

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Caracterización dinámica y optimización de una guitarra española

Autor: José María Gamero Alonso

Tutor: Antonio Martínez de la Concha

**Departamento de Mecánica de Medios
Continuos y Teoría de Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2020



Trabajo de Fin de Grado
Grado en Ingeniería en las Tecnologías Industriales

Caracterización dinámica y optimización de una guitarra española

Autor:

José María Gamero Alonso

Tutor:

Antonio Martínez de la Concha

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructura

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Trabajo Fin de Grado: Caracterización dinámica y optimización de una guitarra española

Autor: José María Gamero Alonso

Tutor: Antonio Martínez de la Concha

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El secretario del Tribunal

A los que confiaron en mi

A los que me apoyaron

Agradecimientos

En primer lugar, agradecer a los profesores del departamento de estructuras la ilusión y las ganas transmitidas por las cuales me siento más que motivado para seguir desarrollándome en el campo de las estructuras.

Agradecimientos a Fernando Medina por las charlas que hemos mantenido y por toda la ayuda y consejos recibidos, sin los cuales no hubiera elegido el camino de las estructuras.

A Antonio Martínez, tutor del trabajo, agradecer el haberse embarcado e implicado en un trabajo con un tema un tanto descabellado y propuesto por mí. Agradecer su paciencia, su interés y sobre todo la facilidad y la estrecha distancia a la hora de hablar y tratar con él, lo cual considero algo de gran importancia.

Por último, agradecer a mis abuelos, padres, hermana y novia el incondicional apoyo tanto económico como moral a lo largo de todos mis estudios y en general de mi vida. Por todo ello, simplemente gracias.

José María Gamero Alonso

Sevilla, 2020

Resumen

En este documento se aborda el estudio de la tapa armónica de la guitarra española, que es la parte de la guitarra donde se produce prácticamente toda la sonoridad de la guitarra y el principal objeto de estudio de los luthiers.

El estudio de la tapa se realizará mediante el software de elementos finitos Abaqus. Se construirán varios modelos donde se estudiará el comportamiento de las cuerdas que posteriormente será introducido en el modelo de la tapa. En el estudio de la tapa se estudiará el modelo clásico de Torres, donde se estudiará el funcionamiento de la guitarra y posteriormente se buscará un modelo que optimice el modelo de Torres.

Abstract

This document deals with the study of the soundboard of the Spanish guitar, which is the part of the guitar where practically all the sound of the guitar is produced and the main object of study by luthiers.

The study of the soundboard will be carried out using the Abaqus finite element software. Several models will be built where the behavior of the ropes will be studied, which will later be introduced in the model of the cover. In the study of the cover, the classical model of Torres will be studied, where the operation of the guitar will be studied and later a model that optimizes the model of Torres will be found.

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	xv
Índice de Tablas	xvii
Índice de Figuras	xix
Notación	xxi
1 Introducción	12
1.1 <i>Terminología y partes de la guitarra</i>	12
1.1.1 Exterior de la guitarra	12
1.1.2 Interior de la tapa	13
1.2 <i>Reseña Histórica</i>	14
1.2.1 Del primer cordófono a la vihuela	14
1.2.2 La guitarra barroca	15
1.2.3 La guitarra romántica	16
1.2.4 La guitarra de Torres	17
1.3 <i>Objetivo y motivación</i>	18
1.4 <i>Hipótesis</i>	18
1.4.1 Hipótesis 1	18
1.4.2 Hipótesis 2	18
2 Teoría empleada	20
2.1 <i>Análisis modal</i>	20
2.2 <i>Análisis dinámico transitorio</i>	21
2.3 <i>Teoría del criterio de rotura para materiales anisótropos de Tsai Hill</i>	22
3 Estudio de las cuerdas	24
3.1 <i>Fundamentos de teoría musical</i>	24
3.2 <i>Propiedades de las cuerdas</i>	26
3.3 <i>Modelo MEF</i>	27
3.3.1 Obtención del modulo de elasticidad	27
3.3.2 Cálculo de las reacciones dinámicas	27
3.4 <i>Análisis de sensibilidad</i>	28
3.4.1 Sensibilidad respecto a los elementos	28
3.4.2 Sensibilidad respecto al paso de integración	30
3.5 <i>Resultados</i>	31
3.5.1 Reacciones longitudinales	31
3.5.2 Reacciones transversales paralelas a la tapa	34
3.5.3 Reacciones transversales normales a la tapa	37
4 Estudio de la tapa	40
4.1 <i>Propiedades del material</i>	40
4.2 <i>Medidas y direcciones</i>	41

4.2.1	Barras armónicas	41
4.2.2	Refuerzos	42
4.2.3	Contrarroseta	42
4.3	<i>Condiciones de contorno</i>	43
4.4	<i>Fuerzas</i>	44
4.5	<i>Resultados y optimización</i>	45
4.5.1	Modelo preliminar	46
4.5.2	Modelo sin refuerzos	48
4.5.3	Modelo óptimo	49
4.6	<i>Conclusiones de la tapa</i>	52
5	Constatación de resultados	54
5.1	<i>Silencio</i>	54
5.2	<i>Exenta</i>	55
5.3	<i>Guitarra</i>	57
5.4	<i>Validación primera hipótesis</i>	58
5.5	<i>Validación segunda hipótesis</i>	59
6	Conclusiones	62
7	Ampliación y estudios futuros	63
	Referencias	65

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2–1. Tabla de nomenclatura de elementos.	13
Tabla 3–1. Tabla de frecuencias de las notas musicales.	25
Tabla 3–2. Tabla de frecuencias de vibración natural de las cuerdas al aire.	25
Tabla 3–3. Tabla de propiedades de las cuerdas dadas por el fabricante D’Addario.	26
Tabla 3–4. Tabla de propiedades de las cuerdas obtenidas mediante la fórmula del fabricante D’Addario.	26
Tabla 3–5. Tabla de fuerza y módulo de elasticidad.	27
Tabla 4–1. Tabla de propiedades mecánicas de las maderas empleadas.	40
Tabla 4–2. Tabla valores característicos de rotura del pinoabeto alemán.	40
Tabla 4–3. Tabla geometrías de los elementos del modelo preliminar.	46
Tabla 4–4. Tabla de geometrías de los elementos del modelo óptimo.	50
Tabla 4–5. Tabla comparación de tensiones máximas de los distintos modelos.	52

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1. Partes exteriores de la guitarra española.	12
Figura 1-2. Partes exteriores de la guitarra española.	13
Figura 1-3. Foto vihuela	14
Figura 1-4. Foto y plano de armado de guitarra barroca.	15
Figura 1-5. Foto y esquema de armado de la guitarra romántica.	16
Figura 1-6. Foto y esquema de armado de la guitarra de Torres.	17
Figura 2-1. Teoría de Tsai Hill vs teoría de la máxima tensión.	22
Figura 3-1. Esquema del modelo empleado.	27
Figura 3-2. Reacción longitudinal para 13 y 65 elementos con paso de $1E-4$.	28
Figura 3-3. Reacción longitudinal para 65 y 130 elementos con paso de $1E-4$.	29
Figura 3-4. Reacción longitudinal para pasos de $1E-4$ y $1E-5$ con 65 elementos.	30
Figura 3-5. Reacción longitudinal para pasos de $1E-5$ y $1E-6$ con 65 elementos.	30
Figura 3-6. Reacción longitudinal primera cuerda.	31
Figura 3-7. Reacción longitudinal segunda cuerda.	31
Figura 3-8. Reacción longitudinal tercera cuerda.	32
Figura 3-9. Reacción longitudinal cuarta cuerda.	32
Figura 3-10. Reacción longitudinal quinta cuerda.	33
Figura 3-11. Reacción longitudinal sexta cuerda.	33
Figura 3-12. Reacción transversal paralela a la tapa primera cuerda.	34
Figura 3-13. Reacción transversal paralela a la tapa segunda cuerda.	34
Figura 3-14. Reacción transversal paralela a la tapa tercera cuerda.	35
Figura 3-15. Reacción transversal paralela a la tapa cuarta cuerda.	35
Figura 3-16. Reacción transversal paralela a la tapa quinta cuerda.	36
Figura 3-17. Reacción transversal paralela a la tapa sexta cuerda.	36
Figura 3-18. Reacción transversal normal a la tapa primera cuerda.	37
Figura 4-1. Geometría, definición de cotas y direcciones del material de las barras armónicas.	41
Figura 4-2. Geometría, definición de cotas y direcciones del material de los refuerzos.	42
Figura 4-3. Geometría, definición de cotas y direcciones del material de las contrarrosetas.	42
Figura 4-4. Detalle de unión de la tapa y el aro.	43
Figura 4-5. Elementos de unión entre tapa y aros.	43
Figura 4-6. Esquema de fuerzas en el modelo para el caso estático.	44
Figura 4-7. Esquema de fuerzas en el modelo para el caso dinámico.	44
Figura 4-8. Esquema de la zona donde se estudiarán los resultados.	45
Figura 4-9. Esquema de armado y direcciones del material en el modelo preliminar.	46

Figura 4-10. Variación de energía cinética en el modelo preliminar.	47
Figura 4-11. Máximos valores del criterio de Tsai Hill durante el ensayo dinámico en el modelo preliminar.	47
Figura 4-12. Variación de energía cinética en el modelo sin armar.	48
Figura 4-13. Máximos valores del criterio de Tsai Hill durante el ensayo dinámico en el modelo sin armar.	48
Figura 4-14. Esquema de armado y direcciones del material en el modelo óptimo.	49
Figura 4-15. Esquema de la contraroseta y direcciones del material en el modelo óptimo.	49
Figura 4-16. Variación de energía cinética en el modelo óptimo.	50
Figura 4-17. Máximos valores del criterio de Tsai Hill durante el ensayo dinámico en el modelo óptimo.	51
Figura 5-1. Medición acústica del silencio.	54
Figura 5-2. Instrumento para medir el sonido de la cuerda exenta.	55
Figura 5-3. Disposición del ensayo de la cuerda exenta.	55
Figura 5-4. Medición acústica de la cuerda exenta.	56
Figura 5-5. Disposición del ensayo de la cuerda en la guitarra.	57
Figura 5-6. Medición acústica de la cuerda en la guitarra.	57
Figura 5-7. Disposición del ensayo para la validación de la primera hipótesis.	58
Figura 5-8. Medición acústica para la validación de la primera hipótesis.	59

Notación

φ	Desfase angular.
ω	Frecuencia.
U	Amplitud de desplazamientos.
\ddot{u}	Aceleración.
\dot{u}	Velocidad.
u	Desplazamiento.
M	Matriz de masa.
K	Matriz de rigidez.
\det	Determinante.
σ	Tensión.
I_f	Índice de fallo.
μ	Masa por unidad de longitud.
ρ	Densidad.
T	Pretensión de la cuerda.
E	Módulo de Young o de rigidez.
G	Módulo cortante.
ν	Coefficiente de Poisson.

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Terminología y partes de la guitarra

1.1.1 Exterior de la guitarra



Figura 1-1. Partes exteriores de la guitarra española.

1.1.2 Interior de la tapa

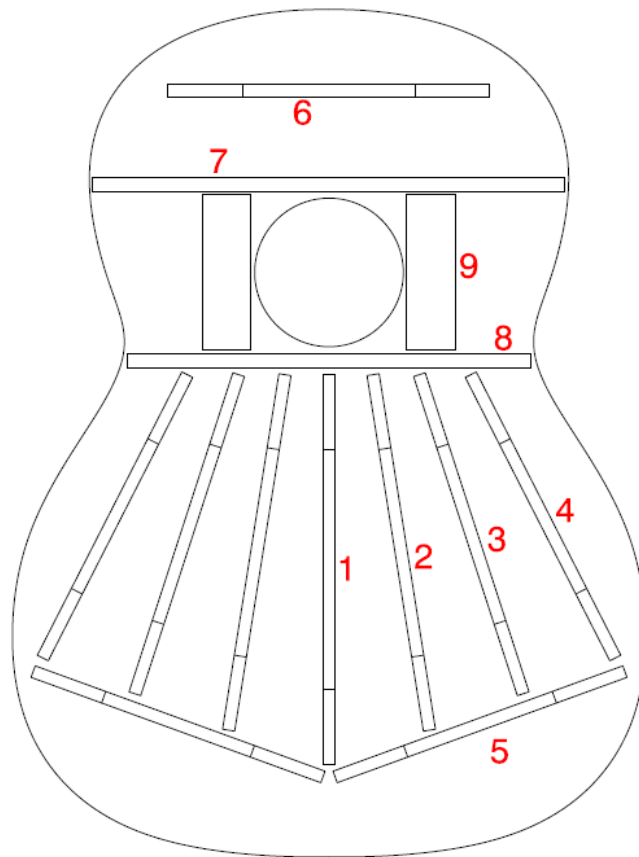


Figura 1-2. Partes exteriores de la guitarra española.

ELEMENTO	NOMBRE
1	Barra armónica 1
2	Barra armónica 2
3	Barra armónica 3
4	Barra armónica 4
5	Barra armónica 5
6	Barra armónica 6
7	Refuerzo 1
8	Refuerzo 2
9	Contrarroseta

Tabla 2-1. Tabla de nomenclatura de elementos.

En este modelo de tapa habrá simetría de los elementos con respecto a su longitud principal.

1.2 Reseña Histórica

1.2.1 Del primer cordófono a la vihuela

La Guitarra pertenece a la familia de los cordófonos (instrumentos de cuerda). Esta familia de instrumentos surgió en Mesopotamia aproximadamente en el 2500 a.C con la aparición de la lira sumeria. Este instrumento evoluciona según dos corrientes culturales, la grecolatina y la arabigoafricana.

Estas dos corrientes tienen su unión en España durante la conquista musulmana y la reconquista cristiana, es entonces cuando los dos cordófonos populares de la época que eran unos laudes primitivos acabaron dando lugar a la vihuela, que es considerada como la principal antecesora de la guitarra actual.

La vihuela es un cordófono que surge en el SXIV con seis pares de cuerdas y una caja de resonancia que ya empieza a adoptar forma de ocho.



Figura 1-3. Foto vihuela

1.2.2 La guitarra barroca

En el SXVII aparece la primera guitarra, la guitarra barroca. Se trata de un cordófono con cinco pares de cuerdas. La tapa de esta guitarra esta armada con barras de madera con el fin de que no se produzca la rotura de la lámina que conforma la tapa por la tensión de las cuerdas.

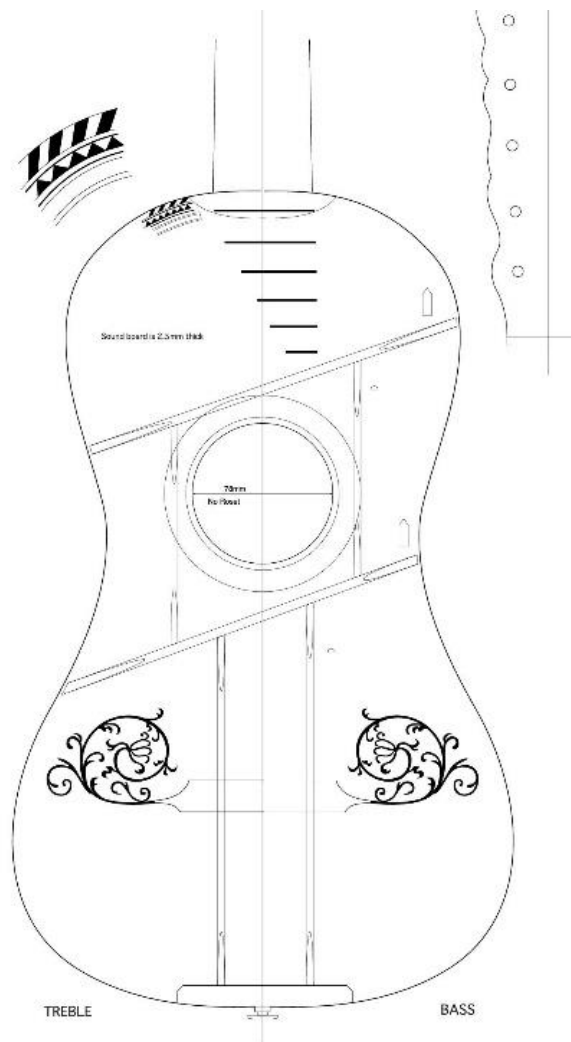


Figura 1-4. Foto y plano de armado de guitarra barroca.

