C)$ differencia lineáris közelítése. Az u függvény konkáv, ezért

$$u(C + P^{*pm}) - u(C) > u'(C + P^{*pm})P^{*pm}, \tag{9}$$

tehát az $U(C, P, 1)$ függvény P szerinti deriváltja negatív a nyereségmaximumot biztosító ár esetén ($U_2'(C, P^{*pm}, 1) < 0$).

□

A 3.5. Állítás interpretálható közgazdaságtanilag is. Mivel az eladó kockázatkerülő, és bizonytalanság jelentkezik a termék értékesítésénél, ezért megelégszik a nyereségmaximumot biztosító árnál alacsonyabb árral is, amelyet viszont nagyobb valószínűséggel realizál.

3.6. Megjegyzés. *A közgazdasági megérzés azt súgja, hogy minél kisebb az elérhető nyereség az induló vagyonhoz képest, annál kevésbé tér el hasznosságmaximumot biztosító ár a nyereségmaximumot adó ártól. A megérzés alátámasztható matematikailag is. Ahogy P csökken, $u'(C + P)P$ egyre jobb közelítése*

$u(C+P)-u(C)$ különbségnek, tehát az

$$u(C+P)-u(C)-u'(C+P)P$$

kifejezés értéke egyre közelebb kerül a 0-hoz. Ez azt eredményezi, hogy az $U(C,P,1)$ függvény deriváltjának értéke is egyre közelebb kerül a 0-hoz, ezért vélhetően a hasznosságmaximumot biztosító ár nem lesz messze a nyereségmaximumot biztosító ártól. Természetesen ezen észrevételem nem számít bizonyításnak. Ezt kérdéskört részletesen vizsgálom a 6. fejezetben.

3.7. Megjegyzés. *A 3.5. Állítás megfogalmazható kockázatkedvelő döntéshozóra is. Ekkor természetesen az az állítás, hogy kockázatkedvelő döntéshozó a nyereségmaximumot biztosító árnál magasabb árat határoz meg. Ekkor a (9) összefüggésben fordított a reláció, az állítás többi része analóg.*

3.2. Többszereplős termékpiac

Az előző alfejezetben megvizsgáltam az eladó viselkedését egyszereplős piac esetén. Ebben az alfejezetben megvizsgálom, hogy viselkedik a biztosító, ha nem egy, hanem több érdeklődő van a piacon.

Kétszereplős piac esetén az eladó hasznossága, ha P árat határoz meg a termékének:

$$\begin{aligned} &U(C,P,2)= \\ &\quad = V(P)^2u(C+2P)+2V(P)(1-V(P))u(C+P)+(1-V(P))^2u(C). \end{aligned} \tag{10}$$

Az eladó $V(P)^2$ valószínűséggel tudja mindkét érdeklődőnek eladni a termékét, ekkor a $C+2P$ vagyoni helyzetbe kerül. $2V(P)(1-V(P))$ valószínűséggel csak az egyik szereplő veszi meg a terméket, $(1-V(P))^2$ valószínűséggel pedig egyik sem. A felírás módjából látszik, hogy az értékesítések függetlenek egymástól. Abból, hogy az első érdeklődőnek el tudta-e adni a monopólium a terméket, semmilyen többletinformáció nem következik a második érdeklődőre vonatkozóan. A rezervációs árak eloszlása véletlenszerű (kiismerhetetlen) a sokaságban.

Ha nem csak kettő, hanem n szereplő van a piacon, az eladó hasznosságát az alábbi összeggel tudjuk felírni:

$$U(C,P,n)=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-k}u(C+kP)\right). \tag{11}$$

Az értékesítések most is függetlenek egymástól (lásd korábbi megjegyzésemet).

Érdemes felfigyelni arra, hogy az eladó hasznosságára érvényes a következő rekurzív összefüggés:

$$U(C,P,n)=V(P)U(C+P,P,n-1)+(1-V(P))U(C,P,n-1). \tag{12}$$

3.8. Állítás. *Rögzített P ár esetén az eladó hasznossága $n+1$-szereplős piac esetén nagyobb, mint n-szereplős piac esetén.*

Bizonyítás.

Felhasználva a (12) összefüggést felírhatom a következő egyenlőséget:

$$U(C,P,n+1)-U(C,P,n)=V(P)\Big(U(C+P,P,n)-U(C,P,n)\Big). \tag{13}$$

Másrészről

$$\begin{aligned}
&U(C+P,P,n)-U(C,P,n)=\\
&=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-k}u(C+(k+1)P)\right)+\\
&\quad-\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-k}u(C+kP)\right)=\\
&=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-k}\Big(u(C+(k+1)P)-u(C+kP)\Big)\right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Mivel $u' > 0$, ezért (14) kifejezés pozitív, amiből következik, hogy (13) kifejezés is pozitív, amiből következik, hogy:

$$U(C, P, n+1) > U(C, P, n),$$

ami a bizonyítani kívánt állítás.

□

HIPOTÉZIS.
Termékpiac esetén a monopol helyzetű eladó és a vevők érdeke ellentétes: az eladó a piaci méret növelésében érdekelt.

3.9. Következmény. *Termékpiac esetén a monopol helyzetben levő eladó a piaci létszám növelésében érdekelt.*

BIZONYÍTÁS.

P^{*n}-nel jelölöm az n-szereplős piacon az eladó haszonmaximalizáló árát. A 3.8. Állítás alapján:

$$U(C, P^{*n}, n+1) > U(C, P^{*n}, n). \tag{15}$$

Másrészről

$$U(C, P^{*n+1}, n+1) \geq U(C, P^{*n}, n+1), \tag{16}$$

mivel P^{*n+1} ár $n+1$-szereplős piac esetén a legnagyobb hasznosságot biztosítja.

A (15) és (16) összefüggések alapján:

$$U(C, P^{*n+1}, n+1) > U(C, P^{*n}, n),$$

amit bizonyítani akartam.

□

3.10. Megjegyzés. *Érdekes lenne megvizsgálni, egy olyan modellt is, ahol a biztosító bizonyos összeg ráfordításával növelni tudja a piac méretét. Ilyen típusú piacokkal eddig nem foglalkoztam.*

A 3.1. Lemma állítását általánosíthatjuk n szereplő esetére is.

3.11. Lemma. *Az $U(C, P, n)$ függvény rögzített C és n érték esetén P változójában felveszi a maximumát a $[0, \overline{P}]$ intervallumon, továbbá a maximum a $[0, \overline{P}]$ szakasz belső pontja, tehát a derivált értéke 0 ebben a pontban.*

Bizonyítás.

A bizonyítás a 3.1. Lemma bizonyításának analógiájára elvégezhető:

Mivel u és $V(P)$ függvények folytonosan differenciálhatóak, ezért $f(P) = U(C, P, n)$ függvény is az. A Weierstrass tétel szerint az f függvény felveszi a szélsőértékeit a $[0, \overline{P}]$ zárt intervallumon. Tudjuk továbbá, hogy

$$U(C, 0, n) = U(C, \overline{P}, n) = u(C),$$

és olyan $P \in (0, \overline{P})$ értékekre, melyekre $V(P) > 0$

$$U(C, P, 1) > u(C).$$

Ilyen P pont biztosan létezik, mert ha minden $P \in (0, \overline{P})$ pontra $V(P) = 0$, akkor ez ellentmond a $V(P)$ függvény folytonosságának, hiszen $V(0) = 1$. A maximumhely tehát a $[0, \overline{P}]$ intervallum belső pontja. Mivel az f függvény a vizsgált szakasz minden pontjában deriválható, ezért a maximumhelynél a deriváltnak 0-nak kell lennie.

$\square$

Ismét jelzem, hogy nagyon nehéz olyan feltételt adni, amely esetén a maximumhely egyedisége biztosított. A dolgozat további részében felteszem, hogy a várható hasznosság P szerinti maximuma minden C és n esetén egyedi.

3.12. Állítás. *n-szereplős termékpiac esetén az eladó olyan P árat határoz meg, amelyre:*

$$V'(P)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-1-k}(u(C+(k+1)P)-u(C+kP))\right)+ \\ +V(P)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-1-k}u'(C+(k+1)P)\right) \\ =0. \tag{17}$$

Bizonyítás.

Deriválom P szerint a (11) kifejezést:

$$\begin{aligned} &U_2'(C,P,n)= \\ &=V'(P)\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}kV(P)^{k-1}(1-V(P))^{n-k}u(C+kP)\right)+ \\ &\quad -V'(P)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k}V(P)^k(n-k)(1-V(P))^{n-k-1}u(C+kP)\right)+ \\ &\quad +\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-k}ku'(C+kP)\right)= \\ &=nV'(P)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-1-k}u(C+P+kP)\right)+ \\ &\quad -nV'(P)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-1-k}u(C+kP)\right)+ \\ &\quad +nV(P)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-k}u'(C+P+kP)\right). \end{aligned} \tag{18}$$

A 3.11. Lemma állítása szerint a maximumhelyen a függvény deriváltja 0. Egyenlővé teszem (18) kifejezést 0-val. Átrendezés után adódik a bizonyítani kívánt állítás.

□

Az egyszerűbb kezelhetőség miatt bevezetem a következő jelöléseket:

$$dU(C,P,n) \mathrel{\hat{=}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} V(P)^k (1-V(P))^{n-k} u'(C+kP), \tag{19}$$

$$ddU(C,P,n) \mathrel{\hat{=}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} V(P)^k (1-V(P))^{n-k} u''(C+kP). \tag{20}$$

A (19) kifejezést felhasználva a $U_2'(C,P,n)$ deriváltat tömörebb formában is ki tudom fejezni:

$$U_2'(C,P,n) = \\ = V'(P)\Big(U(C+P,P,n-1) - U(C,P,n-1)\Big) + V(P)dU(C+P,P,n-1). \tag{21}$$

A dolgozat további része szempontjából fontos, hogy a (12) rekurzív összefüggés igaz dU illetve ddU függvényekre is:

$$dU(C,P,n) = V(P)dU(C+P,P,n-1) + (1-V(P))dU(C,P,n-1),$$

$$ddU(C,P,n) = V(P)ddU(C+P,P,n-1) + (1-V(P))ddU(C,P,n-1).$$

Hipotézis.
Termékpiac esetén a monopol helyzetű eladó a nyereségmaximumot adó árnál kisebb árat állapít meg.

3.13. Állítás. *Kockázatkerülő döntéshozó esetén ($u'' < 0$) amennyiben $f(P) = U(C,P,n)$ függvény kvázikonkáv, akkor P^{*n} kisebb, mint a nyereségmaximumot biztosító ár (P^{*pm}).*

Bizonyítás.

A várható nyereséget a következő összefüggés adja meg:

$$pm_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} V(P)^k (1-V(P))^{n-k} kP \right) = nV(P)P. \tag{22}$$

A (22) összefüggés megmutatja, hogy a nyereségmaximumot biztosító ár nem függ attól, hogy hány személyes a piac, ami nyilvánvaló, hiszen a nyereségmaximalizálás kockázatsemlegességet jelent. A 3.5. Állítás gondolatmenetét felhasználva megállapítható, hogy pm_n felveszi a maximumát, továbbá a maximumhelyen a derivált 0. Azt is tudom, hogy a nyereségmaximumot biztosító ár esetén

$$V(P) = -V'(P)P. \tag{23}$$

Most is azt fogom megmutatni, hogy az $U(C, P, n)$ függvény P szerinti parciális deriváltja a nyereségmaximumot biztosító ár esetén negatív. Az $f(P) = U(C, P, n)$ függvény kvázikonkavitásából következik, hogy a derivált csak egyszer vált előjelet, amiből már következik a bizonyítani kívánt állítás.

$$\begin{aligned}
&U_2'(C, P^{*pm}, n) = \\
&\quad = nV'(P^{*pm})(U(C + P^{*pm}, P^{*pm}, n-1) - U(C, P^{*pm}, n-1))+ \\
&\qquad +nV(P^{*pm})dU(C + P^{*pm}, P^{*pm}, n-1) = \\
&\quad = nV'(P^{*pm})A,
\end{aligned}$$

ahol

$$A = U(C+P^{*pm}, P^{*pm}, n-1) - U(C, P^{*pm}, n-1) - P^{*pm}dU(C+P^{*pm}, P^{*pm}, n-1).$$

Megmutatjuk, hogy $A > 0$:

$$\begin{aligned}
&A = \\
&\quad = U(C + P^{*pm}, P^{*pm}, n-1) - U(C, P^{*pm}, n-1))+ \\
&\qquad -P^{*pm}dU(C + P^{*pm}, P^{*pm}, n-1) = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} V(P^{*pm})^k (1 - V(P^{*pm}))^{n-1-k} mu(C, P^{*pm}, k),
\end{aligned}$$

ahol

$$mu(C, P^{*pm}, k) = u(C+(k+1)P^{*pm}) - u(C+kP^{*pm}) - P^{*pm}u'(C+(k+1)P^{*pm}).$$

Mivel u konkáv, ezért $mu(C, P^{*pm}, k)$ mindig pozitív, amiből következik, hogy A értéke is mindig pozitív. Ha A értéke pozitív, akkor $V'(P)A$ kifejezés értéke negatív, tehát $U(C, P, n)$ függvény P szerinti deriváltja a nyereségmaximumot biztosító pontban negatív.

□

A következőkben megmutatom, hogy termékpiac esetén minél nagyobb a piac, annál drágább a piacon lévő termék. Az állítás bizonyításához szükségesek a következő lemmák.

3.14. Lemma. *Amennyiben a, b, c és d számokra teljesül, hogy b és d előjele megegyezik, továbbá: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, akkor*

$$\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &> \frac{c}{d} \\ ad &> cb \\ ab + ad &> ab + cb \\ \frac{a}{b} &> \frac{a+c}{b+d} \end{aligned}$$

Hasonlóan be lehet látni az egyenlőtlenség másik felét is.

□

3.15. Lemma. *Legyenek $u_1, u_2, \ldots u_n$ olyan hasznosságfüggvények, amelyekre teljesül a kockázatelutasítás csökkenő mértéke. Legyen*

$$v(x) = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \cdots + \alpha_n u_n(x),$$

ahol $\alpha_i > 0$! Ekkor $v(x)$ függvény is hasznosságfüggvény, továbbá v függvényre is teljesül a kockázatelutasítás csökkenő mértéke.

Bizonyítás.

v hasznosságfüggvény, hiszen hasznosságfüggvények lineáris kombinációja is hasznosságfüggvény.

A lemma bizonyítását először csak két hasznosságfüggvényre mutatom meg, kettőnél több hasznosságfüggvényre az állítást teljes indukcióval bizonyítom.

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{v''(x)}{v'(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{\alpha_1 u_1''(x) + \alpha_2 u_2''(x)}{\alpha_1 u_1'(x) + \alpha_2 u_2'(x)}\right) = -\frac{f(x)}{g(x)}, \tag{24}$$

ahol

$$\begin{aligned} f(x) = & \\ &= \alpha_1 u_1'''(x)\alpha_1 u_1'(x) + \alpha_2 u_2'''(x)\alpha_2 u_2'(x) + \\ &\quad + \alpha_1 u_1'''(x)\alpha_2 u_2'(x) + \alpha_2 u_2'''(x)\alpha_1 u_1'(x) + \\ &\quad - \alpha_1 u_1''(x)\alpha_1 u_1''(x) - \alpha_2 u_2''(x)\alpha_2 u_2''(x) + \\ &\quad - \alpha_1 u_1''(x)\alpha_2 u_2''(x) - \alpha_2 u_2''(x)\alpha_1 u_1''(x) \end{aligned}$$

és

$$g(x) = \Big(\alpha_1 u_1'(x) + \alpha_2 u_2'(x)\Big)^2.$$

$g(x)$ függvény értéke pozitív. Belátom, hogy $f(x)$ függvény értéke is pozitív. A $\frac{d}{dx}\left(-\frac{u_i''(x)}{u_i'(x)}\right) < 0$ feltételből tudjuk, hogy

$$u_1'''(x)u_1'(x) > u_1''(x)u_1''(x) \tag{25}$$

és

$$u_2'''(x)u_2'(x) > u_2''(x)u_2''(x). \tag{26}$$

A (25) és a (26) egyenlőtlenséget összeszorozzuk, majd gyököt vonunk[11]:

$$\sqrt{u_1'''(x)u_1'(x)u_2'''(x)u_2'(x)} > u_1''(x)u_2''(x). \tag{27}$$

Alkalmazva a számtani és mértani átlag közti egyenlőtlenséget kapom, hogy:

$$\frac{u_1'''(x)u_2'(x) + u_2'''(x)u_1'(x)}{2} > u_1''(x)u_2''(x). \tag{28}$$

A (25), (26) és (28) összefüggésekből következik, hogy $f(x)$ is pozitív. Ha $f(x)$ és $g(x)$ is pozitív, akkor a (24) egyenlőség értelmében $\frac{d}{dx}\left(-\frac{v''(X)}{v'(x)}\right) < 0$, amit bizonyítani szerettem volna.

Teljes indukcióhoz vezessük be a következő jelölést:

$$v_i(x) = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k u_k(x).$$

Az eddigiek értelmében $i = 1$-re és $i = 2$-re teljesül, hogy v_i függvényre a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző. Belátom, hogy ha v_i függvényre teljesül a csökkenő mértékű kockázatelutasítás, akkor v_{i+1}-re is teljesül. A bizonyítás készen van, hiszen:

$$v_{i+1} = v_i + \alpha_{i+1}u_{i+1}.$$

A lemma feltételei szerint u_{i+1} függvényre teljesül a csökkenő mértékű kockázatelutasítás, és ez a tulajdonság az indukciós feltétel szerint v_i-re is teljesül. Így v_{i+1} két olyan hasznosságfüggvény nemnegatív lineáris kombinációja, amelyekre teljesül a csökkenő mértékű kockázatelutasítás; a bizonyítás első részének értel-

[11] A (25) és a (26) összefüggések alapján állíthatom, hogy a (27) egyenlőtlenség bal oldalán a gyökjel alatt álló kifejezés pozitív, így ha $u_1''(x)u_2''(x)$ kifejezés negatív, (27) egyenlőtlenség akkor is teljesül.

mében ennek a tulajdonságnak v_{i+1}-re is teljesülnie kell. $\square$

3.16. Lemma. *Ha u hasznosságfüggvényre* $\left(-\frac{u''}{u'}\right)' < 0$, *akkor*

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{ddU(x,P,n)}{dU(x,P,n)}\right) < 0.$$

Bizonyítás.

Legyen

$$v(x) = U(x,P,n).$$

Bármilyen rögzített P érték esetén v függvény is hasznosságfüggvény, hiszen hasznosságfüggvények lineáris kombinációja, továbbá:

$$v'(x) = dU(x,P,n)$$

és

$$v''(x) = ddU(x,P,n).$$

A 3.15. Lemma értelmében $\frac{d}{dx}\left(-\frac{v''(x)}{v'(x)}\right) < 0$, ami a bizonyítani kívánt állítás. $\square$

3.17. Lemma. *Tudjuk. hogy u hasznosságfüggvényre* $\left(-\frac{u''}{u'}\right)' < 0$. *Ekkor* $y > 0$ *esetén:*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dU(x+y,P,n)}{U(x+y,P,n) - U(x,P,n)}\right) > 0.$$

Bizonyítás.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dU(x+y,P,n)}{U(x+y,P,n) - U(x,P,n)}\right) = \frac{f}{g}, \tag{29}$$

ahol a deriválási szabálynak megfelelően:

$$
\begin{aligned}
f = & \\
& = ddU(x+y,P,n)(U(x+y,P,n)-U(x,P,n))+ \\
& \quad -dU(x+y,P,n)(dU(x+y,P,n)-dU(x,P,n))
\end{aligned}
$$

és

$$g = (U(x+P,P,n)-U(x,P,n))^2.$$

A (29) tört nevezője mindig pozitív, így csak a számlálóról kell bebizonyítani, hogy pozitív.

Ha fennáll, a

$$\frac{ddU(x+y,P,n)}{dU(x+y,P,n)} > \frac{dU(x+y,P,n)-dU(x,P,n)}{U(x+y,P,n)-U(x,P,n)} \tag{30}$$

egyenlőtlenség, akkor a (29) tört számlálója pozítiv. A (30) egyenlőtlenség pedig fennáll, mert a Cauchy középértéktétel miatt létezik $0<\alpha<y$, hogy a (30) egyenlőtlenség jobboldala megegyezik $\frac{ddU(x+\alpha,P,n)}{dU(x+\alpha,P,n)}$ kifejezés értékével. Innen a 3.16. Lemma állításából következik a (30) egyenlőtlenség. □

3.18. Megjegyzés. *Tudjuk. hogy u hasznosságfüggvényre* $\left(-\frac{u''}{u'}\right)' < 0$. *Ekkor* $y>0$ *esetén:*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dU(x-y,P,n)}{U(x-y,P,n)-U(x,P,n)}\right) < 0$$

állítás is igaz.

Bizonyítás.

A bizonyítás teljesen a 3.17. Lemma bizonyításának mintájára elvégezhető. A különbség csak annyi, hogy a (30) egyenlőtlenség helyett a

$$\frac{ddU(x-y,P,n)}{dU(x-y,P,n)} < \frac{dU(x-y,P,n)-dU(x,P,n)}{U(x-y,P,n)-U(x,P,n)} \tag{31}$$

egyenlőtlenséget kell belátni. A Cauchy középértéktétel értelmében most is létezik egy $0 < \alpha < y$ szám, amire:

$$\frac{ddU(x-\alpha,P,n)}{dU(x-\alpha,P,n)} = \frac{dU(x-y,P,n) - dU(x,P,n)}{U(x-y,P,n) - U(x,P,n)}.$$

3.16. Lemma értelmében

$$\frac{ddU(x-y,P,n)}{dU(x-y,P,n)} < \frac{ddU(x-\alpha,P,n)}{dU(x-\alpha,P,n)},$$

amit bizonyítani szerettem volna.

$\square$

3.19. Állítás. *Tudjuk, hogy u hasznosságfüggvényre a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző* $\left(\left(-\frac{u''}{u'}\right)' < 0\right)$. *Ekkor:*

$$U_2'(C,P^0,n) = 0 \implies U_2'(C,P^0,n+1) > 0.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} & U_2'(C,P^0,n) = \\ & = nV'(P^0)(U(C+P^0,P^0,n-1) - U(C,P^0,n-1)) + \\ & \quad +nV(P^0)dU(C+P^0,P^0,n-1) = \\ & = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

A (32) összefüggést a célomnak jobban megfelelő alakra hozom:

$$-\frac{V'(P^0)}{V(P^0)} = \frac{dU(C+P^0,P^0,n-1)}{U(C+P^0,P^0,n-1) - U(C,P^0,n-1)}. \tag{33}$$

Másrészről

$$
\begin{aligned}
&U_2'(C,P^0,n+1) = \\
&\quad = (n+1)V'(P^0)(U(C+P^0,P^0,n) - U(C,P^0,n)) \\
&\qquad +(n+1)V(P^0)dU(C+P^0,P^0,n).
\end{aligned} \tag{34}
$$

A (34) derivált előjelének meghatározásához elég a

$$
-\frac{V'(P^0)}{V(P^0)}
$$

és a

$$
\frac{dU(C+P^0,P^0,n)}{U(C+P^0,P^0,n) - U(C,P^0,n)} \tag{35}
$$

kifejezések közti reláció eldöntése. Felhasználom a (33) összefüggést, így tulajdonképpen a

$$
\frac{dU(C+P^0,P^0,n-1)}{U(C+P^0,P^0,n-1) - U(C,P^0,n-1)} \tag{36}
$$

és a (35) kifejezések közti reláció eldöntése a cél.

$$
\frac{dU(C+P^0,P^0,n)}{U(C+P^0,P^0,n) - U(C,P^0,n)} = \frac{f}{g},
$$

ahol

$$
f = V(P^0)dU(C+P^0+P^0,P^0,n-1) + (1-V(P^0))dU(C+P^0,P^0,n-1)
$$

és

$$
\begin{aligned}
&g = \\
&\quad = V(P^0)\Big(U(C+P^0+P^0,P^0,n-1) - U(C+P^0,P^0,n-1)\Big)+ \\
&\qquad +(1-V(P^0))\Big(U(C+P^0,P^0,n-1) - U(C,P^0,n-1)\Big).
\end{aligned}
$$

A 3.14. Lemma és a 3.17. Lemma állítását felhasználva adódik, hogy a (35) tört értéke nagyobb, mint a (36) tört értéke, ami azt jelenti, hogy a derivált értéke pozitív.

