

# Trabajo Fin de Grado

## Grado en Ingeniería Civil

### Análisis de soportes compuestos mediante el Método de los Elementos Finitos según la EAE.

Autora: Marta Isabel González Martínez

Tutor: Luis Rodríguez de Tembleque Solano

Dpto. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Civil

# **Análisis de soportes compuestos mediante el Método de los Elementos Finitos según la EAE.**

Autor:

Marta Isabel González Martínez

Tutor:

Luis Rodríguez de Tembleque Solano

Profesor titular

Dpto. de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019



Trabajo Fin de Grado: Análisis de soportes compuestos mediante el Método de los Elementos Finitos según la EAE.

Autor: Marta Isabel González Martínez

Tutor: Luis Rodríguez de Tembleque  
Solano

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El secretario del Tribunal



*A mis padres*

*A mis amigos*



# AGRADECIMIENTOS

---

En primer lugar, quería dar las gracias a mi tutor, el profesor Luis, por la paciencia y la constancia con la que me ha ayudado en este trabajo, ante las muchas dudas que me han surgido. Tomé la decisión de realizar el proyecto específicamente con él y no podría estar más agradecida por ello.

Quería agradecer a mis padres también, en concreto a mi madre, por la confianza todos estos años de carrera, y por creer en mí sobre todo cuando yo no lo hacía. Por supuesto, a mis hermanas también, por apoyarme siempre que lo he necesitado.

A mis compañeros de clase que han estado conmigo desde el principio: Lorena, Carlos y Olga. En concreto a Olga, con la que he pasado más horas estos 6 años que con nadie, en tantos trabajos y exámenes y días de biblioteca (y los que nos quedan), por ayudarme siempre en todos los aspectos. También a Antonia e Isabel, por el apoyo constante.

A mi buena amiga Cristina Callejas, que vivió el curso Erasmus conmigo, y compartió conmigo esa aventura con todas sus alegrías e inseguridades.

También a mis amigos más cercanos, en especial a Cristina, María y Carmen, por saber disfrutar más que nadie, y siempre creer en mí y vivir mis alegrías como si fueran suyas. A Carlota y Laura, por todos los buenos consejos. A Ana por la sensatez y seguridad que me ha aportado en estos años.

No quería olvidarme de muchas otras personas que han estado conmigo en este camino, como mis amigos de Milán, mis profesores de la Universidad de Sevilla y de mi escuela de inglés, que han jugado también un papel fundamental en mi formación profesional y personal.

En especial, quería dar las gracias a mi gran amiga Olga, por confiar en mí más que nadie y no dejar de hacerlo nunca.



# RESUMEN

---

El presente trabajo de fin de grado consiste en el análisis de la estabilidad de los soportes compuestos metálicos, a través de un estudio de las cargas de pandeo que llevan a la inestabilidad de diferentes ejemplos de soportes. Dichas cargas serán calculadas con un método teórico, propuesto por la Instrucción Española de Acero Estructural (EAE) [2], y comparadas con valores numéricos obtenidos a través del Método de los Elementos Finitos. El estudio que se ha realizado ha permitido conocer el comportamiento de los soportes cambiando sus propiedades geométricas, como la distancia entre cordones o la distancia entre puntos de enlace, o incluso el número de cordones, habiendo estudiado soportes con 2, 3 y 4 de ellos. También se han añadido parámetros como una imperfección inicial. Para ello, se emplearán dos softwares comerciales diferentes, el de cálculo Matlab, y el de Elementos Finitos ANSYS.

# SUMMARY

---

The aim of this thesis is to analyse the instability phenomenon in steel built-up compression columns, through the calculation of the buckling loads of various examples of built-up members, that will be obtained with an analytical method, using the official Spanish Regulation, and a numerical method, with a Finite Element Method code. Some geometric parameters of the examples will change in order to study the behaviour of the columns, like the distance in between chords or in between the lacing points, as well as analysing columns with 2, 3 or 4 chords. Also, it has been considered the influence of an initial imperfection. To obtain these buckling loads two commercial software will be used, one for calculation only, which will be Matlab, and the other one to carry out the Finite Element Analysis, which will be Ansys.

# ÍNDICE DE TEXTO

---

Agradecimientos .....	ix
Resumen .....	xi
Summary .....	xi
Índice de tablas .....	xiv
Índice de gráficas .....	xv
Índice de figuras .....	xvi
1. Introducción .....	1
<b>1.1 Motivación del proyecto.</b> .....	<b>1</b>
<b>1.2 Objetivos.</b> .....	<b>2</b>
<b>1.3 Organización del proyecto.</b> .....	<b>3</b>
2. Inestabilidad de soportes .....	4
<b>2.1 Introducción al pandeo.</b> .....	<b>4</b>
<b>2.2 Pandeo de Euler.</b> .....	<b>5</b>
<b>2.3 Resolución general del problema lineal.</b> .....	<b>8</b>
2.3.1 Soporte empotrado-libre.....	9
2.3.2 Soporte empotrado en ambos extremos.....	10
2.3.3 Conceptos de longitud de pandeo y esbeltez.....	11
<b>2.4 Pandeo de barras con imperfecciones iniciales.</b> .....	<b>12</b>
2.4.1 Compresión en una columna con deformaciones previas. ....	12
3. Soportes Compuestos .....	16
<b>3.1 Introducción y definición.</b> .....	<b>16</b>
<b>3.2 Tipología.</b> .....	<b>17</b>
3.2.1 Soportes compuestos triangulados. ....	17
3.2.2 Soportes compuestos empresillados.....	18
<b>3.3 Cálculo y dimensionamiento.</b> .....	<b>19</b>
3.3.1 Introducción al cálculo bajo pandeo de elementos uniformes comprimidos.....	19
3.3.2 Dimensionamiento de soportes compuestos comprimidos según la EAE [2]. ....	23
4. Análisis con el método de los elementos finitos. Ansys. ....	29
<b>4.1 Introducción.</b> .....	<b>29</b>
<b>4.2 Introducción al pandeo global de estructuras.</b> .....	<b>30</b>
<b>4.3 Metodología del MEF.</b> .....	<b>31</b>
<b>4.4 Introducción a Ansys.</b> .....	<b>32</b>

4.4.1	Análisis de pandeo con Ansys.....	32
4.4.2	Elementos utilizados. ....	33
5.	Análisis de soportes compuestos enlazados en celosía. ....	35
<b>5.1</b>	<b>Introducción. ....</b>	<b>35</b>
<b>5.2</b>	<b>Metodología y variables empleadas.....</b>	<b>35</b>
5.2.1	Análisis teórico.....	36
5.2.2	Análisis mediante Elementos Finitos. ....	37
<b>5.3</b>	<b>Caso 1: soporte compuesto en celosía, empotrado-libre, triangulado en V y con un plano de enlace.....</b>	<b>38</b>
5.3.1	Geometría y condiciones de contorno. ....	38
5.3.2	Resultados y análisis. ....	40
<b>5.4</b>	<b>Caso 2: soporte compuesto en celosía, biarticulado, triangulado en V y con un plano de enlace.....</b>	<b>47</b>
5.4.1.	Introducción y especificaciones sobre la geometría. ....	47
5.4.2	Resultados y análisis. ....	48
<b>5.5</b>	<b>Caso 3: soporte compuesto en celosía, biarticulado, triangulado en K y con dos planos de enlace.....</b>	<b>61</b>
5.5.1.	Introducción y especificaciones sobre la geometría. ....	61
5.5.2	Resultados y análisis. ....	63
<b>5.6</b>	<b>Caso 4: soporte compuesto en celosía, empotrado-libre, triangulado en K y con tres planos de enlace.....</b>	<b>72</b>
5.6.1.	Introducción y especificaciones sobre la geometría. ....	72
5.6.2	Análisis en Ansys y obtención del modelo equivalente. ....	77
5.6.3	Resultados y análisis. ....	86
6.	Conclusión del proyecto y trabajos futuros. ....	96
<b>6.1</b>	<b>Resumen.....</b>	<b>96</b>
<b>6.2</b>	<b>Conclusiones.....</b>	<b>96</b>
<b>6.3</b>	<b>Línea futura de trabajo. ....</b>	<b>97</b>
Referencias	.....	99
Anexos	.....	100
<b>Anexo 1:</b>	<b>Código de Matlab para los casos de estudio. ....</b>	<b>100</b>
<b>Anexo 2:</b>	<b>Código de Ansys para los casos de estudio. ....</b>	<b>105</b>

# ÍNDICE DE TABLAS

---

<b>Tabla 1.</b> Valores de las cargas de pandeo (kN) de los cordones del primer caso.....	41
<b>Tabla 2.</b> Valores de las cargas de pandeo (kN) de los enlaces del primer caso. ....	42
<b>Tabla 3.</b> Resultados del MEF (kN) para el primer caso con 3 módulos. ....	43
<b>Tabla 4.</b> Resultados del MEF (kN) para el primer caso con 8 módulos. ....	44
<b>Tabla 5.</b> Valor medio de la relación entre las cargas de pandeo de ambos análisis para el primer caso. .....	47
<b>Tabla 6.</b> Valores de las cargas de pandeo (kN) de los cordones del segundo caso. ....	49
<b>Tabla 7.</b> Valores de las cargas de pandeo (kN) de los enlaces del segundo caso.....	49
<b>Tabla 8.</b> Resultados de cargas de pandeo (kN) del segundo caso en Ansys para 3 módulos.....	51
<b>Tabla 9.</b> Resultados de cargas de pandeo (kN) del segundo caso en Ansys para 8 módulos.....	52
<b>Tabla 10.</b> Valor medio de la relación entre las cargas de pandeo de ambos análisis para el segundo caso. .....	60
<b>Tabla 11.</b> Valores de las cargas de pandeo (kN) de los cordones del tercer caso. ....	63
<b>Tabla 12.</b> Valores de las cargas de pandeo (kN) de los enlaces del tercer caso.....	64
<b>Tabla 13.</b> Resultados de cargas de pandeo (kN) del tercer caso en Ansys para 3 módulos.....	65
<b>Tabla 14.</b> Resultados de cargas de pandeo (kN) del tercer caso en Ansys para 8 módulos.....	66
<b>Tabla 15.</b> Valor medio de la relación entre las cargas de pandeo de ambos análisis para el tercer caso, con 3 módulos. ....	71
<b>Tabla 16.</b> Valor medio de la relación entre las cargas de pandeo de ambos análisis para el tercer caso, con 8 módulos. ....	71
<b>Tabla 17.</b> Tabla que recoge las comprobaciones del caso del cuarto ejemplo.....	86
<b>Tabla 18.</b> Valores de las cargas de pandeo (kN) de los cordones del cuarto caso. ....	86
<b>Tabla 19.</b> Valores de las cargas de pandeo (kN) de los enlaces diagonales del cuarto caso. ....	87
<b>Tabla 20.</b> Valores de las cargas de pandeo (kN) de los enlaces montantes del cuarto caso.....	87
<b>Tabla 21.</b> Valores de los resultados de Ansys (kN) del modelo equivalente del cuarto caso. ....	89
<b>Tabla 22.</b> Valores de los resultados de Ansys (kN) del modelo en Ansys del soporte real del cuarto caso. ....	92
<b>Tabla 23.</b> Valor medio de la relación entre las cargas de pandeo para el cuarto caso. ....	94

# ÍNDICE DE GRÁFICAS

---

<b>Gráfica 1.</b> Comparación de las cargas de pandeo de los cordones y enlaces del primer caso. ....	41
<b>Gráfica 2.</b> Comparación del pandeo global o local de los cordones del primer caso.....	42
<b>Gráfica 3.</b> Comparación entre resultados teóricos y del MEF para el caso 1. ....	43
<b>Gráfica 4.</b> Representación de la relación entre los resultados teóricos y los del MEF del caso 1. ....	46
<b>Gráfica 5.</b> Comparación de las cargas de pandeo de los cordones y enlaces del segundo caso.....	48
<b>Gráfica 6.</b> Comparación del pandeo global o local de los cordones del segundo caso.....	50
<b>Gráfica 7.</b> Comparación entre resultados teóricos y del MEF para el segundo caso con 3 módulos...	51
<b>Gráfica 8.</b> Comparación entre resultados teóricos y del MEF para el segundo caso con 8 módulos...	52
<b>Gráfica 9.</b> Representación de la relación entre los resultados teóricos y los del MEF del caso 2. ....	60
<b>Gráfica 10.</b> Comparación de las cargas teóricas de pandeo de los cordones y los enlaces del tercer caso. ....	63
<b>Gráfica 11.</b> Comparación entre resultados teóricos y del MEF para el tercer caso con 3 módulos....	64
<b>Gráfica 12.</b> Comparación entre resultados teóricos y del MEF para el tercer caso con 8 módulos....	65
<b>Gráfica 13.</b> Representación de la relación entre los resultados teóricos y los del MEF para el caso 3. ....	71
<b>Gráfica 14.</b> Comparación de las cargas de pandeo de los cordones y enlaces del cuarto caso. ....	86
<b>Gráfica 15.</b> Comparación del pandeo global o local de los cordones del cuarto caso. ....	88
<b>Gráfica 16.</b> Comparación entre resultados teóricos y del MEF para el modelo del cuarto caso.....	89
<b>Gráfica 17.</b> Comparación entre los resultados de Ansys con BEAM y LINK del soporte en triángulo. ....	92
<b>Gráfica 18.</b> Comparación entre los resultados de Ansys de los dos modelos del cuarto caso. ....	93
<b>Gráfica 19.</b> Relación entre los resultados del modelo equivalente en Ansys y los teóricos del cuarto caso. ....	94

# ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b> Ejemplo de pandeo global de un soporte compuesto empotrado-libre.....	1
<b>Figura 2.</b> Ejemplo de la interacción entre el pandeo global y local en los modos de pandeo de un soporte. .....	2
<b>Figura 3.</b> Estabilidad del equilibrio.....	4
<b>Figura 4.</b> Representación de la región que define los casos de equilibrio. ....	5
<b>Figura 6.</b> Columna de Euler.....	6
<b>Figura 7.</b> Primeros 3 modos de pandeo de la columna de Euler.....	7
<b>Figura 8.</b> Comportamiento de la columna de Euler.....	8
<b>Figura 9.</b> Columna con condiciones de contorno sin especificar.....	8
<b>Figura 10.</b> Columna empotrada-libre.....	9
<b>Figura 11.</b> Soporte empotrado en ambos extremos.....	10
<b>Figura 12.</b> Valores de longitudes de pandeo.....	12
<b>Figura 13.</b> Columna con flexión inicial.....	13
<b>Figura 14.</b> Curvas carga-deflexión para columnas con deformación inicial.....	15
<b>Figura 15.</b> Configuración habitual de un elemento compuesto, en planta [4]. ....	16
<b>Figura 16.</b> Geometría de las columnas compuestas trianguladas [4]. ....	17
<b>Figura 17.</b> Disposición correcta de la triangulación en los planos de enlace [5]. ....	18
<b>Figura 18.</b> Disposición de columna compuesta empresillada [5]. ....	19
<b>Figura 19.</b> Tabla 6.1 de la normativa que determina el coeficiente $\alpha$ . ....	20
<b>Figura 20.</b> Tabla para determinar la curva de pandeo de una sección en función de su geometría. ....	21
<b>Figura 21.</b> Gráfica que permite calcular directamente el coeficiente de imperfección $\chi$ . ....	22
<b>Figura 22.</b> Columna modelo (a), con triangulación (b) o empresillada (c). ....	23
<b>Figura 23.</b> Expresiones para la rigidez a cortante $S_v$ según la geometría de la triangulación. ....	25
<b>Figura 24.</b> Diagrama de esfuerzos en un elemento compuesto empresillado. ....	26
<b>Figura 25.</b> Tabla para determinar el factor de eficiencia $\mu$ . ....	27
<b>Figura 26.</b> Discretización de una probeta de ensayo uniaxial con mayor o menor precisión. ....	30
<b>Figura 27.</b> Ejemplo de un dominio discretizado. ....	31
<b>Figura 28.</b> Representación de la geometría del BEAM188. ....	33
<b>Figura 29.</b> Esquema de la geometría de un elemento LINK180. ....	34
<b>Figura 30.</b> Tabla con 3 tipos de configuración de soportes y sus rigideces a cortante. ....	35
<b>Figura 31.</b> Representación del soporte del primer caso. ....	38
<b>Figura 32.</b> Representación 3D del mallado soporte del primer caso.....	39
<b>Figura 33.</b> Zoom de detalle a la cabeza del soporte del primer caso. ....	40
<b>Figura 34.</b> Primer modo de pandeo para el primer caso con 3 módulos y $h_0/L= 0.04$ . ....	44
<b>Figura 35.</b> Primer modo de pandeo para el primer caso con 8 módulos y $h_0/L= 0.04$ . ....	45
<b>Figura 36.</b> Primer modo de pandeo para el primer caso con 3 módulos y $h_0/L= 0.2$ . ....	45
<b>Figura 37.</b> Primer modo de pandeo para el primer caso con 8 módulos y $h_0/L= 0.2$ . ....	46
<b>Figura 38.</b> Representación de la geometría del segundo caso.....	47
<b>Figura 39.</b> Primer modo de pandeo local del segundo caso para 3 módulos y $h_0/L = 0.04$ . ....	53
<b>Figura 40.</b> Primer modo de pandeo global del segundo caso para 3 módulos y $h_0/L = 0.04$ . ....	54
<b>Figura 41.</b> Primer modo de pandeo local del segundo caso para 3 módulos y $h_0/L = 0.08$ . ....	54
<b>Figura 42.</b> Primer modo de pandeo global del segundo caso para 3 módulos y $h_0/L = 0.08$ . ....	55
<b>Figura 43.</b> Primer modo de pandeo local del segundo caso para 3 módulos y $h_0/L = 0.2$ . ....	55
<b>Figura 44.</b> Primer modo de pandeo global del segundo caso para 3 módulos y $h_0/L = 0.2$ . ....	56
<b>Figura 45.</b> Primer modo de pandeo local del segundo caso para 8 módulos y $h_0/L = 0.04$ . ....	56
<b>Figura 46.</b> Primer modo de pandeo global del segundo caso para 8 módulos y $h_0/L = 0.04$ .....	57