1.2.3 La guitarra romántica

En el SXVIII surge la guitarra romántica, en la cual se acentúa la forma de ocho de la caja de resonancia, en la que se disponen seis cuerdas simples y se le da la afinación actual. Al igual que la guitarra barroca la tapa esta también armada con barras de madera para evitar la rotura de la lámina.

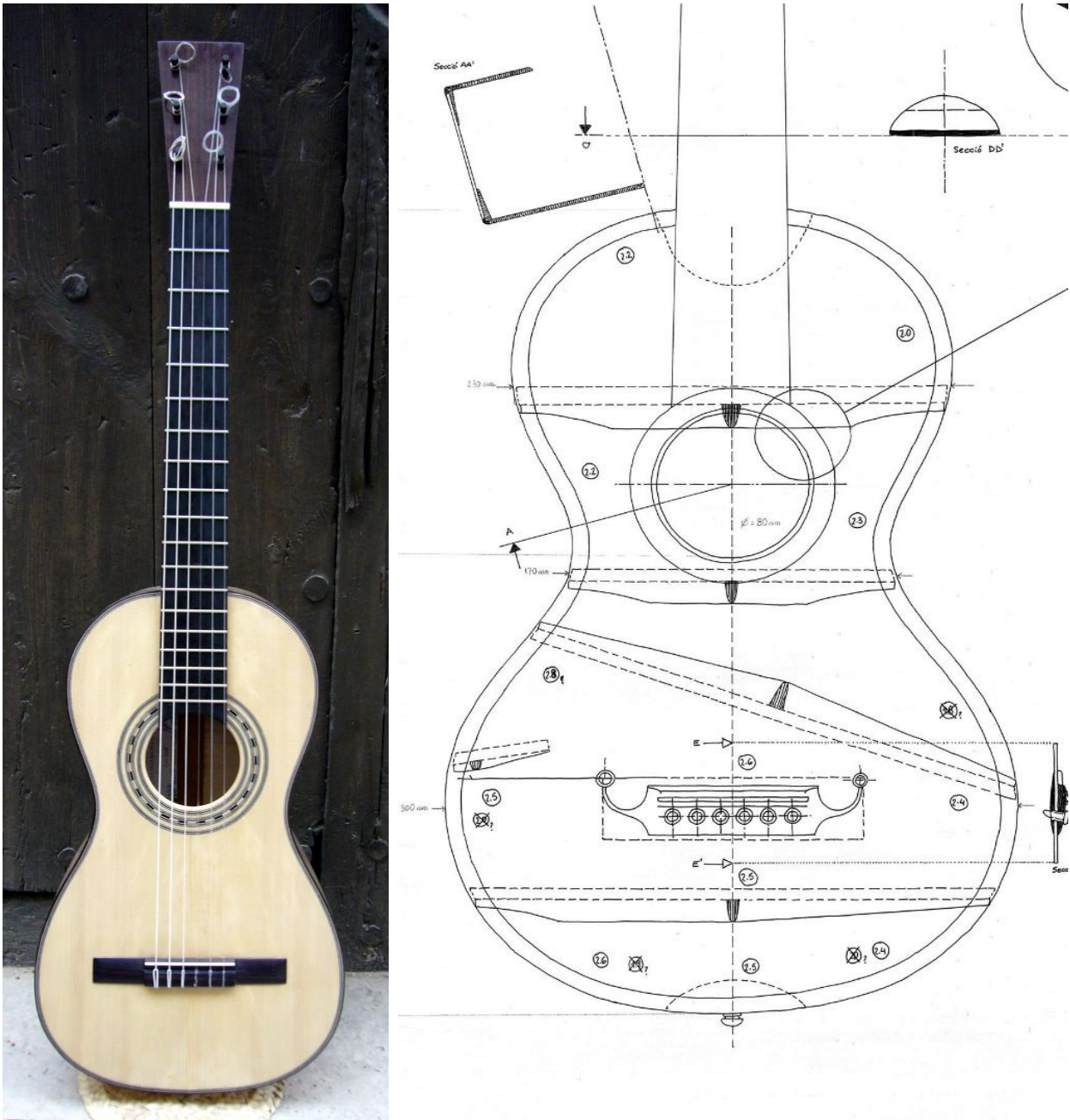


Figura 1-5. Foto y esquema de armado de la guitarra romántica.

1.2.4 La guitarra de Torres

En el SXIX es cuando Antonio de Torres modifica por completo tanto la forma de la guitarra como la filosofía del armado de la tapa. Torres hace una caja de resonancia bastante más grande con una lámina más fina para la tapa y revoluciona la lutheria rompiendo la manera tradicional de armar la tapa.

El armado consiste en las siguientes barras:

- Refuerzos con un fin puramente resistente que pretenden reforzar la zona de la boca.
- Contrarrosetas para compensar la resistencia que se pierde al insertar la roseta.
- Barras armónicas dispuestas en forma de abanico cuya utilidad es reforzar la tapa y optimizar la vibración de la tapa.

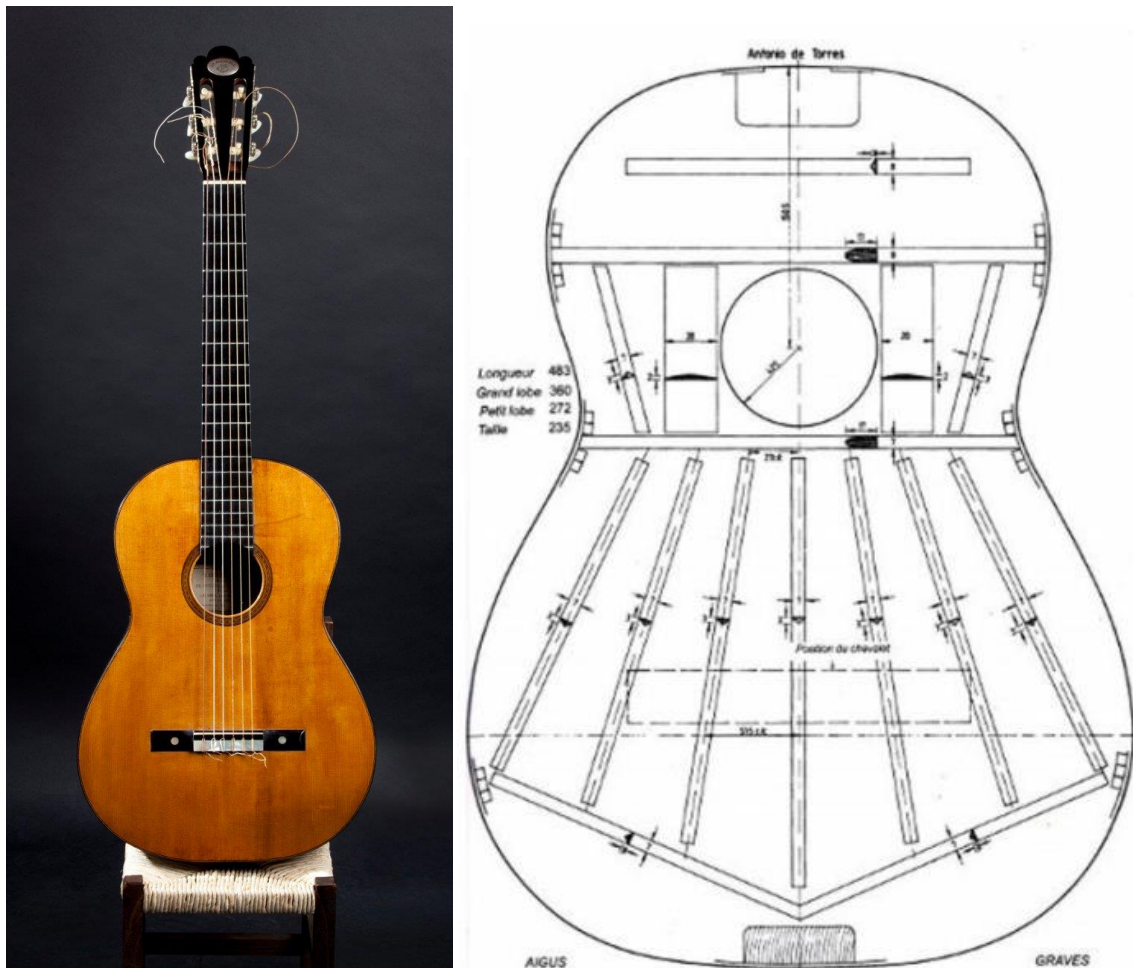


Figura 1-6. Foto y esquema de armado de la guitarra de Torres.

El triunfo del modelo Torres se debe a la mayor capacidad vibratoria que da el aumento del área de la caja de resonancia y la reducción del espesor de la tapa, junto con el control de la vibración con la disposición y la forma de las barras armónicas

1.3 Objetivo y motivación

Teniendo en cuenta la reseña histórica anteriormente descrita, el objetivo de este trabajo es continuar con la evolución histórica de la guitarra. Por lo tanto, se estudiará la tapa armónica de la guitarra mediante un modelo de elementos finitos partiendo de un diseño tipo Torres y actualizando ese diseño para conseguir comprender como funciona mecánicamente la guitarra y obtener un modelo que tenga una mejor respuesta vibratoria.

El primer paso será hacer un estudio de las cuerdas para poder conocer las fuerzas que estas transmiten a la tapa. Se estudiará tanto el caso estático como el caso dinámico.

1.4 Hipótesis

1.4.1 Hipótesis 1

En la guitarra el sonido comienza generándose en la cuerda y esta transmite su energía a la tapa a través del puente. A simple vista, una cuerda tensa que vibra tiene grandes desplazamientos en el sentido transversal de la cuerda, pero para el caso de la guitarra el estudio debe ser el acortamiento y alargamiento longitudinal que sufre la cuerda, pues esto se acaba transmitiendo al puente y este transmite a la tapa movimientos torsionales que toman como centro de giro el eje longitudinal del puente.

1.4.2 Hipótesis 2

En este estudio se busca la optimización de la tapa de la guitarra puesto que es la responsable principal de la calidad sonora de la guitarra, se desprecia en este estudio el resto de la caja de resonancia de la guitarra, puesto que la función de estos componentes es aislar el aire en el interior de la caja para poder amplificar de manera correcta los sonidos más graves. Por lo tanto, solo la tapa basta para amplificar casi en su totalidad los agudos. Este comportamiento se puede ver con mucha claridad en la familia de los instrumentos de arco, desde el violín al contrabajo, en los cuales cuanto más graves son los sonidos producidos por esos instrumentos mayor volumen de aire necesitan encerrar sus cajas de resonancia.

2 TEORÍA EMPLEADA

2.1 Análisis modal

Este análisis permite obtener las frecuencias y modos de vibración de una estructura.

Partiendo de la ecuación de la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(x, t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(x, t) = 0$$

La solución de la ecuación de equilibrio es un movimiento armónico:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{U}(x)\sin(\omega t + \varphi)$$

Donde $\mathbf{U}(x)$ es la amplitud de los desplazamientos, ω es la frecuencia angular y φ es el desfase. La expresión de la aceleración se obtiene mediante la derivación de la ecuación anterior:

$$\ddot{\mathbf{u}}(x, t) = -\omega^2\mathbf{U}(x)\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2\mathbf{u}(x, t)$$

Sustituyendo los desplazamientos en la ecuación de la aceleración:

$$-\omega^2\mathbf{M}\mathbf{U}(x)\sin(\omega t + \varphi) + \mathbf{K}\mathbf{U}(x)\sin(\omega t + \varphi) = 0$$

Omitiendo el término $\sin(\omega t + \varphi)$ quedaría:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{U}(x) = 0$$

La solución de esta ecuación se obtiene al resolver el problema de autovalores y autovectores, donde los autovalores son las frecuencias de vibración ω y los autovectores son las amplitudes del movimiento $\mathbf{U}(x)$. Las soluciones estarán definidas por:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$$

De esta ecuación se obtiene el conjunto de soluciones $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ con N soluciones que son las frecuencias naturales que serán positivas y reales puesto que las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} son reales, simétricas y definidas positivas.

Finalmente, para obtener las amplitudes del movimiento asociadas a cada vibración se obtiene a partir de:

$$\tilde{\mathbf{K}}_i = \mathbf{K} - \omega_i^2\mathbf{M}$$

2.2 Análisis dinámico transitorio

Se usará un método numérico de integración paso a paso. De esta manera la respuesta temporal del sistema se calcula en instantes temporales equiespaciados Δt . Se usará el método de Newmark para la resolución numérica.

Se expresa la ecuación de equilibrio en un paso n+1 como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1}$$

La solución de la ecuación anterior se basa en aproximar la velocidad en n+1 usando integración lineal de las aceleraciones en $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Siendo la generalización del método las expresiones de velocidad y desplazamiento en el tiempo n+1:

$$\begin{aligned}\dot{u}_{n+1} &= \dot{u}_n + \frac{1}{2}((1 - \delta)\ddot{u}_n + \delta\ddot{u}_{n+1})\Delta t \\ u_{n+1} &= u_n + \dot{u}_n\Delta t + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\ddot{u}_n + \alpha\ddot{u}_{n+1}\Delta t^2\end{aligned}$$

Siendo α y δ constantes de integración.

Con la resolución de las ecuaciones se podrán obtener todos los resultados que son necesarios en el modelo.

2.3 Teoría del criterio de rotura para materiales anisótropos de Tsai Hill

El índice de fallo se calcula según la siguiente ecuación.

$$I_F = \frac{\sigma_{11}^2}{X^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{S^2} \leq 1$$

$$\text{Si } \sigma_{11} > 0, X = X_t. \quad \text{Si } \sigma_{11} \leq 0, X = X_c$$

$$\text{Si } \sigma_{22} > 0, Y = Y_t. \quad \text{Si } \sigma_{22} \leq 0, Y = Y_c$$

Con

- X_t mayor tensión de tracción admisible en la dirección 1
- X_c mayor tensión de compresión admisible en la dirección 1
- Y_t mayor tensión de tracción admisible en la dirección 2
- Y_c mayor tensión de compresión admisible en la dirección 2
- S mayor tensión de cortante

Si el índice de fallo es mayor a uno el material fallará.

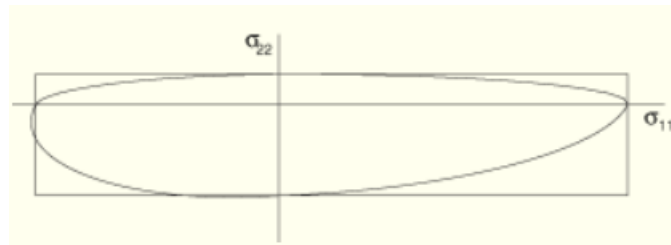


Figura 2-1. Teoría de Tsai Hill vs teoría de la máxima tensión.

En la imagen se muestra el lugar geométrico de los puntos de estados tensionales admisibles de la teoría de Tsai Hill contra el lugar de los estados tensionales admisibles de la teoría de la máxima tensión, que no está del lado de la seguridad.