□

Hipotézis.
Termékpiac esetén a monopol helyzetű eladó és a vevők érdeke ellentétes: a vevők a piaci méret csökkentésében érdekeltek.

3.20. Következmény. *Termékpiac esetén ha a $f(P) = U(C, P, n)$ függvény minden n esetén kvázikonkáv és az u hasznosságfüggvényre teljesül a csökkenő mértékű kockázatelutasítás feltétele, akkor $P^{*n} < P^{*n+1}$, azaz $n+1$-szereplős piac esetén az optimális ár magasabb, mint n-szereplős piac esetén.*

Bizonyítás.

A bizonyítás a 3.19. Állításból következik: a $f(P) = U(C, P, n)$ függvény kvázikonkavitása azt jelenti, hogy a P szerinti derivált csak egyszer vált előjelet. A P^{*n} pontban pozitív, igy $P^{*n} < P^{*n+1}$.

□

Ezen hipotézis bizonyításhoz használt állítások egyikéhez sem volt szükség a kockázatelutasítás feltételéhez csak ahhoz, hogy a kockázatelutasítás mértéke csökkenjen a vagyon növekedésével. A szakirodalomban népszerű az olyan hasznosságfüggvény (lásd.: [12]), amely kis vagyonok esetén kockázatkerülő, nagy vagyonok esetén kockázatkedvelő[12]. Ezen hasznosságfüggvények esetén a kockázatelutasítás mértéke nem feltétlenül csökken a vagyonnal, de vannak köztük ilyenek is (például a korábban már említett $u(x) = -e^{-x} + e^{x}$). Ezekre a hasznosságfüggvényekre is érvényesek a megfogalmazott hipotézisek. A kockázatelutasítás

[12]Ilyen hasznosságfüggvénnyel próbálják magyarázni azt a tényt, hogy egyes emberek biztosítást kötnek és lottóznak egyszerre.

($u'' < 0$) feltételét csak annak bizonyítására használtuk fel, hogy a haszonmaximalizáló ár alacsonyabb a nyereségmaximalizáló árnál. Természetesen ez nem marad érvényben.

Másik lehetséges kiterjesztés a Markowitz féle (lásd.: [12]). Ilyen típusú hasznosságfüggvények konkavitása többször is változik, így a megfogalmazott tételek segítségével nem tudjuk meghatározni az eladó viselkedését.

Annak bizonyításához, hogy n-szereplős piac esetén az ár alacsonyabb, mint $n+1$-szereplős piac esetén, felhasználtam, hogy az eladó viselkedésére a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző. Az eladó viselkedésére általában a csökkenő mértékű kockázatelutasítást szokás feltenni, de érdekes megvizsgálni, hogy lehet-e valamilyen állítást megfogalmazni, ha az eladóra növekvő mértékű kockázatelutasítás a jellemző.

A 3.15. Lemmához hasonlóan nem lehet állítani, hogy több olyan hasznosságfüggvény lineáris kombinációjára is a kockázatelutasítás növekvő mértéke a jellemző, amelyek a kockázatelutasítás növekvő mértékét mutatják. Az ellenpélda megalkotásához szükség van a következő lemmára.

3.21. Lemma. *Legyen $v(x)$ függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon. Tudjuk, hogy $v'(x) > 0$, $v''(x) < 0$ és $\left(-\frac{v''(x)}{v'(x)}\right)' > 0$ az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor megadható egy olyan $u(x)$ legalább kétszer folytonosan deriválható függvény, amely az $[a,b]$ intervallumon egyenlő lesz $v(x)$-szel és $u' > 0$, $u'' < 0$, $\left(-\frac{u''}{u'}\right) > 0$ a teljes számegyenesen.*

Bizonyítás.

A $\left(-\frac{v''(x)}{v'(x)}\right)' > 0$ feltétel egyenértékű

$$\ln(v'(x))'' < 0 \tag{37}$$

feltétellel. A (37) feltétel azt mondja ki, hogy az $\ln(v'(x))$ függvény konkáv az $[a,b]$ intervallumon.

Bevezetem a következő jelöléseket:

$$-\frac{v''(x)}{v'(x)}\bigg|_{x=a} = A,$$

$$\left(-\frac{v''(x)}{v'(x)}\right)'\bigg|_{x=a} = AA,$$

$$-\frac{v''(x)}{v'(x)}\bigg|_{x=b} = B,$$

$$\left(-\frac{v''(x)}{v'(x)}\right)'\bigg|_{x=b} = BB.$$

A feltételek értelmében A, AA, B és BB mindegyike pozitív véges szám.

Legyen

$$\ln(u'(x)) = \frac{\alpha}{x+\beta} + c_1,$$

$x < a$ esetén, ahol $\alpha > 0$ és $\beta < -a$. Ekkor $\ln(u'(x))$ folytonos, szigorúan monoton csökkenő és konkáv lesz a $[-\infty, a]$ intervallumon. Meghatározom α és β értékeket úgy, hogy $\lim_{x\to a-} \ln(u'(x))' = -A$ és $\lim_{x\to a-} \ln(u'(x))'' = -AA$ teljesüljön.

$$\lim_{x\to a-} \ln(u'(x))' = \lim_{x\to a-} -\frac{\alpha}{(x+\beta)^2} =$$

$$= -\frac{\alpha}{(a+\beta)^2} = -A \tag{38}$$

$$\lim_{x\to a-} \ln(u'(x))'' = \lim_{x\to a-} \frac{\alpha}{2(x+\beta)^3} =$$

$$= \frac{\alpha}{2(a+\beta)^3} = -AA \tag{39}$$

Megoldva a (38) és (39) egyenletekből álló egyenletrendszert kapom az $\alpha = \frac{A^3}{4AA^2}$ és $\beta = -a - \frac{A}{2AA}$ értékeket.

Meghatározom c_1 konstans értékét úgy, hogy $\ln(u'(x))$ folytonos legyen az a pontban.

Legyen

$$\ln(u'(x)) = -\gamma(x-\delta)^2 + c_2,$$

$x > b$ esetén, ahol $\gamma > 0$ és $\delta > b$. Ekkor $\ln(u'(x))$ folytonos, szigorúan monoton csökkenő és konkáv lesz a $[b, \infty]$ intervallumon. Meghatározom γ és δ értékeket úgy, hogy $\lim_{x\to b+} \ln(u'(x))' = -B$ és $\lim_{x\to b+} \ln(u'(x))'' = -BB$ teljesüljön!

$$\lim_{x\to a-} \ln(u'(x))' = \lim_{x\to b+} -2\gamma(x-\delta) =$$

$$= -2\gamma(b-\delta) = -B \tag{40}$$

$$\lim_{x\to b+} \ln(u'(x))'' = \lim_{x\to b+} -2\gamma =$$

$$= -2\gamma = -BB \tag{41}$$

Megoldva a (41) egyenletet γ értékére $\frac{BB}{2}$ adódik. Visszahelyettesítve γ értékét a (40) egyenletbe α értékére $\frac{B}{BB}$ adódik. Meghatározom c_2 konstans értékét úgy, hogy $\ln(u'(x))$ folytonos legyen a b pontban.

Összességében meghatároztam $\ln(u'(x))$ függvényt a teljes valós számegyenesen. Mivel $\ln(u'(x))$ konkáv és kétszer deriválható, ezért

$$\left(-\frac{u''}{u'}\right)' > 0.$$

teljesül.

Jelölje $\ln(u'(x))$ függvényt a továbbiakban $f(x)$. E függvény segítségével fel tudom írni $u'(x)$ függvényt:

$$u'(x) = e^{f(x)}. \tag{42}$$

A (42) összefüggésben könnyen lehet látni, hogy $u'(x) > 0$. Mivel $\ln(u'(x))$ függvény csökkenő és deriválható, ezért

$$\frac{u''(x)}{u'(x)} < 0. \tag{43}$$

Tudom, hogy $u' > 0$ ezért a (43) összefüggés miatt $u'' < 0$. Az $[a, b]$ intervallumon kívül $u(x)$ függvény integrálással kapható meg:

$$u(x) = v(a) - \int_x^a e^{f(x)},$$

ha $x < a$ és

$$u(x) = v(a) + \int_b^x e^{f(x)},$$

ha $x > b$.

□

3.22. Példa. *Legyenek u_1 és u_2 olyan hasznosságfüggvények, amelyekre teljesül a kockázatelutasítás növekvő mértéke. Ekkor:*

$$v(x) = u_1(x) + u_2(x)$$

hasznosságfüggvényre nem mindig teljesül a kockázatelutasítás növekvő mértéke.

Bizonyítás.

A következő példa során u_1 és u_2 hasznosságfüggvényre is a kockázatelutasítás növekvő mértéke a jellemző, a két függvény összegére ennek ellenére sem teljesül a kockázatelutasítás növekvő mértéke.

Legyen a $[0, 1]$ intervallumon

$$u_1(x) = \frac{(x-2)^3}{3}$$

és

$$u_2(x) = \frac{10}{3}\left(\frac{x}{100} - 1\right)^3.$$

Ekkor $u_1'(x) = (x-2)^2$, $u_1''(x) = 2(x-2)$ és

$$\left(-\frac{u_1''(x)}{u_1'(x)}\right)' = \left(-\frac{2(x-2)}{(x-2)^2}\right)' = \left(\frac{2}{2-x}\right)'.$$

A $[0,1]$ intervallumon teljesül, hogy $u_1' > 0$, $u_1'' < 0$ és $\left(-\frac{u_1''}{u_1'}\right)' > 0$, ezért a 3.21. Lemma értelmében u_1 függvényt ki lehet terjeszteni a valós számegyenesre úgy, hogy u_1 hasznosságfüggvényre a kockázatelutasítás növekvő mértéke legyen a jellemző. Legyen u_1 egy tetszőleges ezen kiterjesztések közül.

Hasonlóan $u_2'(x) = 10\left(\frac{x}{100} - 1\right)^2$, $u_2''(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{x}{100} - 1\right)$ és

$$\left(-\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)}\right)' = \left(-\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{x}{100} - 1\right)}{10\left(\frac{x}{100} - 1\right)^2}\right)' = \left(\frac{2}{1 - \frac{x}{100}}\right)'.$$

A $[0,1]$ intervallumon teljesül, hogy $u_2' > 0$, $u_2'' < 0$ és $\left(-\frac{u_2''}{u_2'}\right)' > 0$, ezért a 3.21. Lemma értelmében u_2 függvényt is ki lehet terjeszteni a valós számegyenesre úgy, hogy u_2 hasznosságfüggvényre a kockázatelutasítás növekvő mértéke legyen a jellemző. Legyen most is u_2 egy tetszőleges ezen kiterjesztések közül.

Legyen

$$v(x) = u_1(x) + u_2(x).$$

A $[0,1]$ intervallumon $v' > 0$, $v" < 0$.

$$\left(-\frac{v''(x)}{v'(x)}\right)' = \left(-\frac{u_1''(x) + u_2''(x)}{u_1'(x) + u_2'(x)}\right)' = \left(-\frac{2(x-2) + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{100} - 1\right)}{(x-2)^2 + 10\left(\frac{x}{100} - 1\right)^2}\right)' = -\frac{f(x)}{g(x)}, \tag{44}$$

ahol

$$f(x) = -2,004002x^2 + 8,4084x + 10,388$$

és

$$g(x) = \left((x-2)^2 + 10\left(\frac{x}{100} - 1\right)^2\right)^2.$$

A $[0,1]$ intervallumon $f(x)$ és $g(x)$ értéke is pozitív, tehát (44) derivált értéke negatív, ezen az intervallumon a kockázatelutasítás csökkenő mértéke jellemző $v(x)$ hasznosságfüggvényre.

$\square$

A 3.22. Példában beláttam, hogy a növekvő kockázatelutasítás tulajdonsága nem őrződik meg hasznosságfüggvények lineáris kombinációjával. A 3.23. Lemmában viszont bebizonyítom, hogy amennyiben a hasznosságfüggvények harmadik deriváltja negatív, akkor a növekvő kockázatelutasítás tulajdonság is megőrződik hasznosságfüggvények lineáris kombinációjával.

3.23. Lemma. *Legyenek $u_1, u_2, \dots u_n$ olyan hasznosságfüggvények, amelyekre az $[a,b]$ intervallumon teljesül, hogy $u_i''' < 0$. Legyen*

$$v(x) = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \dots + \alpha_n u_n(x),$$

ahol $\alpha_i > 0$. Ekkor v függvény is hasznosságfüggvény, továbbá az $[a,b]$ intervallumon v függvényre is teljesül, hogy $v''' < 0$, ami biztosítja a $\left(-\frac{v''}{v'}\right)' > 0$ feltétel teljesülését.

Bizonyítás.

v hasznosságfüggvény volta egyértelmű.

$$v'''(x) = \alpha_1 u_1'''(x) + \alpha_2 u_2'''(x) + \dots + \alpha_n u_n'''(x).$$

Mivel $\alpha_1 > 0$ és $u_i'''(x) < 0$ ha $x \in [a,b]$, ezért $v'''(x)$ triviális módon negatív.

Másrészről

$$\left(-\frac{v''(x)}{v('(x)}\right)' = -\frac{v'''(x)v'(x) - (v''(x))^2}{(v'(x))^2}. \quad (45)$$

Ha $v''' < 0$, akkor (45) kifejezés értéke is negatív.

□

3.24. Megjegyzés. *A 3.23. Lemma állítása sajnos csak korlátozott értékű. $u''' < 0$ feltétel azt jelenti, hogy u' függvény konkáv. Összességében u' függvénynek folytonosnak, pozitívnak, szigorúan monoton csökkenőnek és konkávnak kell lennie. Sajnos nincs olyan függvény, amelyik ezeknek a tulajdonságoknak eleget tesz és* *legalább a $[0,\infty]$ intervallumon értelmezve van. A 3.23. Lemmát ezért tudtuk csak egy $[a,b]$ intervallumra kimondani.*

3.25. Lemma. *Legyen $\overline{P}$ pozitív és N pozitív egész szám. u(x) hasznosságfüggvényről tudjuk, hogy $[c, c+(N+1)\overline{P}]$ intervallumon $u''' < 0$. Ekkor $0 < n < N$, $0 < P < \overline{P}$ és $x \in [c, c+\overline{P}]$ esetén*

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{ddU(c+x,P,n)}{dU(c+x,P,n)}\right)' > 0.$$

Bizonyítás.

Legyen

$$v_i(x) = u(c+x+iP),$$

$i = 0, 1, \ldots, n-1$. Ekkor mindegyik v_i hasznosságfüggvény, és a kiinduló feltételek miatt állíthatjuk, hogy minden v_i-re $v_i''' < 0$ ha $x \in [0, \overline{P}]$. A 3.23. Lemmából adódik a bizonyítani kívánt állítás.

□

3.26. Lemma. *Legyen $\overline{P}$ pozitív és N pozitív egész szám. u(x) hasznosságfüggvényről tudjuk, hogy $[c, c+(N+2)\overline{P}]$ intervallumon $u' > 0$, $u''' < 0$. Ekkor: $0 < n < N$, $0 < P < \overline{P}$, $0 < x < \overline{P}$ és $0 < y < \overline{P}$ esetén*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dU(c+x+y,P,n)}{U(c+x+y,P,n) - U(c+x,P,n)}\right) < 0.$$

Bizonyítás.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{U(c+x+y,P,n)}{U(c+x+y,P,n) - U(c+x,P,n)}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{46}$$

ahol a deriválási szabálynak megfelelően:

$$f(x) =$$
$$= ddU(c+x+y,P,n)(U(c+x+y,P,n) - U(c+x,P,n)) +$$
$$-dU(c+x+y,P,n)(dU(c+x+y,P,n) - dU(c+x,P,n))$$

és

$$g(x) = (u(c+x+P,P,n) - U(c+x,P,n))^2.$$

A (46) tört nevezője mindig pozitív, így csak a számlálóról kell bebizonyítani, hogy pozitív.

Ha fenáll, a

$$\frac{ddU(c+x+y,P,n)}{dU(c+x+y,P,n)} < \frac{dU(c+x+y,P) - dU(c+x,P,n)}{U(c+x+y,P,n) - U(c+x,P,n)} \tag{47}$$

egyenlőtlenség, akkor a (46) tört számlálója pozitív. A (47) egyenlőtlenség pedig fenáll, mert a Cauchy középértéktétel miatt létezik $0 < \alpha < y$, hogy a (47) egyenlőtlenség jobboldala megegyezik $\frac{ddU(c+x+\alpha,P,n)}{dU(c+x+\alpha,P,n)}$ kifejezés értékével. Innen a 3.25. Lemma állításából következik a (47) egyenlőtlenség.

□

3.27. Állítás. *Legyen $\overline{P}$ pozitív és N pozitív egész szám. $u(x)$ hasznosságfüggvényről tudjuk, hogy $[C, C+(N+2)\overline{P}]$ intervallumon $u''' < 0$. Ha $0 < n < N-1$ és $U_2'(C, P^0, n) = 0$, akkor $U_2'(C, P^0, n+1) < 0$.*

Bizonyítás.

A bizonyítás a 3.19. Állítás bizonyításának analógiájára elvégezhető felhasználva a 3.26. Lemmát.

□

A 3.5. Állítás és a 3.13. Állítás során azt állítottuk, hogy a hasznosságmaximumot biztosító ár alacsonyabb, mint a nyereségmaximumot biztosító ár.

Kérdés, hogy ez a különbség észrevehető marad-e, ha a piac szereplőinek száma nagy. Másképpen fogalmazva: nagy létszámú vevőkör mellett az eladó megfigyelt viselkedéséből eldönthető-e, hogy nyereségmaximalizáló vagy profitmaximalizáló.

Matematikailag úgy vizsgálhatjuk meg a kérdést, hogy a $U_2'(C, P, n)$ függvény nyereségmaximumot adó pontban vett értékeinek sorozata tart-e a 0-hoz, ha n-nel tartunk a végtelenbe. Amennyiben $f(P) = U(C, P, n)$ függvény szigorú kvázikonkavitása teljesül, akkor e tulajdonság alapján vélhetjük, hogy ahogy a piaci szereplők száma tart a végtelenbe, akkor a haszonmaximalizáló ár egyre közelebb kerül a nyereségmaximumot adó árhoz. Szándékosan használtam a vélekedés szót, hiszen

$$\lim_{n\to\infty} U_2'(C, P^{*pm}, n) = 0$$

tulajdonság alapján nem állítható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P^{*n} = P^{*pm}.$$

Ehhez $g(n) = P^{*n}$ függvény folytonosságára lenne szükség. A g függvény csak egész értékek esetén van értelmezve. A piaci létszám folytonossá tétele olyan matematikai apparátust (pl. gamma függvény) igényel, ami az általánosan használt közgazdasági eszköztárat meghaladja, ezért ettől eltekintek. A 6. fejezetben numerikus módszerekkel vizsgálom az eladó viselkedését, és a megvizsgált esetekben $\lim_{n\to\infty} P^{*n} = P^{*pm}$ hipotézis elfogadható.

A kérdés vizsgálatához szükség van a következő lemmákra:

3.28. Lemma. *Tekintsük az a_k sorozatot, melyről tudjuk, hogy*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = A.$$

Ekkor bármilyen $0 < q < 1$ *esetén:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)\right) = A.$$

Bizonyítás. [13]

Tegyük fel, hogy $A = 0$! Megmutatom, hogy minden ε-hoz található n_1 küszöbindex, hogy ha $n > n_1$, akkor:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right) < \varepsilon.$$

Első lépésként belátom, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}\right)\right) = 0. \tag{48}$$

Mivel k értéke maximum m lehet a (48) összegben, ezért

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \leq n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \leq n^m. \tag{49}$$

Felhasználva a (49) összefüggést megállapíthatjuk, hogy

$$\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k} \leq \left(\frac{q}{1-q}\right)^k n^m q^n \to 0. \tag{50}$$

A (48) kifejezésben véges sok 0-hoz tartó kifejezést adok össze, ezért az összeg is a 0-hoz tart.

Mivel a_k sorozat tart 0-hoz, ezért minden $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan n_0 index, hogy minden $k > n_0$ esetén $a_k < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $m > n_0$. A vizsgált összeget bontsuk

[13] A bizonyítás lényegi része Kánnai Zoltán munkája, segítségét ezúton is köszönöm.

két részre:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)+\sum_{k=m+1}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right).$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)\right)=0,$$

ezért található $n_1 > m$ index, hogy $n > n_1$ esetén,

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Másrészről:

$$\sum_{k=m+1}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)<$$

$$\sum_{k=m+1}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}\frac{\varepsilon}{2}\right)<$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}\frac{\varepsilon}{2}\right)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Végeredményben ha $n > n_1$, akkor:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)+\sum_{k=m+1}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)<$$

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=$$

$$=\varepsilon.$$

Innen következik, hogy $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ esetén:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)\right) = 0.$$

Ha $\lim_{k\to\infty} a_k = A$, ahol $A \neq 0$ és $|A| \neq \infty$ akkor a következőképpen járok el:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k - A + A\right)\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k - A\right)\right) + \\
&+ \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}A\right)\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k - A\right)\right) + A.
\end{aligned}$$

Ha $a_k \to A$, akkor $a_k - A \to 0$, tehát a bizonyítás első része alapján:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k - A\right)\right) = 0.$$

Innen $|A| \neq \infty$ esetén adódik a bizonyítani kívánt állítás.

Ha $|A| = \infty$ a következőképpen járok el: legyen $A = \infty$. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{k_0}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k - A\right)\right) = K.$$

Mivel $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$, ezért létezik k_0 index, hogy $k > k_0$ esetén $a_k \leq K+1$. Definiálom a következő sorozatot:

$$b_k \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} a_k & \text{ha} \quad k \geq k_0 \\ K+1 & \text{ha} \quad k > k_1. \end{cases}$$

Tudom, hogy $\lim_{k\to\infty} b_k = K+1$, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{k_0}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)\right) \geq$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{k_0}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}b_k\right)\right) = K+1.$$

Ellentmondáshoz jutok, így:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{k_0}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)\right) = \infty.$$

Hasonlóan be lehet látni azt az esetet is, ha $A = -\infty$.

$\square$

3.29. Lemma. *Tekintsük az a_k sorozatot, melyről tudjuk, $\lim_{k\to\infty} k\, a_k = A$. Ekkor bármilyen $0 < q < 1$ esetén:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)\right) = A.$$

Bizonyítás.