<b>Figura 47.</b> Primer modo de pandeo local del segundo caso para 8 módulos y $h_0/L = 0.08$ .....	57
<b>Figura 48.</b> Primer modo de pandeo global del segundo caso para 8 módulos y $h_0/L = 0.08$ .....	58
<b>Figura 49.</b> Primer modo de pandeo local del segundo caso para 8 módulos y $h_0/L = 0.2$ .....	58
<b>Figura 50.</b> Primer modo de pandeo global del segundo caso para 8 módulos y $h_0/L = 0.2$ .....	59
<b>Figura 51.</b> Representación de la geometría del soporte del tercer caso, alzado y perspectiva para el de 3 módulos (a y b) y perspectiva para el de 8 módulos (c).....	61
<b>Figura 52.</b> Mallado en Ansys del soporte del tercer caso para 3 módulos.....	62
<b>Figura 53.</b> Detalle de la base del mallado en Ansys del soporte del tercer caso para 3 módulos. ....	62
<b>Figura 54.</b> Primer modo de pandeo para el fallo de los enlaces en el tercer caso, soporte de 3 módulos y $h_0/L = 0.04$ .....	66
<b>Figura 55.</b> Primer modo de pandeo para el fallo de los cordones en el tercer caso, soporte de 3 módulos y $h_0/L = 0.04$ .....	67
<b>Figura 56.</b> Primer modo de pandeo para el fallo de los enlaces en el tercer caso, soporte de 3 módulos y $h_0/L = 0.2$ .....	67
<b>Figura 57.</b> Primer modo de pandeo para el fallo de los cordones en el tercer caso, soporte de 3 módulos y $h_0/L = 0.2$ .....	68
<b>Figura 58.</b> Primer modo de pandeo para el fallo de los enlaces en el tercer caso, soporte de 8 módulos y $h_0/L = 0.04$ .....	68
<b>Figura 59.</b> Primer modo de pandeo para el fallo de los cordones en el tercer caso, soporte de 8 módulos y $h_0/L = 0.04$ .....	69
<b>Figura 60.</b> Primer modo de pandeo para el fallo de los enlaces en el tercer caso, soporte de 8 módulos y $h_0/L = 0.2$ .....	69
<b>Figura 61.</b> Primer modo de pandeo para el fallo de los cordones en el tercer caso, soporte de 8 módulos y $h_0/L = 0.2$ .....	70
<b>Figura 62.</b> Fotografía del soporte real en el que se basa el cuarto caso. ....	73
<b>Figura 63.</b> Representación de la geometría del soporte del cuarto caso: alzado del ejemplo de 3 módulos y de 8 módulos.....	74
<b>Figura 64.</b> Ejemplo del mallado en Ansys del soporte de 3 módulos del cuarto caso.....	75
<b>Figura 65.</b> Detalle del mallado en Ansys del soporte de 3 módulos del cuarto caso. ....	76
<b>Figura 66.</b> Ejemplo del mallado en Ansys del soporte de 8 módulos del cuarto caso. ....	76
<b>Figura 67.</b> Detalle del mallado en Ansys del soporte de 8 módulos del cuarto caso. ....	77
<b>Figura 68.</b> Primer modo de pandeo del soporte real del cuarto caso para $h_0/L= 0.04$ m y 3 módulos. ....	78
<b>Figura 69.</b> Primer modo de pandeo del soporte real del cuarto caso para $h_0/L= 0.12$ m y 8 módulos. ....	78
<b>Figura 70.</b> Vista en planta del primer modo de pandeo del soporte del cuarto caso.....	79
<b>Figura 71.</b> Geometría de la triangulación del soporte equivalente para el modelo teórico del cuarto caso. ....	80
<b>Figura 72.</b> Vista en planta de a) soporte real b) modelo teórico equivalente para el estudio según la EAE [2].....	80
<b>Figura 73.</b> Representación de la geometría y el mallado en Ansys del modelo del soporte del cuarto caso. ....	81
<b>Figura 74.</b> Valores conocidos de $S_v$ , rigidez a cortante de un soporte compuesto. ....	82
<b>Figura 75.</b> Elemento diferencial del modelo del 4º soporte. ....	83
<b>Figura 76.</b> Elemento equivalente al diferencial. ....	83
<b>Figura 77.</b> Esquema del diagrama de tensiones en el ejemplo con cordones diferentes.....	85
<b>Figura 78.</b> Primer modo de pandeo del modelo del cuarto caso para 3 módulos y $h_0/L = 0.04$ .....	90
<b>Figura 79.</b> Primer modo de pandeo del modelo del cuarto caso para 3 módulos y $h_0/L = 0.2$ . ....	90
<b>Figura 80.</b> Primer modo de pandeo del modelo equivalente del cuarto caso para 8 módulos y $h_0/L = 0.04$ .....	91

**Figura 81.** Primer modo de pandeo del modelo equivalente del cuarto caso para 8 módulos y  $h_0/L = 0.2$ . ..... 91



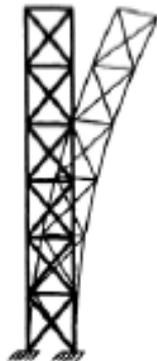
# 1. INTRODUCCIÓN

---

## 1.1 Motivación del proyecto.

Actualmente, en el ámbito de la construcción del acero, los soportes compuestos son estructuras a las que se acude con gran frecuencia cuando se necesita cubrir grandes longitudes o una capacidad portante elevada. Son muy frecuentes en edificios industriales o construcciones de grandes dimensiones, en oposición a soportes o columnas macizas, ya sean metálicas o de hormigón. La unión de diferentes elementos por medio de configuraciones en celosía permite aportar una rigidez y una resistencia impropia de elementos muy esbeltos, y además, de forma económica. Sin embargo, por ser estructuras especiales, la normativa sólo contiene un subapartado reducido para especificaciones sobre el cálculo.

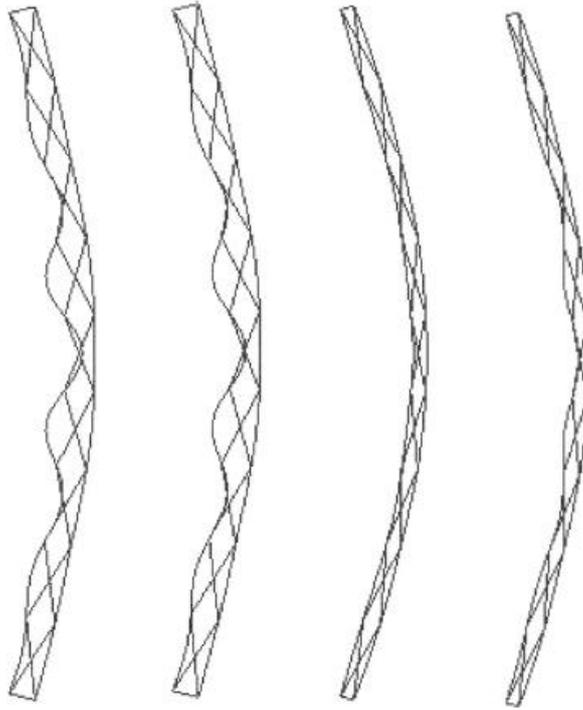
Los soportes compuestos son elementos susceptibles al fenómeno de inestabilidad por pandeo, ya que en general suelen presentar condiciones de contorno empotrado-libre, con una carga en su cabeza. El fallo por pandeo afecta a elementos comprimidos, y consiste en una flexión lateral repentina que ocurre cuando esa carga de compresión alcanza cierto valor, que se conoce como *carga de pandeo* o de *colapso*. El estudio del pandeo de barras simples está muy extendido, desde hace siglos ya, y puede llegar a incluir fenómenos tan complejos como el de la torsión, pero el análisis de los soportes compuestos no es sencillo, ya que intervienen muchos más factores al ser una estructura compuesta por varios elementos, donde cada uno soportará su carga correspondiente y se deformará de manera acorde con ella.



**Figura 1.** Ejemplo de pandeo global de un soporte compuesto empotrado-libre.

La comprobación de su resistencia, por tanto, requiere un estudio especial, ya que presentan *modos de pandeo globales*, de forma que falla el elemento completo, y *modos locales*, en los que solo falla uno de sus elementos. Además, las condiciones de contorno, como es habitual en el estudio del fenómeno de pandeo, tienen un papel fundamental en el análisis, y aplicarlas correctamente es muy importante.

Los métodos analíticos existentes no son tan complejos como para abarcar todas las variables constructivas de los elementos compuestos, reduciendo la comprobación a soportes simples que cumplan las condiciones que imponen, buscando asemejar la estructura entera a un elemento esbelto comprimido. Además, lo más difícil es analizar la interacción entre los diferentes elementos del soporte, y esta es la clave de su gran resistencia, llevando la configuración de la celosía a ser otra de las variables más significativas del estudio, junto con las condiciones de contorno. Un método numérico debidamente llevado a cabo, en este proyecto en concreto será el MEF, nos ayuda a analizar esta interacción de manera mucho más concreta, pudiendo obtener resultados que dan la posibilidad de extender las premisas de la normativa hacia soportes más complejos.



**Figura 2.** Ejemplo de la interacción entre el pandeo global y local en los modos de pandeo de un soporte.

La motivación de este proyecto, por tanto, es ampliar el rango de posibilidades constructivas de los elementos compuestos, llevando el método teórico de la EAE [2] a otras configuraciones, garantizando su estabilidad, teniendo en cuenta los resultados de métodos numéricos que debidamente analizados pueden proporcionar información sobre cualquier geometría de soporte compuesto que quiera analizarse. De esta manera, a través del estudio del comportamiento de soportes con Elementos Finitos, podemos llegar a conclusiones que ayuden a generar modelos teóricos más complejos, tomando nota de qué variables influyen y comprobando posteriormente que ambos modelos sean coherentes entre sí.

## 1.2 Objetivos.

Como objetivos, se buscará obtener resultados que ayuden a entender mejor el comportamiento de los soportes, la interacción entre sus elementos, y que sean útiles de cara a un posible dimensionamiento. También se propondrá un posible método teórico para una configuración variable, especificando el proceso de manera que pueda aplicarse en otros casos, y se comprobará la influencia de los parámetros más importantes que influyen en el comportamiento. En concreto, se estudiará cómo afecta a la resistencia a pandeo de los soportes los siguientes parámetros:

- El tipo de sección que se emplee en los diferentes elementos, ya sean cordones o enlaces, estudiando el comportamiento de **secciones de pared delgada, abiertas o cerradas**, como pueden ser perfiles tubulares circulares, IPE, o en L.
- Las **condiciones de contorno** del soporte, cruciales en el análisis de cualquier estructura, y muy importantes en el caso que nos ocupa ya que constructivamente los soportes son versátiles, pero tradicionalmente su uso se reduce a unas condiciones tales que está empotrado en su base y libre en la cabeza.
- La **esbeltez geométrica**, analizada directamente variando el ancho del soporte, es decir, la distancia entre los cordones que lo conforman, sin modificar la altura total del mismo. Será por tanto el parámetro  $\frac{h_0}{L}$ , donde  $h_0$  corresponde a la distancia entre cordones y  $L$  es su longitud.

- La estructura en celosía que conforma el o los planos de enlace entre los cordones. Se estudiará a través del **número de puntos de enlace, o módulos**, que será el parámetro **n**. Para relacionarlo con los parámetros geométricos del soporte tendremos  $n = L/a$ , donde **a** corresponde a la distancia entre puntos de enlace en los cordones.
- El último parámetro será el **número de cordones**. Su importancia es clave ya que modifica completamente la configuración del análisis teórico, que tradicionalmente se limita a estudiar dos cordones idénticos contenidos en el mismo plano.

### 1.3 Organización del proyecto.

El trabajo se divide y organiza de la siguiente manera:

- **Capítulo 1: Introducción.** En este primer capítulo se incluye la descripción general del tema del proyecto, con una explicación de qué es un elemento compuesto y por qué es importante analizar su resistencia ante un fenómeno en concreto. También se recogen nociones sobre la motivación y los objetivos del análisis, que se extenderán más adelante.
- **Capítulo 2: Inestabilidad de soportes.** A continuación, el segundo capítulo se centra en el fenómeno que afecta a los soportes, el pandeo. Se aporta una descripción detallada y analítica de él y como se calcula la resistencia de un elemento simple al que le afecte. Incluye también una introducción general a cómo afecta a una estructura más compleja.
- **Capítulo 3: Soportes compuestos.** En este apartado se concreta el elemento de estudio de este proyecto: el soporte compuesto. Se detallan aspectos constructivos sobre ellos, los tipos de configuración más empleados, y los elementos que los componen. También se incluyen las directrices y el método analítico de la normativa, con el que se trabajará más adelante.
- **Capítulo 4: Análisis con el Método de los Elementos Finitos (MEF).** Este cuarto capítulo se centra en el MEF, se describe en qué consiste este método numérico, y como puede aplicarse de cara al estudio del pandeo. También se incluyen detalles del programa informático que lo implementa y que se usará en este proyecto.
- **Capítulo 5: Análisis de soportes.** Este capítulo es el más extenso del proyecto, ya que incluye el análisis de diferentes ejemplos de soportes, con propiedades geométricas y configuraciones diferentes, así como los resultados del estudio y las conclusiones concretas de cada ejemplo.
- **Capítulo 6: Conclusiones generales y posibles trabajos futuros.** El último apartado del proyecto se centra en aunar todas las conclusiones del anterior, cumpliendo los objetivos fijados, y aportando ideas sobre posibles estudios futuros relacionados con el tema.

## 2. INESTABILIDAD DE SOPORTES

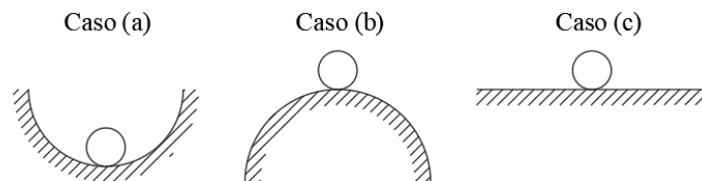
### 2.1 Introducción al pandeo.

El fenómeno de inestabilidad relevante para el estudio de este trabajo se conoce como pandeo, y afecta principalmente a elementos comprimidos esbeltos, por lo que incumbe a los soportes como pilares y columnas.

Este fenómeno puede describirse como una flexión lateral repentina causada por una carga axial de compresión de cierto valor, es decir, para cargas de valores reducidos el fenómeno no se manifiesta. Las deformaciones que el elemento sufre son inadmisibles, llevándolo a la rotura, haciendo que ese valor a partir del cual se produce pandeo sea un valor de diseño imprescindible en elementos esbeltos comprimidos. Un elemento puede pandear también debido a un momento torsor excesivo también, pero en este trabajo sólo se contemplará el pandeo por flexión.

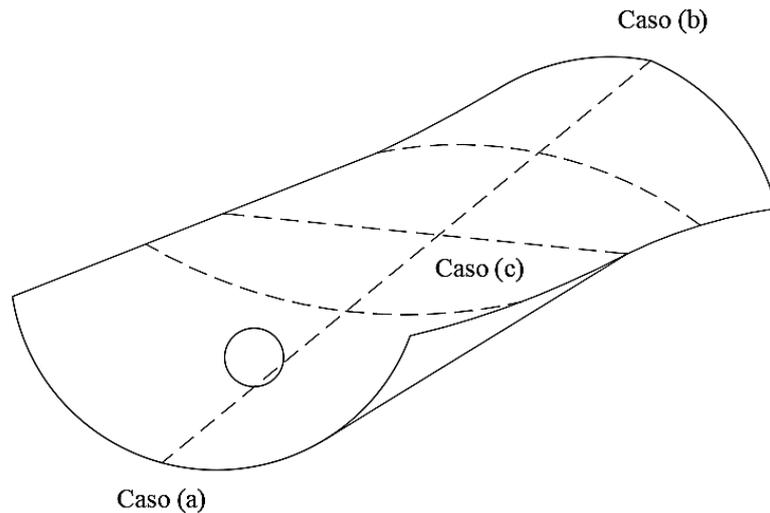
Además, hay diversos modos de fallo que se presentan cuando un soporte pandea. Se definen dos tipos principales de pandeo, el pandeo *local*, y el pandeo *global*. Cuando una estructura falla por pandeo *local* quiere decir que el fenómeno ocurre en elementos aislados de la misma, sin que se transfiera al resto de los elementos. De esta forma, el eje principal del elemento no se distorsiona. Por otro lado, el pandeo *global* afecta al elemento completo, y responde a la teoría de vigas que se expondrá más adelante. Los elementos no tienen por qué alcanzar la carga de pandeo para que la estructura general pandee.

Para comprender mejor por qué el elemento falla de forma repentina puede aludirse a la analogía de una bola rígida que se encuentra en equilibrio en tres situaciones distintas:



**Figura 3.** Estabilidad del equilibrio.

El primer caso (a) puede definirse como equilibrio estable, ya que si la bola sufre una perturbación y se desplaza ligeramente de su posición inicial, volverá a ella. En el segundo caso (b), sin embargo, ocurre todo lo contrario, la bola se alejará de la posición inicial de equilibrio, por lo que tendremos equilibrio inestable. Por último, el tercer caso (c) se refiere a un equilibrio neutral ya que la bola vuelve a encontrar la estabilidad tras la perturbación, pero no vuelve a la posición de inicio. La estabilidad de cualquier elemento queda definida según la siguiente región, en la que estos tres casos están relacionados:



**Figura 4.** Representación de la región que define los casos de equilibrio.

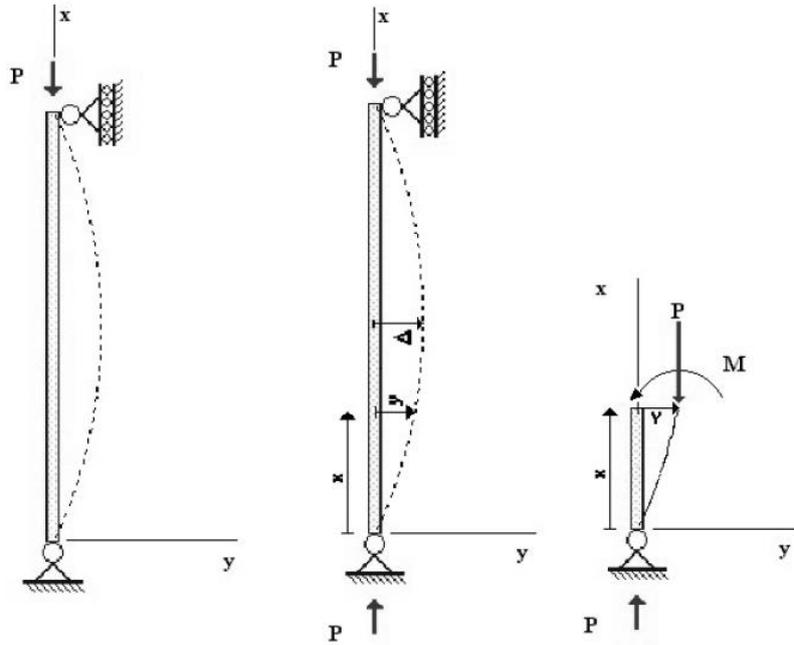
La analogía con el problema de pandeo se produce ya que al comprimir la columna en cuestión ésta pierde su posición de equilibrio inicial y, si la carga tiene un valor de importancia, llegará a un estado de equilibrio neutral al deformarse pero no fallará ante la carga. Se demuestra que para llegar al estado de equilibrio inestable el elemento pasa por el neutral, siendo la carga que provoca que pase al equilibrio inestable la *carga crítica de pandeo*. Este valor de carga es fundamental para el estudio del fenómeno y su determinación se expone más adelante.