3 ESTUDIO DE LAS CUERDAS

3.1 Fundamentos de teoría musical

Las notas fundamentales son Do, Do#, Re, Re#, Mi, Fa, Fa#, Sol, Sol#, La, La#, Si. Entre cada nota se dice que hay un semitono y la secuencia de notas se va sucediendo de manera que cada grupo de notas fundamentales corresponde a lo que se denomina una octava.

A lo largo de la historia en la música se ha tratado de asociar a cada nota musical un número. Fue a raíz de la teoría de Hertz cuando se asoció a cada nota una frecuencia. En la actualidad el estándar de afinación se toma como A4=440 hz.

El resto de notas musicales se obtienen con:

$$440 \cdot \sqrt[12]{2^{\pm N}}$$

Con N (positivo) es cada semitono agudo de diferencia y N (negativo) cada semitono grave de diferencia con respecto a la referencia a la frecuencia y nota de referencia.

Sabiendo que A4 es la nota La de la octava número cuatro se pueden obtener las frecuencias de las notas correspondientes hasta la octava seis.

OCTAVAS		0	1	2	3	4	5	6
TONOS								
EU	UK							
Do	C	16.4	32.7	65.4	130.8	261.6	523.3	1046.5
Do#	C#	17.3	34.6	69.3	138.6	277.2	554.4	1108.7
Re	D	18.4	36.7	73.4	146.8	293.7	587.3	1174.7
Re#	D#	19.4	38.9	77.8	155.6	311.1	622.3	1244.5
Mi	E	20.6	41.2	82.4	164.8	329.6	659.3	1318.5
Fa	F	21.8	43.7	87.3	174.6	349.2	698.5	1396.9
Fa#	F#	23.1	46.2	92.5	185.0	370.0	740.0	1480.0
Sol	G	24.5	49.0	98.0	196.0	392.0	784.0	1568.0
Sol#	G#	26.0	51.9	103.8	207.7	415.3	830.6	1661.2
La	A	27.5	55.0	110.0	220.0	440.0	880.0	1760.0
La#	A#	29.1	58.3	116.5	233.1	466.2	932.3	1864.7
Si	B	30.9	61.7	123.5	246.9	493.9	987.8	1975.5

Tabla 3–1. Tabla de frecuencias de las notas musicales.

Para el caso particular de una guitarra estándar, donde las cuerdas tienen una longitud de vibración de 650 mm, cada cuerda vibrando en su afinación correcta debe tener las siguientes frecuencias naturales.

Cuerda	f(Hz)
1ª(E4)	329.63
2ª(B3)	246.94
3ª(G3)	196
4ª(D3)	146.83
5ª(A2)	110
6ª(E2)	82.41

Tabla 3–2. Tabla de frecuencias de vibración natural de las cuerdas al aire.

Estas vibraciones son las correspondientes al primer modo de vibración, y serán iguales para todos los instrumentos. Por otro lado, el timbre característico y la riqueza sonora de cada instrumento se da por el resto de frecuencias de vibración, es decir, los armónicos.

3.2 Propiedades de las cuerdas

Se han estudiado las cuerdas del fabricante D'Addario del modelo EJ45 con las siguientes propiedades:

Cuerda	d(mm)	T(kg)
1ª(E4)	0.72	7.36
2ª(B3)	0.82	5.46
3ª(G3)	1.02	5.39
4ª(D3)	0.74	7.08
5ª(A2)	0.89	7.21
6ª(E2)	1.09	6.43

Tabla 3–3. Tabla de propiedades de las cuerdas dadas por el fabricante D'Addario.

El propio fabricante da una fórmula con la que calculan la tensión de sus cuerdas:

$$T = \frac{\mu \cdot (2Lf)^2}{386.4} \quad (\text{hz, in, lb})$$

Con toda esta información se puede calcular la masa unitaria (μ), y con ella la densidad (ρ).

Cuerda	μ (kg/m)	ρ (kg/m ³)
1ª(E4)	3.96E-04	973
2ª(B3)	5.22E-04	989
3ª(G3)	8.20E-04	1000
4ª(D3)	1.92E-03	4400
5ª(A2)	3.48E-03	5600
6ª(E2)	5.54E-03	5940

Tabla 3–4. Tabla de propiedades de las cuerdas obtenidas mediante la fórmula del fabricante D'Addario.

Para definir el comportamiento de la cuerda completamente solo falta por conocer el módulo de elasticidad de las cuerdas, que será obtenido por un modelo de elementos finitos.

3.3 Modelo MEF

3.3.1 Obtención del módulo de elasticidad

Para el estudio de la cuerda se ha realizado un modelo en Abaqus. El modelo será una barra biapoyada de 650 mm con una pretensión aplicada con las características anteriormente descritas a excepción del módulo de elasticidad. Para obtener el módulo de elasticidad se realizará un análisis modal de cada cuerda, ya que al conocer el primer modo de vibración de cada cuerda se supondrá un valor inicial del módulo de elasticidad y se resolverá el análisis modal. En función del resultado obtenido se modificará el valor del módulo de elasticidad hasta que la solución del análisis modal converja con la solución teórica de la primera frecuencia de cada cuerda.

De esta manera para cada cuerda el módulo de elasticidad y la pretensión serán:

Cuerda	T(N)	E(Pa)
1ª(E4)	72.20	4.00E+09
2ª(B3)	53.56	4.00E+09
3ª(G3)	52.88	4.00E+09
4ª(D3)	69.45	5.50E+09
5ª(A2)	70.73	5.50E+09
6ª(E2)	63.08	5.50E+09

Tabla 3-5. Tabla de fuerza y módulo de elasticidad.

3.3.2 Cálculo de las reacciones dinámicas

Una vez descrita completamente la cuerda se hará un análisis dinámico mediante la integración de las ecuaciones. Se usará este tipo de análisis ya que es el indicado para problemas con comportamiento no lineal.

El fin de este análisis es encontrar las reacciones en un extremo de la cuerda cuando se le hace vibrar de manera que represente la realidad. Para representar la realidad se dará un desplazamiento transversal a la cuerda de 1 mm en un punto a 100 mm del extremo.

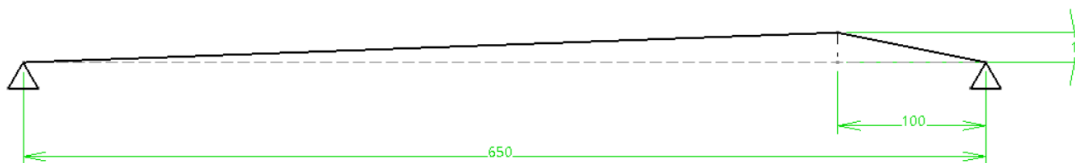


Figura 3-1. Esquema del modelo empleado.

3.4 Análisis de sensibilidad

Para resolver el problema y obtener una buena solución hay que buscar una cantidad de elementos y un paso de integración correctos. Para ello se realizarán análisis fijando un parámetro y variando el otro. Este análisis se realizará sobre la primera cuerda, ya que es la cuerda con las mayores frecuencias de vibración y por tanto la que menos paso de integración necesitará.

3.4.1 Sensibilidad respecto a los elementos

Teniendo en cuenta que una cuerda vibra como una suma ponderada de todos sus modos de vibración y que el modo de vibración con menor frecuencia se alcanza en 330 Hz, el periodo para esa frecuencia será de $3E-3$ s. Por lo tanto, el primer paso que se usará en el ensayo se tomará $1E-4$.

Fijando el paso de integración en $1E-4$ variamos el número de elementos realizándose el estudio para 15, 65 y 130 elementos.

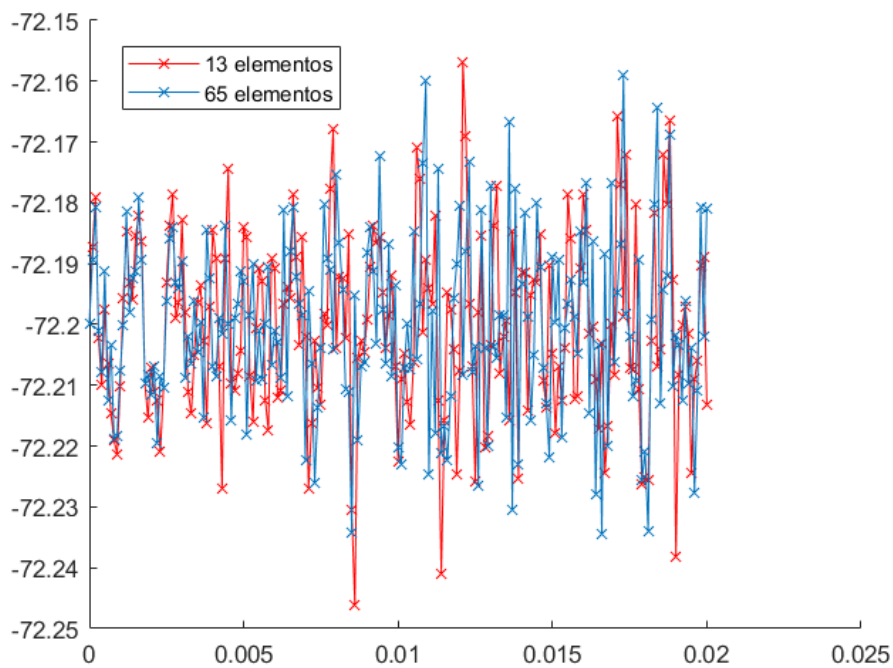


Figura 3-2. Reacción longitudinal para 13 y 65 elementos con paso de $1E-4$.

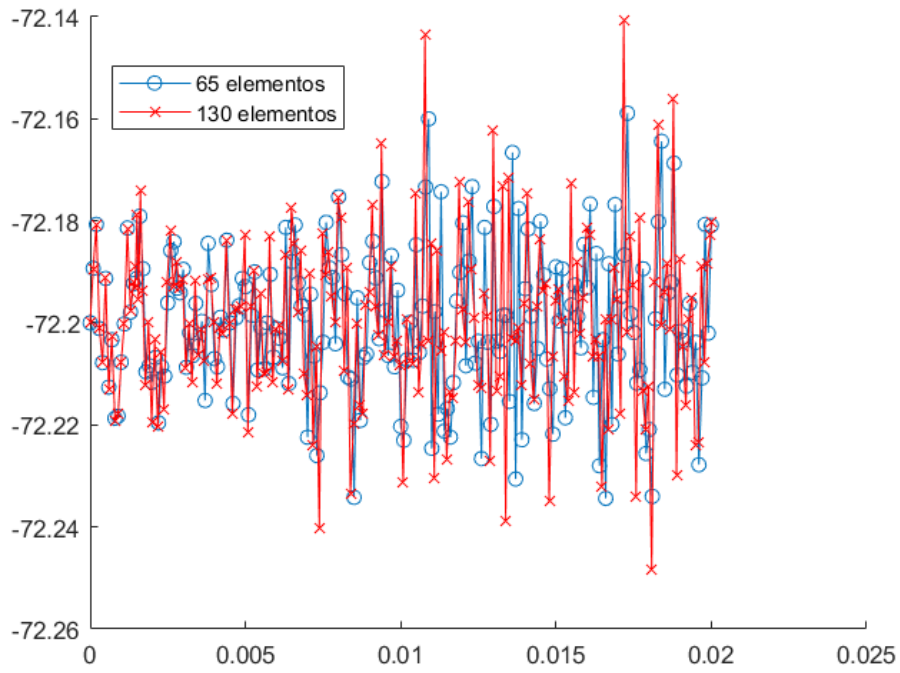


Figura 3-3. Reacción longitudinal para 65 y 130 elementos con paso de 1E-4.

Se aprecian cambios en los resultados entre el modelo con 13 y 65 elementos, pero los cambios en el resultado entre 65 y 130 elementos son relativamente pequeños. Por lo tanto, se tomarán elementos 65 elementos para el modelo.

3.4.2 Sensibilidad respecto al paso de integración

Fijando 65 elementos se ha realizado el estudio para un paso de 1E-4, 1E-5 y 1E-6.

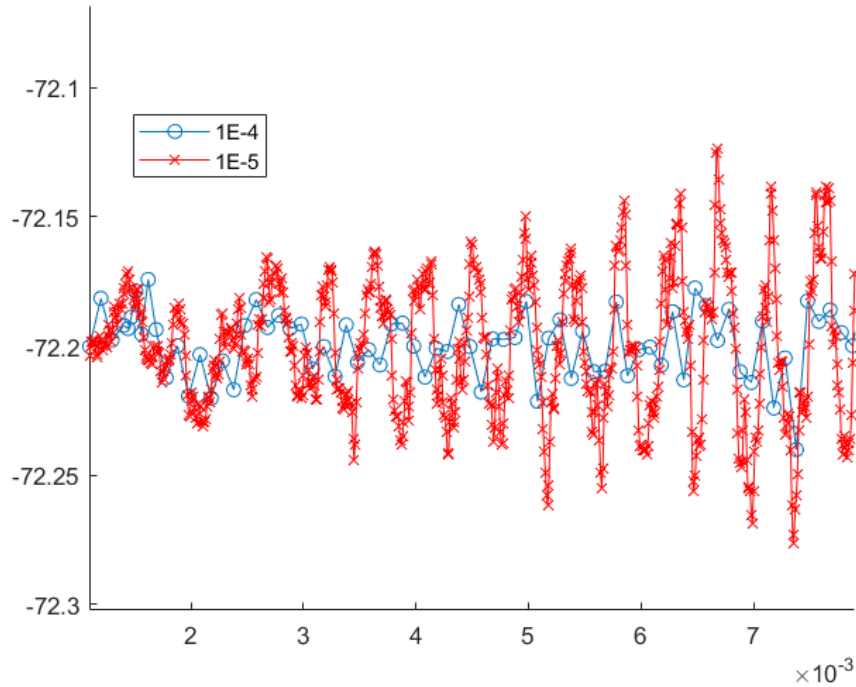


Figura 3-4. Reacción longitudinal para pasos de 1E-4 y 1E-5 con 65 elementos.

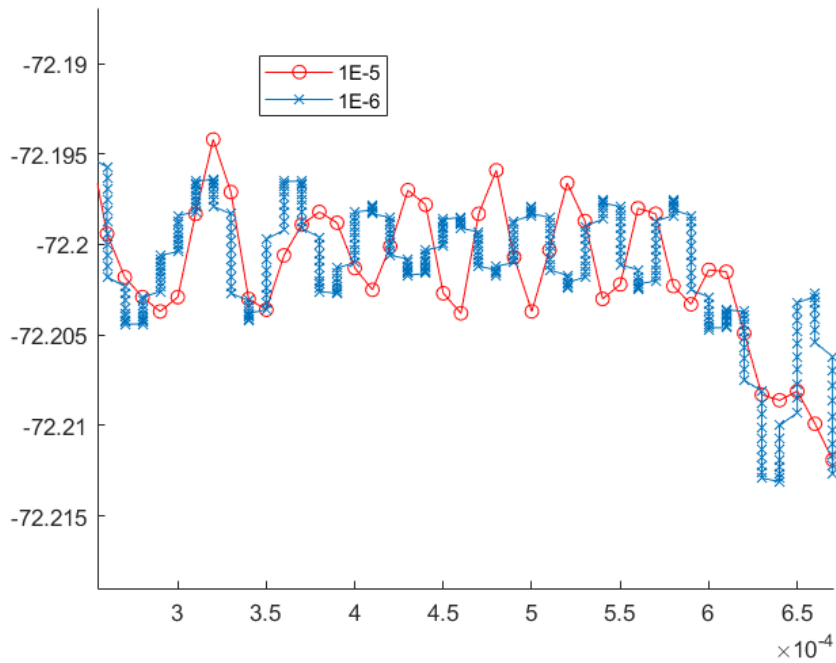


Figura 3-5. Reacción longitudinal para pasos de 1E-5 y 1E-6 con 65 elementos.