Ha $A = 0$,

$$\begin{aligned}
&n\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)\right) = \\
&= (n+1)\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right)\right) - \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left((n+1)\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right) - \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right) = \\
&= \left(\frac{1}{q}\right)\sum_{k=0}^{n}\left((n+1)\binom{n}{k}q^{k+1}(1-q)^{n-k}a_k\right) + \\
&\quad -\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}a_k\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{q}\right) \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} q^k (1-q)^{n+1-k} k\, a_k \right) + \\
&\qquad -\frac{1}{q}(1-q)^{n+1} a_n - \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} a_k \right).
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Az (51) összeg minden tagja tart 0-hoz: a 3.28. Lemma értelmében

$$
\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{q}\right) \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} q^k (1-q)^{n+1-k} k\, a_k \right) \right) = 0.
$$

Ha $k\, a_k$ tart a 0-hoz, akkor a_k is tart a 0-hoz, emiatt

$$
\lim_{n\to\infty} \left((1-q)^{n+1} a_n \right) = 0,
$$

és szintén a 3.28. Lemma értelmében

$$
\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} a_k \right) \right) = 0.
$$

Ha $\lim_{k\to\infty} k\, a_k = A$, ahol $A \neq 0$ és $|A| \neq \infty$ akkor a következőképpen járok el:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} k\, a_k - A + A \right) \right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} k\, a_k - A \right) \right) + \\
&+ \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} A \right) \right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} a_k - A \right) \right) + A.
\end{aligned}
$$

Ha $k\, a_k \to A$, akkor $k\, a_k - A \to 0$, tehát a bizonyítás első része alapján:

$$
\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} a_k - A \right) \right) = 0.
$$

Innen $|A| \neq \infty$ esetén adódik a bizonyítani kívánt állítás.

Ha $|A| = \infty$ a következőképpen járok el: legyen $A = \infty$. Felteszem, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{k_0}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}k\,a_k - A\right)\right) = K.$$

Mivel $\lim_{k\to\infty} k\,a_k = \infty$, ezért létezik k_0 index, hogy $k > k_0$ esetén $a_k \leq K+1$. Definiálom a következő sorozatot:

$$b_k \overset{\circ}{=} \begin{cases} k\,a_k & \text{ha} \quad k \geq k_0 \\ K+1 & \text{ha} \quad k > k_1. \end{cases}$$

Tudom, hogy $\lim_{k\to\infty} b_k = K+1$, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{k_0}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}k\,a_k\right)\right) \geq$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{k_0}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}b_k\right)\right) = K+1.$$

Ellentmondáshoz jutok, így:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{k_0}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}k\,a_k\right)\right) = \infty.$$

Hasonlóan be lehet látni azt az esetet is, ha $A = -\infty$.

□

3.30. Állítás. *Legyen*

$$\lim_{k\to\infty}\left(k\Big(u(C+(k+1)P) - u(C+kP) - Pu'(C+(k+1)P)\Big)\right) = A.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} U_2'(C_0, P^{*pm}, n) = A,$$

ahol P^{*pm} a nyereségmaximumot adó árat jelöli.

Bizonyítás.

A 3.13. Állítás bizonyításában már kiszámoltam, hogy a $U(C,P,n)$ függvény P szerinti parciális deriváltja a nyereségmaximumot adó pontban:

$$U_2'(C_0,P^{*pm},n) = nV'(P^{*pm})\Bigg(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}V(P^{*pm})^k(1-V(P^{*pm}))^{n-1-k}a_k\Bigg), \tag{52}$$

ahol

$$a_k = u(C_0+(n+1)P^{*pm}) - u(C_0+nP^{*pm}) - P^{*pm}u'(C_0+(n+1)P^{*pm}).$$

Másrészről:

$$nV'(P^{*pm})\Bigg(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}V(P^{*pm})^k(1-V(P^{*pm}))^{n-1-k}a_k\Bigg) =$$

$$= (n-1)\Bigg(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}V(P^{*pm})^k(1-V(P^{*pm}))^{n-1-k}a_k\Bigg)+ \tag{53}$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}V(P^{*pm})^k(1-V(P^{*pm}))^{n-1-k}a_k. \tag{54}$$

Az (53) kifejezés a 3.29. Lemma miatt pontosan akkor tart 0-hoz, ha $A=0$. Az $A=0$ feltétel azt jelenti, hogy $\lim_{k\to\infty} k\,a_k = 0$, amiből következik az is, hogy $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, tehát a 3.28. Lemma miatt az (54) kifejezés is tart 0-hoz. Összességében megállapítható, hogy ha $A=0$, akkor:

$$\lim_{n\to\infty} U_2'(C_0,P^{*pm},n) = 0.$$

Ha $A \neq 0$ és $|A| \neq \infty$, akkor az (53) kifejezés a 3.29. Lemma miatt A-hoz. Másrészről, ha $|A| \neq \infty$, akkor $\lim_{k\to\infty} k\,a_k = A$, feltételből következik az is, hogy $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, tehát a 3.28. Lemma miatt az (54) kifejezés tart 0-hoz.

Ha $A=\infty$, akkor az (53) kifejezés a 3.29. Lemma miatt tart ∞-hez. Másrészről, ha $A = \infty$, akkor $\lim_{k\to\infty} k\, a_k = \infty$, esetén a_k, sorozat csak végessok negatív értéket tartalmazhat, így az (54) kifejezés értéke nem lehet negatív (Az első végessok tag összege tart 0-hoz), tehát állítható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} U_2'(C_0, P^{*pm}, n) = \infty.$$

Hasonlóan belátható az állítás $A = -\infty$ esetre is.

□

Felmerül a kérdés, hogy létezik-e egyáltalán olyan kockázatkerülő hasznosságfüggvény, amely esetében az eladó még nagy létszámú piacok esetén is alacsonyabb árat határoz meg, mint a nyereségmaximumot biztosító ár:

$$\lim_{n\to\infty} U_2'(C, P^{*pm}, n) < 0.$$

A következő állítás erre a kérdésre ad választ.

3.31. Állítás. *Legyen $c > 0$! Ekkor nem létezik olyan $u(x)$ függvény, amely egy kockázatkerülő egyén preferenciáit reprezentálja ($u''(x) < 0$) és amelyre teljesül, hogy*

$$\lim_{k\to\infty} \left(k\Big(u(C + kc + P) - u(C + kc) - u'(C + kc + P)P \Big) \right) = A > 0.$$

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy létezik olyan hasznosságfüggvény, amely esetén $A > 0$! Válasszuk meg ε értékét úgy, hogy $A - \varepsilon > 0$ teljesüljön. A határérték definíciójából adódóan létezik k_0 index, amelyre teljesül, hogy

$$k\Big(u(C + kc + P) - u(C + kc) - u'(C + kc + P)P \Big) > A - \varepsilon, \qquad (55)$$

ha $k > k_0$. Elosztom az (55) egyenlőtlenség mindkét oldalát k-val.

$$u(C + kc + P) - u(C + kc) - u'(C + kc + P)P > \frac{A - \varepsilon}{k}. \tag{56}$$

Mivel u konkáv függvény, ezért $u(C + kc + P) - u(C + kc) < u'(C + kc)P$. Az (56) egyenlőtlenséget felhasználva állítható, hogy

$$u'(C + kc)P - u'(C + (k + 1)c) > \frac{A - \varepsilon}{kP}. \tag{57}$$

Legyen $n > k_0$!

$$\begin{aligned} & u'(C + nc) = \\ & \quad = u'(C + k_0c) - \Big(u'(C + k_0c) - u'(C + (k_0 + 1)c)\Big) - \\ & \qquad - \Big(u'(C + (k_0 + 1)c) - u'(C + (k_0 + 2)c)\Big) - \\ & \qquad\qquad - \cdots - (u'(C + (n - 1)c) - u'(C + nc)). \end{aligned}$$

Felhasználva az (57) egyenlőtlenséget állíthatom, hogy

$$u'(C + nc) < u'(C + k_0c) - \sum_{k=k_0}^{n-1} \frac{A - \varepsilon}{kP}. \tag{58}$$

Veszem mindkét oldal határértékét az (58) egyenlőtlenségben:

$$\lim_{n\to\infty} u'(C + nc) < u'(C + k_0c) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=k_0}^{n-1} \frac{A - \varepsilon}{kP}. \tag{59}$$

Mivel az $\frac{1}{k}$ sor divergens, ezért u' értéke előbb vagy utóbb negatívvá válik, ami ellentmond annak a feltételnek, hogy u növekvő. Ellentmondáshoz jutottunk, tehát nem igaz a kiinduló feltételünk, azaz $A = 0$.

$\square$

3.32. Megjegyzés. *Ha a 3.31. Állításban* $c = P$*, akkor*

$$\lim_{k\to\infty}\left(k\Big(u(C+(k+1)P)-u(C+kP)-Pu'(C+(k+1)P)\Big)\right)=0,$$

tehát bármilyen kockázatkerülő hasznosságfüggvény esetén

$$\lim_{n\to\infty} U_2'(C, P^{*pm}, n) < 0.$$

4. Biztosítási piac

Ebben a fejezetben megvizsgálom, hogy biztosítási piac[14] esetén módosulnak-e a termékpiac esetére megfogalmazott megállapítások, és ha igen hogyan.

Biztosítási piac jellemzője, hogy a termék értékesítője az értékesítés megtörténte után is bizonytalan helyzetben marad. Nem tudja, hogy bekövetkezik-e káresemény vagy sem. A biztosítási piac további jellemzője, hogy az eladó nem tudja nagyobb áron értékesíteni a terméket, mint a (legnagyobb) kár értéke. Mivel tiszta cseregazdaságot vizsgálok, ezért a biztosító költsége 0. P ebben az esetben azt jelenti, hogy a monopol helyzetben lévő biztosító mennyiért értékesíti a biztosítási kötvényt.

Lehetne egyfajta köztes piacot is definiálni, ahol kockázat jelentkezik a termék eladása után, de a terméket magasabb áron is lehet értékesíteni, mint a legrosszabb kimenet esetén bekövetkezett veszteség. Jó példa erre a garancia vagy a jótállás. Az egyszerű példa kedvéért tegyük fel, hogy a bevezetőben említett autó összeszerelő azt vállalja, hogy egy éven belüli meghibásodás esetén egy alkalommal 100.000 Ft-ig állja a bekövetkezett kárt. Ha az autó önköltsége 1.100.000 Ft, attól még 1.100.000 Ft-nál többet is adhat érte valaki.

A következő tételben belátom azt a szakirodalomban jól ismert állítást (lásd pl. [13]), hogy ha a biztosító a várható értéknek megfelelő árat (nettó díjat) kér el a biztosítási kötvényért, akkor mindenki számára a teljes biztosítás lesz optimális.

4.1. Tétel. *Tekintsünk egy kockázatkerülő döntéshozót (a mi esetünkben a vevő), aki várható hasznosságát maximalizálja. Induló vagyonát jelöljük D-vel. A döntéshozó ξ előre nem ismert nagyságú kárral szembesül. A piacon elérhető egy olyan biztosítást, amely a kár r hányadát fedezi ξ várható értékének r-ed részéért. Ha*

[14] Biztosítás alatt a klasszikus értelemben vett biztosítást értem: a biztosító egy előre kialkudott összeg fejében átvállalja a kockázatot vagy annak egy részét. Manapság szokás az (élet)biztosítást egy megtakarítási formának tekinteni; én nem ebben az értelemben használom a biztosítást.

a döntéshozó választhatja meg r nagyságát, akkor számára az $r = 1$ érték lesz az optimális

BIZONYÍTÁS. [15]

A döntéshozó hasznosságát a következő képlet adja meg[16]:

$$V(r) = \int_0^\infty v\Big(D - x + rx - rE(\xi)\Big)dF(x), \tag{60}$$

ahol $v(\cdot)$ a döntéshozó viselkedését leíró hasznossági függvény, $E(\xi)$ a ξ valószínűségi változó várható értékét jelöli, $F(x)$ pedig a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. V első és második deriváltja:

$$\frac{dV(r)}{dr} = \int_0^\infty v'\Big(D - x + rx - rE(\xi)\Big)\Big(x - E(\xi)\Big)dF(x) \tag{61}$$

és

$$\frac{d^2V(r)}{dr^2} = \int_0^\infty v''\Big(D - x + rx - rE(\xi)\Big)\Big(x - E(\xi)\Big)^2 dF(x). \tag{62}$$

A kockázatkerülés feltétele miatt $v''(\cdot) < 0$, ezért (62) kifejezés negatív, tehát ha van szélsőérték, akkor az egyértelmű és csak maximumpont lehet.

Ha $r = 1$, akkor a (61) kifejezés értéke 0.

$$\begin{aligned}
\frac{dV(r)}{dr}\Big|_{r=1} &= \\
&= \int_0^\infty v'\Big(D - E(\xi)\Big)\Big(x - E(\xi)\Big)dF(x) = \\
&= v'\Big(D - E(\xi)\Big)\int_0^\infty \Big(x - E(\xi)\Big)dF(x) = \\
&= 0
\end{aligned}$$

[15] A bizonyítás megtalálható [13]-ben

[16] A hasznosságra illetve a hasznosságfüggvényre a V illetve a v jelölést használom, mert U illetve u betűket már elhasználtam.

Tehát $r = 1$ esetén maximális a (60) kifejezés, ami a teljes biztosításnak felel meg, a döntéshozó nem tart meg kockázatot.

□

A 4.1. Tételt a szokásostól eltérően, kicsit általánosabban is meg lehet fogalmazni: amennyiben a biztosító nem hajlandó fedezni a teljes kárt, de a fedezetet nettó díjon adja, akkor kockázatkerülő döntéshozóknak továbbra is az az optimális, ha az elérhető legnagyobb fedezetet választja.

4.2. Tétel. *Tekintsünk egy kockázatkerülő döntéshozót (vevőt), aki várható hasznosságát maximalizálja. Induló vagyonát jelöljük D-vel. A döntéshozó q valószínűséggel ξ előre nem tudható nagyságú kárral szembesül. A piacon elérhető egy olyan biztosítás, amely a kár esetén $K \leq \xi$ összeg (tegyük fel, hogy létezik ilyen K) r hányadát téríti rqK díjért. Ha a döntéshozó választhatja meg r nagyságát ($0 \leq r \leq 1$), akkor számára az $r = 1$ érték lesz az optimális.*

Bizonyítás.

A döntéshozó hasznosságát a következő összefüggés adja meg:

$$V(r) = (1-q)v(D - rqK) + q\int_0^\infty v\Big(D - x + rK - rqK\Big)dF(x). \tag{63}$$

V első deriváltja:

$$\frac{dV(r)}{dr} = (1-q)v'(D-rqK)+q\int_0^\infty v'\Big(D-x+rK-rqK\Big)\Big(K-qK\Big)dF(x). \tag{64}$$

Mivel $v'(\cdot) > 0$, és nyilvánvalóan $q < 1$, ezért az első derivált értéke pozitív, a döntéshozó a legnagyobb elérhető r értéket választja, ami 1.

□

Az általam vizsgált modellben az érdeklődők nem tudnak választani, hogy a kockázat mekkora hányadát tartják meg, csak arról tudnak dönteni, hogy megveszik-e a biztosítást vagy sem. Ha a biztosító nettó díjat kér el a kötvényért, akkor nyilvánvalóan azt fogják választani, hogy megveszik a kötvényt, matematikailag megfogalmazva $V(qK) = 1$.

Biztosítási piac esetén a $V(P)$ vásárlási hajlandóság függvénynek másfajta értelmet tudunk adni. Ennek elmagyarázásához szükséges a következő tétel:

4.3. Tétel. *Tekintsünk egy döntéshozót, akinek v hasznosságfüggvényére a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző. A döntéshozó q valószínűséggel K nagyságú kárral szembesül. Minél nagyobb a döntéshozó vagyona, annál kevesebbet hajlandó áldozni (annál kisebb az az legnagyobb összeg amennyit még hajlandó kifizetni) egy olyan szerződésre, amely a kár bekövetkezte esetén kifizeti a keletkezett kárt.*

Bizonyítás. [17]

Jelöljük a döntéshozó induló vagyonát D-vel, a biztosítási kötvényért fizetett összeget pedig P-vel. A legnagyobb összeget, amennyiért a döntéshozó még hajlandó vásárolni megadja az alábbi összefüggés:

$$qv(D-K) + (1-q)v(D) = v(D-P). \tag{65}$$

Tekintsük P-t D függvényének ($P(D)$). Totális deriválással meghatározhatjuk $\frac{dP}{dD}$ deriváltat:

$$\frac{dP}{dD} = -\frac{qv'(D-K) + (1-q)v'(D) - v'(D-P)}{v'(D-P)}. \tag{66}$$

A (66) kifejezés előjelének eldöntéséhez a jobb oldalon szereplő tört számlálójának előjelét kell meghatározni. Jelöljük ezt a kifejezést $SZ(P)$-szel:

$$SZ(P) = qv'(D-K) + (1-q)v'(D) - v'(D-P). \tag{67}$$

[17] A bizonyítás megtalálható [13]-ben

Helyettesítsük be a (65) kifejezést a (67) képletbe, hogy ki tudjuk q-t ejteni.

$$\begin{aligned} SZ(P) &= \\ &= \frac{v(D-P)-v(D)}{v(D-K)-v(D)}v'(D-K)+ \\ &+\frac{v(D-K)-v(D-P)}{v(D-K)-v(D)}v'(D)-v'(D-P) \end{aligned} \tag{68}$$

$SZ(P)$ deriváltja:

$$\begin{aligned} SZ'(P) &= \\ &= v''(D-P)+\frac{v'(D)-v'(D-K)}{v(D-K)-v(D)}v'(D-P)= \\ &= -v'(D-P)\left(-\frac{v''(D-P)}{v'(D-P)}-\frac{v'(D)-v'(D-K)}{v(D-K)-v(D)}\right). \end{aligned} \tag{69}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $SZ(0)=SZ(K)=0$. A Rolle-tétel értelmében kell lenni legalább egy szélsőértéknek a $[0,K]$ intervallumon. A szélsőértékhelyen az első derivált értéke 0. A derivált akkor lesz 0, ha

$$-\frac{v''(D-P)}{v'(D-P)}-\frac{v'(D)-v'(D-K)}{v(D-K)-v(D)}=0.$$

A $-\frac{v'(D)-v'(D-K)}{v(D-K)-v(D)}$ kifejezés konstans, a $-\frac{v''(D-P)}{v'(D-P)}$ kifejezés pedig a csökkenő kockázatelutasítás feltétele miatt csökkenő. Legyen P^0 az az ár, amely esetén az első derivált 0 lesz. A csökkenő kockázatelutasítás feltétele miatt $P<P^0$ esetén az első derivált pozitív, míg $P>P^0$ esetén negatív. Tehát $SZ(P)$ a $[0,P^0]$ intervallumon szigorúan monoton nő, a $[P^0,K]$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökken, ami azt is jelenti, hogy $SZ(P)$ kifejezés értéke a $(0,K)$ intervallumon pozitív. Tehát a (66) egyenlet jobb oldala negatív, a $\frac{dP}{dD}<0$, minél nagyobb valakinek az induló vagyona, annál kevesebbet hajlandó fizetni egy olyan biztosításért, amely kár esetén megtéríti a K vagyoni veszteséget.

$\square$

A 4.3. Tétel segítségével az aszimmetrikus informáltságot más formában is megfogalmazhatjuk. A biztosítást vásárolni hajlandók a saját vagyonukkal teljesen tisztában vannak, míg a biztosító csak a sokaságra jellemző eloszlással van tisztában.

4.4. Állítás. *Kockázatkerülő döntéshozó esetén létezik egy olyan $qK < \tilde{P} < K$ ár, amely esetén a biztosítónak közömbös, hogy értékesíti-e a termékét vagy sem.*

Bizonyítás.

Mivel az eladóról kockázatkerülő magatartást tételezek fel (u konkáv), ezért ha nettó díjon árulja a biztosítást rosszabb helyzetbe kerül, mintha el sem adta volna azt:

$$qu(C + qK - K) + (1 - q)u(C + qK) < u(C).$$

Másrészről, ha K árért értékesíti a biztosítást (egy röpke pillanatig tegyük fel, hogy létezik valaki, aki hajlandó ekkora összeget fizetni a szerződésért), akkor biztos jobban jár, mintha nem adná el a kötvényt: ha nem következik be káresemény jobb vagyoni helyzete kerül, mint a biztosítás értékesítése nélkül, ha pedig bekövetkezik a káresemény, marad ugyanabban a vagyoni helyzetben.

$$qu(C + K - K) + (1 - q)u(C + K) < u(C)$$

A $qu(C + P - K) + (1 - q)u(C - K)$ függvény folytonossága miatt kell lennie egy $\tilde{P}$ árnak, amely esetén:

$$qu(C + \tilde{P} - K) + (1 - q)u(C + K) = u(C). \tag{70}$$

A (70) egyenlőtlenség azt mondja ki, hogy az eladó közömbös az iránt, hogy értékesíti-e a termékét vagy sem.

□

A dolgozat további részében felteszem, hogy $V(\tilde{P}) > 0$. Ha $V(\tilde{P}) = 0$, akkor nem jön létre biztosítási piac, ezzel az esettel nem érdemes foglalkozni.

4.5. Tétel. *Tekintsünk egy kockázatkerülő biztosítót, akinek u hasznosságfüggvényre a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző. A biztosítónak q valószínűséggel K nagyságú kártérítést kell fizetnie. Jelölje $\tilde{P}$ azt az árat, amely esetén:*

$$qu(C + \tilde{P} - K) + (1 - q)u(C + \tilde{P}) = u(C),$$

azaz a biztosító hasznossága megegyezik a termék értékesítésével, illetve nélküle. Ekkor minél nagyobb a biztosító induló vagyona, annál kisebb $\tilde{P}$ értéke:

$$\frac{d\tilde{P}}{dC} < 0.$$

BIZONYÍTÁS.

A bizonyítás a 4.3. Tétel analógiájára elvégezhető.

□

4.1. Egyszereplős biztosítási piac

Biztosítási piac esetén a monopol helyzetben lévő eladó hasznosságánál figyelembe kell venni azt is, hogy az eladó a termék értékesítése után is bizonytalan helyzetben marad, nem tudja biztosan megmondani, hogy bekövetkezik-e a káresemény vagy sem.

$$U_{ins}(C, P, 1) = V(P)\Big(qu(C+P-K)+(1-q)u(C+P)\Big)+(1-V(P))u(C), \quad (71)$$

ahol U_{ins} függvény a monopol helyzetben lévő eladó hasznosságát jelöli. Az argumentumok ugyanazt jelentik, mint termékpiac esetén: az első argumentum a biztosító induló vagyonát jelenti, a második a biztosítás árát, a harmadik pedig a piaci létszámot. A modellben szereplő biztosítás esetén a biztosító kár esetén K összeget fizet a biztosítottnak.

A (71) összefüggés magyarázata: a biztosító $V(P)$ valószínűséggel tudja értékesíteni a terméket. Ha értékesítette a biztosítást, akkor q valószínűséggel K összeget kell fizetni a biztosítottnak, ekkor a $C+P-K$ vagyoni helyzetbe kerül, $1-q$ valószínűséggel nem kell fizetnie a biztosítottnak, ekkor pedig a $C+P$ vagyoni helyzetbe kerül. $1-V(P)$ valószínűséggel nem adja el a kötvényt, marad a C vagyoni helyzetben.

A haszonmaximalizáló eladó a (71) kifejezést szeretné maximalizálni.