## 2.2 Pandeo de Euler.

El problema más simplificado para el análisis de pandeo se conoce como Columna de Euler, quien analizó el comportamiento de una columna ideal para conocer su carga crítica. Para continuar con el análisis del modelo teórico propuesto por Euler se seguirán las directrices de la publicación “*Principles of Structural Theory*”, de Alexander Chajes [1].

Es importante tener en cuenta para el estudio del pandeo que los elementos siempre tendrán ciertas imperfecciones mecánicas y geométricas con respecto a un modelo teórico ideal. Estas imperfecciones pasan por cierta deflexión del elemento, es decir, que no sea completamente recto, imperfecciones en la sección debido al proceso de fabricación o debido a que la carga no esté aplicada en su eje central.

La columna de Euler considera un elemento perfecto totalmente recto y con la carga centrada, de sección igual y continua en toda su longitud, cuyo material es homogéneo y tiene un comportamiento elástico perfecto. Además, también asume la hipótesis básica de la elasticidad que toma pequeñas deformaciones.



**Figura 5.** Columna de Euler.

La figura 6 representa el comportamiento de la columna al ser comprimida, sufriendo una deflexión máxima en su centro de valor  $\Delta$ . Analizando la sección a una distancia  $x$ , según [1], que sufre un desplazamiento horizontal  $y$  desde la posición inicial, y sobre la que se aplica una carga  $P$ , ésta soporta un momento interno de valor:

$$M_x = -E \cdot I \cdot y''$$

Donde se relaciona el módulo de elasticidad del material  $E$  con la inercia de la sección  $I$  y la curvatura de esta,  $y''$ .

El momento externo que se aplica es  $M = P \cdot y$ , por lo que por equilibrio resulta:

$$P \cdot y + E \cdot I \cdot y'' = 0 \quad (2.1)$$

Esta ecuación se resuelve introduciendo la notación:

$$k^2 = \frac{P}{E \cdot I} \quad (2.2)$$

Con lo que resulta:

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (2.3)$$

Cuya solución es:

$$y = A \cdot \text{sen } kx + B \cdot \text{cos } kx \quad (2.4)$$

Para hallar las constantes  $A$  y  $B$  imponemos las condiciones de contorno, según la figura 6:

$$\begin{aligned} y &= 0 \text{ para } x = 0 \\ y &= 0 \text{ para } x = L \end{aligned} \quad (2.5)$$

Siendo  $L$  la longitud total de la columna. Imponiendo la primera de estas ecuaciones obtenemos  $B = 0$ , imponiendo la segunda:

$$0 = A \cdot \text{sen}(kL)$$

La solución de esta ecuación pasa por tomar nulo alguno de los dos factores del producto. Para un valor  $A = 0$  resulta la solución trivial, ya que es conocido que para cualquier carga  $P$  el elemento estará en equilibrio mientras éste permanezca perfectamente recto. Sin embargo, para que  $\text{sen}(kL) = 0$ , el valor  $kL$  debe corresponder a cualquier múltiplo del valor en el que el seno es nulo, es decir, para  $\pi$ . Por tanto:

$$k \cdot L = n \cdot \pi \quad (2.6)$$

Donde  $n$  toma valores  $n = 1, 2, 3 \dots$ . Sustituyendo (2-6) en (2-2) se obtiene la carga:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (2.7)$$

De esta expresión para  $n = 1$  tenemos el valor mínimo de la carga que provoca que la columna pierda su estado de equilibrio estable, volviendo a la analogía de la bola rígida. Este valor se conoce como *carga crítica de Euler* y marca el paso al fenómeno de pandeo.

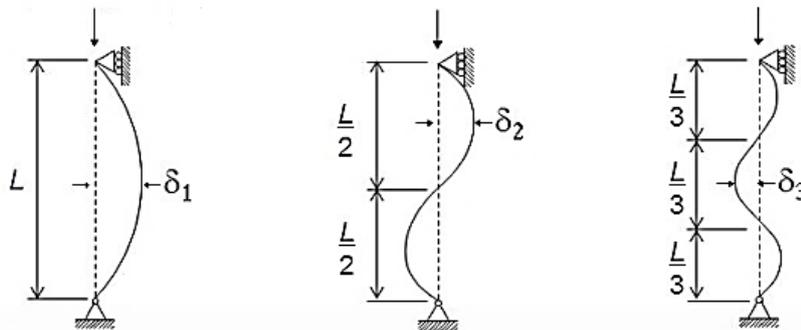
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{L^2} \quad (2.8)$$

Conocemos también la deformada de la columna:

$$y = A \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.9)$$

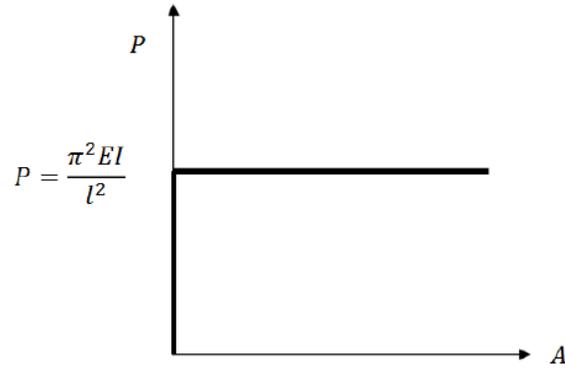
Cabe denotar que esta expresión, sin embargo, no es válida para obtener valores concretos de la deformación, ya que  $A$  puede tomar diferentes valores porque depende de  $\text{sen}(kL) = 0$ . Conocemos la forma de la deformada de la columna pero no su amplitud. Para cada valor de  $n$  se obtiene una deformada diferente.

Se denomina *modo de pandeo* a la deformada que corresponde a cada valor de  $n$  y que determina una posición de equilibrio de la barra que no es la inicial, es decir, aquella de la columna recta. En la figura siguiente se muestran los 3 primeros *modos de pandeo* de la columna de Euler, para los valores de  $n = 1, n = 2$  y  $n = 3$ :



**Figura 6.** Primeros 3 modos de pandeo de la columna de Euler.

El comportamiento del modelo ideal de Euler se puede representar como:

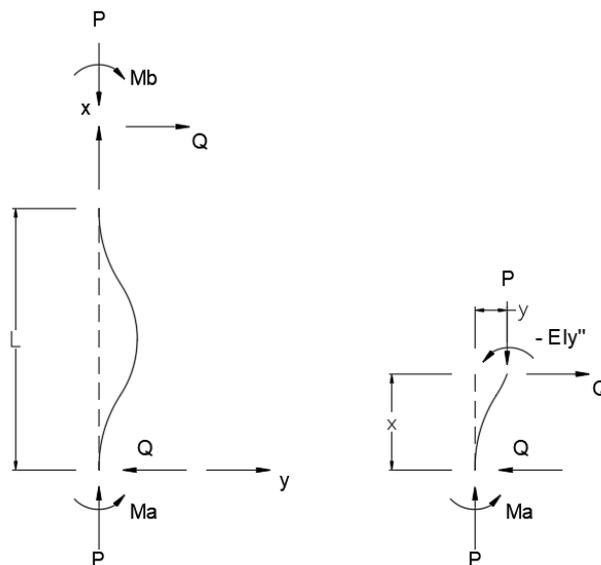


**Figura 7.** Comportamiento de la columna de Euler.

La columna debe permanecer recta hasta que se alcance la carga crítica, donde el equilibrio pasa a ser la situación deformada con una amplitud desconocida. En la gráfica se observa, por tanto, el hecho de que la carga crítica de Euler marque el cambio de equilibrio inicial a equilibrio inestable. Será de interés para este proyecto comparar esta gráfica con los modelos que se obtendrán posteriormente para columnas que no tengan un comportamiento tan ideal.

### 2.3 Resolución general del problema lineal.

El problema de Euler es, como ya se ha expuesto, un caso concreto de una columna que obedece a ciertas condiciones, entre ellas sus apoyos. El primer paso para generalizar es comprobar cómo afecta cualquier tipo de sustentación a una barra sometida a compresión. Para ello se expone el caso genérico de un elemento sin sustentación definida, como se observa en la figura 9:



**Figura 8.** Columna con condiciones de contorno sin especificar.

En el caso general siempre existirá un momento y un cortante actuando en la barra, cuyos valores irán variando para satisfacer las condiciones de contorno en un ejemplo concreto. Igualando el momento en cualquier sección con el momento externo que actúa tenemos:

$$P \cdot y + E \cdot I \cdot y'' = -Q \cdot x + M_A \quad (2.10)$$

La derivada segunda de esta ecuación con respecto a x resulta:

$$\frac{d^2}{dx^2} = P \cdot y'' + E \cdot I \cdot y'''' = 0 \quad (2.11)$$

Volviendo a introducir la notación del subapartado anterior, tal que  $k^2 = \frac{P}{E \cdot I}$ , la ecuación diferencial de cuarto grado resulta:

$$y'''' + k^2 y'' = 0 \quad (2.12)$$

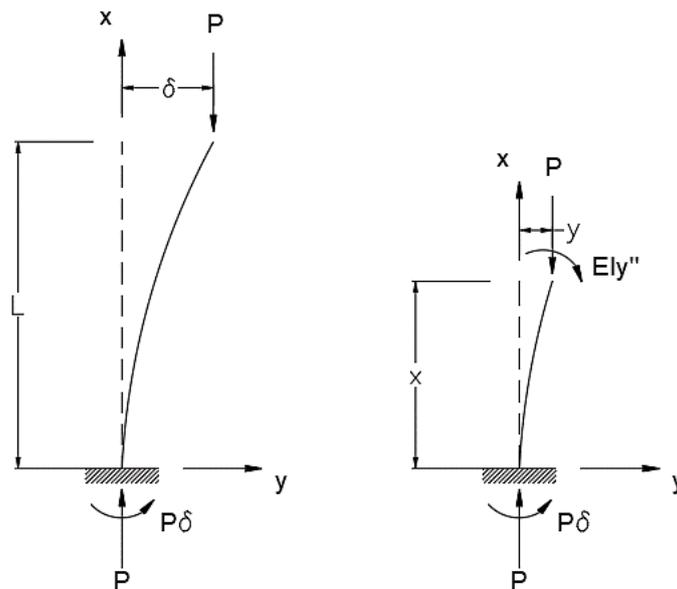
Cuya solución general tendrá cuatro parámetros y puede escribirse como:

$$y = C_1 \cdot \text{sen } kx + C_2 \cdot \text{cos } kx + C_3 \cdot x + C_4 \quad (2.13)$$

Estos parámetros se determinan imponiendo las condiciones de contorno del elemento en concreto. Para ilustrar la importancia de la sustentación en el problema de pandeo y definir varios términos de importancia se analizarán a continuación dos casos diferentes.

### 2.3.1 Soporte empotrado-libre.

En primer lugar se resolverá el caso de un soporte empotrado en su base y libre en su cabeza.



**Figura 9.** Columna empotrada-libre.

Como se observa en la figura 10 al ser comprimida la barra sufre un desplazamiento  $\delta$  en su cabeza y un momento igual a  $P \cdot \delta$  en su base. Tal como en el ejemplo de Euler, si planteamos equilibrio en una sección a una distancia x de la base, tendremos:

$$P \cdot y + E \cdot I \cdot y'' = P \cdot \delta \quad (2.14)$$

Expresión análoga a (2.1) para estas condiciones de contorno.

Sustituyendo el valor k anteriormente definido en (2.2) como  $k^2 = \frac{P}{E \cdot I}$ , resulta:

$$k^2 y + y'' = k^2 \delta \quad (2.15)$$

Cuya solución es:

$$y = A \cdot \text{sen}(kx) + B \cdot \text{cos}(kx) + \delta \quad (2.16)$$

En este caso, las condiciones de contorno deberán ser tres:

$$\begin{aligned} y &= 0 \text{ para } x = 0 \\ y' &= 0 \text{ para } x = 0 \\ y &= \delta \text{ para } x = L \end{aligned} \quad (2.17)$$

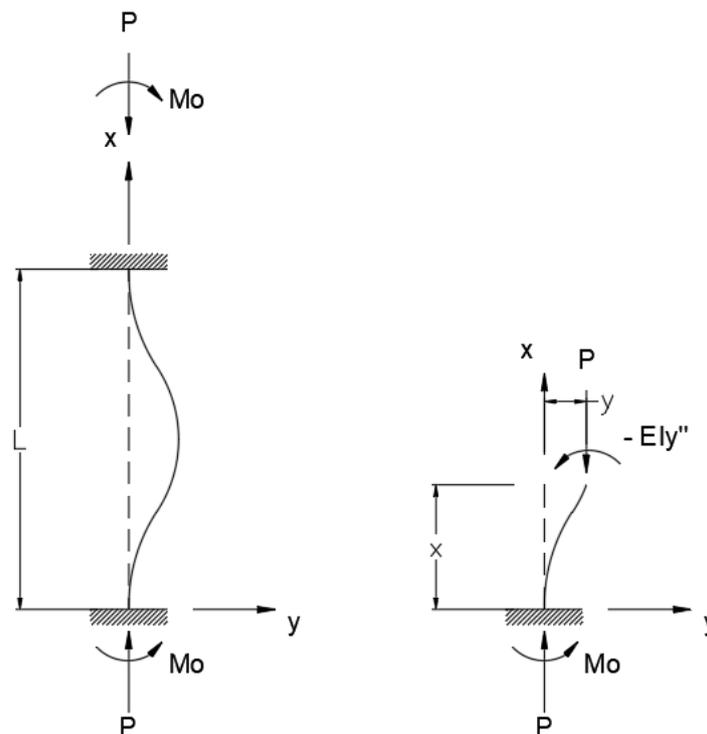
Siguiendo el mismo procedimiento, al sustituir (2-10) en (2-9) llegamos a:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{4L^2} \quad (2.18)$$

Por tanto, la carga crítica del mismo elemento pero con estas condiciones de contorno resulta un cuarto de la de la columna de Euler. Analizaremos ahora otro caso antes de exponer conclusiones.

### 2.3.2 Soporte empotrado en ambos extremos

Cuando un soporte se encuentra empotrado en ambos extremos se induce un momento en el elemento debido a la imposibilidad de desplazamiento o rotación en los extremos.



**Figura 10.** Soporte empotrado en ambos extremos.

Este momento será  $M_0$  y actúa por tanto en todas las secciones, con lo que el equilibrio resulta una vez más:

$$P \cdot y + E \cdot I \cdot y'' = M_0 \quad (2.19)$$

Siguiendo el procedimiento, sustituyendo el valor habitual  $k$  se obtiene:

$$k^2 y + y'' = \frac{M_0}{E \cdot I} \quad (2.20)$$

Cuya solución será:

$$y = A \cdot \text{sen}(kx) + B \cdot \text{cos}(kx) + \frac{M_0}{EI}$$

Las condiciones de contorno son muy similares al caso anterior:

$$y' = 0 \text{ para } x = 0$$

$$y = 0 \text{ para } x = 0 \text{ y para } x = L$$

Finalmente, la carga crítica de pandeo que se obtiene es:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.21)$$

### 2.3.3 Conceptos de longitud de pandeo y esbeltez.

En los ejemplos de los apartados 2.3.1 y 2.3.2 se han obtenido cargas críticas muy similares a la original de Euler, modificadas por factores numéricos, pudiéndolas escribir a partir de (2.18) y (2.21) como:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2}$$

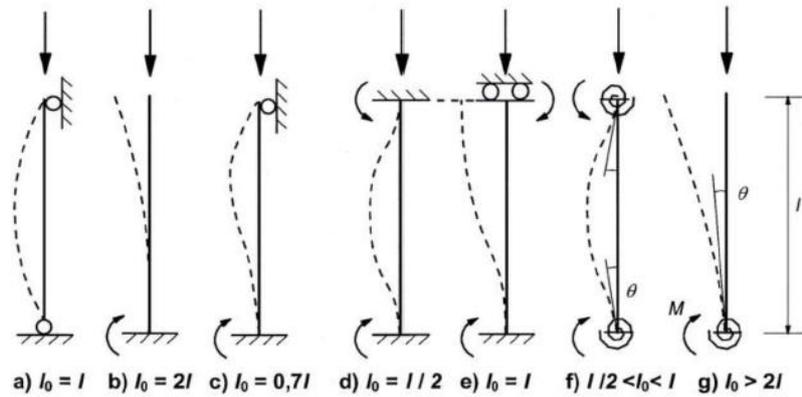
Así se observa claramente que corresponden al valor de Euler con una modificación que afecta a la longitud de la barra. Además, este factor depende de las condiciones de contorno del problema, pudiendo generalizar la expresión de la carga crítica para cualquier tipo de sustentación como:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta L)^2} \quad (2.22)$$

Al producto  $\beta L$  se le denomina *longitud de pandeo* y es una de las variables fundamentales del problema de pandeo, ya que afecta directamente a la inestabilidad del elemento. En adelante, a este producto se le denominará  $l_0$ , tal que:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \quad (2.23)$$

En este trabajo se han expuesto dos ejemplos, la siguiente imagen recoge los valores más comunes de longitudes de pandeo según la sustentación de la columna:



**Figura 11.** Valores de longitudes de pandeo.

Además, a partir de la longitud de pandeo puede definirse otra variable muy útil para este trabajo ya que será uno de los parámetros que podrá modificarse para realizar el estudio paramétrico. Conocidos la inercia  $I$  y el área  $A$  de la sección de la columna, tenemos:

$$\lambda = \frac{\beta L}{i} = \frac{l_0}{i} \quad ; \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2.24)$$

Donde  $\lambda$  corresponde a la *esbeltez* del elemento y  $i$  a su radio de giro. Este término reúne todas las variables fundamentales del problema, tales como la longitud de la columna, el término  $\beta$  variable según su sustentación, y el radio de giro que recoge las variables relevantes de su sección. Además, físicamente está comprobado que a mayor esbeltez de un elemento mayor es la probabilidad de que pandee, y con esta definición eso se corresponde, ya que a mayor esbeltez mayor carga y más probable es que se alcance la carga crítica de pandeo  $P_{cr}$ .