Se aprecian resultados significativamente distintos para un paso de 1E-4 comparado con un paso de 1E-5, pero los cambios entre un paso de 1E-5 y 1E-6 son relativamente pequeños. Por lo tanto, se tomará un paso de integración de 1E-5 para el modelo.

3.5 Resultados

3.5.1 Reacciones longitudinales

Se muestran a continuación la reacción en el sentido longitudinal de la cuerda, esta reacción es una oscilación de poca amplitud con respecto al punto de equilibrio, el cual es la reacción cuando la cuerda no está en movimiento.

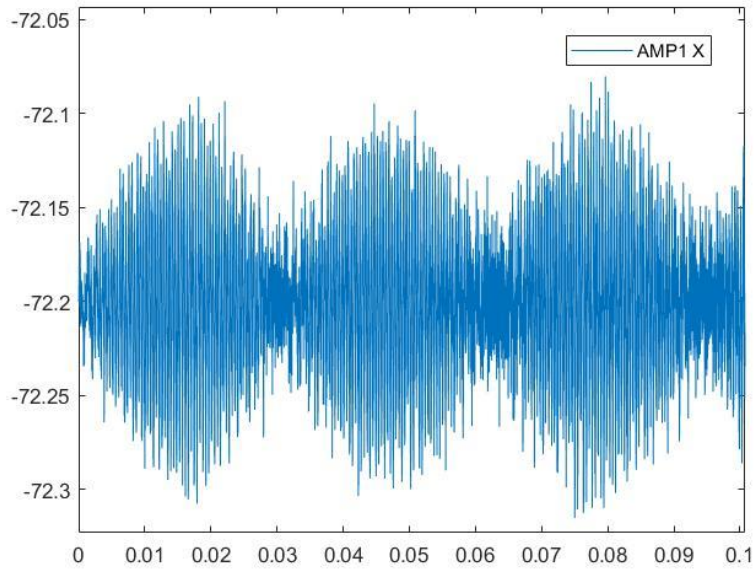


Figura 3-6. Reacción longitudinal primera cuerda.

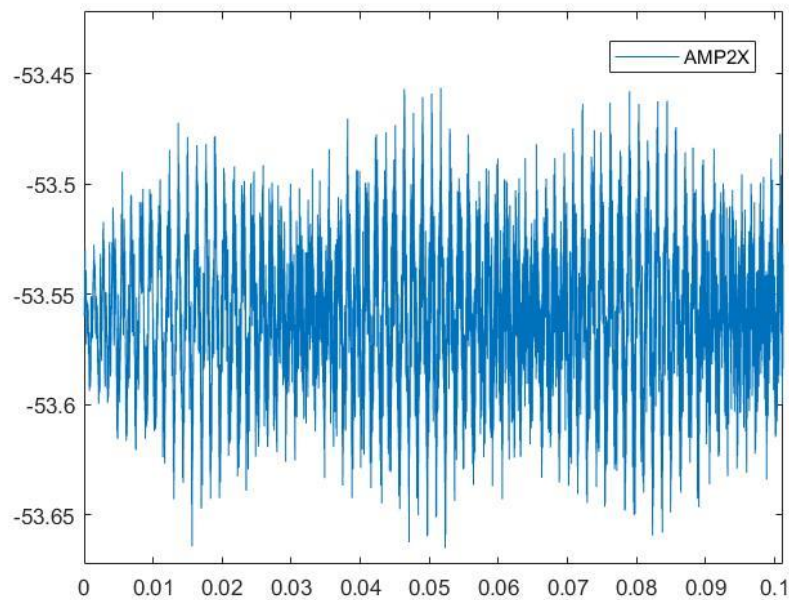


Figura 3-7. Reacción longitudinal segunda cuerda.

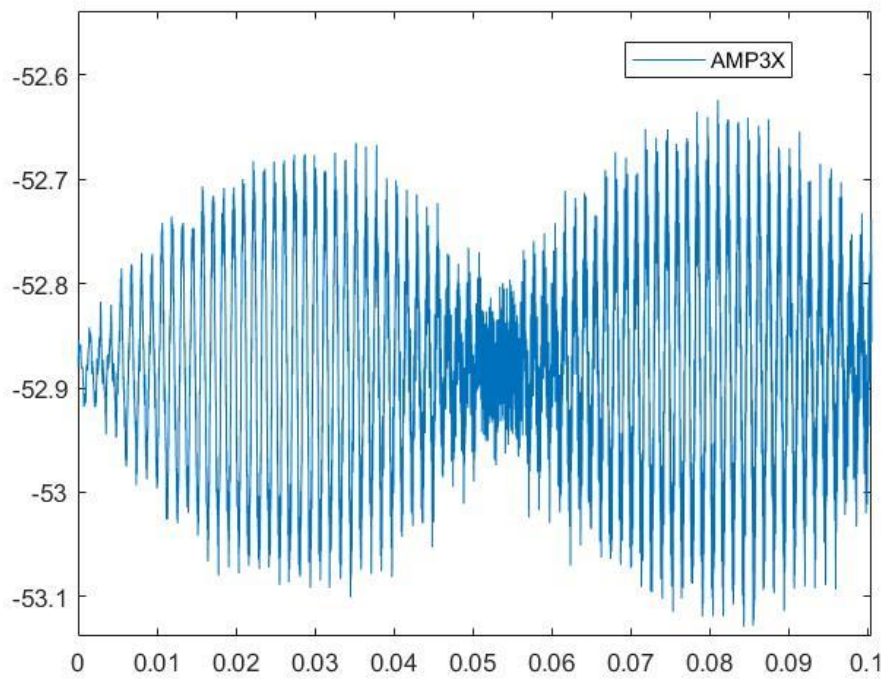


Figura 3-8. Reacción longitudinal tercera cuerda.

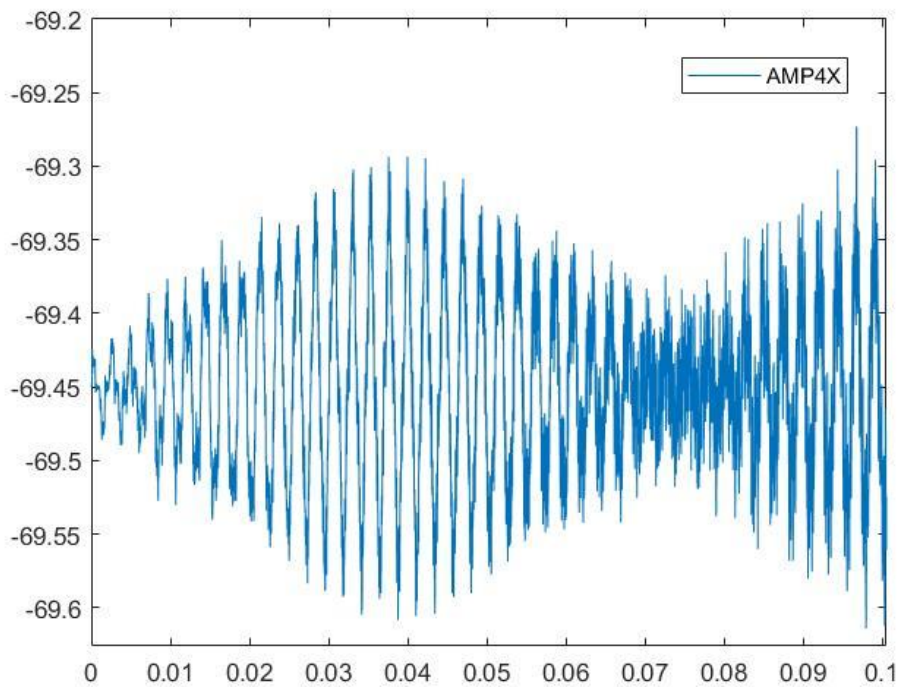


Figura 3-9. Reacción longitudinal cuarta cuerda.

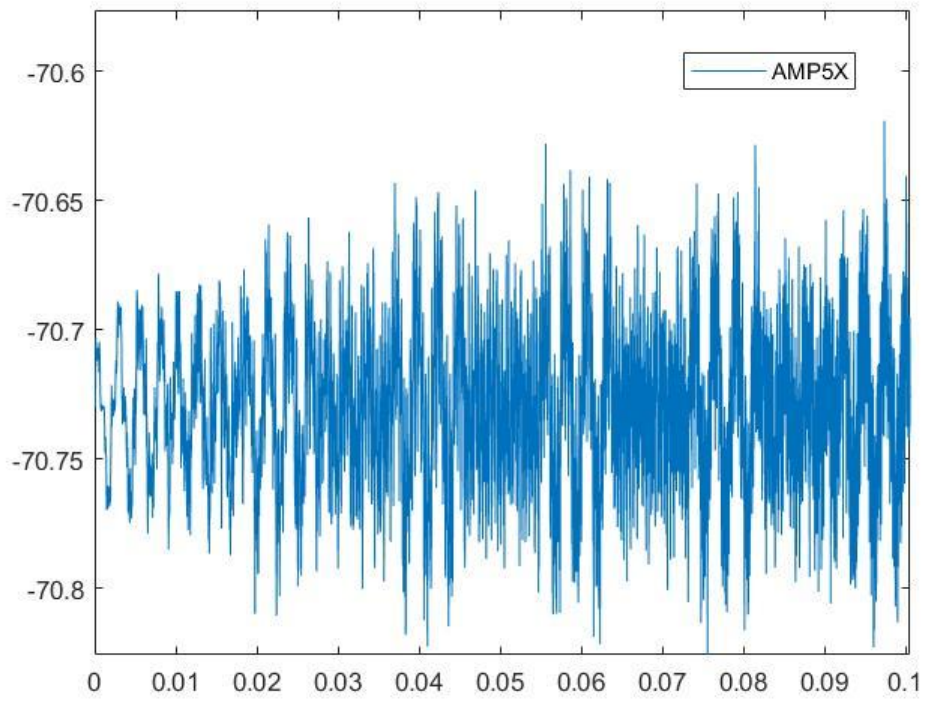


Figura 3-100. Reacción longitudinal quinta cuerda.

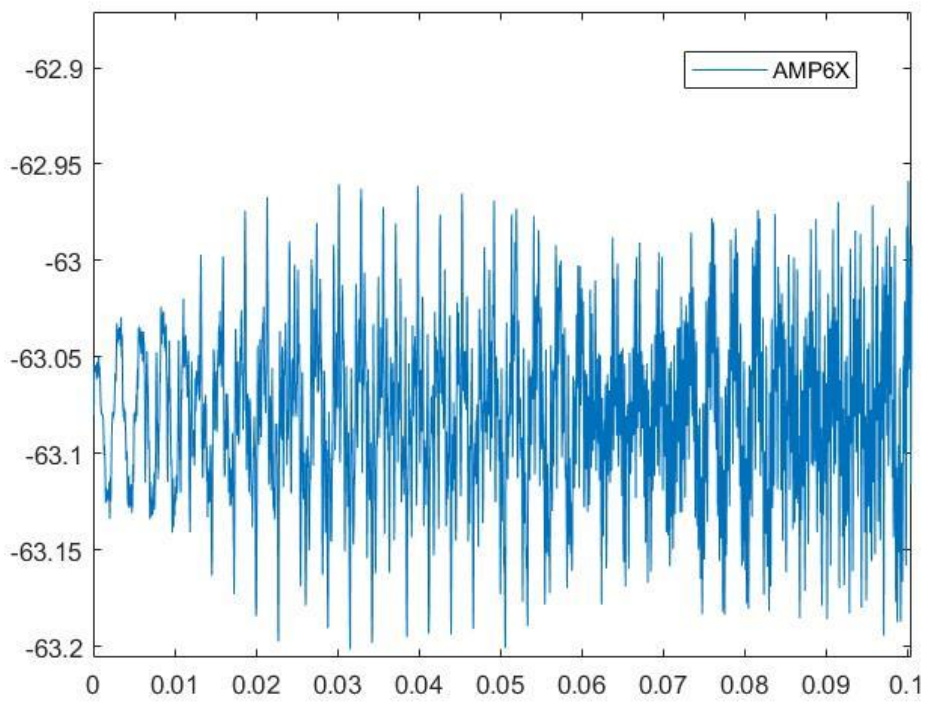


Figura 3-111. Reacción longitudinal sexta cuerda.

3.5.2 Reacciones transversales paralelas a la tapa

En el siguiente conjunto de gráficos se muestra la reacción en el sentido del desplazamiento inicial transversal a la cuerda. Esta reacción transversal no aparece en el estudio estático cuando hay ausencia de movimiento de la cuerda, esta solo tiene lugar en el estudio dinámico ya que aparecen por el desplazamiento transversal dado como condición inicial.

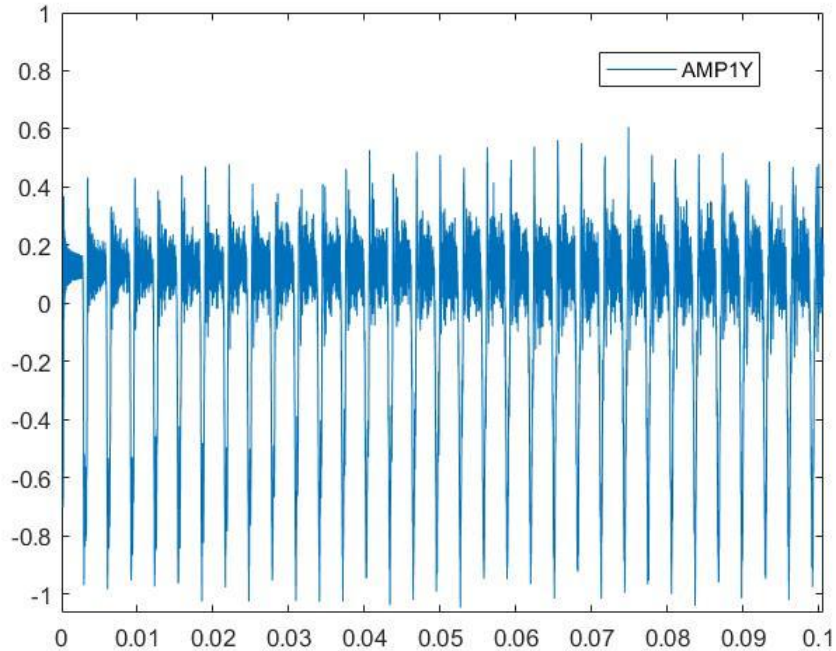


Figura 3-122. Reacción transversal paralela a la tapa primera cuerda.