4.6. Lemma. *Az $U_{ins}(C,P,n)$ függvény rögzített C és n érték mellett P változójában felveszi a maximumát a $[\tilde{P},K]$ intervallumon ($\tilde{P}$ azt az árat jelöli, amely esetén az eladónak közömbös, hogy értékesíteni tudja-e a biztosítási kötvényt vagy sem) , továbbá a maximum a $[\tilde{P},K]$ szakasz belső pontja, a derivált értéke 0 ebben a pontban.*

Bizonyítás.

Tudjuk, hogy

$$U_{ins}(C,\tilde{P},1)=U_{ins}(C,K,1)=u(C).$$

A bizonyítás további részét a 3.1. Lemma analógiájára lehet elvégezni.

□

4.7. Állítás. *Egyszereplős biztosítási piac esetén az eladó olyan P árat határoz meg, amelyre:*

$$\begin{aligned} &V'(P)\Big(qu(C+P-K)+(1-q)u(C+P)-u(C)\Big)+\\ &+V(P)\Big(qu'(C+P-K)+(1-q)u'(C+P)\Big)=\\ &=0. \end{aligned} \tag{72}$$

Bizonyítás.

Deriváljuk P szerint a (71) kifejezést!

$$\begin{aligned}
&{U_{ins}}'_2(C,P,1) = \\
&\quad = V'(P)\Big(qu(C+P-K)+(1-q)u(C+P)\Big)+ \\
&\qquad +V(P)\Big(qu'(C+P-K)+(1-q)u'(C+P)\Big)+ \\
&\qquad -V'(P)u(C),
\end{aligned} \tag{73}$$

ahol ${U_{ins}}'_2(C,P,1)$ az U_{ins} függvény második argumentuma szerinti deriváltat jelenti.

A 4.6. Lemma állítása szerint a maximumhelyen a függvény deriváltja 0. Tegyük egyenlővé a (73) kifejezést 0-val, és adódik a bizonyítani kívánt állítás.

□

Biztosítási piac esetén sem tudtam feltételt adni, hogy az $f(P) = U_{ins}(C,P,n)$ függvény P szerinti maximuma mikor lesz egyedi. Biztosítási piacokon is felteszem, hogy az $f(P) = U_{ins}(C,P,n)$ függyvény P szerinti maximuma egyedi bármilyen vagyoni helyzet és piaci létszám esetén.

4.8. Állítás. *Legyen $u(x)$ egy olyan hasznosságfüggvény amelyre $u''(x) \leq 0$. Legyen C az eladó vagyona. Legyen adott q és K. $\tilde{P}$ jelentse azt az árat, amelyik esetén az eladó közömbös a tekintetben, hogy eladja-e a termékét vagy sem. Ekkor a $(\tilde{P}, K)$ intervallum bármely pontja hasznosságmaximummá tehető $V(P)$ függvény alkalmas megválasztásával. Ráadásul $V(P)$ választható differenciálható függvénynek és a $[\tilde{P}, K)$ intervallumon pozitívnak is.*

Bizonyítás.

Jelöljük a $(\tilde{P}, K)$ intervallum tetszőleges pontját P^*-gal. Bebizonyítom, hogy ez a pont maximumhellyé tehető $V(P)$ alkalmas megválasztásával. Először válasszuk meg $V(P^*)$ értékét úgy, hogy $0 \leq V(P^*) \leq 1$ legyen és teljesüljön, hogy

$$V(P^*) > \frac{qu(C+qK-K)+(1-q)u(C+qK)-u(c)}{qu(C+P^*-K)+(1-q)u(C+P^*)-u(c)}.$$

Definiáljuk $\tilde{V}(\cdot)$ függvényt a következő formában:

$$\tilde{V}(P) = V(P^*)\frac{qu(C+P^*-K)+(1-q)u(C+P^*)-u(c)}{qu(C+P-K)+(1-q)u(C+P)-u(c)}.$$

A $qu(C+P-K)+(1-q)u(C+P)-u(c)$ kifejezés P-nek növekvő függvénye, a reciproka pedig csökkenő, amiből már látható, hogy $\tilde{V}(P)$ függvény szigorúan monoton csökkenő lesz.

Bármilyen P esetén

$$\begin{aligned}\tilde{V}(P)\Big(qu(C+P-K)+(1-q)u(C+P)\Big)+(1-\tilde{V}(P))u(C) = \\ = V(P^*)\Big(qu(C+P^*-K)+(1-q)u(C+P^*)\Big)+(1-V(P^*))u(C).\end{aligned}$$

Ha $\tilde{V}(P)$ függvény értékét csökkentjük, akkor a $(\tilde{P},K)$ intervallumon a $\tilde{V}(P)\Big(qu(C+P-K)+(1-q)u(C+P)\Big)+(1-\tilde{V}(P))u(C)$ kifejezés értéke is csökkeni fog. Ezt könnyen beláthatjuk, ha a kifejezést a következő alakra hozzuk:

$$\tilde{V}(P)\Big[qu(C+P-K)+(1-q)u(C+P)-u(C)\Big]+u(C). \tag{74}$$

A $(\tilde{P},K)$ intervallumon $qu(C+P-K)+(1-q)u(C+P)-u(C)$ kifejezés értéke csökken, ezért ha a (74) kifejezésben $\tilde{V}(P)$ értékét csökkentjük, akkor az egész (74) kifejezés értéke csökken. A $[qK,\tilde{P}]$ intervallumon a $V(P)$ függvény érdektelen a számunkra, mert ezen intervallum semelyik pontja sem lehet optimális.

Megállapíthatjuk, hogy $\tilde{V}(qK) > 1$, továbbá $\tilde{V}(P) > 0$ bármilyen P esetén. A $V(P)$ függvényt a következőképpen kell megkonstruálni: $V(qK) = 1$, $V(K) = 0$, $V(P) < \tilde{V}(P)$, ha $P \neq P^*$ és $V(P) = \tilde{V}(P)$, ha $P = P^*$. Megkívánjuk továbbá hogy $V(P)$ szigorúan monoton csökkenjen. A fenti feltételeknek minden nehézség nélkül eleget tudunk tenni, sőt $V(P)$-t tudjuk folytonosnak és differenciálhatónak választani és a $[qK, K)$ intervallumon pozitívnak. □

4.9. Megjegyzés. *Ha a 4.8. Állítás bizonyításában $V(P^*)$ kifejezésnek a*

$$\frac{qu(C+qK-K)+(1-q)u(C+qK)-u(c)}{qu(C)+(1-q)u(C+K)-u(c)}$$

értéket adom, akkor ez az érték bármelyik $(\tilde{P}, K)$ intervallumbeli pontnak megfelel.

4.10. Megjegyzés. *Nyereségmaximalizáló eladó esetén a (qK, K) intervallum bármely pontja nyereségmaximummá tehető $V(P)$ függvény alkalmas megválasztásával.*

Bizonyítás.

Az állítás következik a 4.8. Állításból, ha $u(x) = x$.

□

Hipotézis.

Biztosítási piac esetén elképzelhető, hogy – ellentétben a termékpiaccal – a monopol helyzetű eladó a nyereségmaximumot adó árnál nagyobb árat állapít meg.

4.11. Állítás. *Kockázatkerülő biztosító esetén nem eldönthető, hogy a hasznosságmaximalizáló eladó a nyereségmaximumot adó árnál olcsóbban vagy drágábban adja termékét, az ár a $V(P)$ függvény alakjától, továbbá q és K paraméterek értékétől függ.*

Bizonyítás.

$\tilde{P}$ szokás szerint jelentse azt az árat, amely esetén az eladó közömbös a tekintetben, hogy értékesíti-e a biztosítást vagy sem. Válasszunk olyan $V(P)$ függvényt, hogy a nyereségmaximumot biztosító ár qK és $\tilde{P}$ közé essen ($qK < P^{*pm} <$

$\tilde{P}$) és $V(\tilde{P}) > 0$. Hivatkozva a 4.10. Megjegyzésre biztosak lehetünk, hogy van ilyen $V(P)$ függvény. A haszonmaximalizáló eladó $\tilde{P}$-nál magasabb árat kér el a terméke ellenértékeként, ami biztosan nagyobb, mint a nyereségmaximumot biztosító ár.

Annak belátása, hogy előfordulhat olyan eset is, amikor a nyereségmaximumot adó árnál kisebb a hasznosságmaximalizáló eladó optimális ára, több erőfeszítést igényel.

A nyereségmaximalizáló eladó a

$$V(P)(P - qk) \tag{75}$$

kifejezést maximalizálja. A (75) kifejezés deriváltját tegyük egyenlővé 0-val:

$$V'(P)(P - qK) + V(P) = 0. \tag{76}$$

Az $U_{ins}(C, P, 1)$ függvény P szerinti parciális deriváltja:

$$\begin{aligned} &{U_{ins}}'_2(C, P, 1) = \\ &\quad = V'(P)\Big(qu(C + P - K) + (1 - q)u(C + P)\Big) + \\ &\qquad + V(P)\Big(qu'(C + P - K) + (1 - q)u'(C + P)\Big) - V'(P)u(C). \end{aligned} \tag{77}$$

Az $U_{ins}(C, P, 1)$ függvény értékét a nyereségmaximumot adó pontban vizsgálom (P^{*pm}), a (76) kifejezést behelyettesítem a (77) kifejezésbe:

$${U_{ins}}'_2(C, P^{*pm}, 1) = V'(P^{*pm})A, \tag{78}$$

ahol

$$\begin{aligned} &A = \\ &\quad = \Big(qu(C + P^{*pm} - K) + (1 - q)u(C + P^{*pm})\Big) + \\ &\qquad - \Big(qu'(C + P^{*pm} - K) + (1 - q)u'(C + P^{*pm})\Big)(P - qK) - u(C). \end{aligned} \tag{79}$$

A (79) kifejezést a könnyebb elemezhetőség végett átrendezem a következő összegre:

$$A = B + qC,$$

ahol

$$B = u(C+P^{*pm}) - u(C) - \Big(qu'(C+P^{*pm}-K) + (1-q)u'(C+P^{*pm})\Big)P^{*pm} \quad (80)$$

és

$$\begin{aligned} C = -\Big(& u(C+P^{*pm}) - u(C+P^{*pm}-K) + \\ & -\Big(qu'(C+P^{*pm}-K) + (1-q)u'(C+P^{*pm})\Big)K\Big). \end{aligned} \quad (81)$$

Legyen $V(P)$ adott, rögzítsük K-t valamilyen értéken és q-val tartsunk 0-hoz. Ekkor qC tart a 0-hoz, B pedig tart $u(C+P) - u(C) - u'(C+P)P$ értékhez, ami pozitív, mert a feltevések szerint u konkáv függvény. Összegezve: ha q elég kicsi, akkor A pozitív, ebből következően pedig a (78) derivált értéke negatív, ami azt jelenti, hogy a nyereségmaximalizálónál olcsóbb árat határoz meg a haszonmaximalizáló eladó.

$\square$

4.12. Megjegyzés. *Biztosítási piacok jellemzőjének azt tartják, hogy kis valószínűséggel nagy kár következik be (kicsi q, nagy K). A 4.11. Állítás bizonyítását végigkövetve azt várjuk, hogy ilyen paraméterek esetén egy haszonmaximalizáló eladó esetén a biztosítás olcsóbb lesz, mint egy nyereségmaximalizáló eladó esetén.*

4.2. Többszereplős biztosítási piac

Több szereplő esetén a biztosító hasznossága:

$$U_{ins}(C,P,n) = \\ = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}V(P)^k(1-(V(P))^{n-k}\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}u(C+kP-lK)\right)\right]. \tag{82}$$

Biztosítási piacon is ki tudunk mondani a (12) rekurzív összefüggéshez hasonlót:

$$\begin{aligned} &U_{ins}(C,P,n) = \\ &\quad = V(P)\Big(qU_{ins}(C+P-K,P,n)+(1-q)U_{ins}(C+P,P,n)\Big) \\ &\qquad +(1-V(P))U_{ins}(C,P,n). \end{aligned} \tag{83}$$

Biztosítási piac esetén annak eldöntése, hogy az ár emelkedni fog-e vagy csökkenni, nem olyan egyszerű, mint termékpiac esetén. A nehézségek szemléltetése végett megpróbálom meghatározni, hogy kétszereplős biztosítási piac esetén, ahol az eladóra a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző, az optimális ár magasabb lesz-e mint egyszereplős piac esetén.

Megpróbálom meghatározni, hogy az egyszereplős piac optimális ára esetén a kétszereplős piacnál az ár szerinti parciális derivált pozitív vagy negatív.

$$\begin{aligned} &{U_{ins}}'_2(C,P^{*1},1) = \\ &\quad = V'(P^{*1})\Big(qu(C+P^{*1}-K)+(1-q)u(C+P^{*1})-u(C)\Big)+ \\ &\qquad +V(P^{*1})\Big(qu'(C+P^{*1}-K)+(1-q)u'(C+P^{*1})\Big) = \\ &\quad = 0 \end{aligned} \tag{84}$$

A (84) összefüggést az alábbi formára hozom:

$$-\frac{V'(P^{*1})}{V(P^{*1})} = \frac{qu'(C+P^{*1}-K)+(1-q)u'(C+P^{*1})}{qu(C+P^{*1}-K)+(1-q)u(C+P^{*1})-u(C)}. \tag{85}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy:

$$U_{ins}{}'_2(C, P^{*1}, 2) = 2V'(P^{*1})A + 2V(P^{*1})B, \tag{86}$$

ahol

$$\begin{aligned} A &= \\ &= V(P^{*1})\Big[q^2u(C+2P^{*1}-2K) + 2q(1-q)u(C+2P^{*1}-K) + \\ &\qquad +(1-q)^2u(C+2P^{*1}) - qu(C+P^{*1}-K) + (1-q)u(C+P^{*1})\Big] + \\ &\quad +(1-V(P^{*1}))\Big[qu(C+P^{*1}-K) + (1-q)u(C+P^{*1}) - u(C)\Big] \end{aligned} \tag{87}$$

és

$$\begin{aligned} B &= \\ &= V(P^{*1})\Big[q^2u'(C+2P^{*1}-2K) + 2q(1-q)u'(C+2P^{*1}-K) + \\ &\qquad +(1-q)^2u'(C+2P^{*1})\Big] + \\ &\quad +(1-V(P^{*1}))\Big[qu'(C+P^{*1}-K) + (1-q)u'(C+P^{*1})\Big]. \end{aligned} \tag{88}$$

A (86) derivált előjele megállapítható, ha el tudjuk dönteni a relációt

$$-\frac{V'(P^{*1})}{V(P^{*1})} \tag{89}$$

és

$$\frac{B}{A} \tag{90}$$

kifejezések között, ahol A és B értékét a (87) és (88) kifejezések adják meg. Használjuk ki a (85) összefüggést, így

$$\frac{qu'(C+P^{*1}-K) + (1-q)u'(C+P^{*1})}{qu(C+P^{*1}-K) + (1-q)u(C+P^{*1}) - u(C)} \tag{91}$$

és a (90) kifejezések közti relációt kell meghatározni.

A 3.14. Lemma miatt a (90) és (91) kifejezések közötti reláció eldöntéséhez elégséges a

$$\frac{C}{D} \tag{92}$$

és a (91) kifejezések közötti reláció eldöntése, ahol

$$C = q^2u'(C+2P^{*1}-2K)+2q(1-q)u'(C+2P^{*1}-K)+(1-q)^2u'(C+2P^{*1}) \tag{93}$$

és

$$\begin{aligned} D &= \\ &= q^2u(C+2P^{*1}-2K)+2q(1-q)u(C+2P^{*1}-K)+ \\ &\quad +(1-q)^2u(C+2P^{*1})-qu(C+P^{*1}-K)+(1-q)u(C+P^{*1}). \end{aligned} \tag{94}$$

A (93) és a (94) kifejezéseket átalakítom a jobban kezelhető

$$\begin{aligned} C &= \\ &= q\Big[qu'(C+2P^{*1}-2K)+(1-q)u'(C+2P^{*1}-K)\Big]+ \\ &+(1-q)\Big[qu'(C+2P^{*1}-K)+(1-q)u'(C+2P^{*1})\Big] \end{aligned} \tag{95}$$

és

$$\begin{aligned} D &= \\ &= q\Big[q\Big(u(C+2P^{*1}-2K)-u(C+P^{*1}-K)\Big)+ \\ &\quad +(1-q)\Big(u(C+2P^{*1}-K)-u(C+P^{*1}-K\Big)\Big]+ \\ &+(1-q)\Big[q\Big(u(C+2P^{*1}-K)-u(C+P^{*1})\Big)+ \\ &\quad +(1-q)\Big(u(C+2P^{*1})-u(C+P^{*1})\Big)\Big] \end{aligned} \tag{96}$$

formákra.

A 3.18. Megjegyzés értelmében

$$\frac{E}{F}$$

tört értéke kisebb, mint a (91) kifejezés értéke, ahol

$$E = qu'(C + 2P^{*1} - 2K) + (1 - q)u'(C + 2P^{*1} - K)$$

és

$$\begin{aligned} F = \\ &= q\Big(u(C + 2P^{*1} - 2K) - u(C + P^{*1} - K)\Big) + \\ &+ (1 - q)\Big(u(C + 2P^{*1} - K) - u(C + P^{*1} - K)\Big). \end{aligned}$$

A 3.17. Lemma értelmében viszont

$$\frac{G}{H}$$

tört értéke nagyobb, mint (91) kifejezés értéke, ahol

$$G = qu'(C + 2P^{*1} - K) + (1 - q)u'(C + 2P^{*1})$$

és

$$\begin{aligned} H = \\ &= q\Big(u(C + 2P^{*1} - K) - u(C + P^{*1})\Big) + \\ &+ (1 - q)\Big(u(C + 2P^{*1}) - u(C + P^{*1})\Big). \end{aligned}$$

Tehát így nem dönthető el a reláció (90) és (91) kifejezések között.

Általánosságban nem dönthető el a reláció a (90) és a (91) kifejezések között, de két szélső esetben igen. Ha $P^{*1} = 0$[18], akkor $\frac{G}{H}$ kifejezés értéke megegyezik (91) kifejezés értékével, az előbbiek figyelembe vételével viszont $\frac{E}{F}$ kifejezés értéke kisebb, mint (91) kifejezés értéke, tehát összességében (90) kisebb, mint (91). A másik szélsőség esetén $P^{*1} = K$, ekkor viszont $\frac{E}{F}$ kifejezés értéke megegyezik (91) kifejezés értékével, $\frac{G}{H}$ kifejezés értéke pedig nagyobb, mint (91) kifejezés

[18]Természetesen $P^{*1} > qK$. A $P^{*1} = 0$ értékadás csak azért történt, mert ebben a pontban határozható meg könnyen a reláció. P^{*1} érték viszont tetszőlegesen közel kerülhet a 0-hoz (q és K alkalmas megválasztásával).

értéke. Összességében tehát (90) nagyobb, mint (91). Ezzel a gondolatmenettel azt szerettem volna hangsúlyozni, hogy (90) és (91) kifejezések közötti reláció függ P^{*1}-től, ami pedig $V(P)$-től is függ, ellentétben a termékpiaccal, ahol a vizsgálatokhoz elég volt a hasznosságfüggvény tulajdonságait elemezni.

Érdemes megvizsgálni, hogy biztosítási piacok esetén is állítható-e, hogy nagy létszámú piacok esetén a monopol helyzetben lévő biztosító a nyereségmaximumot adó értékhez közeli árat határoz meg. A 4.13. Állítás szerint bizonyos esetekben érvényben marad ez az összefüggés, bizonyos esetekben pont az ellenkezőjét állíthatjuk.

4.13. Állítás. *Tekintsünk egy olyan kockázatkerülő biztosítót, akinek u hasznosságfüggvényére a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző! Legyen*

$$\begin{aligned}
a_k &= \\
&= qu(C + k(P^{*pm} - K) + P^{*pm} - K) + \\
&\quad + (1-q)u(C + k(P^{*pm} - K) + P^{*pm}) - u(C + k(P^{*pm} - K)) + \\
&\qquad -(P^{*pm} - K)\Big(qu'(C + k(P^{*pm} - K) + P^{*pm} - K) + \\
&\qquad\qquad (1-q)u'(C + k(P^{*pm} - K) + P^{*pm})\Big).
\end{aligned}$$

1. Amennyiben találhatók olyan ε és $r > 1$; $qr + (1-q)r^{\frac{P^{*pm}}{P^{*pm}-K}} > 1$ számok, hogy egy bizonyos k_0 indexnél nagyobb k számokra teljesül, hogy $\frac{a_k}{r^k} > \varepsilon > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} {U_{ins}}'_2(C, P^{*pm}, n) > 0$.

2. Amennyiben találhatók olyan ε és $r > 1$; $qr + (1-q)r^{\frac{P^{*pm}}{P^{*pm}-K}} > 1$ számok, hogy egy bizonyos k_0 indexnél nagyobb k számokra teljesül, hogy $\frac{a_k}{r^k} < -\varepsilon < 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} {U_{ins}}'_2(C, P^{*pm}, n) < 0$.

3. Amennyiben találhatók olyan ε és $r > 1$; $qr + (1-q)r^{\frac{P^{*pm}}{P^{*pm}-K}} < 1$ számok, hogy egy bizonyos k_0 indexnél nagyobb k számokra teljesül, hogy $\left|\frac{a_k}{r^k}\right[< \varepsilon$, akkor $\lim_{n\to\infty} {U_{ins}}'_2(C, P^{*pm}, n) = 0$.

BIZONYÍTÁS.

A bizonyításhoz több apró lépés szükséges. Ezeket nem fogalmazom meg külön lemmában, mert speciálisak és a dolgozat további részében nem lesz rájuk szükség.