Por otro lado, el concepto de radio de giro también es interesante ya que incluye la inercia de la barra. Para una sección bisimétrica, por ejemplo, el pandeo podría producirse indistintamente en cualquier dirección, mientras que una barra prismática tendrá inercias diferentes y por tanto radios de giros diferentes. Al ser un fenómeno de inestabilidad el pandeo ocurrirá en el plano asociado a una carga crítica menor, y ésta corresponderá siempre al radio de giro menor.

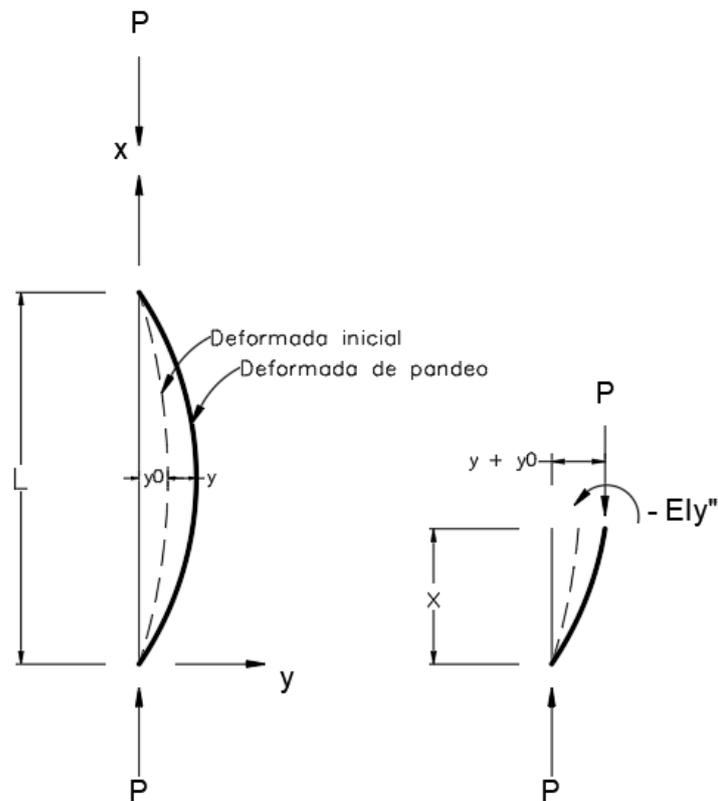
## 2.4 Pandeo de barras con imperfecciones iniciales.

Partiendo como es habitual de la columna de Euler, podemos analizar un problema más complejo que se asemeja muchísimo más a la realidad de cualquier columna esbelta. En él se respetan todas las hipótesis de Euler excepto que el elemento sea perfectamente recto y la carga esté aplicada en el eje que define su centro de gravedad. Como ya se ha mencionado anteriormente, debido al proceso de fabricación es acertado suponer que ninguna columna será exactamente recta, lo cual induce una pequeña flexión inicial que debe tenerse en cuenta en la formulación. También es obvia idealización de que la carga esté perfectamente centrada no se dará en casos prácticos, habrá que considerar cierta excentricidad de la carga.

Sin embargo, para el estudio que nos ocupa, como se expondrá más adelante, la formulación que seguiremos será la propuesta por la Instrucción Española de Acero Estructural (EAE) [2] y sólo considera el efecto de la falta de verticalidad inicial del elemento, por lo que es irrelevante para este proyecto incluir la excentricidad de la carga de compresión.

### 2.4.1 Compresión en una columna con deformaciones previas.

Hay un claro interés en comparar el comportamiento de la columna de Euler con el de una columna deformada para analizar cómo puede afectar a la carga de pandeo de esta. Si partimos de un elemento cuyo eje central está inicialmente doblado:



**Figura 12.** Columna con flexión inicial.

Como se muestra en la figura 13 el elemento sufre dos deformaciones diferentes, una ocasionada por la imperfección inicial,  $y_0$ , y la otra  $y$  por la acción de la carga  $P$  de compresión. Esta deformación se trata únicamente de un desplazamiento en dirección transversal a la posición inicial de equilibrio de la barra. La expresión de la deformada puede escribirse como función senoidal de manera que:

$$y_0 = a \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (2.25)$$

Donde  $a$  se refiere a la amplitud de la deformada senoidal, es decir, la separación entre máxima entre la barra indeformada y la barra recta. A pesar de tener una deformación inicial, las tensiones provocadas por la flexión vienen del cambio en la curvatura,  $y''$ , no de la suma ( $y' + y_0'$ ), por lo que sigue cumpliéndose que:

$$M_x = -E \cdot I \cdot y'' \quad (2.26)$$

Aplicando equilibrio obtenemos:

$$E \cdot I \cdot y'' + P \cdot (y_0 + y) = 0 \quad (2.27)$$

Con la definición de  $y_0$  en (2.25) y la de  $k$  en (2.2) tal que  $k^2 = \frac{P}{E \cdot I}$ , la ecuación anterior pasa a:

$$y'' + k^2 y = -k^2 a \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \quad (2.28)$$

La solución general de (2.28) es:

$$y = C_1 \cdot \text{sen}(kx) + C_2 \cdot \cos(kx) + \frac{ak^2L^2}{\pi^2 - k^2L^2} \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (2.29)$$

Las condiciones de contorno en este problema establecen que los desplazamientos en los extremos deben ser nulos, y esto sólo se satisface si los términos de seno y coseno son nulos, es decir, si  $C_1$  y  $C_2$  valen 0. El desplazamiento resulta:

$$y = \frac{ak^2L^2}{\pi^2 - k^2L^2} \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (2.30)$$

El máximo estará en el punto medio de la barra, para  $x = L/2$ , por lo que definimos:

$$d = \frac{ak^2L^2}{\pi^2 - k^2L^2} = \frac{a \cdot P}{P_{cr} - P} \quad (2.31)$$

Esta expresión puede simplificarse introduciendo la variable  $\alpha = \frac{P}{P_{cr}}$  y resulta:

$$d = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (2.32)$$

Con lo que el desplazamiento queda:

$$y = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot a \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (2.33)$$

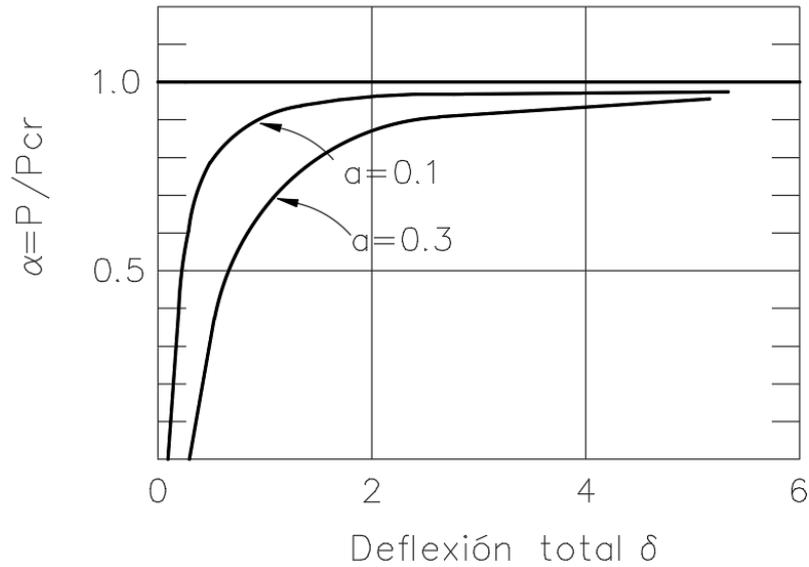
Este desplazamiento es el que viene dado por la acción del pandeo, pero inicialmente ya teníamos la deflexión  $y_0$ . En total será, sumado con (2.33):

$$y_T = y_0 + y = \left(1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha}\right) \cdot a \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} = \frac{a}{1 - \alpha} \text{sen} \pi \frac{\pi x}{L} \quad (2.34)$$

De esta función ya conocemos su máximo, para  $x = L/2$ , con lo que la deflexión total es:

$$\delta = \frac{a}{1 - \alpha} = \frac{a}{1 - \left(\frac{P}{P_{cr}}\right)} \quad (2.35)$$

Al introducir  $\alpha$  adimensionalizamos la variable principal del problema, la carga de compresión  $P$ , y podemos representar su evolución con respecto al desplazamiento transversal a la mitad de la columna según la deflexión inicial que tenga la barra, para comprobar cuánto afecta al comportamiento bajo pandeo. La gráfica resulta:



**Figura 13.** Curvas carga-deflexión para columnas con deformación inicial.

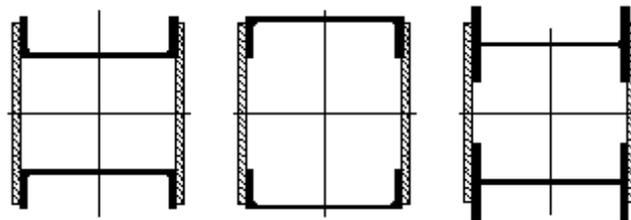
En esta representación se ve claramente cómo la columna de Euler corresponde a una idealización del comportamiento, no tenemos deflexión hasta alcanzar la carga crítica. Sin embargo, las columnas con deformación inicial comienzan a desplazarse en cuanto se aplica la carga, con una deflexión que es mayor a mayor deformación inicial  $a$ . También podemos comprobar como la capacidad portante de las columnas ya deformadas es menor que la idealizada de Euler, debido a que ya ha habido una pérdida de rigidez al deformarse. En general, cuanto menor sea la deformación previa más similar será la columna al caso de Euler y mayor será la carga que pueda soportar antes de producirse el pandeo.

# 3. SOPORTES COMPUESTOS

## 3.1 Introducción y definición.

En la construcción con acero elementos individuales pueden ser combinados entre sí de diferentes maneras para crear composiciones más eficientes. Los soportes o pilares compuestos son estructuras metálicas formadas por dos o más perfiles simples, unidos de forma discontinua y uniforme por medio de elementos de enlace, haciendo que su comportamiento global sea similar al de una sola pieza. Esta pieza tendrá un gran canto, ya que los centros de gravedad de estos perfiles están a una distancia importante.

Los perfiles más utilizados suelen ser barras en I, H o U como cordones, enlazados con angulares o con chapas planas en dos o más planos.



**Figura 14.** Configuración habitual de un elemento compuesto, en planta [4].

La principal ventaja de esta configuración de elementos es su capacidad para soportar cargas de gran valor, al mismo tiempo que salvan grandes distancias, a pesar de estar compuesto de elementos con una esbeltez importante. El sistema de celosías permite una transferencia muy eficaz de los esfuerzos en el elemento compuesto. Por ello son muy comunes en construcciones industriales o puentes, ya que proporcionan una solución relativamente económica, teniendo en cuenta su gran capacidad portante.

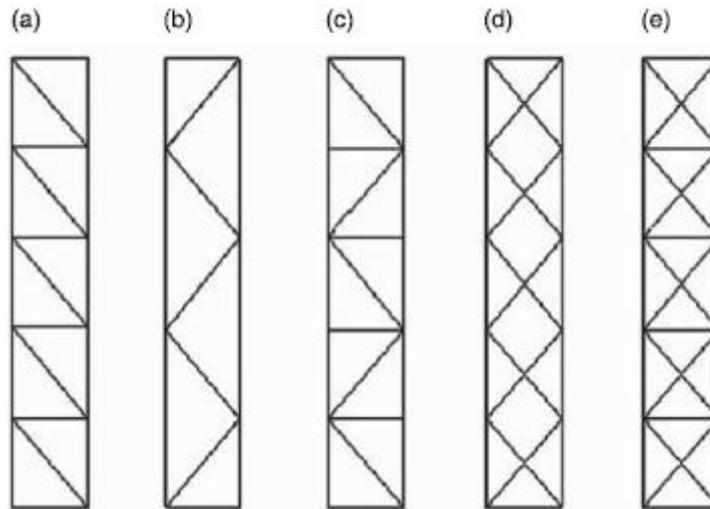
En términos teóricos, los pilares compuestos son muy útiles cuando un elemento aislado tendría una longitud de pandeo excesiva. El objetivo de esta configuración de elementos es disponer de una gran inercia con poca sección, es decir, poco peso de acero. Esto en principio conlleva una disminución de la esbeltez y un mayor coeficiente de pandeo, es decir, mayor inestabilidad. Sin embargo, por su gran longitud, la relación canto/longitud provoca una mayor influencia de la deformación por cortante, lo que hace que aumente la esbeltez del soporte.

Además, en términos generales se deben tener en cuenta dos efectos a la hora de diseñar elementos compuestos. El primero es esa gran influencia de la deformación por cortante de los elementos. El segundo, y que ocupa directamente al objetivo de este proyecto, es la interacción entre el pandeo global y local de la columna compuesta. Varios estudios realizados por autores como Svensson y Kragerup concluyeron que un elemento compuesto pierde gran parte de su capacidad portante cuando está soportando una carga que es a la vez la carga crítica de pandeo local, global, y además la carga de rotura del elemento. También demostraron que en la presencia de imperfecciones esta pérdida de capacidad puede verse empeorada en gran medida. Todas estas conclusiones serán demostradas en el presente estudio.

## 3.2 Tipología.

### 3.2.1 Soportes compuestos triangulados.

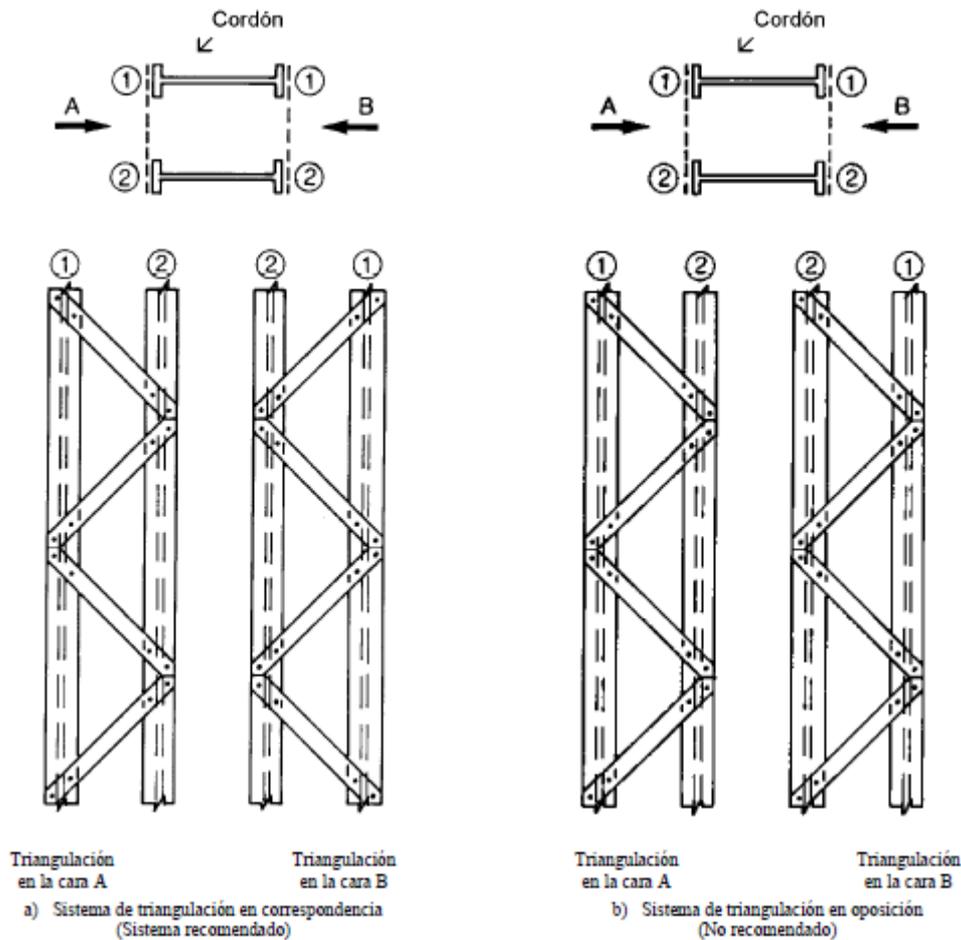
Los pilares compuestos triangulados o en celosía se caracterizan porque las uniones con los cordones son articuladas, con lo que los elementos de enlace sólo trabajan a esfuerzos axiales. Pueden analizarse entonces como elementos aislados cuya longitud de pandeo será la separación entre los nudos. Entonces, la deformación por cortante depende únicamente de la resistencia axial de los enlaces.



**Figura 15.** Geometría de las columnas compuestas trianguladas [4].

En la figura anterior 16 se muestran las configuraciones más comunes. La tipología (a), en forma de N, es la más eficaz ya que permite soportar cargas muy grandes, y constructivamente es simple. La forma en V (b) también es muy común aunque soporta cargas de menor magnitud, y conlleva una longitud de pandeo grande de los enlaces. Para corregir esta mayor longitud de pandeo de la tipología en K se desarrolló el tipo (c). Las configuraciones en X, (d) y (e), son menos comunes constructivamente, pero contienen elementos que trabajan tanto a tracción como a compresión en los planos de enlace.