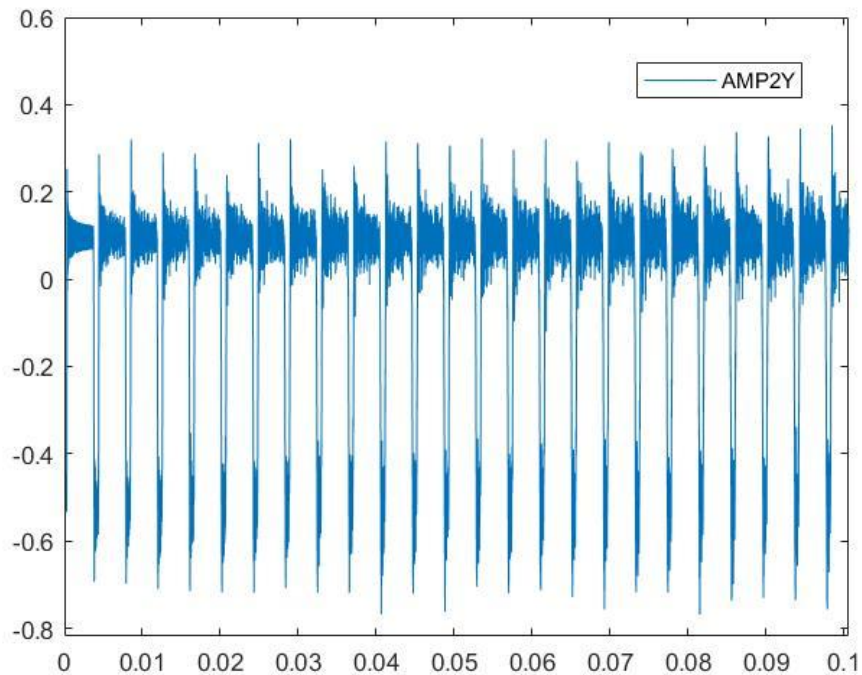


Figura 3-133. Reacción transversal paralela a la tapa segunda cuerda.

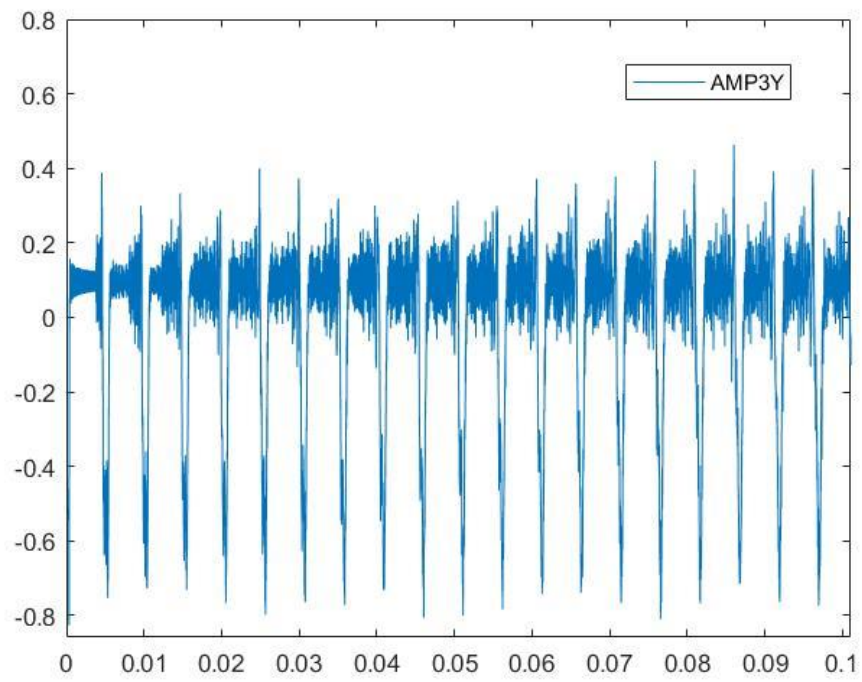


Figura 3-144. Reacción transversal paralela a la tapa tercera cuerda.

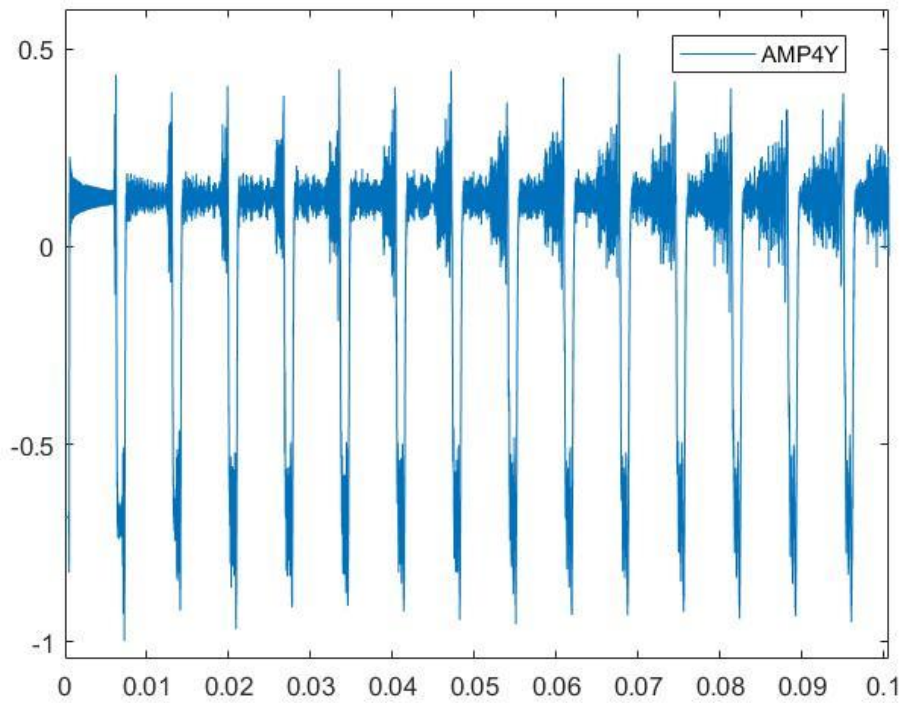


Figura 3-155. Reacción transversal paralela a la tapa cuarta cuerda.

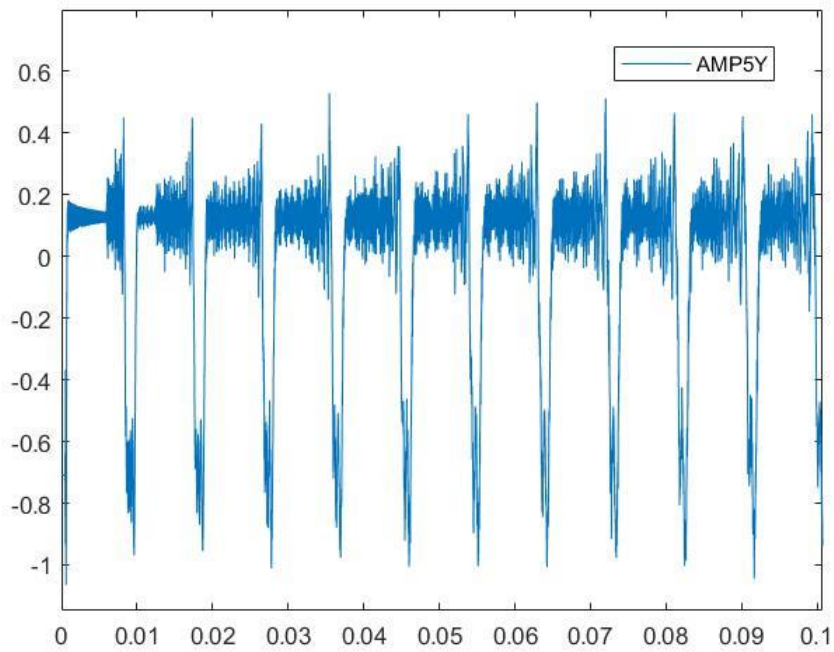


Figura 3-166. Reacción transversal paralela a la tapa quinta cuerda.

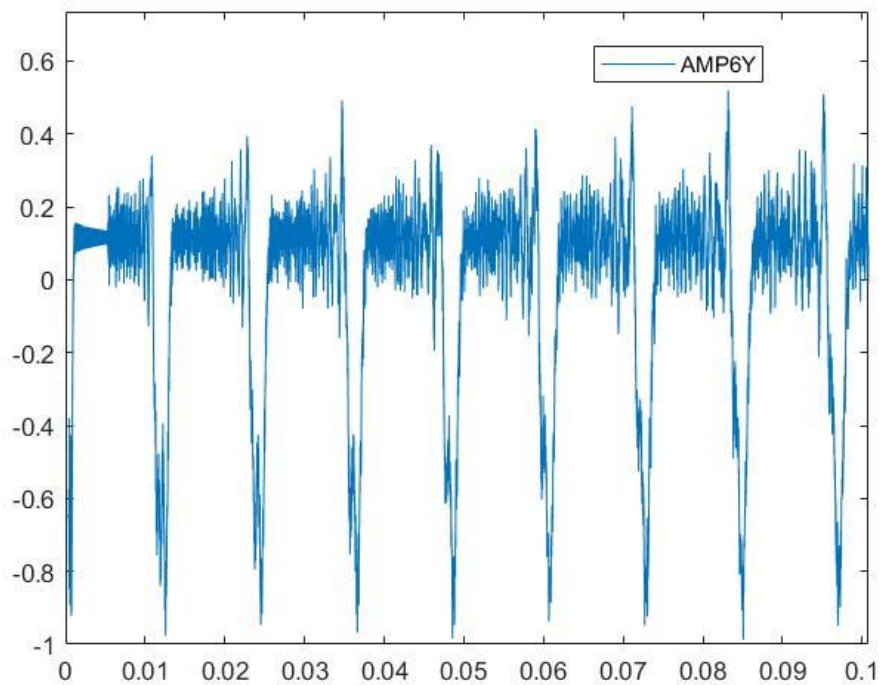


Figura 3-177. Reacción transversal paralela a la tapa sexta cuerda.

3.5.3 Reacciones transversales normales a la tapa

Por último la reacción en el en la dirección ortogonal al plano donde la cuerda vibra será despreciable ya que las amplitudes de estas reacciones son del orden de $1E-12$ y $1E-16$. Se muestra a continuación la reacción de la primera cuerda.

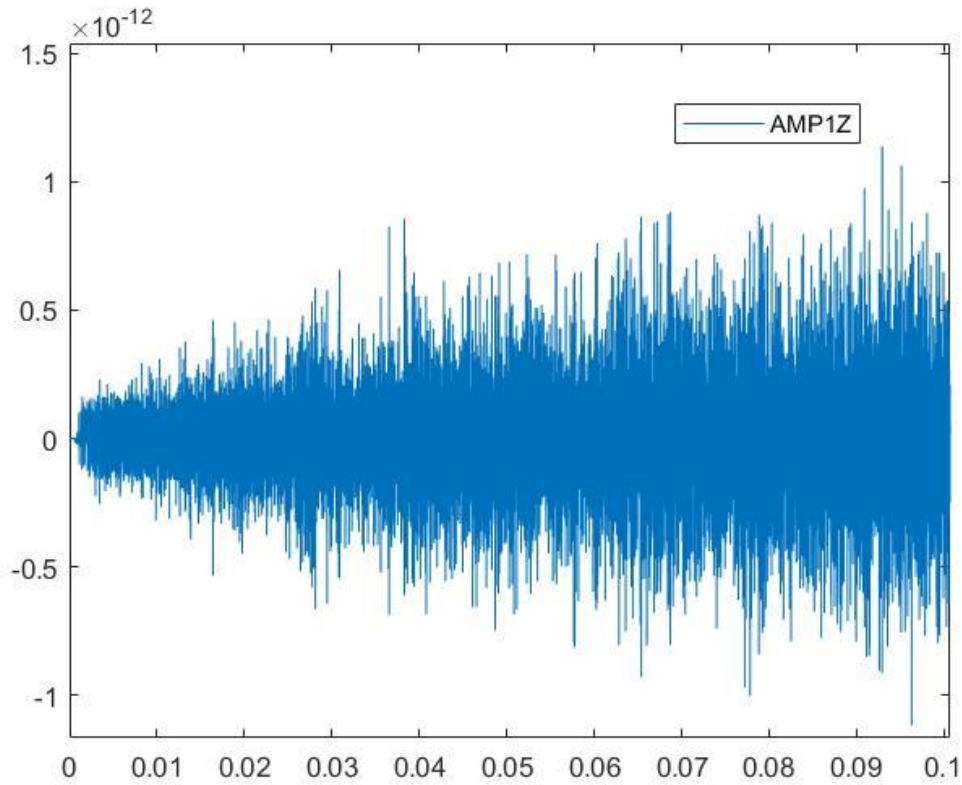


Figura 3-188. Reacción transversal normal a la tapa primera cuerda.

Finalmente, del estudio de las cuerdas se acabará usando para el estudio de la tapa las reacciones doce reacciones mencionadas anteriormente en el estudio dinámico, y las pretensiones en el caso del estudio estático.

4 ESTUDIO DE LA TAPA

4.1 Propiedades del material

La tapa estará constituida por dos tipos de maderas, palo santo para el puente, y pino abeto alemán para el resto del modelo.

VALORES MECANICOS DE MADERAS EMPLEADAS		
PROPIEDADES	PINOABETO ALEMÁN	PALOSANTO
E1(GPa)	1.00E+10	1.36E+10
E2(GPa)	2.00E+08	7.00E+08
E3(GPa)	2.00E+08	7.00E+08
G23(GPa)	1.00E+08	1.00E+08
G12(GPa)	8.50E+08	2.91E+09
G13(GPa)	8.50E+08	2.91E+09
V12	0.06	0.025
V13	0.06	0.025
V23	0.6	0.3
p(Kg/m3)	400	1150

Tabla 4–1. Tabla de propiedades mecánicas de las maderas empleadas.

VALORES CARACTERISTICOS DE ROTURA PINOABETO ALEMÁN (N/mm2)		
FLEXION	fm,k	24
TRACCION PARALELA	ft,0,k	14
TRACCION PERPENDICULAR	ft,90,k	0.5
COMPRESION PARALELA	fo,0,k	21
COMPRESION PERPENDICULAR	fo,90,k	2.5
CORTANTE	fv,k	2.5

Tabla 4–2. Tabla valores característicos de rotura del pinoabeto alemán.

4.2 Medidas y direcciones

Para la descripción de todos los elementos, con el fin de no enmarañar el dibujo con infinidad cotas, cada tipo de elemento será definido de la siguiente manera:

Largo x Ancho x Alto (cotas en mm)

4.2.1 Barras armónicas

Son barras de sección rectangular que serán definidas según el siguiente esquema. Todas las barras armónicas tienen canteados los extremos con un ángulo de 10 grados.

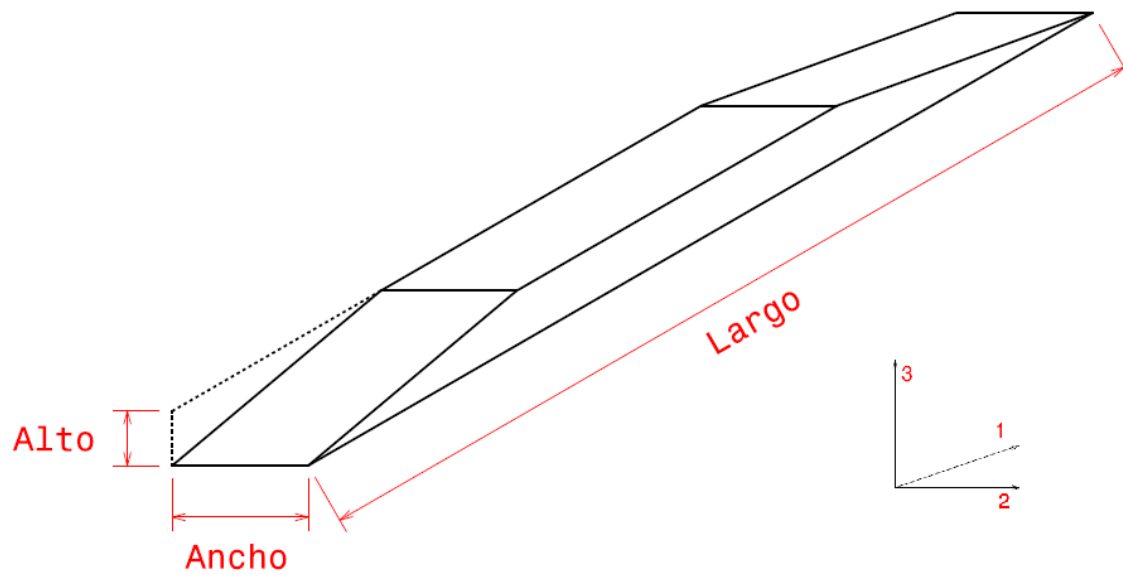


Figura 4-1. Geometría, definición de cotas y direcciones del material de las barras armónicas.