Először meghatározom $U_{ins}(C, P, n)$ függvény második argumentuma szerinti deriváltat. Ezt a deriváltat vizsgálom a nyereségmaximumot adó pontban:

$$U_{ins}{}'_2(C, P, n) =$$

$$= V'(P) \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} k V(P)^{k-1} (1 - V(P))^{n-k} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{l=0}^{k} \left(\binom{k}{l} q^l (1-q)^{k-l} u(C + kP - lK) \right) \right] +$$

$$-V'(P^0) \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k} V(P)^k (n-k)(1 - V(P))^{n-k-1} \cdot \right.$$

$$\left. \sum_{l=0}^{k} \left(\binom{k}{l} q^l (1-q)^{k-l} u(C + kP - lK) \right) \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} V(P)^k (1 - V(P))^{n-k} k \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{l=0}^{k} \left(\binom{k}{l} q^l (1-q)^{k-l} u'(C + kP - lK) \right) \right] =$$

$$= nV'(P) \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} V(P)^k (1 - V(P))^{n_0-1-k} \cdot \right.$$

$$\left. \sum_{l=0}^{k+1} \left(\binom{k}{l} q^l (1-q)^{k-l} u(C + kP - lK) \right) \right] +$$

$$-nV'(P) \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} V(P)^k (1 - V(P))^{n-1-k} \cdot \right.$$

$$\left. \sum_{l=0}^{k} \left(\binom{k}{l} q^l (1-q)^{k-l} u(C + kP - lK) \right) \right] +$$

$$+nV(P)\sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{n-1}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-k}\cdot\right.$$
$$\left.\sum_{l=0}^{k+1}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}u'(C+kP-lK)\right)\right]. \tag{97}$$

Felhasználva a már többször említett

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^jr^{n-j}a_j = p\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^jr^{n-1-j}a_{j+1}+r\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^jr^{n-1-j}a_j$$

összefüggést a (97) derivált egyszerűbb alakra hozható:

$$n\sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{n-1}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-k}\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}A(k,l)\right)\right], \tag{98}$$

ahol

$$\begin{aligned}&A(k,l)=\\&\quad=V'(P)\Big[qu(C+P-K+kP-lK)+(1-q)u(C+P+kP-lK)+\\&\qquad\qquad -u(C+kP-lK)\Big]+\\&\quad+V(P)[qu'(C+P-K+kP-lK)+(1-q)u'(C+P+kP-lK].\end{aligned} \tag{99}$$

A (98) deriváltat a nyereségmaximumot adó pontban vizsgálom, így felhasználom a (76) összefüggést:

$$\begin{aligned}&A(k,l)=\\&\quad=V'(P^{*pm})\Big[qu(C+P^{*pm}-K+kP^{*pm}-lK)+\\&\qquad+(1-q)u(C+P^{*pm}+kP^{*pm}-lK)-u(C+kP^{*pm}-lK)\Big]+\\&\quad-V'(P^{*pm})(P^{*pm}-qK)\Big[qu'(C+P^{*pm}-K+kP^{*pm}-lK)+\\&\qquad+(1-q)u'(C+P^{*pm}+kP^{*pm}-lK)\Big].\end{aligned}$$

Első lépésként belátom, hogy $\lim_{k\to\infty} kA(k,0)=0$. Mivel u konvex, ezért

$$u(C+kP+P-qK) > qu(C+kP+P-K)+(1-q)u(C+kP+P).$$

Mivel u' konkáv (kockázatelutasítás csökkenő mértékéből következik), ezért

$$u'(C+kP+P-qK) < qu'(C+kP+P-K)+(1-q)u'(C+kP+P).$$

Felhasználva az előző két megjegyzést és 3.31. Állítást kijelenthetjük, hogy[19]:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\Bigg\{k\bigg[qu(C+kP+P-K)+(1-q)u(C+kP+P)-u(C+kP)+\\
&\qquad -(P-qK)\Big(qu'(C+kP+P-K)+(1-q)u'(C+kP+P)\Big)\bigg]\Bigg\}\le\\
&\quad\lim_{k\to\infty}\bigg[k\Big(u(C+kP+P-qK)-u(C+kP)+\\
&\qquad\quad -(P-qK)u'(C+kP+P-qk)\Big)\bigg]=0.
\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség másik felének bizonyításához meghatározom a

$$\begin{aligned}
k\bigg[&qu(C+kc+P-K)+(1-q)u(C+kc+P)-u(C+kc)+\\
&\quad -(P-qK)\Big(qu'(C+kc+P-K)+(1-q)u'(C+kc+P)\Big)\bigg]
\end{aligned}\tag{100}$$

kifejezés P szerinti deriváltját ($c>0$):

$$\begin{aligned}
k\bigg[&qu'(C+kc+P-K)+(1-q)u'(C+kc+P)+\\
&\quad -qu'(C+kc+P-K)-(1-q)u'(C+kc+P)+\\
&\quad\quad -(P-qK)\Big(qu''(C+kc+P-K)+(1-q)u''(C+kc+P)\Big)\bigg].
\end{aligned}$$

Ez a derivált $P\ge qk$ értékekre nemnegatív, ami annyit jelent, hogy (100) kifejezés

[19] A feltételek értelmében $P>qK$, azaz $P-qK>0$.

értékét csökkentem (nem növelem), ha P helyére qK-t írok (mivel (100) kifejezés P-nek folytonos függvénye).

$$\lim_{k\to\infty}\Bigg\{k\Bigg[qu(C+kc+P-K)+(1-q)u(C+kc+P)-u(C+kc)+$$
$$-(P-qK)\Big(qu'(C+kc+P-K)+(1-q)u'(C+kc+P)\Big)\Bigg]\Bigg\}\geq$$
$$\lim_{k\to\infty}\Bigg[k\Bigg(qu(C+kc-(1-q)K)+(1-q)u(C+kc+qK)+$$
$$-u(C+kc)\Bigg)\Bigg]=$$
$$\lim_{k\to\infty}\Bigg[k\Bigg(u(C+kc+qK)-u(C+kc)+$$
$$-q[u(C+kc+qK)-u(C+kc-(1-q)K)]\Bigg)\Bigg]\geq$$
$$\lim_{k\to\infty}\Bigg[k\Bigg(u'(C+kc+qK)qK+$$
$$-q[u(C+kc+qK)-u(C+kc-(1-q)K)]\Bigg]\geq$$
$$\lim_{k\to\infty}\Bigg[k\Bigg(-[u(C+kc+qK)-u(C+kc-(1-q)K)]+$$
$$+u'(C+kc+qK)K\Bigg)\Bigg]=0,$$

ugyancsak a 3.31. Állítás alapján. Mivel a határérték minden $c>0$ értékre 0, ezért speciálisan a $c=P$ értékre is igaz, amit bizonyítani kellett. Tehát kijelenthetjük, hogy $\lim_{k\to\infty}kA(k,0)=0$.

A

$$\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{n-1}{k}V(P^{*pm})^k(1-V(P^{*pm}))^{n-k}\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}A(k,l)\right)\right]$$

határérték meghatározásához a 3.29. Lemma és 3.30. Állítás bizonyítása értelmében a

$$\lim_{k\to\infty}\left[k\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}A(k,l)\right)\right]$$

határértéket kell meghatározni. A határérték vizsgálatát 3 részletben végzem el.

Legyen $s = \frac{P^{*pm}}{K}$! Tudjuk, hogy $s > q$. Válasszuk meg $\alpha > 0$ értékét úgy, hogy $s > q + \alpha$ összefüggés teljesüljön!

i. Elsőként belátom, hogy:

$$\lim_{k\to\infty}\left[k\sum_{l=0}^{(q+\alpha)k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}A(k,l)\right)\right] = 0.$$

Megmutatom, hogy a vizsgált kifejezés tetszőlegesen kicsi ε számnál kisebbé válik. Válasszunk egy tetszőleges ε számot. Válasszuk meg δ értéket úgy, hogy $\varepsilon = \delta\frac{P-(q+\alpha)K}{P}$ összefüggés teljesüljön! Mivel $\lim_{k\to\infty} kA(k,0) = 0$, ezért létezik egy olyan k_1 index, hogy minden $k > k_1$ szám esetén $k|A(k,0)| < \varepsilon$. Válasszuk meg $k_2 > k_1$ értéket úgy, hogy minden $k > k_2$ számra teljesüljön, hogy $k(P^{*pm} - (q+\alpha)K) > k_1 P^{*pm}$ (ilyen szám biztosan létezik, hiszen a feltételek értelmében $P^{*pm} - (q+\alpha)K > 0$)! Tehát $k > k_2$ és $l < k(q+\alpha)$ esetén:

$$|A(k,l)| < \frac{\delta}{\frac{kP^{*pm}-lK}{P^{*pm}}}.$$

Felhasználva az előbbi egyenlőtlenséget $k > k_2$ esetén elvégezhetjük az alábbi átalakítást:

$$k\sum_{l=0}^{(q+\alpha)k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}|A(k,l)|\right) < k\sum_{l=0}^{(q+\alpha)k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\frac{\delta}{\frac{kP^{*pm}-lK}{P^{*pm}}}\right) <$$

$$\begin{gathered}
k\sum_{l=0}^{(q+\alpha)k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\frac{\delta}{\frac{kP^{*pm}-k(q+\alpha)K}{P^{*pm}}}\right) = \\
\sum_{l=0}^{(q+\alpha)k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\frac{\delta}{\frac{P^{*pm}-(q+\alpha)K}{P^{*pm}}}\right) = \\
\sum_{l=0}^{(q+\alpha)k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\varepsilon\right) \le \\
\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\varepsilon\right) = \varepsilon.
\end{gathered}$$

ii. Másodszor belátom, hogy

$$\lim_{k\to\infty}\left[k\sum_{l=(q+\alpha)k}^{sk}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}A(k,l)\right)\right]=0.$$

Ha $k(q+\alpha)\leq l\leq sk$, akkor $A(k,l)$ kifejezés korlátos: legyen

$$\begin{aligned} g(x) &= qu(x+P^{*pm}-K)+(1-q)u(x+P^{*pm})-u(x)+ \\ &\quad -(P^{*pm}-qK)[qu'(x+P^{*pm}-K)+(1-q)u'(x+P^{*pm})]. \end{aligned} \tag{101}$$

A $\lim_{k\to\infty} kA(k,0)=0$ kifejezésből következik, hogy $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$. Ha l a megadott értékek között van, akkor $kP^{*pm}-lK\geq 0$, a g függvény az $x=0$ pontban értelmezve van, továbbá g folytonos. Ezen megjegyzések együttesen biztosítják, hogy $k(q+\alpha)\leq l\leq sk$, akkor $A(k,l)$ korlátos. Másrészt a

$$\lim_{k\to\infty}\left[k\sum_{l=(q+\alpha)k}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}c\right)\right]$$

kifejezés tart 0-hoz: először belátom, hogy

$$\lim_{k\to\infty}\left[k\sum_{l=(q+\alpha)k}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\right)\right]=\lim_{k\to\infty}\left[k\int_{\sqrt{k}\frac{\alpha}{\sqrt{q(1-q)}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right].$$

A Berry-Esseen tétel egyik változata alapján[20] (lásd [14] 156. oldal 14. tétel) minden ε számhoz található olyan k_0 szám, hogy $k>k_0$ esetén

$$\left|\sum_{l>\sqrt{kq(1-q)}x+kq}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\right)-\int_x^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right|<\varepsilon\frac{1}{(1+|x|)^3}. \tag{102}$$

[20] A tétel feltételei teljesülnek: a binomiális eloszlás független karakterisztikus eloszlású valószínűségi változók összege, amiknek létezik a harmadik momentumuk. A tétel 0 várható értékű valószínűségi változókra vonatkozik, ezért az összegzés határánál korrigálok a várható értékkel.

A (102) kifejezésben elvégezzük az $x = \sqrt{k}\frac{\alpha}{\sqrt{q(1-q)}}$ helyettesítést:

$$\left| \sum_{l=(q+\alpha)k}^{k} \left(\binom{k}{l} q^l (1-q)^{k-l} \right) - \int_{\sqrt{k}\frac{\alpha}{\sqrt{q(1-q)}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \right| < \varepsilon \frac{1}{(1+\sqrt{k}\frac{\alpha}{\sqrt{q(1-q)}})^3}.$$

Megszorzom az egyenlőtlenség mindkét felét k-val:

$$k \left| \sum_{l=(q+\alpha)k}^{k} \left(\binom{k}{l} q^l (1-q)^{k-l} \right) - \int_{\sqrt{k}\frac{\alpha}{\sqrt{q(1-q)}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \right| < \varepsilon \frac{k}{(1+\sqrt{k}\frac{\alpha}{\sqrt{q(1-q)}})^3}.$$

A fenti egyenlőtlenségből már következik, hogy létezik olyan $k_{00} > k_0$ index, hogy $k > k_{00}$ esetén

$$k \left| \sum_{l=(q+\alpha)k}^{k} \left(\binom{k}{l} q^l (1-q)^{k-l} \right) - \int_{\sqrt{k}\frac{\alpha}{\sqrt{q(1-q)}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \right| < \varepsilon,$$

ami elég az állítás bizonyításához.

Másrészről közismert, hogy $a > 0$ esetén:

$$\int_a^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \int_a^{\infty} e^{-\frac{ax}{2}} dx = \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{\frac{a}{2}}. \tag{103}$$

A (103) összefüggés alapján:

$$\lim_{k\to\infty} k \int_{\sqrt{k}\frac{\alpha}{\sqrt{q(1-q)}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt < \frac{k e^{-\frac{k\alpha^2}{2q(1-q)}}}{\frac{\sqrt{q}\alpha}{2\sqrt{q(1-q)}}} \longrightarrow 0.$$

iii. Utoljára a

$$\lim_{k\to\infty} \left[k \sum_{l=sk}^{\infty} \left(\binom{k}{l} q^l (1-q)^{k-l} A(k,l) \right) \right] \tag{104}$$

kifejezést vizsgálom. Rögtön látszik, hogy ha $\lim_{k\to\infty} q^k A(k,k) > 0$, akkor (104) kifejezés nem tart 0-hoz.

1. bizonyítása: a feltételek értelmében létezik $r > 1$ szám, hogy $k > k_0$ esetén $\frac{A(k,k)}{r^k} > \varepsilon$. Ekkor $k > k_0$ esetén:

$$A(k,k) > \varepsilon r^k.$$

Felhasználva az előző egyenlőtlenséget azt is állíthatjuk, hogy ha $k_0(P^{*pm} - K) > kP^{*pm} - lK$, akkor

$$A(k,l) > \varepsilon r^{\frac{kP^{*pm}-lK}{P^{*pm}-K}}.$$

A $k_0(P^{*pm} - K) > kP^{*pm} - lK$ feltételt az $l > k\frac{P^{*pm}}{K} - k_0\frac{K-P^{*pm}}{K}$ alakban is írhatjuk. Emlékezzünk rá, hogy $\frac{P^{*pm}}{K} = s$. Tehát maximum $k_0\frac{K-P^{*pm}}{K}$ olyan l index van, ami nem felel meg a feltételeknek, ez pedig végessok. A ii pontban bevezetett g függvény segítségével könnyen belátható, hogy ezen l indexekre $A(k,l)$ korlátos. Innen szintén a ii pontban belátott összefüggésre támaszkodva kijelenthetjük, hogy:

$$\lim_{k\to\infty}\left[k\sum_{l=sk}^{sk+k_0\frac{P-K}{K}}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}A(k,l)\right)\right] = 0.$$

Most:

$$\lim_{k\to\infty}\left[k\sum_{l=sk}^{\infty}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}A(k,l)\right)\right] >$$
$$\lim_{k\to\infty}\left[k\sum_{l=sk}^{\infty}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\varepsilon r^{\frac{kP^{*pm}-lK}{P^{*pm}-K}}\right)\right].$$

Az i és ii pontok alapján már állíthatjuk, hogy[21]:

$$\lim_{k\to\infty}\left[k\sum_{l=0}^{sk}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\varepsilon r^{\frac{kP^{*pm}-lK}{P^{*pm}-K}}\right)\right] = 0,$$

vagyis ez az összeg nem befolyásolja a (104) határértéket, ahhoz hozzáadhatjuk.

[21]Ne felejtsük el, hogy ha $l < sk$, akkor $kP^{*pm} - lK > 0$.

Így:

$$\lim_{k\to\infty}\left[k\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\varepsilon r^{\frac{kP^*pm-lK}{P^*pm-K}}\right)\right]=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left[k\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\varepsilon\left(r^{\frac{P^*pm}{P^*pm-K}}\right)^{k-l}\cdot r^l\right)\right]=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left[k\varepsilon\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}(qr)^l\left((1-q)r^{\frac{P^*pm}{P^*pm-K}}\right)^{k-l}\right)\right]=$$
$$=\lim_{k\to\infty}k\varepsilon\left(qr+(1-q)r^{\frac{P^*pm}{P^*pm-K}}\right)^k.$$

Amennyiben $\frac{q}{r}+\frac{1-q}{r^{\frac{P^*pm}{P^*pm-K}}}>1$, akkor a fenti határérték végtelen.

A 2. bizonyítása megegyezik teljesen az 1. bizonyításával, csak az előjelek fordulnak meg, ezért ezt nem részletezem.

3. bizonyítása: hasonlóan járok el, mint az 1. bizonyításánál. Most azt állíthatjuk, hogy létezik $r>1$ szám, amire $k>k_0$ esetén:

$$A(k,k)<\varepsilon r^k.$$

Az i és ii pontok alapján ebben az esetben is állíthatjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty}\left[k\sum_{l=0}^{sk+k_0\frac{K-P^*pm}{K}}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\varepsilon r^{\frac{kP^*pm-lK}{P^*pm-K}}\right)\right]=0,$$

tehát ez az összeg most sem befolyásolja a határértéket. Így az 1. bizonyítása során elvégzett algebrai átalakítást felhasználva kijelenthetjük, hogy:

$$\lim_{k\to\infty}\left[k\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\varepsilon r^{\frac{kP^*pm-lK}{P^*pm-K}}\right)\right]=\lim_{k\to\infty}k\varepsilon\left(qr+(1-q)r^{\frac{P^*pm}{P^*pm-K}}\right)^k$$

határértéket vizsgálom. Amennyiben $qr+(1-q)r^{\frac{P^*pm}{P^*pm-K}}<1$, akkor ez a határérték 0.

□

5. Számpéldák

Ebben a fejezetben konkrét hasznosságfüggvények és vásárlási valószínűség függvények segítségével elemzem a termék- és biztosítási piacokat. Sőt lehetőség nyílik a biztosítási piacot speciálisan is elemezni.

Tekintsük az $-e^{-x}+x$ hasznosságfüggvényt. Könnyen megmutatható, hogy ez a hasznosságfüggvény kockázatkerülő magatartást mutat az egész számegyenesen, továbbá a kockázatelutasítás mértéke csökken a vagyonnal. Ekkor $U(C,P,n)$ és $U_{ins}(C,P,n)$ zárt alakban is felírható:

$$\begin{aligned}
&U_{ins}(C,P,n) = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}V(P)^k(1-(V(P))^{n-k}\cdot\right.\\
&\qquad\qquad \left.\cdot\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}u(C+kP-lK)\right)\right] = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}V(P)^k(1-(V(P))^{n-k}\cdot\right.\\
&\qquad\qquad \left.\cdot\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\left(-e^{-(C+kP-lK)}+C+kP-lK\right)\right)\right] = \\
&\quad = -\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}V(P)^k(1-(V(P))^{n-k}\cdot\right.\\
&\qquad\qquad \left.\cdot\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}e^{-(C+kP-lK)}\right)\right]+ \\
&\qquad +\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}V(P)^k(1-(V(P))^{n-k}\cdot\right.\\
&\qquad\qquad \left.\cdot\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}q^l(1-q)^{k-l}\left(C+kP-lK\right)\right)\right] = \\
&\quad = -e^{-C}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left(e^{-P}V(P)\right)^k(1-(V(P))^{n-k}\cdot\right.\\
&\qquad\qquad \left.\cdot\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}\left(e^{K}q\right)^l(1-q)^{k-l}\right)\right]+nV(P)(P-qK) =
\end{aligned}$$

$$= -e^{-C} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \left(e^{-P} V(P)\right)^k (1 - (V(P))^{n-k} \left(e^K q + (1-q)\right)^k \right] +$$
$$+ nV(P)(P - qK) =$$
$$= -e^{-C} \left[e^{-P} V(P) \left(e^K q + (1-q)\right) + 1 - V(P)) \right]^n + nV(P)(P - qK). \tag{105}$$

Termékpiac esetén az értékesítés után nincs kockázat az eladó számára, így a zárt alak is egyszerűbb:

$$= -e^{-C} \left[e^{-P} V(P) + 1 - V(P)) \right]^n + nV(P)P. \tag{106}$$

Míg termékpiacon az eladó számára csak az értékesítés a bizonytalan, addig biztosítási piacok esetén az eladó számára az értékesítésen túl a kár bekövetkezte szempontjából is bizonytalan helyzetben van. A bevezetett hasznosságfüggvénnyel egy harmadik helyzetet is vizsgálni tudunk. Az eladó számára az értékesítésben nincs bizonytalanság, csak a kárbekövetkezés szempontjából. Ezt a piacot a továbbiakban értékesítési bizonytalanság nélküli biztosítási piacnak fogom nevezni[22], a biztosító várható hasznosságát pedig $U_{INS}(C, P, n)$ módon jelölöm[23]. Ha a biztosító P árat határoz meg, akkor n-szereplős piacon pontosan $nV(P)$ egyén vásárolja meg a szerződést. Ekkor $D(P) = nV(P)$ egy hagyományos keresleti függvény. Látni fogjuk, hogy a biztosítási piac kétféle modellje hasonló eredményekre vezet, tehát nem a kereslet speciális kezelése okozza a feltárt jelenségeket.

[22] Az értékesítési bizonytalanság nélküli biztosítási piac modelljét Veszteg Róberttel közösen dolgoztuk ki.

[23] Jelölésben az különbözteti meg a biztosítási piacot az értékesítési bizonytalanság nélküli biztosítási piactól, hogy biztosítási piac esetén az index kisbetűvel van írva, míg értékesítési bizonytalanság nélküli biztosítási piac esetén naggyal.

Tegyük fel, hogy $nV(P)$ egész szám. A biztosító várható hasznossága:

$$
\begin{aligned}
&U_{INS}(C,P,n) = \\
&= \sum_{k=0}^{nV(P)} \binom{nV(P)}{k} q^k (1-q)^{n-k} u(C + nV(P)P - kK) = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{nV(P)} \binom{nV(P)}{k} q^k (1-q)^{n-k} \left(-e^{-(C+nV(P)P-kK)} + C + nV(P)P - kK\right) = \\
&\quad\quad = -e^{-(C+nV(P)P)} \sum_{k=0}^{nV(P)} \left[\binom{nV(P)}{k} q^k (1-q)^{n-k} e^{kK}\right] + \\
&\quad\quad\quad + C + nV(P)P - \sum_{k=0}^{nV(P)} \left[\binom{nV(P)}{k} q^k (1-q)^{n-k} (kK)\right] = \\
&\quad\quad\quad = -e^{-C} \left[e^{-P}\left(qe^K + 1 - q\right)\right]^{nV(P)} + nV(P)(P - qK).
\end{aligned}
\tag{107}
$$

A (107) képletet érvényesnek tekintem abban az esetben is, ha $nV(P)$ nem egész szám.

5.1. Megjegyzés. *Kockázatsemleges eladó értékesítési bizonytalanság nélküli biztosítási piacon is az $nV(P)(P - qk)$ függvény maximalizálja.*

Bizonyítás.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{nV(P)} \binom{nV(P)}{k} q^k (1-q)^{n-k} \Big(u(C + nV(P)P - kK\Big) = \\
&\quad = C + nV(P) - \sum_{k=0}^{nV(P)} \binom{nV(P)}{k} q^k (1-q)^{n-k} kK = C + nV(P)(P - qK)
\end{aligned}
$$

□

5.2. Lemma. *Amennyiben $u(x) = -e^{-x} + x$ és $V''(P) = 0$, akkor $f(P) = U_{ins}(C,P,n)$ konkáv függvény.*

Bizonyítás.

Meghatározom $U_{ins}(C,P,n)$ függvény P szerinti első, majd második deriváltját:

$$
\begin{aligned}
&U_2'(C,P,n) = \\
&\quad = -ne^{-C}\left(V(P)e^{-P}\left(e^K q + (1-q)\right) + 1 - V(P)\right)^{n-1}\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\left[e^{-P}\left(e^K q + (1-q)\right)\Big(V'(P) - V(P)\Big) - V'(P)\right] + \\
&\qquad +nV'(P)(P-qK) + nV(P),
\end{aligned}
\tag{108}
$$

$$
\begin{aligned}
&U_2''(C,P,n) = \\
&\quad = -n(n-1)e^{-C}\left(V(P)e^{-P}\left(e^K q + (1-q)\right) + 1 - V(P)\right)^{n-2}\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\left[e^{-P}\left(e^K q + (1-q)\right)\Big(V'(P) - V(P)\Big) - V'(P)\right]^2 + \\
&\qquad -ne^{-C}\left(e^{-P}V(P)\left(e^K q + (1-q)\right) + 1 - V(P)\right)^{n-1}\cdot \\
&\qquad\qquad\quad \cdot\left[e^{-P}\left(e^K q + (1-q)\right)\Big(V(P) - 2V'(P)\Big)\right] + \\
&\qquad\quad +2nV'(P).
\end{aligned}
\tag{109}
$$

Az összeg minden tagja negatív. □

5.3. Megjegyzés. *Az 5.2. lemma analógiájára bebizonyítható, ha* $u(x) = -e^{-x} + x$ *és* $V''(P) = 0$*, akkor termékpiac, illetve értékesítési bizonytalanság nélküli biztosítási piac esetén is az eladó hasznossága* P*-ben konkáv. A* $V''(P) = 0$ *feltétel termékpiacok esetén a* $V(P) = \frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$ *függvényt adja, míg biztosítási piacok esetén a* $V(P) = \frac{K-P}{K-qK}$ *függvényt.*

Tudjuk, hogy termékpiac esetén a hasznosságmaximumot biztosító ár a nyereségmaximumot adó árnál kisebb. Azt is tudjuk, hogy biztosítási piacok esetén a hasznosságmaximumot biztosító ár lehet kisebb is, nagyobb is, mint a nyereségmaximumot biztosító ár. Az 5.4. Állításban megmutatjuk, hogy értékesítési bizonytalanság nélküli biztosítási piacon a hasznosságmaximumot biztosító ár nagyobb, mint a nyereségmaximumot adó ár.