Por otro lado, los pilares compuestos en celosía requieren una disposición constructiva concreta, de manera que los sistemas de triangulación sean opuestos el uno al otro, es decir, sean la sombra del otro. Esta configuración se detalla en el apartado 6.4.2.2 de la normativa EN 1993-1-1 con la siguiente imagen:



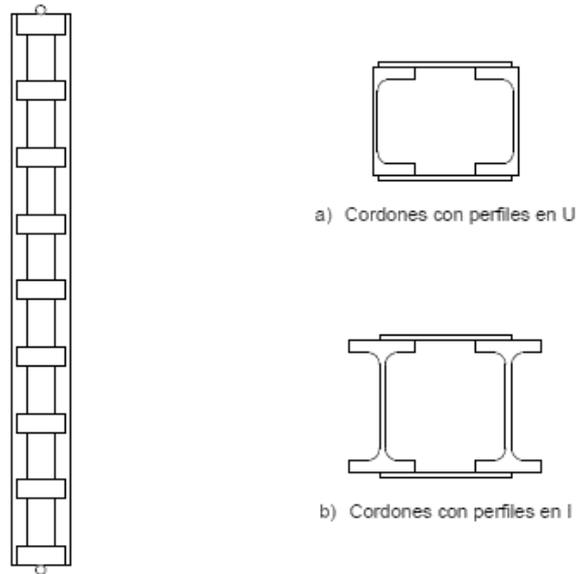
**Figura 16.** Disposición correcta de la triangulación en los planos de enlace [5].

Cuando los elementos están dispuestos de manera que corresponden a la figura (b) se deben tener en cuenta los efectos adicionales de torsión que soportan, lo cual conlleva frecuentemente a enlaces de mayor tamaño.

### 3.2.2 Soportes compuestos empresillados.

La otra tipología general de columna compuesta es aquella en la que los cordones se unen a través de placas de enlace dispuestas horizontalmente y unidas rígidamente a los cordones. Las placas trabajan a compresión y flexión, de manera que la distribución de momentos generados por estas uniones rígidamente es nula en su centro. Sin embargo, sólo pueden soportar cargas horizontales de baja magnitud, por lo que no son tan comunes como la tipología triangulada.

Constructivamente estos elementos también deben tener los enlaces enfrentados unos con otros.



**Figura 17.** Disposición de columna compuesta empresillada [5].

### 3.3 Cálculo y dimensionamiento.

En este apartado se desarrollará la metodología que la EAE [2] aporta para el cálculo de elementos comprimidos cuya resistencia debe ser tal que no sufran pandeo. Inicialmente, la normativa describe las premisas necesarias para cualquier tipo de columna o soporte, en el apartado 6.3 de la ENV 1993-1-1 para más tarde detallar la aplicación a soportes compuestos. En este proyecto en primer lugar será necesario conocer el procedimiento general por lo que se expone a continuación esta parte más genérica, y en adelante las pautas para elementos compuestos.

Es importante señalar que este proyecto sólo recoge la idealización de que el fenómeno de pandeo se produzca por flexión. La posibilidad de que se dé pandeo por torsión o por torsión y flexión combinados no se tiene en cuenta, y por ello, aunque en un estudio completo debería comprobarse la estabilidad en cualquier caso, sólo se expondrá el apartado de la normativa que recoge la resistencia ante flexión.

#### 3.3.1 Introducción al cálculo bajo pandeo de elementos uniformes comprimidos.

Este apartado 6.3 de la norma [2] determina que un elemento comprimido deberá estar sometido a un esfuerzo axial que nunca supere la resistencia al pandeo del mismo. Es decir:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1 \quad (3.1)$$

Donde

$N_{Ed}$  se refiere al valor de cálculo del axial de compresión.

$N_{b,Rd}$  se refiere a la resistencia a pandeo del elemento.

Este último valor puede calcularse como:

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (3.2)$$

Para secciones de clases 1, 2 y 3, ya que para secciones de clase 4 el valor del área de la sección pasa a ser  $A_{eff}$ , es decir, el área efectiva de esa sección. El cálculo de esa área efectiva no es relevante en este estudio y sólo se mencionará que está especificado en la EN 1993-1-5, en concreto en el apartado 4.4.

El resto de términos de 3.2 hacen referencia a:

$f_y$ , límite elástico del material (N/mm<sup>2</sup>)

$\gamma_{M1}$  coeficiente parcial de resistencia de elementos frente a inestabilidad, cuyo valor es 1.05.

$\chi$  coeficiente de reducción según el modo de pandeo considerado.

El valor más relevante en este caso es el último, el coeficiente de reducción, que depende directamente del elemento a compresión y sus propiedades geométricas.

A continuación, la normativa define las *curvas de pandeo*, con las cuales se puede calcular este coeficiente  $\chi$  a partir de la *esbeltez adimensional* de la sección. Como ya se definió en el apartado 2.3.3 de este trabajo, la esbeltez depende únicamente de las propiedades geométricas de la sección en concreto. Así, el coeficiente debe cumplir la expresión:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1 \quad (3.3)$$

Siempre resultará  $\chi$  menor que la unidad, por ser un coeficiente de reducción. Las variables se calculan siguiendo, en orden:

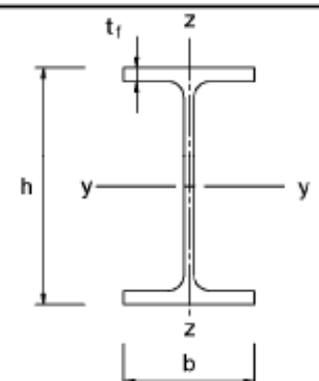
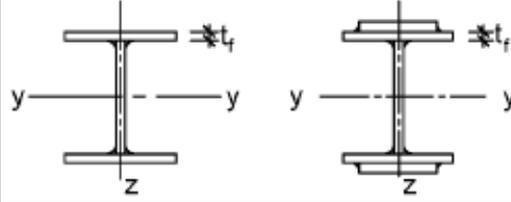
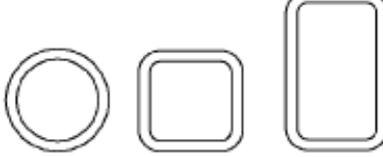
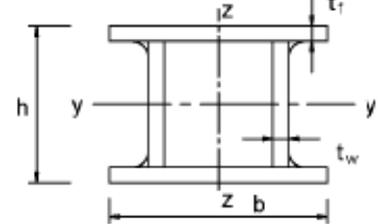
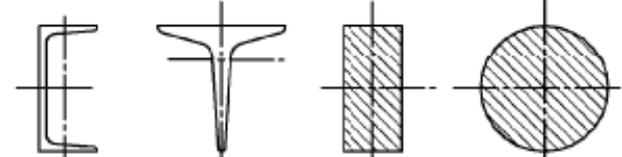
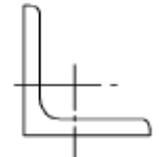
$$\Phi = 0,5 \cdot \left[ 1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right] \quad (3.4)$$

Necesitamos  $\alpha$ , un coeficiente de imperfección que depende del tipo de curva de pandeo de la sección de estudio. Se define entonces  $\alpha$  a partir de la tabla 6.1 de la norma:

Curva de pandeo	$a_0$	a	b	c	d
Coeficiente de imperfección $\alpha$	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

**Figura 18.** Tabla 6.1 de la normativa que determina el coeficiente  $\alpha$ .

Para determinar qué curva corresponde a cada sección la norma proporciona la tabla 6.2:

Sección transversal	Límites	Pandeo alrededor del eje	Curva de pandeo	
			S 235 S 275 S 355 S 420	S 460
Secciones de perfiles laminados 	$h/b > 1,2$	y - y z - z	a b	a <sub>0</sub> a <sub>0</sub>
			40 mm < $t_f \leq 100$	b c
	$h/b \leq 1,2$	y - y z - z	b c	a a
			$t_f > 100$ mm	d d
Secciones en I de vigas soldadas 	$t_f \leq 40$ mm	y - y z - z	b c	b c
	$t_f > 40$ mm	y - y z - z	c d	c d
Secciones huecas 	Acabados en caliente	cualquiera	a	a <sub>0</sub>
	Conformados en frío	cualquiera	c	c
Secciones en cajón de vigas soldadas 	En general (excepto el caso del recuadro inferior)	cualquiera	b	b
	Soldaduras gruesas: $a > 0,5t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	cualquiera	c	c
Secciones en U o en simple T y secciones macizas 		cualquiera	c	c
Secciones de perfiles de angulares 		cualquiera	b	b

**Figura 19.** Tabla para determinar la curva de pandeo de una sección en función de su geometría.

Una vez conocemos el tipo de curva podemos proceder por dos caminos, el primero pasa por las expresiones analíticas. De esta manera podemos calcular el valor de  $\alpha$  una vez conocemos la curva e introducirlo en 3.4 junto con la esbeltez adimensional y proceder al cálculo del coeficiente de imperfección  $\chi$ .

La *esbeltez adimensional* se calcula a partir de propiedades geométricas del elemento. Como ya se mencionó al inicio de este apartado, sólo tendremos en cuenta la flexión, con lo que su valor será:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \cdot \lambda_1 \quad (3.5)$$

Donde  $L_{cr}$  es la longitud de pandeo del elemento en estudio y  $i$  es el radio de giro alrededor del eje considerado, según la sección transversal, cuyo valor ya se definió en 2.24 como:

$$i = \sqrt{\frac{I_{eff}}{A}} \quad (3.6)$$

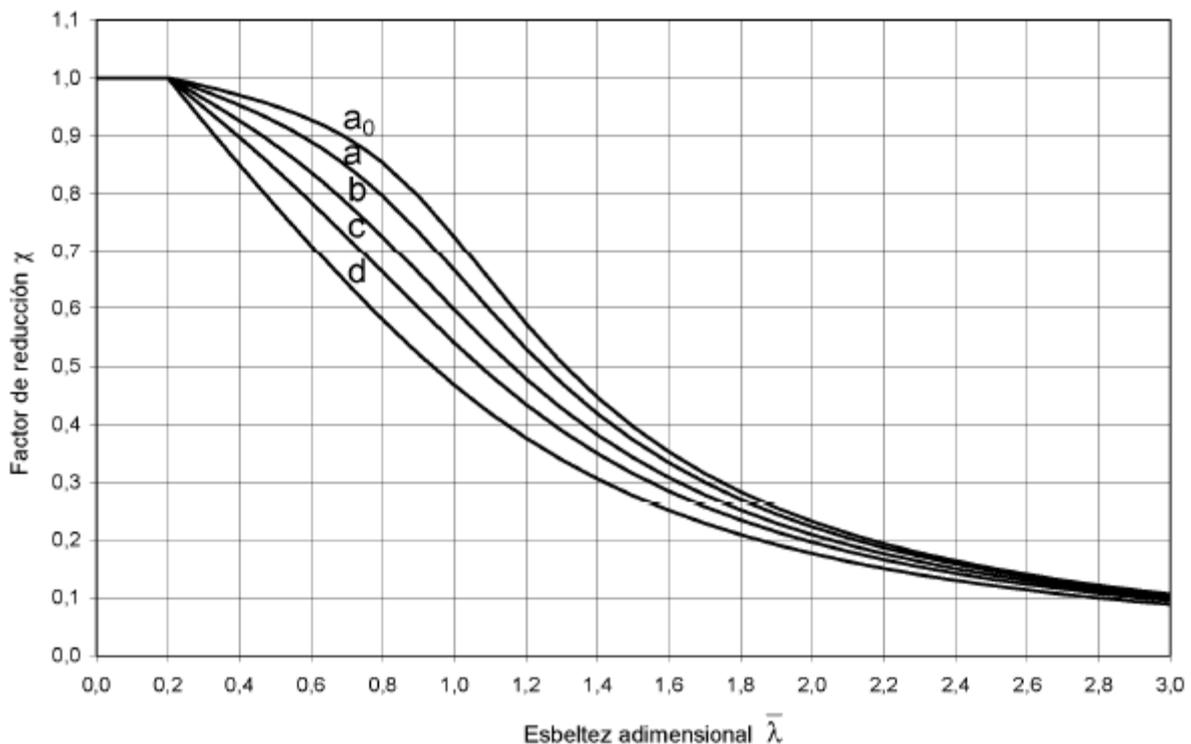
En esta expresión también se debe incluir el área efectiva  $A_{eff}$  en el caso de tener secciones de clase 4.

La última variable es la esbeltez  $\lambda_1$  que se calcula según:

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93,9 \cdot \varepsilon ; \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} \quad (3.7)$$

Para un módulo de elasticidad  $E$  del material.

El segundo camino para calcular el coeficiente de reducción consiste en consultar una gráfica que representa los valores de las curvas de pandeo frente a  $\chi$ . Esta gráfica depende de la anterior esbeltez adimensional y tiene la siguiente forma:



**Figura 20.** Gráfica que permite calcular directamente el coeficiente de imperfección  $\chi$ .

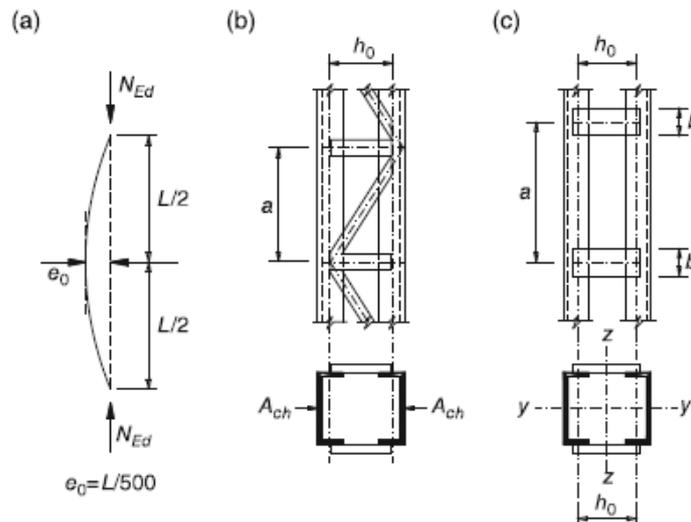
### 3.3.2 Dimensionamiento de soportes compuestos comprimidos según la EAE [2].

El cálculo de la resistencia a pandeo de los elementos compuestos y su dimensionamiento sigue las indicaciones del apartado 6.4 de la UNE-ENV 1993-1-1, tras en capítulo en el que se expone el cálculo general para elementos comprimidos.

Esta metodología es válida en pilares compuestos que tengan la misma configuración en todos los planos de enlace, con triangulaciones o presillas paralelas, y un número mínimo de módulos (enlaces) de tres. Además, para un elemento de longitud total  $L$  se considera una imperfección inicial de valor:

$$e_0 \geq L/500 \quad (3.8)$$

El modelo de columna que sigue la norma para continuar el cálculo se muestra en la siguiente figura:



**Figura 21.** Columna modelo (a), con triangulación (b) o empresillada (c).

Para comprender como afecta esta imperfección inicial al cálculo debemos volver a la sección 2.4.1 de este trabajo, en la que se llega a la conclusión de que la deformación máxima que sufre un elemento comprimido con una deflexión inicial es, según la expresión 2.34:

$$\delta = \frac{a}{1 - \alpha} = \frac{a}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (3.9)$$

Donde el valor  $a$  se refiere a esa deformación inicial. Para corresponder la nomenclatura de la normativa esta expresión deberá ser:

$$v = \frac{e_0}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \quad (3.10)$$

La gran importancia de la rigidez a cortante se traduce en que la carga crítica de Euler se ve directamente afectada por este valor, de manera que para un elemento compuesto será:

$$N_{cr,id} = \frac{1}{\frac{1}{N_{cr}} + \frac{1}{S_v}} \quad (3.11)$$

Donde  $S_v$  se refiere a la rigidez a cortante de toda la columna y  $N_{cr,id}$  es la carga crítica de Euler que ya conocemos según la expresión 2.8:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{eff}}{L^2} \quad (3.12)$$

$I_{eff}$  es la inercia efectiva del elemento compuesto, cuyo valor se determinará más adelante ya que depende del tipo de configuración de los enlaces, es decir, si son triangulados, empresillados, el número de planos de enlace, su geometría...etc. El valor de E corresponde, como es habitual, al módulo de deformación del material del pilar compuesto.

Por tanto, para un desplazamiento máximo  $v$ , según 3.11, el momento flector máximo que soporta la columna será:

$$M_{Ed} = N \cdot v = \frac{e_0 \cdot N_{Ed}}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}} \quad (3.13)$$

Aplicando directamente equilibrio podemos obtener el axil máximo que puede soportar:

$$N_{Ed} = \frac{N}{2} + \frac{M_{Ed}}{h_0} = \frac{N}{2} \left( 1 + \frac{2 \cdot e_0 / h_0}{1 - N / N_{cr}} \right) \quad (3.14)$$

Esa expresión es correcta para el elemento ideal de la figura 22.a. Para una columna compuesta, de cordones idénticos, ya sea del tipo triangulada o empresillada, tomando  $N_{Ed}$  y  $M_{Ed}$  como el axil de diseño y el momento flector máximo en el punto medio de la columna, la carga de compresión de diseño será:

$$N_{ch,Ed} = 0.5 \cdot N_{Ed} + \frac{M_{Ed} \cdot h_0 \cdot A_{ch}}{2 \cdot I_{eff}} \quad (3.15)$$

Donde  $h_0$  es distancia entre los centros de gravedad de los cordones,  $A_{ch}$  es el área de la sección de cada cordón y  $I_{eff}$  es la inercia efectiva de todo el elemento compuesto. Combinando las expresiones 3.13 y 3.14, y teniendo en cuenta la posible actuación de un momento flector externo, en la expresión 3.15 el valor de  $M_{Ed}$  se refiere a:

$$M_{Ed} = \frac{N_{Ed} \cdot e_0 + M_{Ed}^I}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} - \frac{N_{Ed}}{S_v}} \quad (3.16)$$

Este momento flector externo que puede actuar,  $M_{Ed}^I$ , se tomará en la sección a la mitad de la longitud del elemento, y sin considerar efectos de segundo orden.