4.2.2 Refuerzos

Son barras de sección semielíptica que serán definidas según el siguiente esquema.

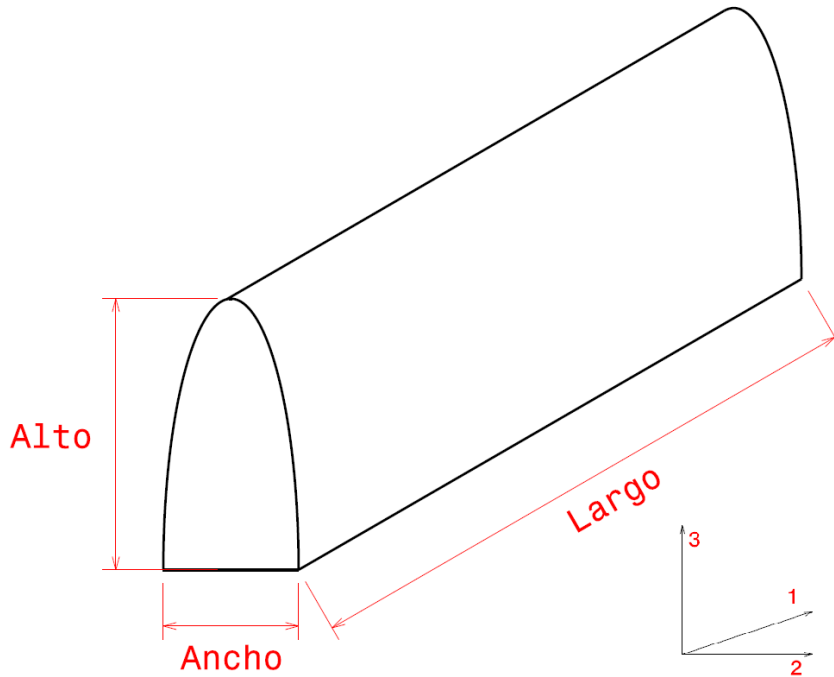


Figura 4-2. Geometría, definición de cotas y direcciones del material de los refuerzos.

4.2.3 Contrarroseta

Son barras de sección de arco de circunferencia que serán definidas según el siguiente esquema

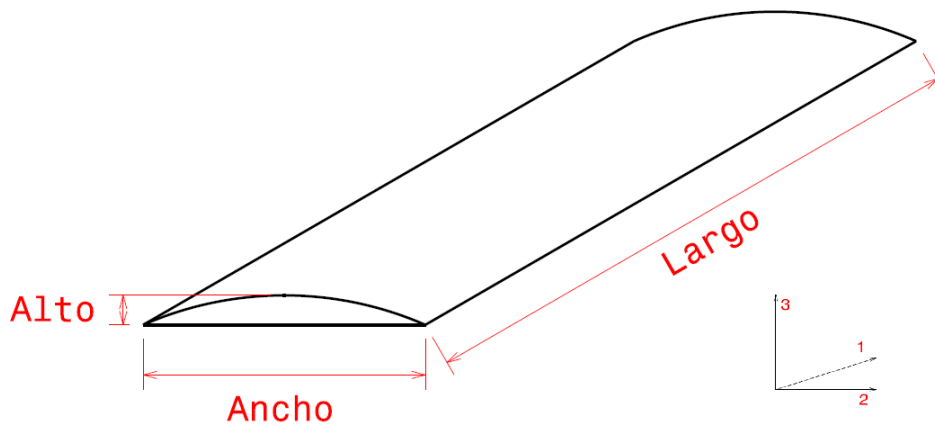


Figura 4-3. Geometría, definición de cotas y direcciones del material de las contrarrosetas.

4.3 Condiciones de contorno

El contorno exterior de la tapa tendrá grados de libertad de desplazamiento y rotación nulos. En la construcción de guitarras los elementos que unen la tapa a los aros son los zoquillos o las cadenetas ranuradas. La utilidad de estos elementos es tener un área suficiente de pegado entre tapa y aros, por lo tanto esto explica las condiciones de contorno consideradas.



Figura 4-4. Detalle de unión de la tapa y el aro.



Figura 4-5. Elementos de unión entre tapa y aros.

4.4 Fuerzas

En un primer paso se estudiará el caso estático, es decir, la tapa con las pretensiones correspondientes a las cuerdas en reposo aplicadas en el puente. Estas pretensiones serán las ofrecidas por el fabricante descritas anteriormente.



Figura 4-6. Esquema de fuerzas en el modelo para el caso estático.

En un segundo paso se estudiará el caso dinámico, donde se introducirán las reacciones de las cuerdas mediante las amplitudes anteriormente graficadas.



Figura 4-7. Esquema de fuerzas en el modelo para el caso dinámico.

4.5 Resultados y optimización

El parámetro que se ha decidido maximizar para la optimización ha sido la energía cinética de deformación, poniendo como restricción el fallo del material mediante el criterio de Tsai Hill, usado para materiales anisótropos.

Se ha establecido un área de la tapa donde se interpretarán los resultados que excluye el contorno exterior, ya que en el entorno donde se aplican las condiciones de contorno los resultados pueden no ser veraces, y la unión con la caja rigidiza la zona, con lo que la resistencia de la zona es mayor que la de la tapa únicamente.

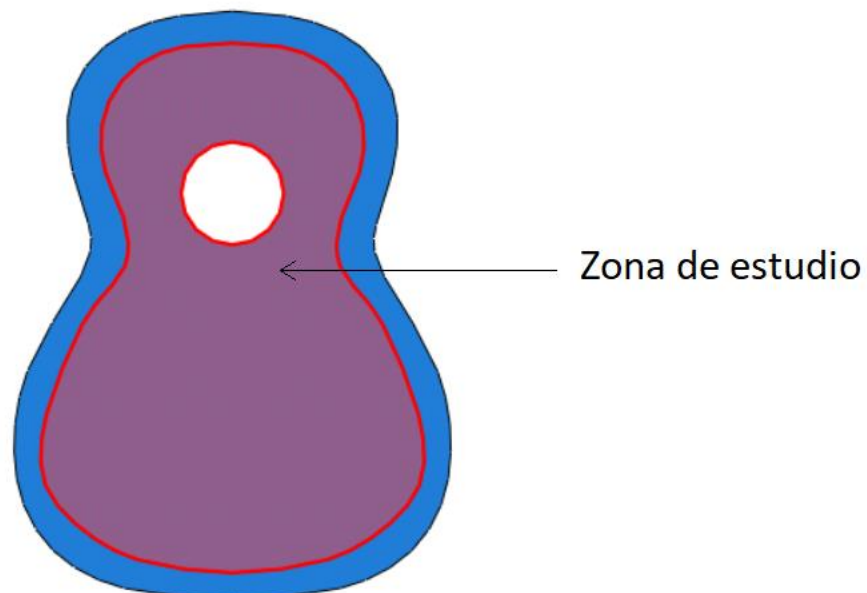


Figura 4-8. Esquema de la zona donde se estudiarán los resultados.

4.5.1 Modelo preliminar

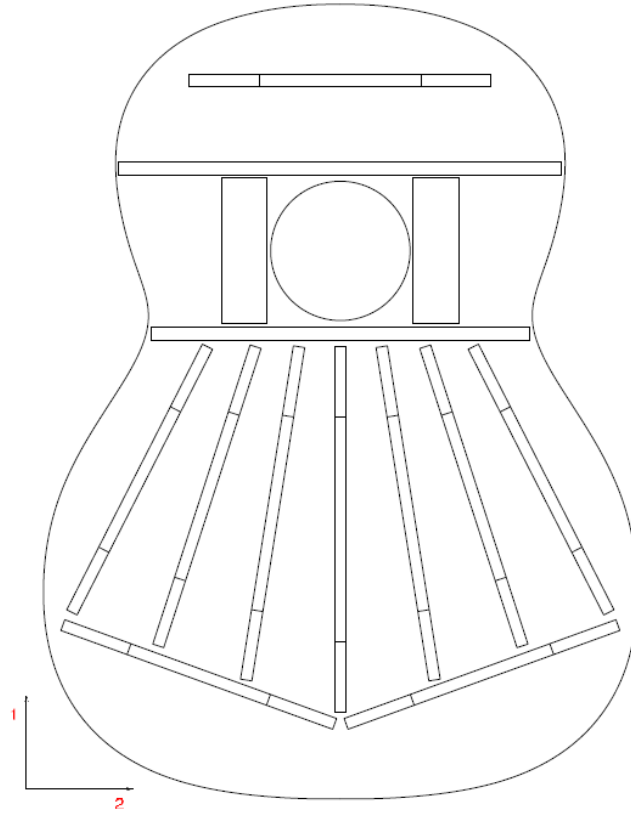


Figura 4-9. Esquema de armado y direcciones del material en el modelo preliminar.

Espesor tapa	2.5 mm
Armónica 1	223x7x3
Armónica 2	206x7x3
Armónica 3	192x7x3
Armónica 4	182x7x3
Armónica 5	176x7x3
Armónica 6	184x7x3
Refuerzo 1	270x8x17
Refuerzo 2	230x8x17
Contrarroseta	89x28x2

Tabla 4-3. Tabla geometrías de los elementos del modelo preliminar.

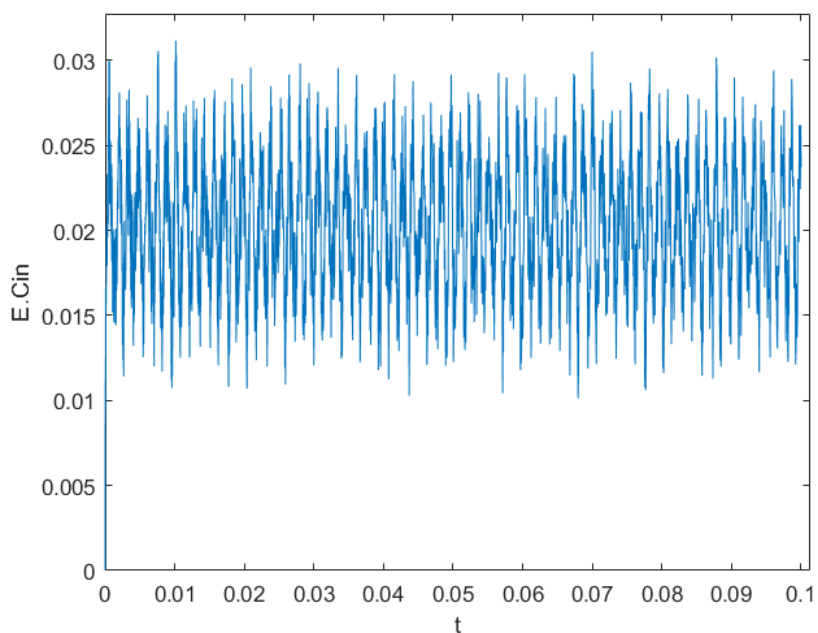


Figura 4-100. Variación de energía cinética en el modelo preliminar.

Para poder comparar fácilmente el resultado de la energía cinética, se usará el valor de la media.

$$ECIN_media = \text{sum}(ECIN)/\text{length}(ECIN) = 0.0203$$

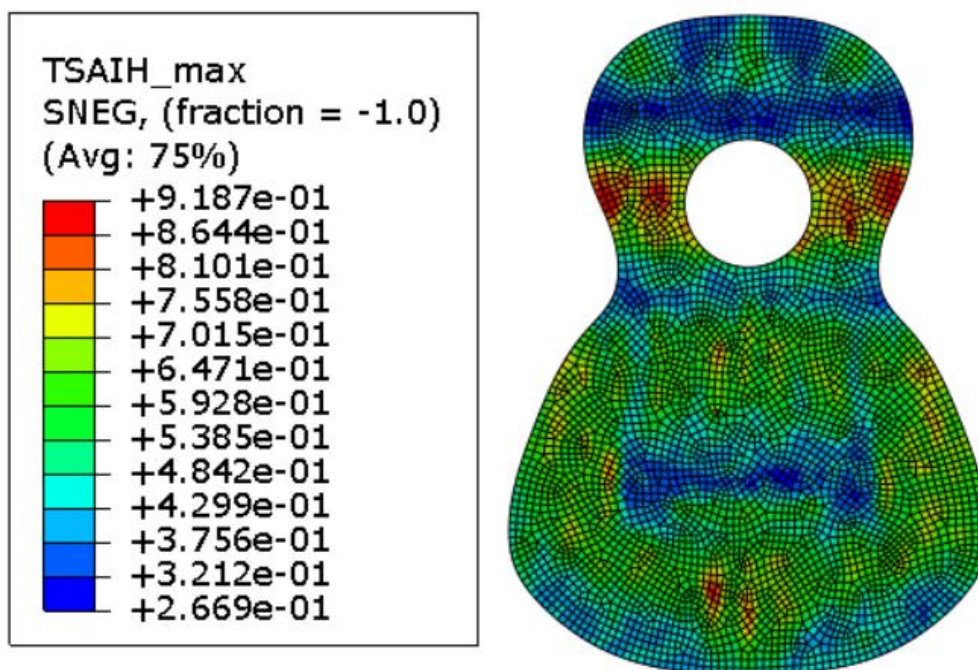


Figura 4-111. Máximos valores del criterio de Tsai Hill durante el ensayo dinámico en el modelo preliminar.

En esta imagen se muestra el valor máximo en cada nodo de todos los pasos de integración del criterio de Tsai Hill. Se observa que hay valores muy próximos a 1 pero están localizados en ciertas zonas del modelo, por lo tanto, hay zonas en las que se puede retirar material para de esta manera intentar aumentar la energía cinética.

4.5.2 Modelo sin refuerzos

Se va a comparar el modelo preliminar con un modelo en el que se eliminan todos los refuerzos interiores, es decir, el modelo consta solo de la tapa y el puente.