5.4. Állítás. *Értékesítési bizonytalanság nélküli biztosítási piacon, amennyiben az eladó hasznosságfüggvénye $u(x) = -e^{-x} + x$, továbbá $f(P) = U_{ins}(C, P, n)$ függvény P-ben kvázikonkáv, akkor a monopol helyzetben lévő eladó a magasabb árat határoz meg, mint a nyereségmaximumot biztosító ár.*

Bizonyítás.

Azt fogom megmutatni, hogy értékesítési bizonytalanság nélküli biztosítási piacon az eladó várható hasznosságának P szerinti deriváltja a nyereségmaximumot adó pontban pozitív.

A (107) kifejezés P szerinti deriváltja:

$$
\begin{aligned}
&-n\left[e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right]^{nV(P)}\left[V'(P)\ln\left(qe^{K}+1-q\right)-V(P)-PV'(P)\right]+\\
&\quad+nV'(P)(P-qK)+nV(P).
\end{aligned}
\tag{110}
$$

A (110) kifejezést a nyereségmaximumot adó pontban vizsgáljuk, ezért felhasználjuk a (76) összefüggést. A derivált a nyereségmaximumot adó pontban:

$$
\begin{aligned}
&-n\left[e^{-P^{*pm}}\left(qe^{K}+1-q\right)\right]^{nV(P^{*pm})}\cdot\\
&\qquad\cdot\left[V'(P^{*pm})\ln\left(qe^{K}+1-q\right)-V'(P^{*pm})qK\right]=\\
&=-n\left[e^{-P^{*pm}}\left(qe^{K}+1-q\right)\right]^{nV(P^{*pm})}\cdot\\
&\qquad\cdot\left\{V'(P^{*pm})\left[\ln\left(qe^{K}+1-q\right)+\ln(e^{-qK})\right]\right\}=\\
&=-n\left[e^{-P^{*pm}}\left(qe^{K}+1-q\right)\right]^{nV(P^{*pm})}\cdot\\
&\qquad\cdot\left\{V'(P^{*pm})\ln\left[e^{-qK}\left(qe^{K}+1-q\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{111}
$$

Mivel az exponenciális függvény konvex, ezért $qe^{K} + (1-q)e^{0} > e^{qK}$, tehát kijelenthetjük, hogy $e^{-qK}\left(qe^{K}+1-q\right) > 1$, ami azt jelenti, hogy ennek a kifejezésnek a logaritmusa pozitív. A (111) derivált tehát pozitív, ami elegendő a bizonyítani kívánt állításhoz, hiszen a várható hasznosság kvázikonkavitása azt jelenti, hogy a P szerinti derivált csak egyszer vált előjelet[24]. □

[24]Emlékezzünk rá, hogy az 5.3. Megjegyzés azt állítja, hogy ha $V''(P) = 0$, akkor a maximalizálandó kifejezés konkáv.

A 3.8. Állítás és a 3.9. Következmény alapján beláttuk, hogy termékpiac esetén a monopol helyzetben lévő eladó a piaci létszám növelésében érdekelt. Ehhez hasonló állítást nem tudtunk belátni általánosan biztosítási piacokra, de speciálisan az $u(x) = -e^{-x} + x$ hasznosságfüggvényre be tudom látni.

5.5. Állítás. *Legyen az eladó hasznosságfüggvénye $u(x) = -e^{-x} + x$! Ha $e^{-P}\left(e^K q + (1-q)\right) < 1$, akkor biztosítási piacok esétén a monopol helyzetben lévő eladó várható hasznossága növekszik a piaci létszám növekedésével.*

Bizonyítás.

Könnyű belátni hogy a $nV(P)(P - qK)$ kifejezés növekszik n növekedésével. Ehhez annyit szükséges csak megjegyezni, hogy biztosítási piacok esetén csak a $P > qK$ tartomány a releváns. A

$$-e^{-C}\left[e^{-P}V(P)\left(e^K q + (1-q)\right) + 1 - V(P))\right]^n$$

kifejezés akkor növekszik n növekedésével, ha

$$e^{-P}V(P)\left(e^K q + (1-q)\right) + 1 - V(P)) < 1,$$

ami akkor teljesül, ha

$$e^{-P}\left(e^K q + (1-q)\right) < 1,$$

vagy másképp:

$$-e^K q - (1-q) > -e^P. \tag{112}$$

Szorozzuk be (112) egyenlőtlenség minkét oldalát $e^{-(C+P)}$ tényezővel!

$$-qe^{-(C+P-K)} - (1-q)e^{-(C+P)} > -e^{-C}, \tag{113}$$

A (113) egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy a P ár elfogadható egy olyan biztosító számára, akinek a hasznosságfüggvénye $u(x) = -e^{-x}$. $\square$

HIPOTÉZIS.

Biztosítási piac esetén a monopol helyzetű eladó és a vevők érdeke lehet egyező: az eladó a piaci méret növelésében érdekelt.

5.6. Következmény. *Biztosítási piacokon amennyiben a várható hasznosságot biztosító árra (minden piaci létszám esetén) teljesül, hogy*

$$e^{-P}\left(e^{K}q+(1-q)\right)<1,$$

akkor az eladó érdekelt a piaci létszám növekedésében.

BIZONYÍTÁS.

Az állítás bizonyítása egyszerű. Ha a biztosító az n-szereplős piac optimális árát alkalmazza az $n+1$-szereplős piacon, akkor a várható hasznossága növekszik. Ha $n+1$-szereplős piacon nem ez az optimális ár, akkor a várható hasznossága még nagyobb lesz.

□

Értékesítési bizonytalanság nélküli piacokon többet lehet állítani: bármilyen ár esetén nő a biztosító várható hasznossága a piac növekedésével.

5.7. Állítás. *Legyen az eladó hasznosságfüggvénye $u(x) = -e^{-x}+x$! Ekkor értékesítési bizonytalanság nélküli biztosítási piacokon a monopol helyzetben lévő eladó érdekelt a piac méretének növelésében.*

BIZONYÍTÁS.

Jelölje P^{*n} az n-szereplős piacon az optimális árat. $n+1$-szereplős piacon tekintsük azt a P árat, amelyre teljesül, hogy $nV(P^{*n}) = (n+1)V(P)$. Ilyen ár létezik $V(P)$ folytonossága miatt. Mivel $V(P)$ csökkenő, ezért azt is állíthatjuk, hogy $P^{*n} < P$. Felhasználva az előző két megjegyzést állítható, hogy

$$nV(P^{*n})(P^{*n}-qk) = (n+1)V(P)(P^{*n}-qk) < (n+1)V(P)(P-qk)$$

és

$$\begin{aligned}-e^{-C}\left[e^{-P^{*n}}\left(qe^{K}+1-q\right)\right]^{nV(P^{*n})} &= \\ -e^{-C}\left[e^{-P^{*n}}\left(qe^{K}+1-q\right)\right]^{(n+1)V(P)} &< \\ -e^{-C}\left[e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right]^{(n+1)V(P)} &.\end{aligned}$$

Tehát $n+1$-szereplős piacon P ár esetén a biztosító várható hasznossága nagyobb, mint n-szereplős piacon P^{*n} ár esetén. Amennyiben P ár nem optimális, akkor a biztosító várható hasznossága még nagyobb. □

Az 5.8. Állításban sorra vesszük a biztosító lehetséges viselkedéseit.

HIPOTÉZIS.
Biztosítási piac esetén a monopol helyzetű eladó és a vevők érdeke lehet egyező: bizonyos esetekben a vevők is a piac méret növelésében érdekeltek.

5.8. Állítás. *Legyen a biztosító hasznosságfüggvénye* $u(x) = -e^{-x} + x$*! Legyen a vásárlási valószínűség függvény* $V(P) = \frac{K-P}{K-qK}$*. Ekkor biztosítási piacon a piac 3 különböző alakulását lehet megkülönböztetni.*

BIZONYÍTÁS.

Ha $V''(P) = 0$, akkor 5.2. Állítás alapján kijelenthetjük, hogy $U_{ins}(C, P, n)$ függvény konkáv. De jobban megnézve a bizonyítást ennél többet állíthatunk. Az

$$nV(P)(P - qk) \tag{114}$$

illetve a

$$-e^{-C}\left[e^{-P}V(P)\left(e^{K}q+(1-q)\right)+1-V(P))\right]^{n} \tag{115}$$

függvények is konkávok. A (115) kifejezés egy olyan döntéshozó várható hasznosságát mutatja, akinek hasznosságfüggvénye $u(x) = -e^{-x}$. Ennek a várható hasznosságnak P szerinti maximuma szintén nem függ n-től. Jelöljük ezt az optimumot P^{*exp} módon. Mivel mind (114), mind (115) kifejezések konkávok, továbbá felveszik maximumukat, ezért az összegük maximuma az egyedi maximumok között lesz.

A bizonyítás során fontos szerepet játszik az a $\tilde{P}$ érték, amely esetén az $u(x) = -e^{-x}$ hasznosságfüggvénnyel rendelkező biztosító közömbös a tekintetben, hogy bevállalja-e a kockázatot, vagy sem:

$$-e^{-C} = -qe^{-(C+\tilde{P}-K)} - (1-q)e^{-(C+\tilde{P})}.$$

Meghatározom a várható hasznosság P szerinti deriváltját $n+1$-szereplős piacon az n-szereplős piac optimális ára esetén, azaz ${U_{ins}}'_2(C, P^{*n}, n+1)$ kifejezést:

$$\begin{aligned}
&{U_{ins}}'_2(C,P,n) = \\
&\quad = -e^{-C} n \left(V(P)\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right)+1-V(P)\right)^{n-1} \cdot \\
&\qquad \cdot \left(V'(P)\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right) - V(P)e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right) - V'(P)\right) + \\
&\quad +V'(P)(nP-nqK)+V(P)n = \\
&\qquad = 0.
\end{aligned} \tag{116}$$

A (116) egyenlőséget átalakítom jobban kezelhető formára:

$$\begin{aligned}
&e^{-C}\left(V(P)\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right)+1-V(P)\right)^{n-1} \cdot \\
&\qquad \cdot \left(V'(P)\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right) - V(P)e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right) - V'(P)\right) = \\
&\quad = V'(P)(P-qK)+V(P).
\end{aligned} \tag{117}$$

Felhasználva a (117) egyenletet fel tudjuk írni a következő összefüggést:

$$\begin{aligned}
&{U_{ins}}'_2(C,P^{*n},n+1) = \\
&\quad = \left(V'(P^{*n})(P^{*n}-qK)+V(P^{*n})\right) V(P^{*n})\left(1-e^{-P^{*n}}\left(qe^{K}+1-q\right)\right).
\end{aligned} \tag{118}$$

Azt kell csak eldönteni, hogy a (118) derivált értéke pozitív vagy negatív. A kifejezés előjele a $V'(P)(P-qK)+V(P)$ és az $1-e^{-P}(qe^K+1-q)$ kifejezések előjelétől függ. Tudjuk, hogy $V'(P)(P-qK)+V(P)$ kifejezés $V(P)(P-qk)$ P szerinti deriváltja, így akkor 0, ha $P=P^{*pm}$. Ha $P>P^{*pm}$, akkor negatív, ha pedig $P<P^{*pm}$, akkor pozitív[25]. Az 5.5. Állítás bizonyításából tudjuk, hogy $e^{-P}(qe^K+1-q)$ kifejezés pontosan akkor kisebb, mint 1, ha a P ár elfogadható ár egy olyan döntéshozónak, akinek hasznosságfüggvénye $u(x)=-e^{-x}$, vagyis ha $P>\tilde{P}$. Ezek alapján $1-e^{-P}(qe^K+1-q)$ akkor pozitív, ha $P>\tilde{P}$, és akkor negatív, ha $P<\tilde{P}$.

Tudjuk, hogy $\tilde{P}<P^{*exp}$. Attól függően, hogy P^{*pm} hol helyezkedik el az előző két értékhez képest 3 féle viselkedési mintát lehet megkülönböztetni:

1. $\tilde{P}<P^{*exp}<P^{*pm}$. Ekkor (118) derivált értéke pozitív, tehát a biztosító a piac növekedésével növeli a terméke árát. Mivel $\tilde{P}<P^{*n}$, így az 5.5. Állítás alapján tudjuk, hogy a biztosító hasznossága növekszik a piac bővülésével. Ekkor a biztosító és a biztosítottak érdeke ellentétes: a biztosító a piac méretének növelésében érdekelt, a biztosítottak viszont ebben nem érdekeltek (növekszik az ár).

2. $\tilde{P}<P^{*pm}<P^{*exp}$. Ekkor (118) derivált értéke negatív, tehát a biztosító a piac növekedésével csökkenti a terméke árát. Mivel $\tilde{P}<P^{*n}$, így ebben az esetben is növekszik a biztosító hasznossága a piac bővülésével. Ekkor a biztosító és a biztosítottak közös érdeke a piac méretének növelése.

3. $P^{*pm}<\tilde{P}<P^{*exp}$. Ebben az esetben nem tudjuk P^{*n} és $\tilde{P}$ közötti relációt meghatározni. Amennyiben $P^{*n}<\tilde{P}$, akkor (118) derivált értéke negatív, tehát a biztosító a piac növekedésével csökkenti a terméke árát. Ha $\tilde{P}<P^{*n}$, akkor (118) derivált értéke pozitív, tehát a biztosító a piac növekedésével növeli a terméke árát. Mivel nem tudjuk eldönteni P^{*n} és $\tilde{P}$ közötti relációt, így a biztosító várható hasznosságának alakulása is kérdéses.

□

[25]Mivel $V(P)(P-qk)$ P-ben konkáv.

Az 5.8. Állításban megfogalmazottakhoz hasonló eredményre juthatunk, ha az értékesítési bizonytalanság nélküli biztosítási piacokat vizsgáljuk.

5.9. Állítás. *Legyen a biztosító hasznosságfüggvénye $u(x) = -e^{-x} + x$! Legyen a vásárlási valószínűség függvény $V(P) = \frac{K-P}{K-qK}$. Ekkor értékesítési bizonytalanság nélküli biztosítási piacon a piac 2 különböző alakulását lehet megkülönböztetni.*

Bizonyítás.

Az

$$= -e^{-C}\left[e^{-P}\left(qe^K + 1 - q\right)\right]^{nV(P)}$$

és a

$$= nV(P)(P - qK)$$

tag most is konkáv, mindkettőnek létezik a maximuma, így az összeg maximuma az egyedi maximumok között lesz.

Most a biztosító várható hasznosságának P szerinti deriváltja:

$$-n\left[e^{-P}\left(qe^K + 1 - q\right)\right]^{nV(P)}\left[V'(P)\ln\left(qe^K + 1 - q\right) - V(P) - PV'(P)\right] +$$
$$+ nV'(P)(P - qK) + nV(P).$$

Az n-szereplős piac optimális ára esetén a derivált 0, amely összefüggést a

$$\left[e^{-P}\left(qe^K + 1 - q\right)\right]^{nV(P)}\left[V'(P)\ln\left(qe^K + 1 - q\right) - V(P) - PV'(P)\right] =$$
$$= V'(P)(P - qK) + nV(P)$$

formában írom fel. Ebben az esetben is a várható hasznosság P szerinti deriváltját vizsgálom $n+1$-szereplős piacon, az n-szereplős piac optimális árában:

$$U_{INS}{}'_2(C, P^{*n}, n+1) =$$
$$= (n+1)\Big(V'(P)(P - qK) + nV(P)\Big)\left\{1 - \left[e^{-P}\left(qe^K + 1 - q\right)\right]^{V(P)}\right\}. \quad (119)$$

A (119) kifejezés előjele a $V'(P)(P-qK)+nV(P)$ és a $1-\left[e^{-P}\left(qe^K+1-q\right)\right]^{V(P)}$ szorzótényezők előjelétől függ. Az 5.8. Állítás bizonyítása alapján már tudjuk, hogy $V'(P)(P-qK)+nV(P)$ akkor pozitív, ha $P<P^{*n}$, és akkor negatív, ha $P^{*n}<P$. Azt is tudjuk, hogy $0\geq V(P)$, így $1-\left[e^{-P}\left(qe^K+1-q\right)\right]^{V(P)}$ akkor lesz pozitív, ha $e^{-P}\left(qe^K+1-q\right)<1$, ami akkor teljesül, ha $\tilde{P}<P$. $1-\left[e^{-P}\left(qe^K+1-q\right)\right]^{V(P)}$ akkor lesz negatív, ha $P<\tilde{P}$.

1. $\tilde{P}<P^{*pm}<P^{*exp}$. Ekkor (119) derivált értéke pozitív, tehát a biztosító a piac növekedésével csökkenti a terméke árát. Az 5.7. Állítás alapján növekszik a biztosító hasznossága a piac bővülésével. Ekkor a biztosító és a biztosítottak közös érdeke a piac méretének növelése.

2. $P^{*pm}<\hat{P}<P^{*exp}$. Ebben az esetben nem tudjuk P^{*n} és $\tilde{P}$ közötti relációt meghatározni. Amennyiben $P^{*n}<\tilde{P}$, akkor (118) derivált értéke negatív, tehát a biztosító a piac növekedésével csökkenti a terméke árát. Ha $\tilde{P}<P^{*n}$, akkor (118) derivált értéke pozitív, tehát a biztosító a piac növekedésével növeli a terméke árát. Az 5.7. Állítás alapján most is növekszik a biztosító hasznossága a piac bővülésével.

A $\tilde{P}<P^{*exp}<P^{*pm}$ nem fordulhat elő, hiszen ebből $P^{*n}<P^{*pm}$, ami ellentmond az 5.4. Állításnak.

Annak a kérdésnek a megtárgyalása van csak hátra, hogy az árak konvergálnak-e a nyereségmaximumhoz vagy sem. Erre a kérdésre ad választ az 5.10. és az 5.11. Állítás

5.10. Állítás. *Biztosítási piac esetén ha* $e^{-P}\left(qe^K+1-q\right)<1$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} U_{ins}{}'_2(C,P^{*pm},n)=0.$$

Bizonyítás.

Azt vizsgálom, hogy a várható hasznosság ár szerinti deriváltja a nyereségmaximumban 0-vá válik-e vagy sem. A deriváltat a nyereségmaximumban nézem, ezért $nV'(P)(P-qk)+V(P)=0$.

$$\begin{aligned} &U_{ins}{}_2'(C,P^{*pm},n)= \\ &\quad = -ne^{-C}\left(V(P^{*pm})\left(e^{-P^{*pm}}\left(qe^K+1-q\right)\right)+1-V(P^{*pm})\right)^{n-1}\cdot \\ &\qquad \cdot\left\{\left(e^{-P^{*pm}}\left(qe^K+1-q\right)\right)\left[V'(P^{*pm})-V(P^{*pm})\right]-V'(P^{*pm})\right\}. \end{aligned} \tag{120}$$

A (120) képletben $\left(e^{-P^{*pm}}\left(qe^K+1-q\right)\right)\left[V'(P^{*pm})-V(P^{*pm})\right]-V'(P^{*pm})$ szorzótényező nem függ n-től, a határérétket ez nem befolyásolja. A $-ne^{-C}\left(V(P)\left(e^{-P}\left(qe^K+1-q\right)\right)+1-V(P)\right)^{n-1}$ pedig pontosan akkor tart 0-hoz, ha $V(P)\left(e^{-P}\left(qe^K+1-q\right)\right)+1-V(P)<1$, ami akkor áll fenn, ha $e^{-P}\left(qe^K+1-q\right)<1$, ami egyenértékű a $\tilde{P}<P^{*pm}$ feltétellel. □

5.11. Állítás. *Értékesítési bizonytalanság nélküli biztosítási piac esetén ha* $e^{-P}\left(qe^K+1-q\right)<1$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} U_{INS}{}_2'(C,P^{*pm},n)=0.$$

Bizonyítás.

A (120) képlet ebben az esetben:

$$\begin{aligned} &U_{ins}{}_2'(C,P^{*pm},n)= \\ &= -ne^{-C}\left[e^{-P}\left(qe^K+1-q\right)\right]^{nV(P)}\left[V'(P)\ln\left(qe^K+1-q\right)-V(P)-PV'(P)\right]. \end{aligned}$$

A $\left[V'(P)\ln\left(qe^K+1-q\right)-V(P)-PV'(P)\right]$ tag nem függ n-től, így a határértéket nem befolyásolja. A $-ne^{-C}\left[e^{-P}\left(qe^K+1-q\right)\right]^{nV(P)}$ pedig pontosan akkor tart 0-hoz, ha $V(P)\left(e^{-P}\left(qe^K+1-q\right)\right)+1-V(P)<1$, ami akkor áll fenn, ha $e^{-P}\left(qe^K+1-q\right)<1$, ami egyenértékű a $\tilde{P}<P^{*pm}$ feltétellel.

□

Kérdés, hogy a 4.13. Állítást és az 5.10. Állítást össze lehet-e egyeztetni. A válasz a kérdésre igenlő: amennyiben a hasznosságfüggvény $u(x) = -e^{-x} + x$, akkor

$$\begin{aligned}
a_k &= \\
&= qu(C + k(P^{*pm} - K) + P^{*pm} - K) + \\
&\quad +(1-q)u(C + k(P^{*pm} - K) + P^{*pm}) - u(C + k(P^{*pm} - K)) + \\
&\quad -(P^{*pm} - K)\Big(qu'(C + k(P^{*pm} - K) + P^{*pm} - K) + \\
&\qquad (1-q)u'(C + k(P^{*pm} - K) + P^{*pm})\Big) = \\
&= -e^{-(C+k(P^{*pm}-K))}\left[e^{-P^{*pm}}\left(qe^{K} + 1 - q\right)(1 + P^{*pm} - qK) + 1\right].
\end{aligned}$$

Legyen $r = e^{-(P^{*pm}-K)}$! Könnyű látni, hogy

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{r^k}\right| = e^{-C}\left[e^{-P^{*pm}}\left(qe^{K} + 1 - q\right)(1 + P^{*pm} - qK) + 1\right] > 0.$$

Tehát biztosan találhatók olyan ε_1 és ε_2 számok, hogy egy bizonyos k_0 indextől kezdve $\varepsilon_1 < \left|\frac{a_k}{r^k}\right| < \varepsilon_2$.