### 3.3.2.1 Cálculo de soportes triangulados.

Los **cordones** deberán ser diseñados teniendo en cuenta el pandeo de tal forma que siempre se cumpla:

$$N_{ch,Ed} \leq N_{b,Rd} \quad (3.17)$$

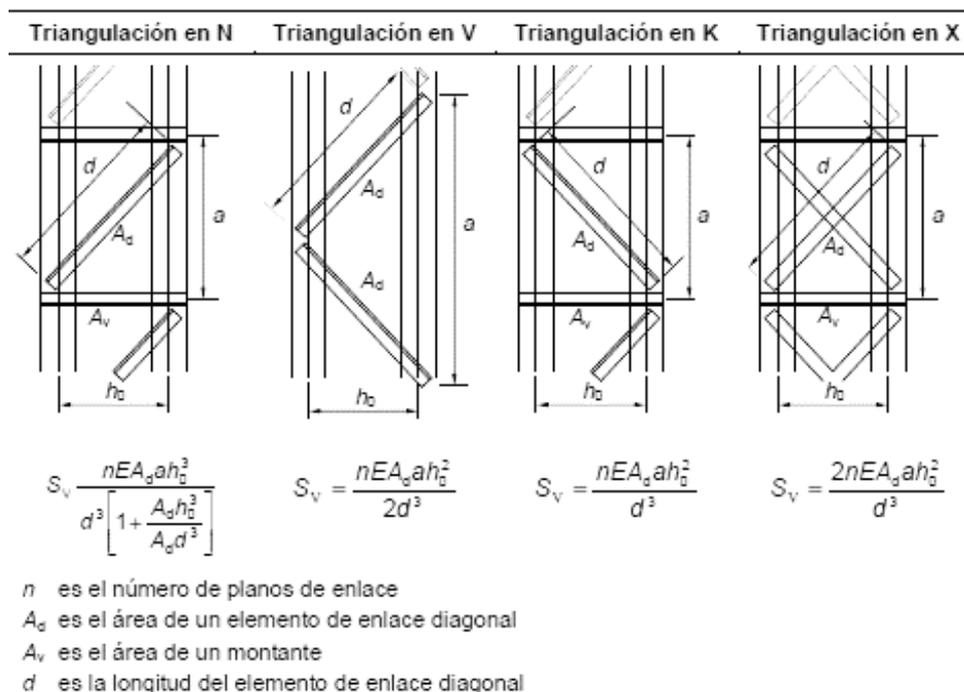
Donde  $N_{ch,Ed}$  se ha definido en 3.15 y  $N_{b,Rd}$  se refiere al valor de cálculo de la resistencia a pandeo del cordón calculada según el apartado 3.3.1 de este trabajo, con el método general.

Además, el cálculo de la inercia efectiva en este tipo de configuración sigue la siguiente expresión:

$$I_{eff} = 0.5 \cdot h_0^2 \cdot A_{ch} \quad (3.18)$$

Donde  $A_{ch}$  es el área de la sección de un cordón, no del elemento compuesto entero.

También podemos definir la rigidez a cortante según el tipo de triangulación que tenga el elemento, como se definió en el apartado 3.2.1, si es triangulación en N, en V, en K o en X:



**Figura 22.** Expresiones para la rigidez a cortante  $S_v$  según la geometría de la triangulación.

Por otro lado, en estas configuraciones los **enlaces diagonales** están sometidos a un axil de compresión que debe comprobarse también. Para un momento de diseño  $M_{Ed}$  definido en 3.16 como:

$$M_{Ed} = \frac{N_{Ed} \cdot e_0 + M_{Ed}^I}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} - \frac{N_{Ed}}{S_v}}$$

El axil que soportan las diagonales será:

$$N_d = \frac{\pi \cdot M_{Ed} \cdot d}{L \cdot n \cdot h_0} \quad (3.19)$$

Donde los valores  $d$ ,  $h_0$  y  $n$  están especificados en la figura 23 más arriba. Por tanto, la comprobación será:

$$N_d \leq N_{d,b,Rd} \quad (3.20)$$

Donde la resistencia de cálculo se calcula siguiendo las indicaciones de cualquier elemento uniforme comprimido, y como se explicó en 3.3.1, tiene el valor:

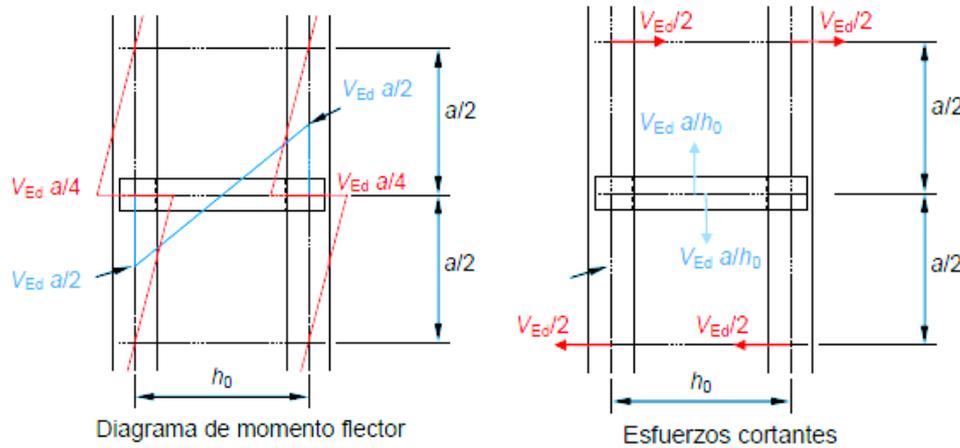
$$N_{d,b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}}$$

Con los parámetros de las secciones de los enlaces.

En el caso de tener configuraciones en N, K o X, los **enlaces horizontales o montantes** se comprobarán con la misma metodología que los soportes empresillados, la cual se detalla en el subapartado siguiente.

### 3.3.2.2 Cálculo de soportes empresillados.

Los elementos compuestos empresillados sufren una distribución de esfuerzos en sus extremos y en el centro del elemento que tiene la siguiente forma:



**Figura 23.** Diagrama de esfuerzos en un elemento compuesto empresillado.

Como es habitual la comprobación de los **cordones** será tal que:

$$N_{ch,Ed} \leq N_{b,Rd} \quad (3.21)$$

Donde ya conocemos el valor de  $N_{ch,Ed}$  :

$$N_{ch,Ed} = 0.5 \cdot N_{Ed} + \frac{M_{Ed} \cdot h_0 \cdot A_{ch}}{2 \cdot I_{eff}}$$

Sabemos que el valor de  $M_{Ed}$  dependerá de la rigidez a cortante del soporte compuesto. En estos elementos ésta varía de aquella de los triangulados. Su valor debe tomarse como:

$$S_v = \frac{24 \cdot E \cdot I_{ch}}{a^2 \left[ 1 + \frac{2 \cdot I_{ch} \cdot h_0}{n \cdot I_b \cdot a} \right]} \leq \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{ch}}{a^2} \quad (3.22)$$

En la figura 24 se muestra que el valor de  $a$  corresponderá a la distancia entre las presillas. En 3.22 todo es conocido menos el valor de  $I_b$ , el cual se refiere a la inercia de una presilla en el plano. También cabe mencionar que  $n$  se trata del número de enlaces del elemento completo.

Además, En este tipo de configuración el valor de la inercia efectiva  $I_{eff}$  se calcula según esta ecuación:

$$I_{eff} = 0.5 \cdot h_0^2 \cdot A_{ch} + 2 \cdot \mu \cdot I_{ch} \quad (3.23)$$

Así como  $A_{ch}$  es el área de la sección de un cordón,  $I_{ch}$  es la inercia de un cordón en el plano.

Todos los componentes de 3.23 ya han sido especificados anteriormente menos el valor  $\mu$ . La EN 1993-1-1 explica en su apartado 6.4.3.1 que el valor  $\mu$  se trata de un coeficiente experimental de eficiencia que se calcula según su tabla 6.8, que especifica:

Criterio	Factor de eficiencia $\mu$
$\lambda \geq 150$	0
$75 < \lambda < 150$	$\mu = 2 - \frac{\lambda}{75}$
$\lambda \leq 75$	1,0
donde $\lambda = \frac{L}{i_0}$ ; $i_0 = \sqrt{\frac{I_1}{2A_{ch}}}$ ; $I_1 = 0,5h_0^2 A_{ch} + 2I_{ch}$	

**Figura 24.** Tabla para determinar el factor de eficiencia  $\mu$ .

Por otro lado, **los montantes** con placas de enlace y sus uniones a los cordones deberán ser comprobadas ante los esfuerzos de la figura 24. El valor del cortante para el panel extremo  $V_{Ed}$  es:

$$V_{Ed} = \pi \frac{M_{Ed}}{L} \quad (3.24)$$

Donde  $M_{Ed}$  viene de la expresión 3.16 y  $L$  se refiere a la longitud total del soporte.

Este valor del cortante corresponde además al axil de compresión que los montantes deben soportar, con lo que a la hora de comprobar su resistencia a pandeo tendremos:

$$N_{h,Ed} \leq N_{b,Rd} \quad (3.25)$$

Donde  $N_{h,Ed} = V_{Ed}$  según 3.24. El cálculo de la resistencia  $N_{b,Rd}$  sigue las indicaciones habituales de cualquier elemento sometido a compresión.

Por su parte, las presillas deberán resistir un esfuerzo cortante y un momento flector máximo de valores:

$$V = V_{Ed} \cdot \frac{a}{h_0}; M_{Ed} = \frac{V_{Ed} \cdot a}{2} \quad (3.26)$$

### 3.3.2.3 Especificaciones sobre longitudes de pandeo.

En el desarrollo de este proyecto ya se ha mencionado la importancia que el concepto de longitud de pandeo tiene en el estudio del fenómeno. Se ha comprobado que para el dimensionamiento de cualquier elemento a compresión es necesario determinarla, ya que a partir de la longitud crítica o de pandeo se calcula la esbeltez adimensional  $\bar{\lambda}$  fundamental para la comprobación de la resistencia. Tal es la importancia que la normativa recoge en un apartado, el anexo BB, indicaciones para los valores en la comprobación de soportes compuestos.

De esta manera, en este anexo se explica que para cordones con secciones huecas debe tomarse una longitud crítica  $L_{cr}$  de valor  $0,9 \cdot L$ , siendo  $L$  la longitud total del cordón, ya sea para pandeo fuera del plano o en el plano de la estructura. Si los cordones tienen secciones en I o H también se tomará  $L_{cr}$  como  $0,9 \cdot L$  en el plano de la estructura y  $1,0 \cdot L$  para el pandeo fuera del plano de la estructura.

También se incluyen especificaciones en cuanto a la comprobación de los montantes y diagonales de los enlaces. El valor genérico será  $L_{cr} = 0,9 \cdot L$ , excepto para angulares, en cuyo caso se aportan unas expresiones para calcular directamente la esbeltez adimensional:

$$\bar{\lambda}_{eff,v} = 0,35 + 0,7 \cdot \bar{\lambda}_v \text{ con respecto al eje v-v}$$

$$\bar{\lambda}_{eff,y} = 0,50 + 0,7 \cdot \bar{\lambda}_y \text{ con respecto al eje y-y}$$

$$\bar{\lambda}_{eff,z} = 0,35 + 0,7 \cdot \bar{\lambda}_z \text{ con respecto al eje z-z}$$

El valor de  $\bar{\lambda}$  en este caso no se calcula entonces con la longitud crítica, si no a partir de la carga crítica:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} \quad (3.27)$$

Como siempre el valor del área  $A$  deberá ser el área efectiva para secciones de clase 4.

# 4. ANÁLISIS CON EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. ANSYS.

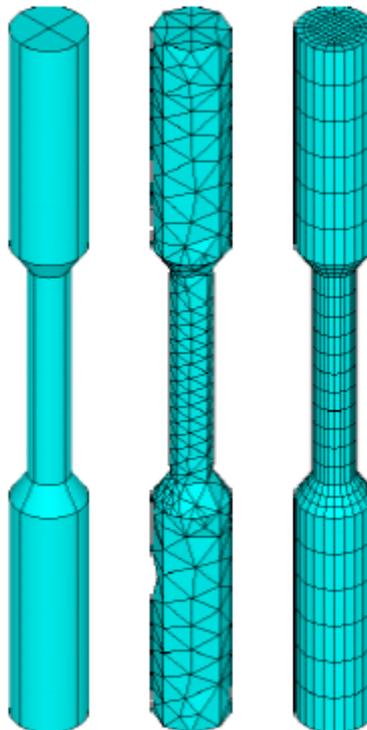
---

Este capítulo se centrará en explicar las bases de la herramienta principal actual para el análisis de estructuras: el Método de los Elementos Finitos. También se abordarán los conceptos principales del Software MEF empleado, Ansys, con la finalidad de comprender cómo trabaja el programa para llegar a una conclusión similar a los métodos teóricos. En concreto se explicarán los distintos elementos presentes en Ansys y las diferentes técnicas que se pueden utilizar para asemejar el modelo MEF al problema real.

## 4.1 Introducción.

Para el análisis avanzado de una estructura se necesita un modelo matemático que se asemeje lo suficiente a la realidad, creando una geometría, unas cargas y unas condiciones de contorno que imiten el problema real. También deben reproducirse de manera adecuada otros parámetros del problema, como la rigidez de los elementos, o el comportamiento del material. El Método de los Elementos Finitos, o MEF, logra una semejanza bastante acertada a través de un método matemático que puede resolver problemas complejos cuya solución analítica es inabordable.

La base del método es la discretización de un dominio, en el caso que nos ocupa será la estructura del soporte compuesto, en elementos más simples cuyo comportamiento es más fácil de reproducir, y posteriormente, imponer ciertas condiciones que ensamblan estos elementos para llegar al dominio original. Esta discretización es doble, se aplica tanto en la geometría como en el comportamiento de los elementos de la estructura. Es importante tener en cuenta que el grado de discretización del dominio es clave para la correcta resolución del problema, a mayor discretización más acertada será. Esto se debe a que la formulación del MEF emplea funciones de interpolación, llamadas **funciones de forma**, para conectar las respuestas de los elementos aislados entre sí.



**Figura 25.** Discretización de una probeta de ensayo uniaxial con mayor o menor precisión.

Un ejemplo se muestra en la figura anterior, en la que se muestra una probeta de ensayo uniaxial con una discretización muy irregular en el primer caso y una mucho más concreta en el segundo. El grado de aproximación a la solución real será mucho mayor en el segundo caso, ya que es una discretización mucho más regular y estructurada.

## 4.2 Introducción al pandeo global de estructuras.

Es de interés en este proyecto dar una introducción sobre el cálculo teórico de la carga crítica de pandeo en una estructura, después de haber definido en análisis de pandeo en una barra aislada (en el capítulo 2), ya que los soportes compuestos que se analizarán a lo largo de él constituyen estructuras formadas por varias barras enlazadas entre sí de una manera concreta, a pesar de tratarse de soportes que en un análisis muy básico podrían simplificarse como barras comprimidas aisladas.

El procedimiento teórico básico para resolver una estructura y conocer los desplazamientos en ciertos puntos de ella, o los esfuerzos en sus elementos, pasa por plantear un sistema de ecuaciones en el que se relacionan las fuerzas externas que actúan en puntos concretos y los desplazamientos de estos puntos. Estas variables se relacionan entre sí a través de la matriz de rigidez total del sistema, formada con las matrices de los elementos que componen la estructura, llegando a un sistema matricial con la forma:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (2.36)$$

Donde el vector  $\mathbf{f}$  se refiere a las fuerzas, la matriz  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez del sistema y el vector  $\mathbf{u}$  representa los desplazamientos. Esa matriz en un problema lineal (de primer orden) es relativamente sencilla de obtener, mientras que para problemas con teoría de segundo orden [1] es necesario conocer el valor del axil en cada elemento de la estructura, complicando el proceso. Una manera de resolverlo podría ser a través de un proceso iterativo en el que se haga una suposición inicial partiendo de un análisis de primer orden, y se utilicen los esfuerzos obtenidos para realizar en análisis de segundo orden. Sin embargo, para problemas bastante complejos la iteración puede ser muy tediosa.

El pandeo global de una estructura supone una pérdida de rigidez repentina del sistema total que se puede reflejar en la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . La finalidad del análisis no será conocer los esfuerzos y desplazamientos en los elementos, sino determinar la carga que lleva a esa pérdida y, por tanto, al colapso. Analíticamente, lo que se debe calcular será un factor  $\Gamma$  denominado factor de pandeo. Para ello primero se hace un cálculo lineal de la estructura y se conforman dos matrices diferentes, la matriz  $\mathbf{K}_0$ , que corresponde a la matriz de rigidez natural de la estructura, y la matriz  $\mathbf{K}_G$ , que se calcula a partir del axil de compresión de cada elemento. Después se plantea un sistema con la forma:

$$\Gamma \cdot \mathbf{f} = (\mathbf{K}_0 - \Gamma \cdot \mathbf{K}_G) \cdot \mathbf{u} \quad (2.37)$$

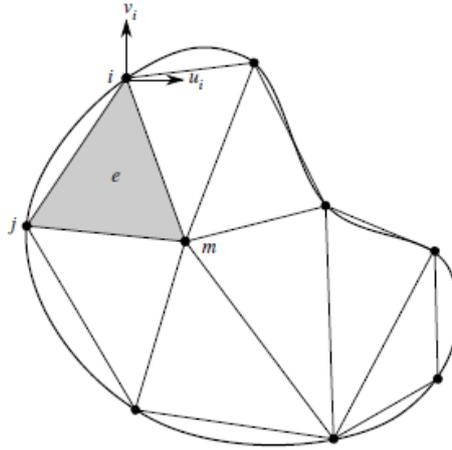
Donde se ha asumido que el factor de pandeo  $\Gamma$  aumenta las fuerzas externas en la misma proporción que los axiles de compresión que afectan a  $\mathbf{K}_G$ . La solución de la ecuación 2.37 se obtiene haciendo nula la rigidez del sistema, es decir, imponiendo:

$$|\mathbf{K}_0 - \Gamma \cdot \mathbf{K}_G| = 0 \quad (2.38)$$

Lo cual resulta en un problema de **autovalores** y **autovectores** en los que los autovalores serán los factores de pandeo  $\Gamma$  que llevan la estructura al fallo. El valor mínimo de estos será **el factor crítico de pandeo**, y el autovector asociado a él el modo de pandeo de la estructura, la forma en la que pandea.

### 4.3 Metodología del MEF.

Continuando con lo expuesto anteriormente, para desarrollar la metodología que siguen los programas de cálculo con Elementos Finitos podemos exponer el ejemplo de un dominio cualquiera, que se divide en un número finito de elementos:



**Figura 26.** Ejemplo de un dominio discretizado.

La figura 27 ilustra que al dividir el dominio resultan ciertos puntos que conectan los elementos, que se denominan **nodos**. En ellos se calcularán las variables del problema y a partir de su resultado se interpola para determinar la solución en todo el dominio. En el MEF la formulación es tal que las incógnitas son los desplazamientos de estos nodos. De esta manera, si definimos el vector de desplazamientos de un punto, siendo un ejemplo plano:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Y en concreto el desplazamiento en uno de los nodos, el nodo  $i$ :

$$\mathbf{u}_i^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Se puede obtener el desplazamiento de cualquier punto a partir de aquellos de los nodos, interpolando con las *funciones de forma*  $N_k$ :

$$\mathbf{u} = \sum_k N_k \cdot \mathbf{u}_k^e = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \quad (4.3)$$

Estas funciones de forma generalmente son polinomios, ya que se necesita que sean continuas y derivables para llevar a cabo la formulación. Los polinomios más usados son los de Lagrange.