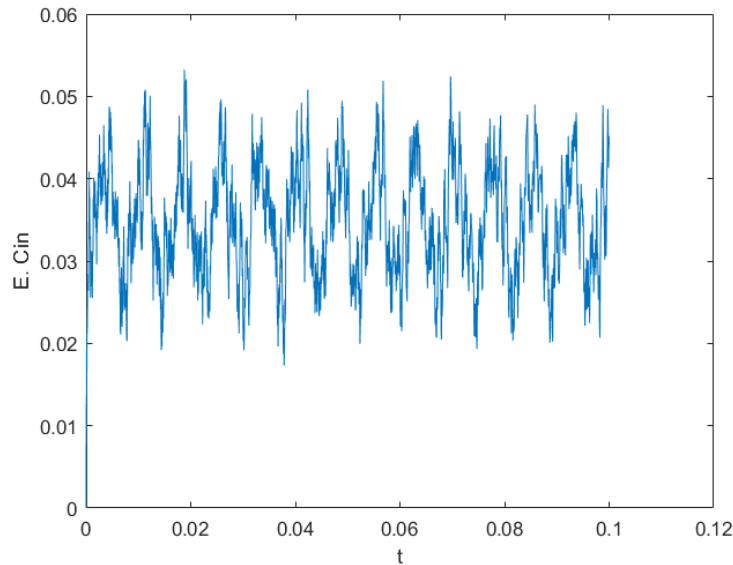


Figura 4-122. Variación de energía cinética en el modelo sin armar.

$$ECIN_media = \text{sum}(ECIN)/\text{length}(ECIN) = 0.0347$$

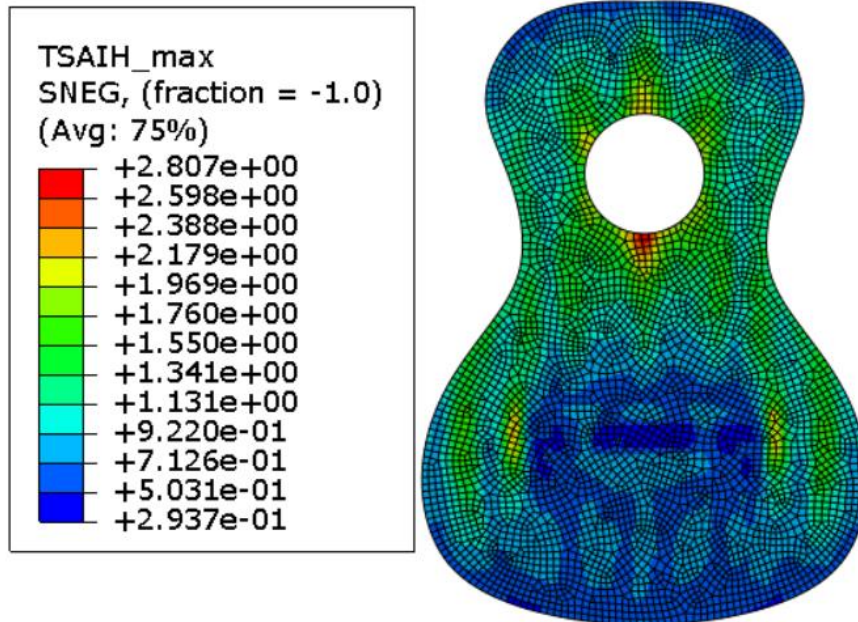


Figura 4-133. Máximos valores del criterio de Tsai Hill durante el ensayo dinámico en el modelo sin armar.

En este caso se produce la rotura del material y se aumenta en gran medida la energía cinética, por lo tanto el objetivo será llegar a un compromiso en el que se reajuste la resistencia y la masa del modelo para obtener una energía cinética mayor a la del modelo preliminar sin llegar a la rotura del material.

4.5.3 Modelo óptimo

En este modelo se ha reducido la sección de las barras armónicas, ya que estas ocupan el lugar donde previsiblemente más se puede aumentar la energía cinética. El Refuerzo 1 se ha reducido mientras que el Refuerzo 2 se ha aumentado ya que el Refuerzo 2 se sitúa en el estrechamiento de la tapa donde tendrá más sollicitación. El cambio más significativo es la contrarroseta. Esta se ha cambiado ya que la boca de la tapa actúa como un concentrador de tensiones, por lo tanto, esta nueva geometría mejorará la resistencia alrededor de la boca.

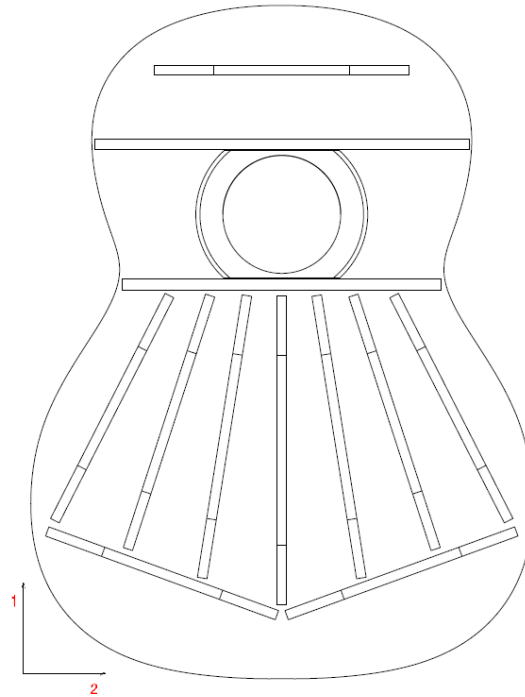


Figura 4-144. Esquema de armado y direcciones del material en el modelo óptimo.

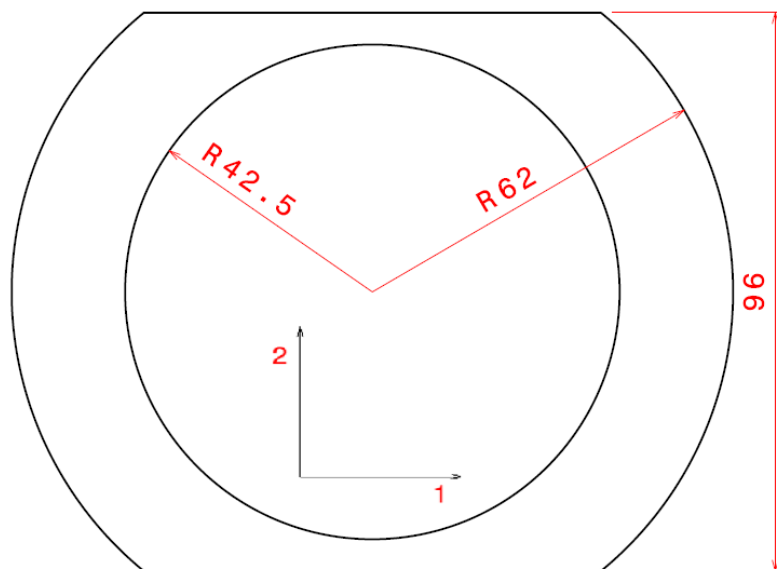


Figura 4-155. Esquema de la contrarroseta y direcciones del material en el modelo óptimo.

Espesor tapa	2.5 mm
Espesor Contrarroseta	3 mm
Armónica 1	223x7x1.5
Armónica 2	206x7x1.5
Armónica 3	192x7x1.5
Armónica 4	182x7x1.5
Armónica 5	176x7x1.5
Armónica 6	184x7x1.5
Refuerzo 1	270x8x10
Refuerzo 2	230x8x20

Tabla 4-4. Tabla de geometrías de los elementos del modelo óptimo.

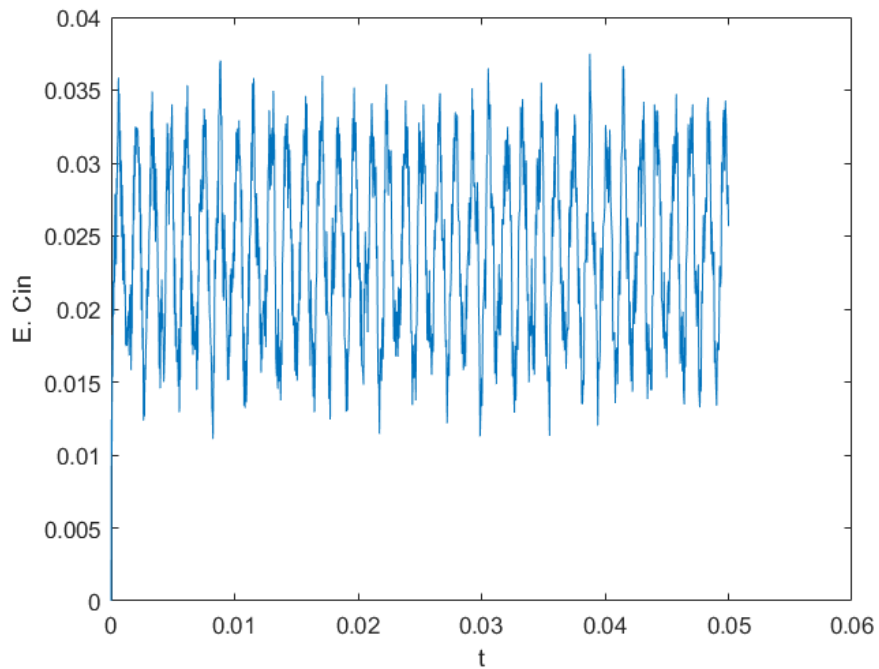


Figura 4-166. Variación de energía cinética en el modelo óptimo.

$$ECIN_media = \text{sum}(ECIN)/\text{length}(ECIN) = 0.0240$$

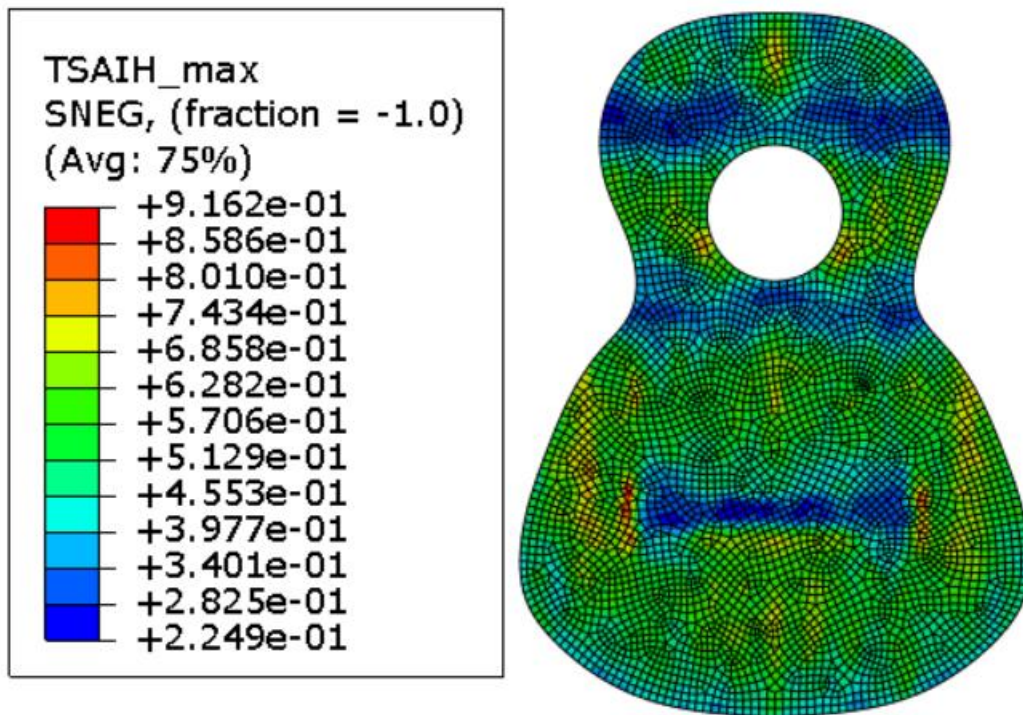


Figura 4-177. Máximos valores del criterio de Tsai Hill durante el ensayo dinámico en el modelo óptimo.

En este modelo se ha logrado un aumento de la energía cinética sin entrar en la fractura de la tapa. En este modelo se observa una distribución más homogénea del criterio de rotura y por lo tanto un mejor aprovechamiento del material.

4.6 Conclusiones de la tapa

En la tabla se muestran los valores máximos y mínimos de todas las tensiones que sufre la tapa en cada modelo estudiado y se comparan con los límites de rotura del material.

TENSION	PRELIMINAR	SIN REFUERZOS	FINAL	LIMITE ROTURA
S11 MAXIMA	7.22	9.84	8.8	14
S11 MINIMA	-7.13	-10.49	-8.7	21
S22 MAXIMA	0.37	1.14	0.39	0.5
S22 MINIMA	-0.39	-1.32	-0.4	2.5
S12 MAXIMA	1.03	2.65	1.19	2.5
S12 MINIMA	-1.04	-2.77	-1.2	2.5

Tabla 4-5. Tabla comparación de tensiones máximas de los distintos modelos.

Debido a que las tensiones máximas y mínimas en valor absoluto son prácticamente iguales y que los límites de rotura para las tracciones son significativamente menores, en la tapa se producirán las roturas por tracción o por cortante.

Para el modelo sin refuerzo el valor del cortante y la tracción transversal exceden el valor límite de la rotura, siendo la tracción transversal la dominante en la rotura. La tracción longitudinal aun sin refuerzos no supera en absoluto el valor límite, en contra de lo que la intuición puede decir según la disposición de las fuerzas que transmiten las cuerdas a la tapa.

En el modelo preliminar se cumple el criterio de rotura, pero resulta interesante observar que las tracciones longitudinales se reducen muy poco con respecto al modelo sin armar mientras que el valor de la tracción transversal y el cortante se reducen del orden del 30%.

Para el modelo final se ha cambiado el estilo de la contrarroseta y se ha reducido la sección del varetaje interior, de esta manera se han aumentado levemente las tensiones de tracción longitudinal y de cortante, mientras que las tensiones de tracción transversal son prácticamente iguales.

Como conclusión a la discusión de las tensiones máximas y mínimas de los distintos modelos se puede ver que los modelos de varetaje tipo Torres fallan prácticamente por las tracciones transversales, es decir, el recorrido de la optimización depende casi exclusivamente de estas tensiones. Con esta información se podría descartar este tipo de modelo o modificar las disposiciones de los elementos interiores para aumentar las tensiones de cortante y tracciones longitudinales para aprovechar la resistencia no utilizada.

5 CONSTATACIÓN DE RESULTADOS

Se han realizado unos ensayos experimentales con un sonómetro para validar los resultados obtenidos a partir de los modelos de elementos finitos realizados.

5.1 Silencio

En primer lugar, se ha realizado una medición del silencio de la sala donde se realizó el ensayo para poder tener en cuenta el sonido residual en las posteriores mediciones.

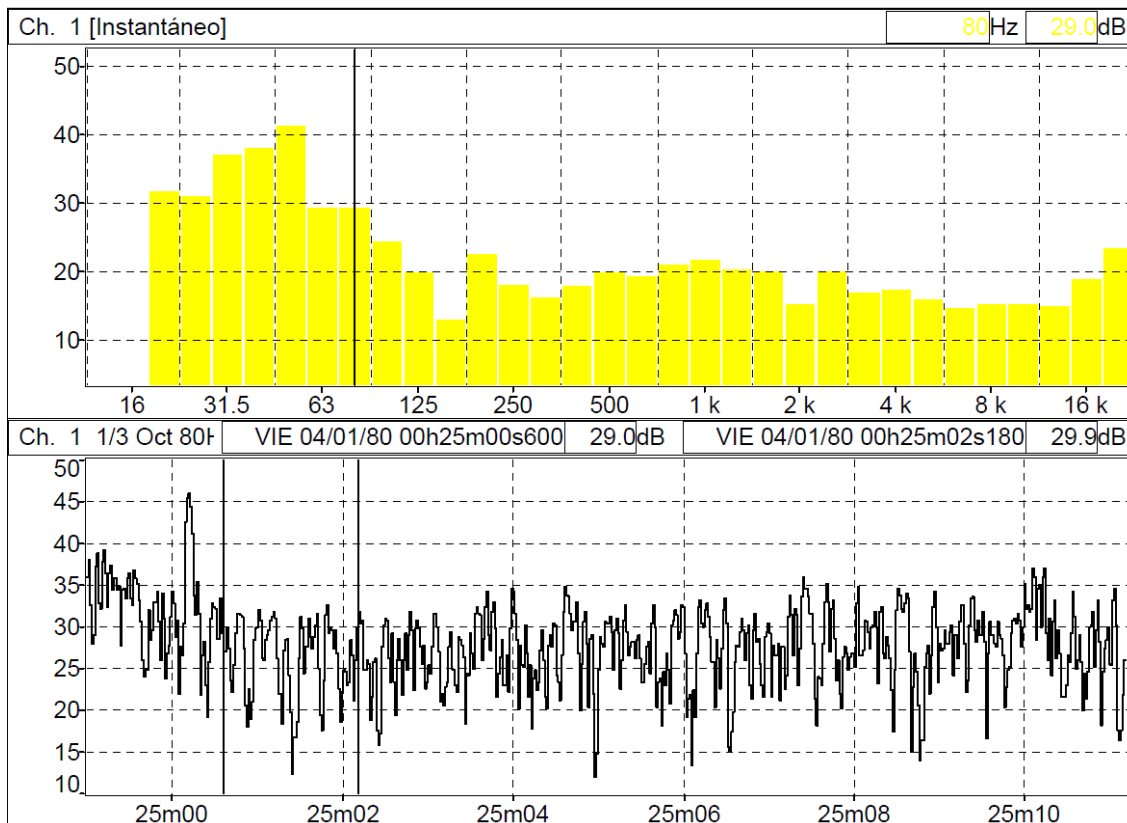


Figura 5-1. Medición acústica del silencio.