A $qr + (1-q)r^{\frac{P^{*pm}}{P^{*pm}-K}}$ kifejezést az $r = e^{-(P^{*pm}-K)}$ pontban vizsgálom:

$$qe^{-(P^{*pm}-K)} + (1-q)e^{-(P^{*pm}-K)\frac{P^{*pm}}{P^{*pm}-K}} = qe^{-(P^{*pm}-K)} + (1-q)e^{-P^{*pm}}. \quad (121)$$

A (121) kifejezés akkor nagyobb, mint 1, ha $P^{*pm} < \tilde{P}$. Ekkor a 4.13 Állítást értelmében $\lim_{n\to\infty} U_{ins}{}'_2(C, P^{*pm}, n) \neq 0$. A (121) kifejezés akkor kisebb, mint 1, ha $\tilde{P} < P^{*pm}$. Ekkor a 4.13. Állítás értelmében $\lim_{n\to\infty} U_{ins}{}'_2(C, P^{*pm}, n) = 0$. Ugyanerre a végkövetkeztetésre jutottunk az 5.10. Állításban is.

6. Numerikus eredmények

Az előző fejezetek során analitikus módszerekkel elemeztem a problémát. Az analitikus módszerekkel nem vizsgáltam, hogy az optimális ár milyen mértékben változik. Az 5. fejezetben a biztosítási piacokról sok mindent meg lehetett állapítani de csak egy speciális hasznosságfüggvény segítségével. Ebben a fejezetben a modell numerikus eljárásokkal történt vizsgálatának eredményei szerepelnek. A numerikus módszerrel történő vizsgálatoknál olyan kérdéseket is megvizsgálok, amiket analitikusan nem vizsgáltam.

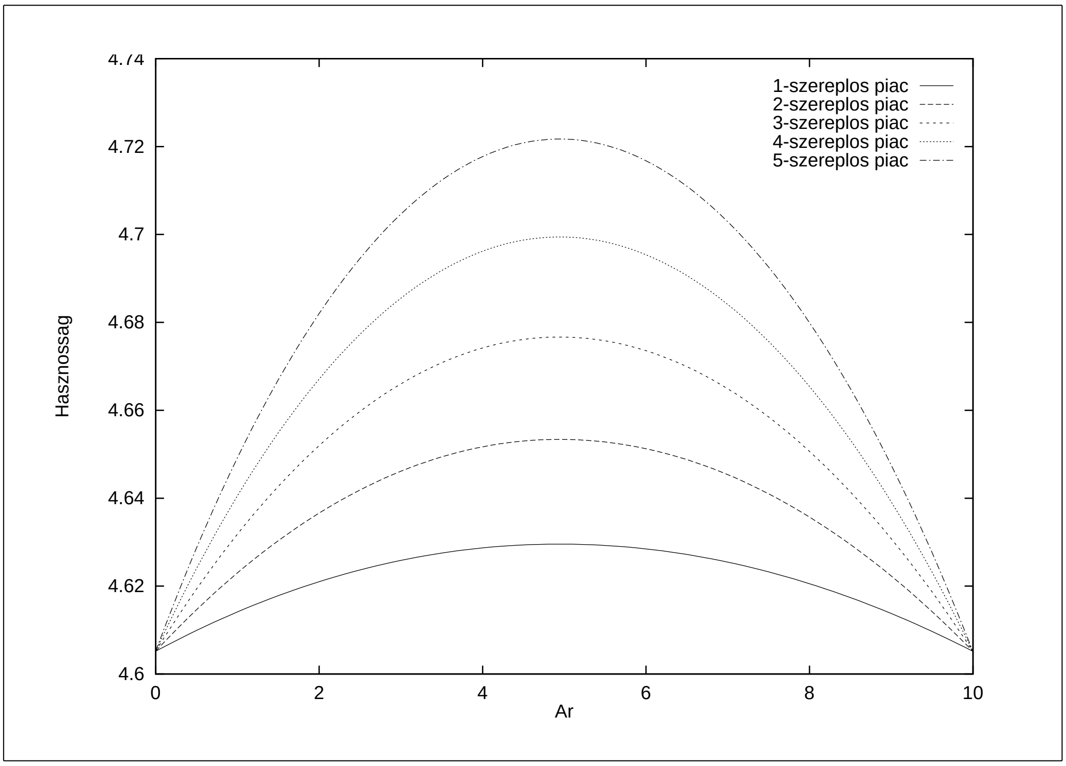
Ebben a fejezetben csak a termékpiacokat és a biztosítási piacokat vizsgálom. Az értékesítési bizonytalanság nélküli piacokat azért nem vizsgálom, mert általánosan nem lehet összegképlettel felírni.

A modell vizsgálatát a következőképpen végeztem. Választottam konkrét értéket C-nek, $\overline{P}$-nak, és meghatároztam $u(x)$ és $V(P)$ függvényeket (biztosítási piac esetén q-t is meghatároztam, K értéke pedig $\overline{P}$). Választottam egy L számot. Ezek után minden vizsgálni kívánt piaci létszámra kiszámoltam az eladó hasznosságát, ha az ár $\frac{l}{L}\overline{P}$ ($l = 1..L$). Minden piaci létszámra kiválasztottam, hogy melyik l-hez tarozó ár esetén lesz az eladó hasznossága maximális. L számot általában 1000-nek választottam. L értékét csak akkor jelzem külön, ha eltérek az 1000-től.

6.1. Termékpiacok elemzése

Először az eladó hasznosságfüggvényének a logaritmus függvényt választottam. A 1. ábrán az eladó hasznosságát ábrázolom különböző létszámú piacok esetén.

Az 1. táblázatban az optimális árakat láthatjuk a piaci létszám és a termék maximális ára ($\overline{P}$) függvényében, ha az eladó induló vagyonát 100-nak választjuk, a rezervációs árak pedig egyenletesen oszlanak el a lehetséges tartományban ($V(P) = \frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$). Ha termék maximális ára az induló vagyonhoz képest kicsi, ak-



$u(x) = \ln(x)$; $C = 100$; $\overline{P} = 10$; $V(P) = \frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$

1. ábra.

kor az optimális ár nem nagyon tér el kis és nagy méretű piacok esetén. Ha a termék maximális ára 1, akkor az egyszereplős piac optimális ára 99,8 százaléka a 100-szereplős piac optimális árának. Ha a termék maximális ára 100, akkor ugyanez az arány 91,4%.

A 2. táblázatban azt vizsgálom, hogy csak az induló vagyon és a termék maximális árának aránya a döntő, vagy emellett még befolyásoló hatása van az induló vagyon mértékének is. Az induló vagyon mértékét különböző szinteken rögzítettem, és mindegyikhez úgy választottam meg a termék maximális árát, hogy a kettő aránya 0,5 legyen. A rezervációs árak eloszlás továbbra is egyenletes a lehetséges tartományon. Az egy- és 100-szereplős piac optimális árának aránya minden esetben 95,2%.

A rezervációs árak egyenletes eloszlása nem minden esetben valóságközeli feltevés. A vagyon eloszlása lognormális. Feltételezhető, hogy az eladó terméke

Piac nagysága	$\overline{P}=1$	$\overline{P}=2$	$\overline{P}=5$	$\overline{P}=10$	$\overline{P}=20$	$\overline{P}=100$
1	0,499	0,998	2,485	4,94	9,76	45,5
2	0,499	0,998	2,485	4,94	9,78	46
3	0,499	0,998	2,485	4,94	9,78	46,4
4	0,499	0,998	2,485	4,94	9,8	46,8
5	0,499	0,998	2,485	4,95	9,8	47,1
10	0,499	0,998	2,485	4,95	9,84	48,1
20	0,499	0,998	2,49	4,96	9,88	48,9
30	0,499	0,998	2,49	4,96	9,9	49,2
40	0,499	0,998	2,49	4,97	9,92	49,4
50	0,499	0,998	2,49	4,97	9,92	49,5
100	0,5	0,998	2,495	4,98	9,96	49,8

$u(x) = \ln(x)$; $C = 100$; $V(P) = \frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$

1. táblázat.

iránti keresletet a fogyasztó vagyona határozza meg, így a rezervációs árak eloszlása a kisebb értékek felé tolódik el. A 3. táblázatban a $V(P)$ függvényt változtattam, az induló vagyon mértéke és a termék maximális ára pedig végig változatlan. A táblázat tanúsága szerint minél inkább a 0 közelében tömörülnek a rezervációs árak, annál alacsonyabb lesz a piacon az optimális ár, és annál kisebb lesz az egy- és 100-szereplős piac optimális árának aránya is.

A 4.-6. táblázat az 1.-3. táblázatok megismétlése azzal a különbséggel, hogy minden táblázat esetén a hasznosságfüggvény a gyökfüggvény. A 7.-9. táblázatok is az 1.-3. táblázatok megismétlése, de ezekben a táblázatokban a hasznosságfüggvény egy negatív hiperbola. A 4.-6. és 7.-9. táblázatokból levonható következményeg lényegileg ugyanazok, mint az 1.-3. táblázatokból levonható következmények.

Piac nagysága	$C=2$ $\overline{P}=1$	$C=4$ $\overline{P}=2$	$C=10$ $\overline{P}=5$	$C=20$ $\overline{P}=10$	$C=100$ $\overline{P}=50$	$C=200$ $\overline{P}=100$
1	0,474	0,948	2,37	4,74	23,7	47,4
2	0,476	0,952	2,38	4,76	23,8	47,6
3	0,478	0,956	2,39	4,78	23,9	47,8
4	0,479	0,958	2,395	4,79	23,95	47,9
5	0,481	0,962	2,405	4,81	24,05	48,1
10	0,486	0,972	2,43	4,86	24,3	48,6
20	0,491	0,982	2,455	4,91	24,55	49,1
30	0,493	0,986	2,465	4,93	24,65	49,3
40	0,495	0,99	2,475	4,95	24,75	49,5
50	0,496	0,992	2,48	4,96	24,8	49,6
100	0,498	0,996	2,49	4,98	24,9	49,8

$u(x)=\ln(x)$; $V(P)=\frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$

2. táblázat.

Piac	$V(P)=\left(\frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}\right)^{\alpha}$					
nagysága	$\alpha=1$	$\alpha=2$	$\alpha=3$	$\alpha=4$	$\alpha=5$	$\alpha=6$
1	2,37	1,585	1,2	0,965	0,805	0,695
2	2,38	1,59	1,2	0,965	0,81	0,695
3	2,39	1,595	1,2	0,965	0,81	0,695
4	2,395	1,6	1,205	0,965	0,81	0,695
5	2,405	1,6	1,205	0,97	0,81	0,695
10	2,43	1,615	1,215	0,97	0,81	0,7
20	2,455	1,63	1,22	0,98	0,815	0,7
30	2,465	1,64	1,225	0,98	0,82	0,705
40	2,475	1,645	1,23	0,985	0,82	0,705
50	2,48	1,645	1,235	0,985	0,825	0,705
100	2,49	1,655	1,24	0,99	0,825	0,71

$u(x)=ln(x)$; $C=10$; $\overline{P}=5$

3. táblázat.

Piac nagysága	$\overline{P}=1$	$\overline{P}=2$	$\overline{P}=5$	$\overline{P}=10$	$\overline{P}=20$	$\overline{P}=100$
1	0,5	0,998	2,495	4,97	9,88	47,7
2	0,5	0,998	2,495	4,97	9,88	48
3	0,5	0,998	2,49	4,97	9,9	48,2
4	0,5	0,998	2,495	4,97	9,9	48,4
5	0,5	0,998	2,495	4,97	9,9	48,6
10	0,5	0,998	2,495	4,98	9,92	49,1
20	0,5	0,998	2,495	4,98	9,94	49,5
30	0,5	0,998	2,495	4,98	9,94	49,6
40	0,5	0,998	2,495	4,98	9,96	49,7
50	0,5	0,998	2,495	4,99	9,96	49,8
100	0,5	1	2,495	4,99	9,98	49,9

$u(x)=\sqrt{x}$; $C=100$; $V(P)=\frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$

4. táblázat.

Piac nagysága	$C=2$ $\overline{P}=1$	$C=4$ $\overline{P}=2$	$C=10$ $\overline{P}=5$	$C=20$ $\overline{P}=10$	$C=100$ $\overline{P}=50$	$C=200$ $\overline{P}=100$
1	0,487	0,974	2,435	4,87	24,35	48,7
2	0,488	0,976	2,44	4,88	24,4	48,8
3	0,489	0,978	2,445	4,89	24,45	48,9
4	0,49	0,98	2,45	4,9	24,5	49
5	0,49	0,98	2,45	4,9	24,5	49
10	0,493	0,986	2,465	4,93	24,65	49,3
20	0,495	0,99	2,475	4,95	24,75	49,5
30	0,497	0,994	2,485	4,97	24,85	49,7
40	0,497	0,994	2,485	4,97	24,85	49,7
50	0,498	0,996	2,49	4,98	24,9	49,8
590	0,499	0,998	2,495	4,99	24,95	49,9
100	0,499	0,998	2,495	4,99	24,95	49,9

$u(x)=\sqrt{x}$; $V(P)=\frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$

5. táblázat.

Piac nagysága	$V(P) = \left(\frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}\right)^{\alpha}$					
	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$\alpha = 4$	$\alpha = 5$	$\alpha = 6$
1	2,435	1,625	1,225	0,98	0,82	0,705
2	2,44	1,63	1,225	0,98	0,82	0,705
3	2,445	1,63	1,225	0,985	0,82	0,705
4	2,45	1,63	1,225	0,985	0,82	0,705
5	2,45	1,635	1,225	0,985	0,82	0,705
10	2,465	1,64	1,23	0,985	0,825	0,705
20	2,475	1,65	1,235	0,99	0,825	0,705
30	2,485	1,65	1,24	0,99	0,825	0,71
40	2,485	1,655	1,24	0,99	0,825	0,71
50	2,49	1,655	1,24	0,995	0,83	0,71
100	2,495	1,66	1,245	0,995	0,83	0,71

$u(x) = \sqrt{x}$; $C = 10$; $\overline{P} = 5$

6. táblázat.

Piac nagysága	$\overline{P} = 1$	$\overline{P} = 2$	$\overline{P} = 5$	$\overline{P} = 10$	$\overline{P} = 20$	$\overline{P} = 100$
1	0,499	0,994	2,47	4,88	9,54	41,4
2	0,499	0,994	2,47	4,88	9,56	42,3
3	0,499	0,994	2,47	4,89	9,58	43
4	0,499	0,994	2,47	4,89	9,6	43,6
5	0,499	0,996	2,47	4,89	9,6	44,2
10	0,499	0,996	2,47	4,9	9,66	46,1
20	0,499	0,996	2,475	4,92	9,74	47,8
30	0,499	0,996	2,475	4,93	9,8	48,5
40	0,499	0,996	2,48	4,94	9,84	48,8
50	0,499	0,996	2,48	4,94	9,86	49
100	0,499	0,996	2,485	4,96	9,92	49,5

$u(x) = -\frac{1}{x}$; $C = 100$; $V(P) = \frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$

7. táblázat.

Piac nagysága	$C=2$ $\overline{P}=1$	$C=4$ $\overline{P}=2$	$C=10$ $\overline{P}=5$	$C=20$ $\overline{P}=10$	$C=100$ $\overline{P}=50$	$C=200$ $\overline{P}=100$
1	0,45	0,9	2,245	4,49	22,5	45
2	0,453	0,906	2,265	4,53	22,65	45,3
3	0,456	0,912	2,28	4,56	22,8	45,6
4	0,459	0,918	2,295	4,59	22,95	45,9
5	0,462	0,924	2,31	4,62	23,1	46,2
10	0,471	0,942	2,355	4,71	23,55	47,1
20	0,481	0,962	2,405	4,81	24,05	48,1
30	0,486	0,972	2,43	4,86	24,3	48,6
40	0,489	0,978	2,445	4,89	24,45	48,9
50	0,491	0,982	2,455	4,91	24,55	49,1
100	0,495	0,99	2,475	4,95	24,75	49,5

$u(x) = -\frac{1}{x}$; $V(P) = \frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$

8. táblázat.

Piac	$V(P) = \left(\frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}\right)^{\alpha}$					
nagysága	$\alpha=1$	$\alpha=2$	$\alpha=3$	$\alpha=4$	$\alpha=5$	$\alpha=6$
1	2,245	1,515	1,15	0,93	0,78	0,675
2	2,265	1,52	1,155	0,935	0,785	0,675
3	2,28	1,53	1,16	0,935	0,785	0,675
4	2,295	1,535	1,16	0,935	0,785	0,68
5	2,31	1,54	1,165	0,94	0,785	0,68
10	2,355	1,565	1,175	0,945	0,79	0,68
20	2,405	1,59	1,195	0,955	0,8	0,685
30	2,43	1,61	1,205	0,965	0,805	0,69
40	2,445	1,62	1,21	0,97	0,81	0,695
50	2,455	1,625	1,22	0,975	0,81	0,695
100	2,475	1,645	1,23	0,985	0,82	0,705

$u(x) = -\frac{1}{x}$; $C = 10$; $\overline{P} = 5$

9. táblázat.

Legyen az eladó hasznosságfüggvénye a $[0,110]$ intervallumon $u(x) = -(120 - x)^{1,5}$! Ekkor a $[0,110]$ intervallumon $u''' < 0$, ami indukálja a $\left(-\frac{u''(x)}{u'(x)}\right)' > 0$ teljesülését ugyanezen intervallum esetében. Az eladó induló vagyonát válasszuk 20-nak! A termékért 10 egységnél többet senki sem hajlandó adni, a rezervációs árak eloszlása egyenletes a $[0,10]$ intervallumon. Teljesülnek a 3.27. Állítás feltételei, így amíg az érdeklődők száma nem éri el a 10-et, biztos, hogy az érdeklődők számának növekedésével csökken az ár. Ezt mutatja a 10. táblázat.

Piac nagysága	Optimális ár
1	4.510
2	4.500
3	4.490
4	4.480
5	4.480
6	4.470
7	4.450
8	4.440
9	4.430

$u(x) = -(120 - x)^{1,5}$; $C = 20$; $\overline{P} = 10$; $\frac{\overline{P} - P}{\overline{P}}$

10. táblázat.

Érdemes megvizsgálni az $u(x) = (x - 120)^3$ hasznosságfüggvényt is a $[0,110]$ intervallumon. Ekkor a $[0,110]$ intervallumon $u''' > 0$, de $\left(-\frac{u''(x)}{u'(x)}\right)' > 0$. Analitikus módszerekkel nem tudtam erre az esetre semmit sem mondani, ezért szerepel ez a példa itt.

Válasszuk az eladó vagyonát most is 20-nak! A termékért 10 egységnél többet senki sem hajlandó adni, a rezervációs árak eloszlása egyenletes a $[0,10]$ intervallumon. Az optimális árat 1-9-szereplős piac esetén a 11. táblázat mutatja. Látható, hogy az árak ebben az esetben is csökkenek.

A vizsgálatokat elvégeztem két további hasznosságfüggvény esetén is. Ez a két hasznosságfüggvény biztosítási piacok esetén fog fontos szerepet játszani. A

Piac nagysága	Optimális ár
1	4,870
2	4,870
3	4,870
4	4,860
5	4,860
6	4,860
7	4,850
8	4,850
9	4,640

$u(x) = -(x-120)^3$; $C = 20$; $\overline{P} = 10$; $\frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$

11. táblázat.

12.-14. táblázatokban a hasznosságfüggvény

$$u(x) = -e^{-(x-\alpha)} + \beta x, \tag{122}$$

ahol $\beta > 0$. Ez a hasznosságfüggvény ismerős számunkra az 5. fejezetből[26]. Tudjuk, hogy ez a hasznosságfüggvény egy olyan egyén preferenciáit fejezi ki, akinél a kockázatelutasítás mértéke a vagyon növekedésével csökken.

A másik hasznosságfüggvény az

$$u(x) = -e^{-(x-\alpha)} - e^{-\beta(x-\alpha)},$$

ahol $\beta > 0$. Ezen típusú hasznosságfüggvények esetén a kockázatelutasítás mértéke csökken a vagyon növekedésével.

A 12. táblázatban az eddigiekhez hasonlóan megállapíthatjuk, hogy az egy- és 100-szereplős piac optimális árának aránya annál nagyobb, minél nagyobb P értéke.

[26]Az 5. fejezetben az $u(x) = -e^{-x} + x$ hasznosságfüggvényt használtam. A (122) képlet ennek a hasznosságfüggvénynek az általánosítása.

Piac nagysága	$\overline{P}=1$	$\overline{P}=2$	$\overline{P}=5$	$\overline{P}=10$	$\overline{P}=20$	$\overline{P}=100$
1	0,443	0,792	1,51	2,19	2,94	4,9
2	0,443	0,794	1,515	2,23	3,16	20,1
3	0,443	0,794	1,53	2,36	4,26	33,4
4	0,443	0,796	1,56	2,73	6,02	40,3
5	0,443	0,796	1,62	3,31	7,34	44,3
10	0,444	0,822	2,28	4,8	9,76	49,7
20	0,455	0,976	2,5	5	9,76	50
30	0,484	1	2,5	5	10	50
40	0,498	1	2,5	5	10	50
50	0,5	1	2,5	5	10	50
100	0,5	1	2,5	5	10	50

$u(x) = -e^{-(x-105)} + \frac{x}{2}$; $C = 100$; $V(P) = \frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$

12. táblázat.

A 13. táblázatban azt láthatjuk, hogy az eddigiektől eltérően az egy- és 100-szereplős piac optimális árának aránya nem csak $\overline{P}$ és C arányától függ, hanem C értékétől is. Nagy vagy kicsi C érték esetén az optimális ár nem változik különböző létszámú piacokon.

A 14. táblázat adatai alapján most is azt állapíthatjuk meg, hogy minél inkább a 0 körül tömörülnek a rezervációs árak, annál kisebb részét teszi ki az egyszereplős piac optimális ára a 100-szereplős piac optimális árának.

A 15.-17. táblázatok esetén a hasznosságfüggvény különbözik, de a táblázatokból levonható következtetések megegyeznek a 12.-14. táblázatokból levonhatókkal, azzal az egy különbséggel, hogy a 17. táblázat szerint az egy- és 100-szereplős piac optimális árának arányát nem befolyásolja lényegesen, hogy a rezervációs árak mennyire tömörülnek a 0 körül, sőt ez az arány egy ideig még csökken is, ahogy a rezervációs árak elkezdenek a 0 körül tömörülni.

Piac nagysága	$C=2$ $\overline{P}=1$	$C=4$ $\overline{P}=2$	$C=10$ $\overline{P}=5$	$C=20$ $\overline{P}=10$	$C=100$ $\overline{P}=50$	$C=200$ $\overline{P}=100$
1	0,443	0,792	1,505	2,180	4,000	50,000
2	0,443	0,792	1,505	2,180	6,550	50,000
3	0,443	0,792	1,505	2,180	13,750	50,000
4	0,443	0,792	1,505	2,180	18,050	50,000
5	0,443	0,792	1,505	2,180	20,650	50,000
10	0,443	0,792	1,505	2,180	24,750	50,000
20	0,443	0,792	1,505	2,180	25,000	50,000
30	0,443	0,792	1,505	2,180	25,000	50,000
40	0,443	0,792	1,505	2,180	25,000	50,000
50	0,443	0,792	1,505	2,180	25,000	50,000
100	0,443	0,792	1,505	4,140	25,000	50,000

$u(x) = -e^{-(x-105)} + \frac{x}{2}$; $V(P) = \frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$

13. táblázat.