La metodología sigue los pasos de la elasticidad tradicional, de manera que una vez que tenemos los desplazamientos en todo el dominio lo siguiente es conocer las deformaciones, a través de un operador matricial  $\mathbf{L}$  que define la derivada de estos desplazamientos:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}^e = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}^e \quad (4.4)$$

En 4.3 se incluye la matriz **B**, que relaciona la matriz **L** con las funciones de forma **N**, para relacionar las deformaciones con los valores conocidos, que son aquellos de los nodos. A través del Teorema de los Trabajos Virtuales, que establece la igualdad energética entre el trabajo externo e interno en el dominio, llegamos a la igualdad:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e \quad (4.5)$$

Donde **F** se trata del vector de fuerzas externas que se aplican en los nodos del dominio y **K** es la **matriz de rigidez** del elemento, que se calcula a través de la matriz **B** y la matriz **C**, que incluye la ley de comportamiento del material, es decir, la relación entre las deformaciones y las tensiones. El valor de **K** para el elemento, cuyo dominio se representa como  $\Omega^e$ , será:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (4.6)$$

El cálculo de la matriz de rigidez es absolutamente fundamental para el correcto desarrollo de la formulación. El equilibrio de todo el modelo se obtiene ensamblando las matrices de rigidez de los distintos elementos e imponiendo correctamente las condiciones de contorno necesarias, obteniendo un sistema de ecuaciones cuya incógnita son los desplazamientos nodales, con la forma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (4.7)$$

## 4.4 Introducción a Ansys.

Para el desarrollo del modelo numérico que se estudiará en este proyecto el software que se ha empleado es Ansys Inc., que se especializa en la implementación del análisis con elementos finitos en problemas de ingeniería. En este apartado se comentarán aspectos generales del programa y su funcionamiento, junto con los elementos que modelizan la geometría del soporte compuesto. La descripción detallada del proceso de definición del soporte en Ansys se realizará en el siguiente capítulo, donde se expondrán los diferentes ejemplos que van a analizarse.

El software Ansys es ampliamente conocido en el ámbito de la ingeniería ya que permite la resolución de problemas complejos de cualquier tipo, ya sean estructurales, térmicos, mecánicos... La implementación en este proyecto es clave ya que Ansys permite realizar análisis de pandeo, lineal o no lineal, y proporciona resultados de cualquier tipo, como cargas críticas, desplazamientos en los nodos que queramos o incluso gráficas que comparan los resultados. Para el desarrollo de la comparación en este trabajo se obtendrán resultados de las cargas críticas de pandeo en función de los distintos parámetros de los ejemplos, que se detallarán en el capítulo 5.

### 4.4.1 Análisis de pandeo con Ansys.

La formulación que Ansys emplea para resolver un problema de pandeo no varía de la expuesta anteriormente en el apartado 2.5 de esta memoria, es decir, se trata de construir el sistema de ecuaciones matricial y resolver un problema de autovalores y autovectores para calcular el factor crítico de pandeo. La guía para resolver problemas de Ansys especifica que el problema que debe resolverse tiene la forma:

$$[\mathbf{K}] \{\phi_i\} = \lambda_i [\mathbf{M}] \{\phi_i\} \quad (4.8)$$

Donde las variables son:

$[\mathbf{K}]$  corresponde a la matriz de rigidez de todo el sistema

$\{\phi_i\}$  es el autovector

$\lambda_i$  es el autovalor

[ $M$ ] se refiere a la matriz que recoge los valores del cálculo lineal previo que hay que realizar para resolver el problema de pandeo.

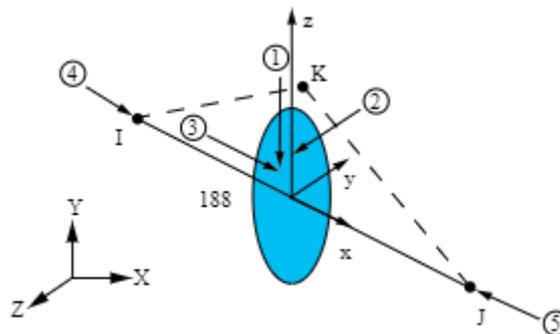
Al ser un análisis lineal, para introducir variables que el modelo teórico de la EAE [2] tiene en cuenta, como las imperfecciones geométricas ya mencionadas, tendremos que añadir parámetros equivalentes que modelicen esas imperfecciones. En el siguiente capítulo se detallará el desarrollo del código de Ansys.

#### 4.4.2 Elementos utilizados.

A pesar de que en el proyecto se analizará el comportamiento de diferentes soportes compuestos, todos ellos tienen en común la modelización en Ansys con dos elementos de los distintos que la librería del programa tiene: el BEAM188 y el LINK180.

- **BEAM188**: el elemento beam188 es uno de los más empleados sin duda en el análisis con Ansys ya que, aunque no tiene en cuenta efectos de segundo orden, permite analizar vigas que tengan desde poco canto a un canto moderadamente grande. Esto se debe a que está basado en la teoría de vigas de *Timoshenko*, que incluye en su formulación los efectos de la deformación por cortante.

De esta manera, los beam188 conforman elementos de dos nodos que tienen mínimo 6 grados de libertad en cada uno de ellos, contando con las tres traslaciones, en X, Y y Z, y las 3 rotaciones, alrededor de X, Y y Z. También incluye la opción de añadir un séptimo grado de libertad, que tiene en cuenta el **alabeo** de las secciones en I o H de poco espesor, que pueden distorsionarse por efecto de las acciones externas. Este séptimo grado de libertad se conoce como “warping” en la biblioteca de Ansys y para nuestro proyecto no nos interesará tenerlo en cuenta, ya que tomará un comportamiento de los elementos fuera de su eje natural.

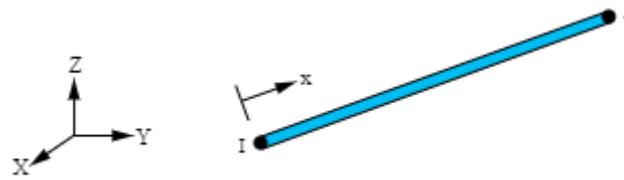


**Figura 27.** Representación de la geometría del BEAM188.

Además, es interesante marcar que aunque el elemento se defina con los nodos  $i$  y  $j$ , se puede definir un nodo adicional  $k$  que oriente la sección del elemento. Esto será de gran utilidad en este trabajo ya que la orientación de los perfiles en los elementos compuestos es clave y tendrá que ser correctamente incluida en el modelo en Ansys.

- **LINK180**: como se explicará en el capítulo 5, para la modelización de algunos de los ejemplos se empleará el elemento link180 en los enlaces del soporte compuesto. Este elemento es idóneo para simular el comportamiento de cables o tirantes, ya que se trata de un modelo biarticulado que, por tanto, trabaja sólo bajo carga axial y con 3 grados de libertad en cada nodo: las traslaciones en X, Y y Z.

Además, puede especificarse, si se desea, que el elemento sólo trabaje bajo compresión, tracción o tracción-compresión. Aunque no se considera flexión en el elemento si se tiene en cuenta otros efectos, como grandes deformaciones.



**Figura 28.** Esquema de la geometría de un elemento LINK180.

Tal y como en el caso del beam188, cada link180 se define con los nodos  $i$  y  $j$ , pero en este caso no es necesaria su orientación ya que los elementos link180 no tendrán una sección definida, sino que sólo se podrá especificar el área de la sección. Si se quisiera, por ejemplo, tomar un link180 para hacer el modelo de un perfil tubular, debería añadirse el área del perfil en concreto como dato.

# 5. ANÁLISIS DE SOPORTES COMPUESTOS ENLAZADOS EN CELOSÍA.

## 5.1 Introducción.

En este quinto y último capítulo se procederá a exponer los diferentes ejemplos de soportes compuestos que serán analizados con las dos herramientas que se mencionaron en la introducción, el software Ansys para el Método de los Elementos Finitos y el software Matlab para implementar el método teórico propuesto por la EAE [2] y representar los resultados. Primero se explicará la metodología del análisis y las diferentes variables con las que se ha trabajado, y después cada ejemplo de soporte con sus resultados y las conclusiones que se obtienen de ellos. Finalmente se dedicará una subsección a unas conclusiones generales obtenidas del cómputo total del análisis.

## 5.2 Metodología y variables empleadas.

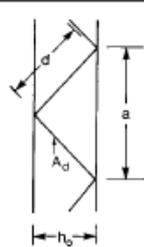
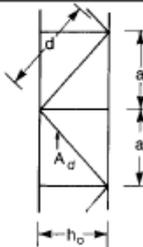
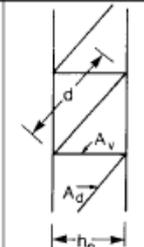
La metodología que se ha seguido para el análisis del comportamiento de los soportes compuestos consiste en tomar ejemplos de diferentes configuraciones, ya sea porque la geometría o las condiciones de contorno varíen entre sí, y calcular las cargas de pandeo tomando diferentes valores de los parámetros que definen el ejemplo. En un soporte compuesto, las dos variables geométricas principales que lo definen son:

- La distancia entre cordones,  $h_0$ : es un parámetro fundamental ya que define directamente la inercia efectiva de todo el elemento, como se explicó en el capítulo 3 de esta memoria, cuya expresión es:

$$I_{eff} = 0.5 \cdot h_0^2 \cdot A_{ch}$$

Todo comportamiento ante el pandeo del soporte se verá afectado por este valor, por lo que la variable  $h_0$  será una de las que modificaremos para analizar la resistencia del elemento.

- La distancia entre puntos de enlace,  $a$ : el tipo de triangulación del soporte determinará la distancia entre los puntos de enlace, y ésta a su vez el valor de la rigidez a cortante  $S_v$  del elemento completo. La figura siguiente contiene 3 ejemplos de triangulaciones y sus rigideces:

Sistema			
$S_v$	$\frac{nEA_d ah_0^2}{2d^3}$	$\frac{nEA_d ah_0^2}{d^3}$	$\frac{nEA_d ah_0^2}{d^3 \left[ 1 + \frac{A_d h_0^3}{A_v d^3} \right]}$
n es el número de planos de triangulación $A_d$ y $A_v$ son las áreas de la sección transversal de las diagonales y montantes			

**Figura 29.** Tabla con 3 tipos de configuración de soportes y sus rigideces a cortante.

También se demostró en el apartado 3.3.2, en concreto con las expresiones 3.15 y 3.16 del mismo, que el método teórico relaciona el esfuerzo axial que reciben los cordones con esta rigidez a cortante. Por esta influencia directa el parámetro  $a$  también lo utilizaremos en el análisis.

A parte de estos dos parámetros, la resistencia de cualquier soporte también depende de otras variables geométricas, como su longitud total  $L$  o el tipo de perfil que tengan los cordones y los enlaces. Sin embargo, esa dependencia es común en cualquier problema de ingeniería, y en concreto, de análisis de pandeo, ya sea o no un soporte compuesto, por lo que en los ejemplos analizados estos parámetros siempre serán fijos y sólo variarán los dos explicados anteriormente. De esta manera, cuando se quiera modificar la distancia entre los puntos de enlace se hará mediante **el número de módulos  $n$**  del soporte, es decir, el número de veces que se realiza una triangulación entre los cordones. Teniendo la misma longitud  $L$ , variará  $a$  tal que:

$$n = L / a \quad (5.1)$$

Por tanto, los resultados que se obtengan dependerán de  $h_0$  y  $n$ .

Continuando con el procedimiento que seguiremos, para poder comparar los resultados de los diferentes casos entre sí, todos los soportes que se analicen tendrán la misma longitud. También será común entre los diferentes casos el rango de  $h_0$  y número de módulos que se estudie, y los resultados que se buscarán serán los mismos.

Por último, para mostrar la diferencia en los resultados entre los dos métodos, se buscará una relación entre los valores de cargas de pandeo de ambos. La representación de ese valor entre los diferentes ejemplos proporcionará una idea de cómo de semejantes son los análisis.

### 5.2.1 Análisis teórico.

El análisis teórico, como se explicó en la introducción del proyecto, se realiza en Matlab. Este se trata de una implementación directa del método de la EAE [2] que se ha explicado en el apartado 3.3.2, incluyendo todas las posibles variaciones en la geometría del ejemplo, ya sea el número de planos de enlace, el tipo de triangulación, si se trata de un soporte triangulado o empresillado... En el Anexo 1 de esta memoria puede consultarse en detalle el código del programa. Por todo esto, el análisis en Matlab se considera mucho más fiable y contrastado, si bien será siempre más conservador que un análisis con Elementos Finitos.

El método de la EAE [2] busca comparar el valor de resistencia al pandeo del soporte con el esfuerzo axial al que está sometido, ya sea en los cordones o los enlaces. Nuestro fin es encontrar la carga de colapso del soporte, por lo que tendremos que igualar la expresión del axial en los cordones y los enlaces a esa resistencia. Si recordamos las expresiones del apartado de dimensionamiento, el valor de la resistencia a pandeo es:

$$N_{d,b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (5.2)$$

Cuyo cálculo ya se especificó anteriormente en 3.3.1. Dependiendo de si la comprobación es de los cordones o los enlaces deberá tomarse la longitud crítica para el cálculo de  $\chi$  correspondiente.

En la comprobación de los **cordones**, el axial que éstos soportan es:

$$N_{ch,Ed} = 0.5 \cdot N_{Ed} + \frac{M_{Ed} \cdot h_0 \cdot A_{ch}}{2 \cdot I_{eff}} \quad (5.3)$$

Con  $M_{Ed} = \frac{N_{Ed} \cdot e_0 + M_{Ed}^I}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} - \frac{N_{Ed}}{S_v}}$ , donde  $M_{Ed}^I$  siempre será nulo en nuestro caso ya que sólo

consideraremos que actúa una carga unitaria de compresión y ningún momento flector.

Incluyendo ese valor de  $M_{Ed}$  en (5.3) e igualando  $N_{ch,Ed}$  a  $N_{d,b,Rd}$ , se obtiene una ecuación cuya incógnita es  $N_{Ed}$ , el valor de la carga de compresión necesaria para que los cordones pandeen. Esa ecuación será la que Matlab resolverá.

Para comprobar los **enlaces**, el procedimiento es idéntico tomando el axil que soportan los enlaces, si son diagonales:

$$N_{d,Ed} = \frac{\pi \cdot M_{Ed} \cdot d}{L \cdot n \cdot h_0} \quad (5.4)$$

Y si son montantes:

$$N_{m,Ed} = \pi \frac{M_{Ed}}{L} \quad (5.5)$$

El valor de  $M_{Ed}$  es el mismo, y una vez más igualándolo a su resistencia  $N_{d,b,Rd}$  podremos calcular la carga de pandeo  $N_{Ed}$  de los enlaces.

Una vez tengamos estos valores de cargas de pandeo seremos capaces de comprobar si el elemento pandeará antes de forma global (con  $L_{cr}$ ) o local (con  $a_{cr}$ ) en los cordones, o si será en los enlaces (con  $d_{cr}$ ).

## 5.2.2 Análisis mediante Elementos Finitos.

Para llevar a cabo el análisis MEF en el software Ansys hay que conocer el funcionamiento del programa. Ansys es muy sensible en cuanto a que la geometría del problema debe estar muy bien definida, con las secciones orientadas correctamente. También hay que tener cuidado con las ligaduras cinemáticas, así como con las conficiones de contorno. Además, el programa también es muy sensible al mallado de los elementos. Sin embargo, esta exactitud lleva a unos resultados coherentes con las referencias que tenemos de problemas reales, como se demostrará al exponer las conclusiones.

En cuanto al desarrollo del código en Ansys, se ha modelizado un problema lo más similar al caso que el modelo teórico propone. Para realizar el análisis de pandeo se aplicará una carga unitaria de compresión en la cabeza del soporte, para que el programa dé el resultado directo del factor de pandeo  $\alpha_{cr}$  por el que tiene que multiplicarse esa carga unitaria, que será entonces la **carga de pandeo**. Además, para tener en cuenta la imperfección inicial que la normativa incluye en el cálculo, se aplicará un momento a la cabeza del soporte de valor  $M = F \cdot e_0$ , con lo que al aplicarse una carga unitaria, se aplicará un momento equivalente a la imperfección inicial de valor  $e_0 = L/500$ . Comprobando los resultados de la deformada y los modos veremos donde se produce el pandeo.

Por otro lado, una herramienta que se ha usado en el código de Ansys ha sido incluir, a parte de las características que definen las secciones de los elementos del soporte, un elemento adicional que se encontrará en la base y la cabeza de los soportes. Este elemento se trata de uno infinitamente rígido, en comparación con los demás, cuyas propiedades definiremos en el código directamente. Como referencia se han tomado las propiedades geométricas (área y valores de inercia en los ejes y a torsión) de un perfil HE 220 B pero multiplicados por  $10^8$ , para llevarlos teóricamente al infinito. Esta herramienta es

necesaria ya que para aplicar las cargas y condiciones de contorno el programa precisa que los nodos en los que éstas se aplican tengan un elemento definido, es decir, pertenezcan al mallado del dominio.

Una vez más, en los anexos de cada ejemplo se podrá consultar el desarrollo concreto del código.

### 5.3 Caso 1: soporte compuesto en celosía, empotrado-libre, triangulado en V y con un plano de enlace.

#### 5.3.1 Geometría y condiciones de contorno.

El primer ejemplo que se ha analizado consiste en un soporte triangulado, con una triangulación en forma de V, y un solo plano de enlace. Las características geométricas principales del ejemplo son:

- La longitud total de los cordones es de 10 metros.
- Se trata de acero tipo S275.
- Los cordones son perfiles IPE400, y los enlaces son tubulares circulares de diámetro exterior 100 mm y espesor 5 mm.
- Los enlaces estarán unidos a los perfiles IPE en su centro de gravedad, en la parte interior del alma.