5.2 Exenta

En el primer ensayo se ha pretendido caracterizar el comportamiento de la sexta cuerda desacoplada de la guitarra, tal y como se ha estudiado en los modelos de elementos finitos referentes a las cuerdas. Para su realización se ha colocado la cuerda en una barra suficientemente rígida para que las vibraciones que capte el sonómetro sean casi exclusivamente las de la cuerda, además la cuerda tiene la misma longitud de vibración y la misma pretensión que en el modelo.



Figura 5-2. Instrumento para medir el sonido de la cuerda exenta.

Para este ensayo se ha colocado la cuerda frente al sonómetro y se le ha dado un desplazamiento inicial dejando a la cuerda vibrar.



Figura 5-3. Disposición del ensayo de la cuerda exenta.

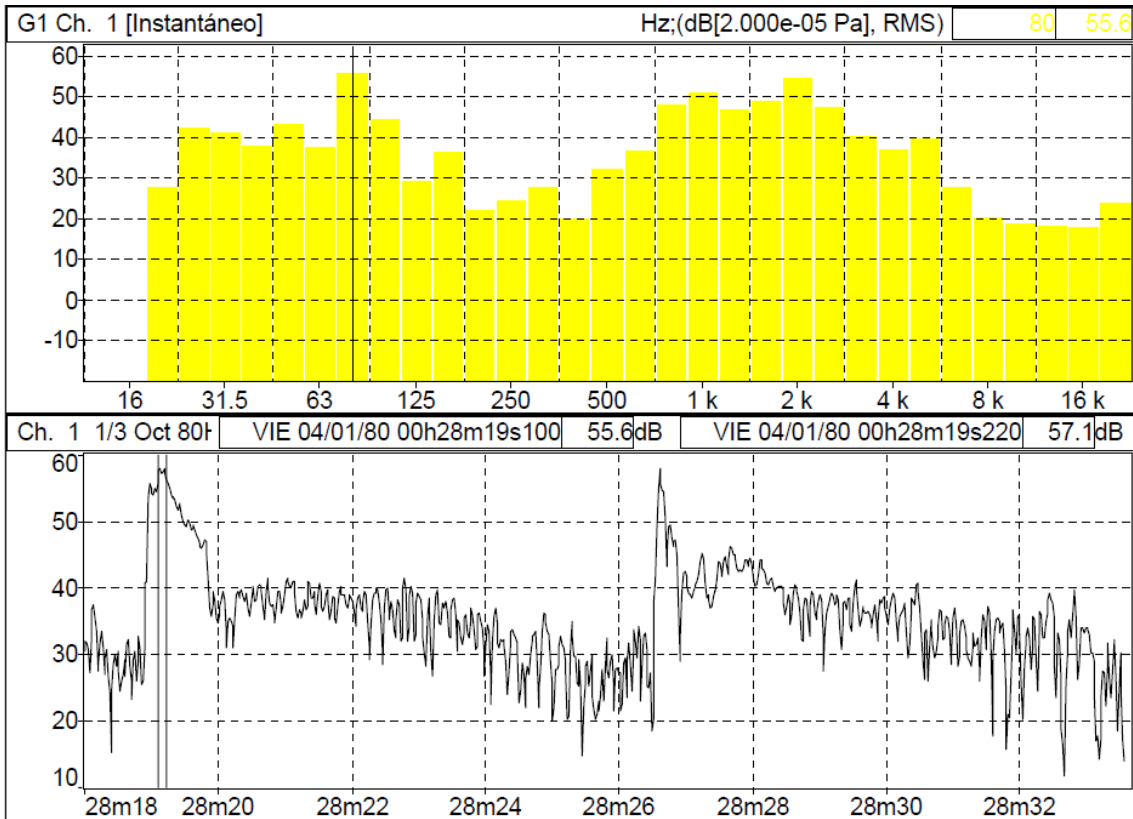


Figura 5-4. Medición acústica de la cuerda exenta.

Con los resultados arrojados es inmediato comprobar que se cumple que en el dominio de las frecuencias la mayor respuesta se da en el entorno de la frecuencia natural de la sexta cuerda, es decir, 82.41 Hz

5.3 Guitarra

En este segundo ensayo se ha pretendido caracterizar el comportamiento de la sexta cuerda en la propia guitarra. Para su realización se ha dispuesto el ensayo bajo las mismas circunstancias que el ensayo anterior.



Figura 5-5. Disposición del ensayo de la cuerda en la guitarra.

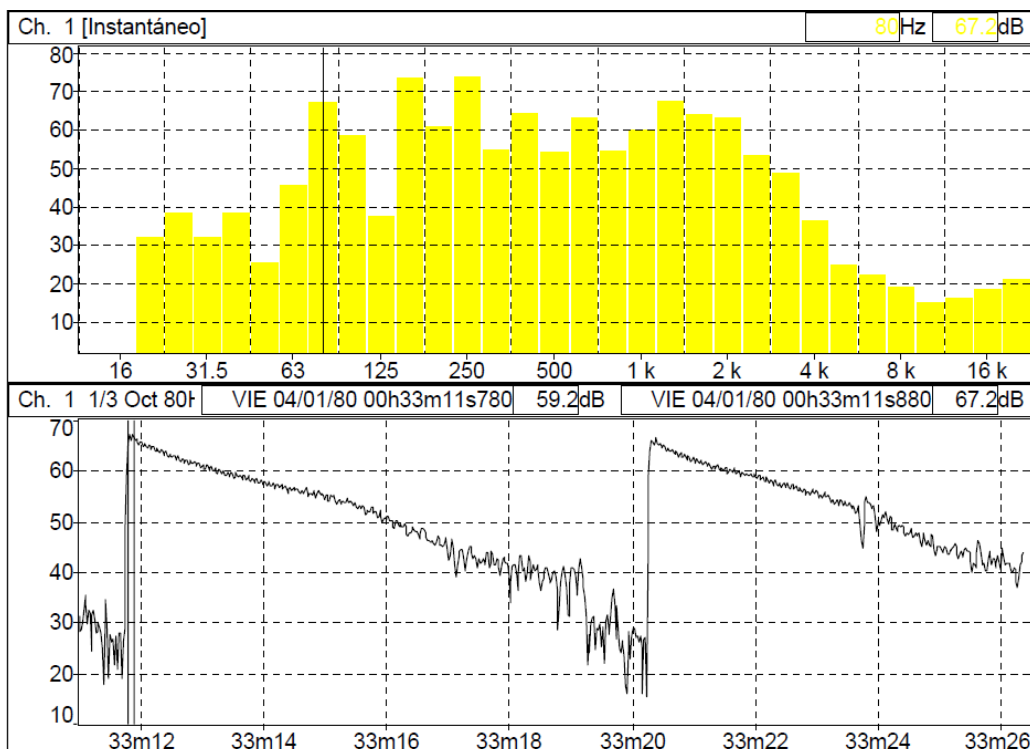


Figura 5-6. Medición acústica de la cuerda en la guitarra.

Con los resultados arrojados se observa que en el dominio de las frecuencias una de las principales respuestas se da en el entorno de la frecuencia natural de la sexta cuerda, es decir, 82.41 Hz. Esta respuesta no será la mayor, sino que habrá otras respuestas dominantes porque en este ensayo al vibrar la cuerda, esta excita a la tapa, por lo tanto, esto corrobora la afirmación que dan los luthiers debido a su experiencia que la tapa es la que da la complejidad armónica de la guitarra.

Otro resultado que arroja este ensayo es que hay una variación de sonoridad entre los dos ensayos. En la cuerda exenta se llega al máximo de 55.6 dB, mientras que con la cuerda dispuesta en la guitarra se llega al máximo de 67.2 dB.

5.4 Validación primera hipótesis

En este tercer ensayo se ha pretendido validar la primera hipótesis, es decir verificar que la tapa se excita porque el puente hace de nexo entre las cuerdas y la tapa. En este caso se ha colocado la guitarra y la cuerda exenta lo más próximas posible y se ha hecho vibrar la cuerda exenta.



Figura 5-7. Disposición del ensayo para la validación de la primera hipótesis.

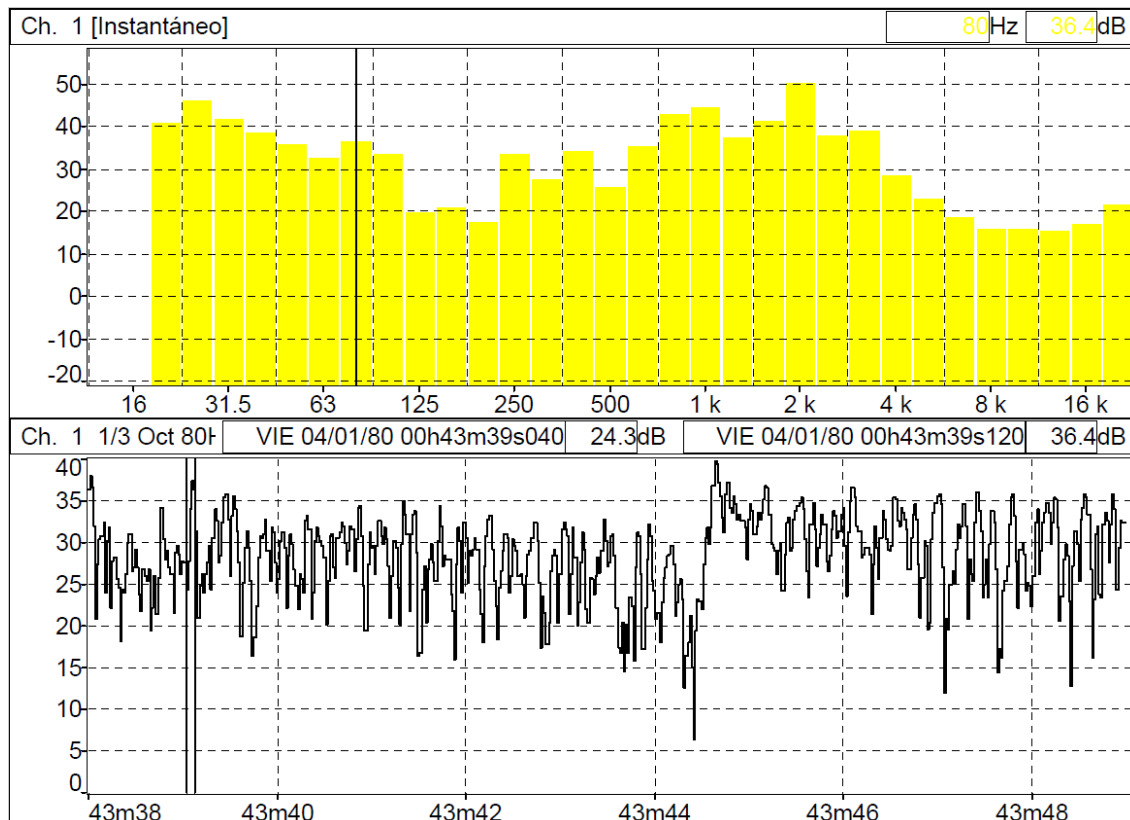


Figura 5-8. Medición acústica para la validación de la primera hipótesis.

Con los resultados arrojados tras el ensayo, se ve que la sonoridad baja, esto es porque la configuración del ensayo ha cambiado, pero en este ensayo no se busca un valor cuantitativo sino cualitativo, por lo tanto cualitativamente la respuesta en el régimen de las frecuencias es prácticamente idéntico a la respuesta del primer ensayo (cuerda exenta), esto constata que la tapa no vibra por simpatía a la vibración de las cuerdas cuando estas vibran en su cercanía, sino por la acción del puente que hace de nexo, por lo tanto se valida la primera hipóte

5.5 Validación segunda hipótesis

Esta hipótesis está validada por el luthier argentino Ricardo Louzao que construyó una guitarra en la que se podía desacoplar la caja de resonancia, compuesta en ese caso por aros y fondos, del resto de la guitarra. Tocando esta guitarra sin caja de resonancia y con caja de resonancia es inmediato validar esta segunda hipótesis.

6 CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos observa que las reacciones de las cuerdas oscilarán en torno al punto de equilibrio estático cuando son pulsadas. Además, el sonido de una cuerda vibrando aislada será distinto al de la cuerda colocada en la guitarra. La diferencia será que gracias a la guitarra el sonido de la cuerda se ve amplificado y además obtiene una riqueza tímbrica ya que el espectro de frecuencias cambia.

Del estudio de la tapa se puede comprender el funcionamiento dinámico de la guitarra, siendo los refuerzos y contrarrosetas los que evitan la rotura en la boca y en la zona estrecha entre los dos lóbulos de tapa, mientras que las barras armónicas evitan la rotura de la zona donde se producen los máximos desplazamientos.

Del modelo original de Torres se concluye que hay margen para optimizar el modelo cambiando convenientemente las secciones de los distintos elementos, de manera que se obtiene un modelo con una energía de vibración significativamente mayor.

Comparando el modelo original de Torres con el modelo sin armar y con el modelo óptimo, se ve como flexibilizando la tapa aumenta la energía de vibración. El modelo óptimo consigue ajustar la resistencia flexibilizando la tapa y por tanto mejorando la respuesta del original de Torres.

7 AMPLIACIÓN Y ESTUDIOS FUTUROS

El estudio realizado perseguía entender el funcionamiento dinámico de la guitarra española y optimizar el modelo de Torres. No obstante, a partir de estos estudios se pueden abrir dos caminos para ampliar conocimientos acerca de la guitarra:

- Buscar un óptimo sin el corsé de mejorar el modelo preliminar de Torres, investigando nuevas maderas o materiales, nuevas geometrías y disposiciones de los elementos que conforman la tapa de la guitarra.
- Ampliar el conocimiento de la dinámica de la guitarra española y constatar las teorías propuestas por los distintos luthiers mediante prueba y error a lo largo del último siglo.

REFERENCIAS

[1] A. Romero, P. Galvín Becerra & M. Solís. Apuntes para el Análisis de Estructuras. Universidad de Sevilla.

Departamento de medios continuos. 2017.

[2] Denis Bustins Molina. Estudio cuantitativo de la calidad sonora de una guitarra española. Universidad Politécnica de Cataluña. 2017.

[3]<https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?startat=pt05ch17s02abm04.html>

[4]<https://www.cuerdasguitarra.com/home/8-daddario-pro-arte-ej45-cuerdas-guitarra-clasica-flamenca-019954121266.html>

[5] Denis Bustins Molina. Estudio cuantitativo de la calidad sonora de una guitarra española. Universidad Politécnica de Cataluña. 2017.

[6] A. Ezcurra. Influence of the material constants on the low frequency modes of a free guitar plate. Universidad Pública de Navarra. Departamento de física. 1994.

[7] Ramón Argüelles, Arriaga Martitegui. Estructuras de madera, diseño y Cálculo. 2008.