Piac nagysága	$V(P) = \left(\frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}\right)^{\alpha}$					
	$\alpha=1$	$\alpha=2$	$\alpha=3$	$\alpha=4$	$\alpha=5$	$\alpha=6$
1	4	3,25	2,85	2,6	2,4	2,2
2	6,55	3,7	3,05	2,7	2,45	2,25
3	13,75	6,25	4	3,1	2,65	2,4
4	18,05	9,25	5,85	4,25	3,35	2,8
5	20,65	11,4	7,55	5,5	4,3	3,5
10	24,75	15,95	11,55	8,95	7,3	6,1
20	25	16,65	12,5	10	8,3	7,15
30	25	16,65	12,5	10	8,3	7,15
40	25	16,65	12,5	10	8,3	7,15
50	25	16,65	12,5	10	8,3	7,15
100	25	16,65	12,5	10	8,3	7,15

$u(x) = -e^{-(x-105)} + \frac{x}{2}$; $C = 100$; $\overline{P} = 50$

14. táblázat.

Piac nagysága	$\overline{P}=1$	$\overline{P}=2$	$\overline{P}=5$	$\overline{P}=10$	$\overline{P}=20$	$\overline{P}=100$
1	0,446	0,804	1,575	2,4	3,6	18,6
2	0,446	0,81	1,64	2,81	5,48	23,4
3	0,448	0,816	1,755	3,4	6,84	25,7
4	0,448	0,826	1,91	3,87	7,62	27
5	0,449	0,838	2,055	4,18	8,1	27,9
10	0,458	0,922	2,385	4,67	8,8	29,7
20	0,484	0,984	2,425	4,7	8,8	30
30	0,495	0,988	2,425	4,7	8,86	30
40	0,497	0,988	2,425	4,7	8,86	30
50	0,497	0,988	2,425	4,7	8,86	30
100	0,497	0,988	2,425	4,7	8,86	30

$u(x) = -e^{-(x-100)} - e^{-0,05(x-100)}$; $C = 100$; $V(P) = \frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$

15. táblázat.

Piac nagysága	$C=2$ $\overline{P}=1$	$C=4$ $\overline{P}=2$	$C=10$ $\overline{P}=5$	$C=20$ $\overline{P}=10$	$C=100$ $\overline{P}=50$	$C=200$ $\overline{P}=100$
1	0,443	0,792	1,505	2,18	8,65	30,1
2	0,443	0,792	1,505	2,18	13,65	30,1
3	0,443	0,792	1,505	2,18	15,6	30,1
4	0,443	0,792	1,505	2,18	16,7	30,1
5	0,443	0,792	1,505	2,18	17,45	30,1
10	0,443	0,792	1,505	2,18	18,65	30,1
20	0,443	0,792	1,505	2,18	18,8	30,1
30	0,443	0,792	1,505	2,18	18,8	30,1
40	0,443	0,792	1,505	2,18	18,8	30,1
50	0,443	0,792	1,505	2,18	18,8	30,1
100	0,443	0,792	1,505	3,92	18,8	30,1

$u(x) = -e^{-(x-100)} - e^{-0,05(x-100)}$; $V(P) = \frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}$

16. táblázat.

Piac nagysága	$V(P)=\left(\frac{\overline{P}-P}{\overline{P}}\right)^{\alpha}$					
	$\alpha=1$	$\alpha=2$	$\alpha=3$	$\alpha=4$	$\alpha=5$	$\alpha=6$
1	8,65	4,4	3,5	3	2,7	2,45
2	13,65	7,95	5,4	4,15	3,4	2,95
3	15,6	9,85	7,1	5,45	4,45	3,75
4	16,7	10,95	8,1	6,4	5,25	4,45
5	17,45	11,65	8,75	7	5,8	4,95
10	18,65	12,9	10	8,2	6,95	6
20	18,8	13,1	10,2	8,4	7,15	6,2
30	18,8	13,1	10,2	8,4	7,15	6,2
40	18,8	13,1	10,2	8,4	7,15	6,2
50	18,8	13,1	10,2	8,4	7,15	6,2
100	18,8	13,1	10,2	8,4	7,15	6,2

$u(x)=-e^{-(x-100)}-e^{-0{,}05(x-100)}$; $C_0=10$; $\overline{P}=5$

17. táblázat.

6.2. Biztosítási piacok elemzése

Térjünk át ezek után a biztosítási piacok elemzésére. Termékpiacok modellezésénél az eladó nem kerülhetett rosszabb vagyoni helyzetbe, mint induláskor volt. Biztosítási piacok esetén viszont egyes esetekben rosszabb vagyoni helyzetbe is kerülhet az eladó, mint amilyenben induláskor volt. Ennek megfelelően olyan hasznosságfüggvényekkel érdemes dolgozni, amelyek az egész számegyenesen értelmezve vannak. Nem sok olyan elemi függvény létezik, ami konkáv, növekedő és az egész számegyenesen értelmezve van. A vizsgálataimat a termékpiacok elemzésekor már megismert

$$u(x) = -e^{-x} + x \tag{123}$$

és

$$u(x) = -e^{-x} - e^{-0{,}05x} \tag{124}$$

hasznosságfüggvényekkel végzem el. Ezen hasznosságfüggvényeknél problémát jelent, hogy értékük gyorsan (exponenciálisan) nő vagy csökken, így a piaci szereplők számának emelkedésével viszonylag hamar bekövetkezik, hogy az eladó hasznosságát nem tudjuk kiszámolni. Ezt ellensúlyozandó az eladó induló vagyonát 0-nak választottam.

Mielőtt rátérnék a (123) és a (124) hasznosságfüggvényekkel végzett elemzésekre, pár szót szólok arról az esetről, amikor a hasznosságfüggvénynek egy negatív hiperbolát választok. Ezt a függvényt csak pozitív számok esetén lehet hasznosságfüggvényként értelmezni, ezért csak olyan nagyságú piacokat tudok vizsgálni, ahol a kárkifizetés nem haladja meg az eladó induló vagyonát. Az eladó induló vagyonát 1100-nak választottam, a kárkifizetés nagyságát pedig 100-nek. Ekkor maximum 10-szereplős piacokig tudjuk megvizsgálni az eladó viselkedését. A 18. táblázat az optimális árakat mutatja különböző kárbekövetkezési valószínűségek esetén. (Ebben az esetben a $[0, K]$ intervallumot 2000 részre osztottam,

Piac nagysága	q=0,01	q=0,1	q=0,5
1	49,5	54,55	75,9
2	49,5	54,55	75,9
3	49,55	54,55	75,85
4	49,55	54,6	75,85
5	49,55	54,6	75,85
6	49,6	54,6	75,85
7	49,6	54,6	75,85
8	49,6	54,6	75,85
9	49,6	54,6	75,8
10	49,65	54,6	75,8
P^{*pm}	50,5	55	75

$u(x) = -\frac{1}{x}$; $C = 1100$; $K = 100$; $V(P) = \frac{K-P}{K-qK}$

18. táblázat.

az optimális árakban mutatkozó csekély különbségek miatt.)

A 18. táblázatban láthatunk olyan eset is, hogy a „játékosok" számának emelkedésével nő az optimális ár, és olyat is amikor csökken. A táblázat alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy ha q értéke kicsi, akkor nő az optimális ár, ha q értéke nagy, akkor pedig csökken. A másik megállapítás amit tehetünk az az, hogy az optimális árakban mutatkozó különbség csekély. A csekély eltérésnek az az oka, hogy ez a hasznosságfüggvény nem eléggé „kockázatelutasító". Ahhoz, hogy az eltéréseket jobban meg tudjuk vizsgálni, olyan hasznosságfüggvényt kell választani, amelyik nagyobb mértékben kockázatelutasító. Ennek a követelménynek megfelel a (123) és a (124) hasznosságfüggvény, a további vizsgálatokat ezen függvények segítségével végzem el.

A 19. táblázatban az optimális árakban jelentősebb különbségeket találunk, mint a 18. táblázatban. A $(K = 1; q = 0,01)$, a $(K = 1; q = 0,1)$ és a $(K = 5; q = 0,01)$ eset az 5.8. Állítás 1. pontjának felel meg. Látható, hogy az optimális ár nő. A $(K = 1; q = 0,5)$ az 5.8. Állítás 2. pontjának felel meg, ekkor csökken az optimális ár. A $(K = 5; q = 0,1)$ és a $(K = 5; q = 0,5)$ eset pedig a 3. pontnak felel meg, ahol nem tudtuk meghatározni, hogy nő vagy csökken az ár. Látható most is, hogy az egyik esetben nő, a másikban pedig csökken. A $(K = 5; q = 0,5)$ eset még abból a szempontból is érdekes, hogy az 5. fejezetben nem tudtuk meghatározni a biztosító hasznosságának alakulását. Itt a biztosító várható hasznossága végig nő.

A 20. táblázat szintén az optimális árakat mutatja, de a hasznosságfüggvény a (124) kifejezéssel adott. Bizonyos esetekben az optimális árak nőnek, bizonyos esetekben csökkenek a szereplők számának növekedésével.

Piac	$K = 1$			$K = 5$		
nagysága	$q = 0,01$	$q = 0,1$	$q = 0,5$	$q = 0,01$	$q = 0,1$	$q = 0,5$
1	0,482	0,545	0,775	2,42	3,175	4,225
2	0,485	0,545	0,774	2,45	3,15	4,23
3	0,487	0,546	0,773	2,475	3,125	4,23
4	0,49	0,546	0,772	2,495	3,105	4,235
5	0,492	0,547	0,771	2,505	3,085	4,24
10	0,5	0,548	0,768	2,525	3,01	4,255
20	0,504	0,55	0,761	2,525	2,93	4,27
30	0,505	0,55	0,757	2,525	2,895	4,28
40	0,505	0,55	0,754	2,525	2,87	4,285
50	0,505	0,55	0,752	2,525	2,855	4,29
100	0,505	0,55	0,75	2,525	2,815	4,3
P^{*pm}	0,505	0,55	0,75	2,525	2,75	3,75
$\tilde{P}$	0,017	0,158	0,62	0,905	2,755	4,31
P^{*exp}	0,453	0,538	0,801	2,23	3,62	4,63

$u(x) = -e^{-x} + x$; $C = 0$; $V(P) = \frac{K-P}{K-qK}$

19. táblázat.

Az 5. fejezetben nem határoztam meg azokat a K, q párokat, amelyek esetén nő, illetve amelyek esetén csökkent. Ez elemezhető ugyan analitikusan, de fáradságos és nem szemléletes. A 21. táblázat adatai azt mutatják, hogy az adott K, q páros az 5.8. Állítás melyik pontjának felel meg, valamint azt, hogy az optimális ár csökken vagy nő. Az eredményekhez annyi megjegyzést érdemes fűzni, hogy az 1., 2. illetve 3. terület határa nem függ az induló vagyon megválasztásától, de a 3- illetve 3+ terület határa már függ tőle.

Piac nagysága	$K=1$			$K=5$		
	$q=0,01$	$q=0,1$	$q=0,5$	$q=0,01$	$q=0,1$	$q=0,5$
1	0,456	0,539	0,799	2,25	3,57	4,59
2	0,456	0,539	0,799	2,255	3,56	4,585
3	0,457	0,539	0,799	2,27	3,555	4,585
4	0,458	0,539	0,799	2,285	3,545	4,585
5	0,459	0,539	0,798	2,305	3,535	4,585
10	0,467	0,54	0,797	2,42	3,465	4,58
20	0,49	0,544	0,794	2,455	3,3	4,565
30	0,5	0,547	0,789	2,455	3,19	4,555
40	0,502	0,548	0,783	2,455	3,12	4,54
50	0,502	0,549	0,776	2,455	3,075	4,53
100	0,502	0,549	0,755	2,455	2,98	4,485
P^{*pm}	0,505	0,55	0,75	2,525	2,75	3,75

$u(x)=-e^{-x}-e^{-0,05x}$; $C=0$; $V(P)=\frac{K-P}{K-qK}$

20. táblázat.

	$q=$							
$K=$	$0,01$	$0,02$	$0,05$	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$
1	1+	1+	1+	1+	2-	2-	2-	2-
2	1+	1+	1+	2-	2-	2-	2-	2-
3	1+	1+	1+	2-	2-	2-	3-	3-
4	1+	1+	2-	2-	2-	3-	3-	3-
5	1+	2-	2-	3-	3-	3-	3+	3+
6	1+	2-	2-	3-	3=	3+	3+	3+
7	2-	2-	3-	3-	3+	3+	3+	3+
8	2-	3-	3-	3+	3+	3+	3+	3+
9	2-	3-	3-	3+	3+	3+	3+	3+
10	3-	3-	3+	3+	3+	3+	3+	3+

$u(x)=-e^{-(x-105)}+\frac{x}{2}$; $C=100$; $V(P)=\frac{K-P}{K-qK}$

21. táblázat.

6.3. Információ véges sok szereplő alapján

A dolgozat során $V(P)$ függvény származtatásáról nem ejtettem szót. Ennek az az oka, hogy $V(P)$ egyfajta keresleti függvény, amit természetesnek veszünk, hogy a döntéshozó rendelkezésére áll. Most mégis érdemes pár szót szólnom $V(P)$ származtatásáról, mert további elemzések elvégzésére ad lehetőséget.

A (11) és a (82) képletekben a kombinatorikus felírás csak akkor helyes, ha abból, hogy egy érdeklődőnek az eladó értékesítette-e a terméket vagy sem, nem lehet információt levonni egy másik érdeklődővel kapcsolatban, vagyis az eladások függetlenek. A függetlenség a vizsgált modellben nem magától értetődő. Tegyük fel, hogy $V(P)$ függvényt két ember rezervációs ára alapján állítottuk össze. Ekkor ha egy érdeklődő van a piacon, akkor az eladó bizonytalansággal szembesül, de ha már kettő, akkor pontosan tudja hogy adott áron hány ember fog vásárolni. A függetlenség biztosítására több lehetőség adódik: az egyik szerint nincs átfedés azon csoport között, akik rezervációs árát $V(P)$ függvény meghatározásához felhasználták, és azok között, akiknek az eladó értékesíti a termékét; egy másik lehetőség szerint végtelensok személy információja alapján állítják össze $V(P)$ függvényt. Az első lehetőség úgy interpretálható, hogy külföldi tapasztalatokat használnak fel Magyarországon, ami a biztosítási piacon sokszor előfordul. A másik lehetőség úgy interpretálható, hogy a biztosító lehetséges vevőinek száma elenyésző az információ alapjául szolgáló közösség létszámához képest; pl.: az eladó monopóliummal rendelkezik valamelyik megyében, de csak országos statisztikák állnak rendelkezésre.

Ha az információt adó közösséget csak végessok szereplő alkotja (számukat jelöljük N-nel) és ennek a körnek (vagy egy részének) szeretné a biztosító a termékét értékesíteni, akkor az a valószínűség, hogy az eladó P ár és n-szereplős piac esetén k személynek tudja értékesíteni a terméket a következő módon határozható meg:

$$Pr(N,n,k,P) = \frac{\binom{N-l(P)}{k}\binom{l(P)}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \tag{125}$$

ahol $l(P)$ függvény megadja, hogy a rezervációs ár hány ember esetében kisebb, mint P. A (125) képletben $\binom{l}{m} = 0$ ha $m > l$.

Felhasználva a (125) kifejezést az eladó várható hasznosságát ebben az új helyzetben is fel tudjuk írni:

$$U(C, P, N, n) = \sum_{k=0}^{n} \left(Pr(N, n, k, P) u(C + kP)\right), \tag{126}$$

$$\begin{aligned} &U_{ins}(C, P, N, n) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[Pr(N, n, k, P) \sum_{l=0}^{k} \left(\binom{k}{l} q^l (1-q)^{k-l} u(C + kP - lK) \right) \right]. \end{aligned} \tag{127}$$

A 22. és 23. táblázatokban olyan eseteket vizsgálok, ahol az információ alapjául szolgáló közösség létszáma véges. A rezervációs árakról most is azt tételezem fel, hogy egyenletes eloszlásúak a lehetséges intervallumon. Ekkor termékpiacok esetén:

$$l(P) = \left[\frac{NP}{\overline{P}} \right],$$

ahol $[x]$ az x szám egész részét jelöli. Biztosítási piacok esetén pedig:

$$l(P) = \left[\frac{NP}{K - qK} \right],$$

ahol $[x]$ az x szám egész részét jelöli.

A 22. táblázatban azt vizsgálom, hogy termékpiacok esetén az optimális árat hogyan befolyásolja az a tény, hogy az információ alapjául szolgáló közösség létszáma véges. A táblázatban az $N = \infty$ kifejezés azt jelenti, hogy a közösség létszáma végtelensok, ekkor a (11) és a (82) kombinatorikus felírás helyes. Ide került összehasonlítás végett a 7. táblázat 6. oszlopa.

A 22. táblázatban látható, hogy az a tény, hogy az információ alapjául szol-

Piac nagysága	$N = 100$	$N = 200$	$N = 500$	$N = 1000$	$N = \infty$
1	41	41,5	41,4	41,4	41,4
2	42	42,5	42,2	42,3	42,3
3	43	43	43	43	43
4	44	43,5	43,6	43,7	43,6
5	44	44,5	44,2	44,2	44,2
10	46	46,5	46,2	46,2	46,1
20	48	48	47,8	47,8	47,8
30	49	48,5	48,6	48,5	48,5
40	49	49	49	48,9	48,8
50	50	49,5	49,2	49,1	49
100	50	50	49,6	49,6	49,5

$u(x) = -\frac{1}{x}$; $C = 100$; $\overline{P} = 100$

22. táblázat.

gáló közösség létszáma véges, alapjaiban nem változtatja meg a 3. fejezetben tett megállapításunkat, sőt meglehetősen hasonló eredményt kapunk, mint $N = \infty$ esetén.

A 23. táblázatban biztosítási piac esetén vizsgálom, hogy az információ alapjául szolgáló közösség végessége hogyan befolyásolja a hasznosságmaximalizáló árakat. Az $N = \infty$ kifejezés most is azt jelenti, hogy az információ alapjául szolgáló közösség létszáma végtelen. Itt a 19. táblázat 5. oszlopa most is csak összehasonlítás végett szerepel.

A 23. táblázat alapján is ugyanaz látható, mint termékpiac esetén: az a tény, hogy az információ alapjául szolgáló közösség létszáma véges alapjaiban nem változtatja meg a 4. és az 5. fejezetben tett megállapításunkat, sőt meglehetősen hasonló eredményt kapunk, mint $N = \infty$ esetén. Biztosítási piac esetén a két eset még kevésbé tér el, mint termékpiac esetén.

Piac nagysága	$N = 100$	$N = 200$	$N = 500$	$N = 1000$	$N = \infty$
1	3,155	3,1775	3,173	3,1775	3,175
2	3,155	3,155	3,146	3,1505	3,15
3	3,11	3,1325	3,128	3,1235	3,125
4	3,11	3,11	3,101	3,101	3,105
5	3,065	3,0875	3,083	3,083	3,085
10	3,02	3,02	3,011	3,011	3,01
20	2,93	2,93	2,93	2,93	2,93
30	2,885	2,885	2,894	2,894	2,895
40	2,885	2,8625	2,867	2,867	2,87
50	2,84	3,8625	2,849	2,8535	2,855
100	2,795	2,8175	2,813	2,813	2,815

$u(x) = -e^{-x} + x$; $C = 0$; $K = 5$; $q = 0.1$

23. táblázat.

7. Továbblépési lehetőségek

A dolgozat végén szeretném összefoglalni azokat az irányokat, amelyek felé a kutatásokat tovább lehet vinni.

Legelőször azt említem meg, ami a dolgozatban is szóba került. Jó lenne, ha $U(C, P, n)$ függvény kvázikonkavitására értelmes feltételt sikerülne találni.

Biztosítási piacok esetén meg lehetne próbálni megfogalmazni és bebizonyítani a 4. fejezetben megtalálható állításokat arra az esetre is, ha a biztosító által fizetett összeg valószínűségi változóval adott.

A 4. fejezetben vizsgált modell esetében a biztosító nem tudott változtatni a biztosítási szerződésen, csak az áron. Ez alatt azt értem, hogy kár bekövetkeztekor K összeget fizet a biztosítottnak. A biztosítás modern felfogása esetén a biztosító és biztosított osztozkodik a kockázaton. Nagyon izgalmas kérdésnek tartom annak vizsgálatát, hogy ha azt vizsgáljuk, változik-e az osztozkodás módja, és ha igen hogyan, ha növekszik a szereplők száma.

Vizsgálni lehet azt is, hogy változnak-e megállapításaink, ha a kárbekövetekezési valószínűség esetében is aszimmetrikus informáltságot teszünk fel. Ehhez kapcsolódóan az erkölcsi kockázat (moral hazard) kérdését is meg lehet vizsgálni.

Természetesen a legfontosabb kérdések egyike, hogy versenyhelyzetben hogyan módosulnak a megállapítások.

Hivatkozások

[1] Alarie, Yves; Dionne Geroges and Eeckhoudt Louis *Increases in Risk and the Demand for Insurance*, in *Contribution to insurance Economics* edited by Georges Dionne, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 1992.

[2] Arnott, Richard J., *Moral Hazard and Competitive Insurance Markets*, in *Contribution to insurance Economics* edited by Georges Dionne, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 1992.

[3] Arrow, Kenneth J., *Le Rôle Des Valeurs Boursieres pour la Répartition la Meilleure des Risques (The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing* International Colloquium on Econometrics, 1952, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953.

[4] Borch, Karl *Equilibrium in a Reinsurance Market*, Econometrica, 1962.

[5] Dionne, George (editor), *Handbook of Insurance*, Kluwer Academic Publisher, Boston, Dordrecht, London, 2000.

[6] Dionne, Georges and Doherty, Neil, *Adverse Selection in Insurance Markets: A Selective Survey*, in *Contribution to insurance Economics* edited by Georges Dionne, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 1992.

[7] Eeckhoudt, Louis and Kimball, Miles, *Background Risk, Prudence, and the Demand for Insurance*, in *Contribution to insurance Economics* edited by Georges Dionne, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 1992.

[8] Ehrlich, Isaac and Becker, Garry *Market Insurance, Self-Insurance and Self-Protection*, Journal of Political Economy, 1972.

[9] Gollier, Christian, *Economic Theory of Risk Exchanges: A Rewiew*, in *Contribution to insurance Economics* edited by Georges Dionne, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 1992.

[10] Grossman, Sanford J. and Hart, Oliver D.,*An Analysis of the Principal-Agent Problem*, Econometrica, 1992.

[11] Kliger, Doron and Levikson, Benny, *Pricing Insurance Contracts - an Economic Viewpoint*, Insurance: Mathematics and Economics, 1998.

[12] Machina, Mark J.: *"Expected Utility" Analysis without the Independence Axiom*, Econometrica, 1982.

[13] Mossin, Jan, *Aspect of Rational Insurance Purchasing*, Journal of Political Economy, 1968.

[14] Petrov, V. V., *Független valószínűségi változók összegei* (oroszul), Nauka, Moszkva, 1972.

[15] Pratt, John W, *Risk Aversion in the Small and in the Large*, Econometrica, 1964.

[16] Raviv, Arthur *The Design of an Optimal Insurance Policy*, American Economic Review, 1979.

[17] Rotchild, Micheal and Stiglitz, Joseph E., *Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the the Economics of Imperfect Information*, Quarterly Journal of Economics, 1976.

[18] Shavell, Steven *On Moral Hazard and Insurance*, Quarterly Journal of Economics, 1979.

[19] Sinn, Hans-Werner, *Economic Decisions Under Uncertainty*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1983.

[20] Shirayev, A. N., *Probability*, Spinger-Verlag, 1984.

[21] Winter, Ralph A., *Moral Hazard and Insurance Contracts*, in *Contribution to insurance Economics* edited by Georges Dionne, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 1992.