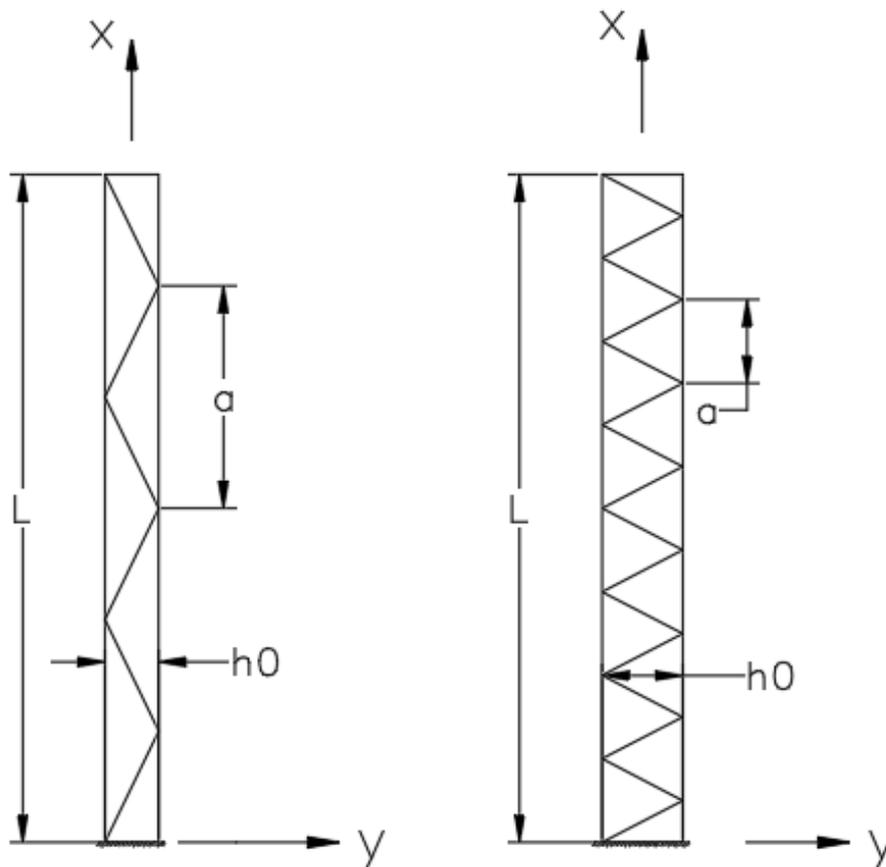
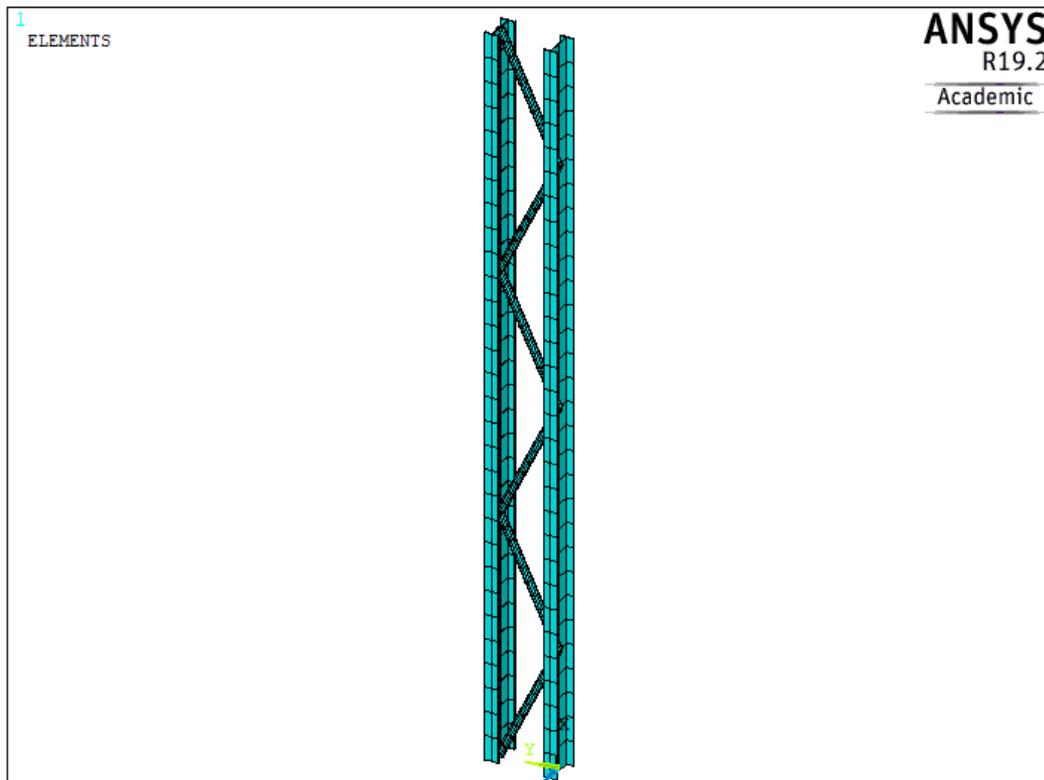


Figura 30. Representación del soporte del primer caso.

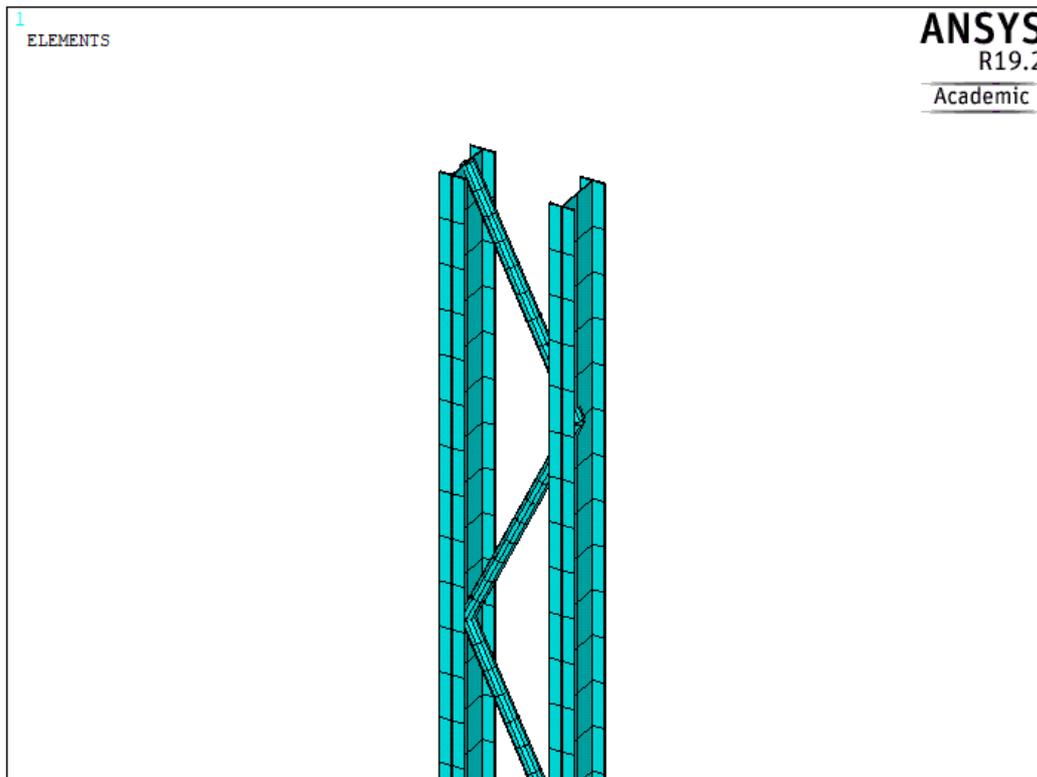
Como ya se ha explicado en los apartados anteriores, los dos parámetros que modificaremos será el número de enlaces y la distancia entre cordones. En este y todos los demás casos se estudiará el comportamiento de los soportes con un número de módulos entre 3 y 8, y un rango de  $h_0$  entre 0.4 y 2 metros. Constructivamente se ha considerado que, teniendo en cuenta que las alas de los perfiles IPE

miden 180 mm, una distancia entre cordones menor a 400 mm haría que el soporte pasara al tipo con cordones muy próximos, que a pesar de que se incluye en la EAE [2] no es objeto de este proyecto. Tampoco se considera adecuado constructivamente un soporte con un  $h_0$  mayor a 2 metros, teniendo en cuenta que la longitud total es de 10.

Además, la normativa explica que se considera un elemento compuesto aquel que tiene un número de triangulaciones (o puntos de enlace) igual o mayor de 3. Un rango entre 3 y 8 será suficiente para comprobar la influencia que este parámetro tiene en los soportes.



**Figura 31.** Representación 3D del mallado soporte del primer caso.



**Figura 32.** Zoom de detalle a la cabeza del soporte del primer caso.

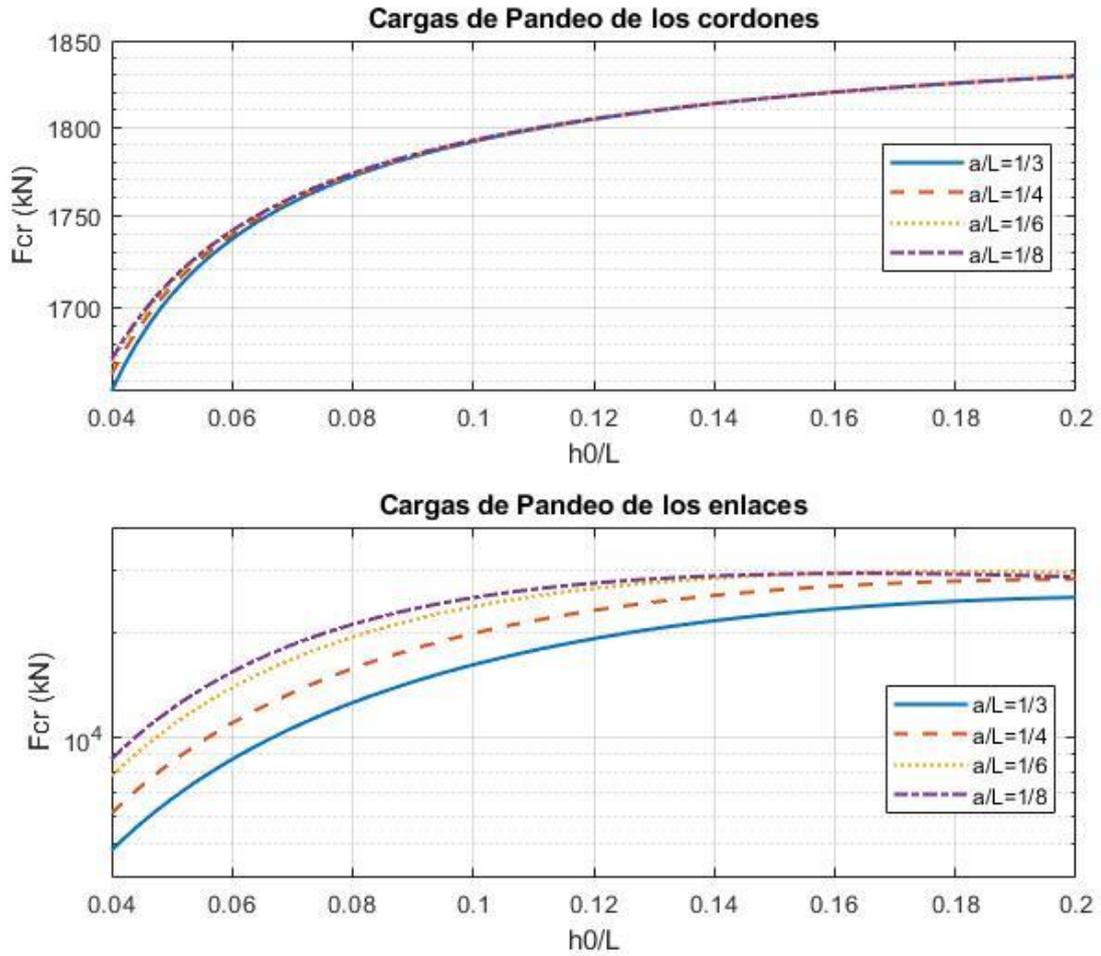
En las imágenes anteriores, obtenidas del software Ansys una vez definidos la geometría y los elementos del soporte, se muestra un ejemplo del mallado para uno de los casos, en concreto con una distancia entre cordones  $h_0$  de 0.8 metros y 3 módulos.

A pesar de que constructivamente el soporte más frecuente será el biarticulado, se considera de interés analizar también un soporte cuyas condiciones de contorno varíen de esas. Este primer ejemplo es por tanto empotrado en su base y libre en su testa, mientras que el siguiente se tratará del mismo soporte pero con articulaciones en sus extremos. De esta manera podremos comprobar también la influencia de las condiciones de contorno.

### 5.3.2 Resultados y análisis.

La metodología que seguiremos para analizar los resultados consistirá en analizar los valores y las gráficas de Matlab y a continuación compararlos con los del MEF en Ansys. En este caso sólo tendremos que hacer comprobación de los cordones y de enlaces diagonales.

Si representamos los resultados de **Matlab** de las cargas de pandeo de los cordones y los enlaces, en función del número de módulos  $1/n = a/L$ , obtenemos:



**Gráfica 1.** Comparación de las cargas de pandeo de los cordones y enlaces del primer caso.

$a/L$				
$h_0/L$	<b>1/3</b>	<b>1/4</b>	<b>1/6</b>	<b>1/8</b>
<b>0.04</b>	1655.1	1664.1	1670.0	1672.0
<b>0.08</b>	1771.9	1772.9	1773.5	1773.7
<b>0.12</b>	1804.4	1804.6	1804.7	1804.7
<b>0.2</b>	1829.3	1829.3	1829.2	1829.1

**Tabla 1.** Valores de las cargas de pandeo (kN) de los cordones del primer caso.

$a/L$				
$h_0/L$	<b>1/3</b>	<b>1/4</b>	<b>1/6</b>	<b>1/8</b>
<b>0.04</b>	4793	6111	7785	8726
<b>0.08</b>	12637	15809	19451	21135

<b>0.12</b>	19236	23160	26730	27700
<b>0.2</b>	25231	28402	29704	28834

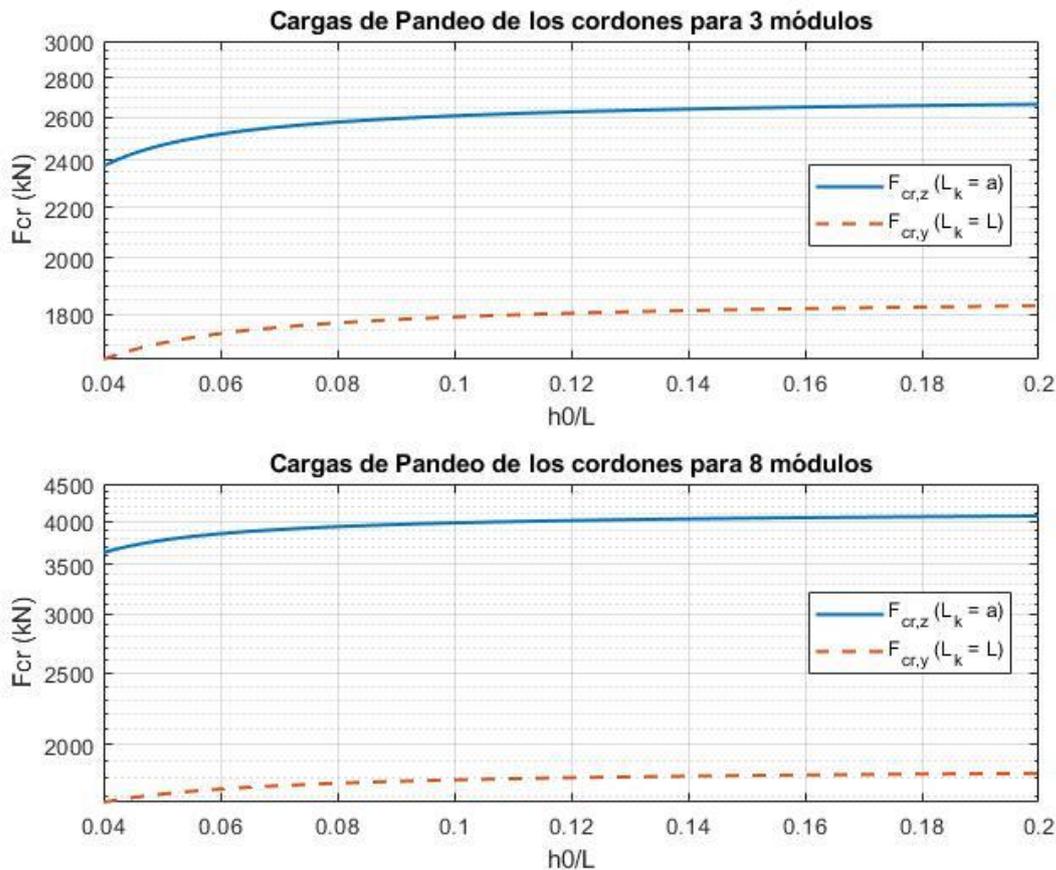
**Tabla 2.** Valores de las cargas de pandeo (kN) de los enlaces del primer caso.

En las tablas se recogen los resultados numéricos en **kilonewtons** de la carga de pandeo del soporte, para ciertos valores de las variables.

Claramente se muestra que el pandeo estará en los cordones, los valores de la carga de pandeo son muy inferiores a aquellos de los enlaces. Esta gráfica toma como carga de pandeo de los cordones la mínima entre el pandeo local y global. Además, se muestra que en el modelo teórico no es muy importante el número de módulos del soporte, el valor de la carga varía según la distancia entre los cordones pero converge para los diferentes casos de **n**.

Por otro lado, también podemos concluir que, como sería intuitivo, cuanto más esbelto sea el soporte menor será su carga de pandeo. El modelo teórico lo plasma claramente según la tabla 1, en la que vemos cómo cuanto más se separan los cordones más resistente se hace al pandeo.

A continuación, una vez conocemos que el fallo estará en los cordones, para comprobar si el pandeo será global o local, se representan los valores de las cargas de pandeo tomando como longitudes críticas la distancia entre puntos de enlace y la longitud del cordón completo:

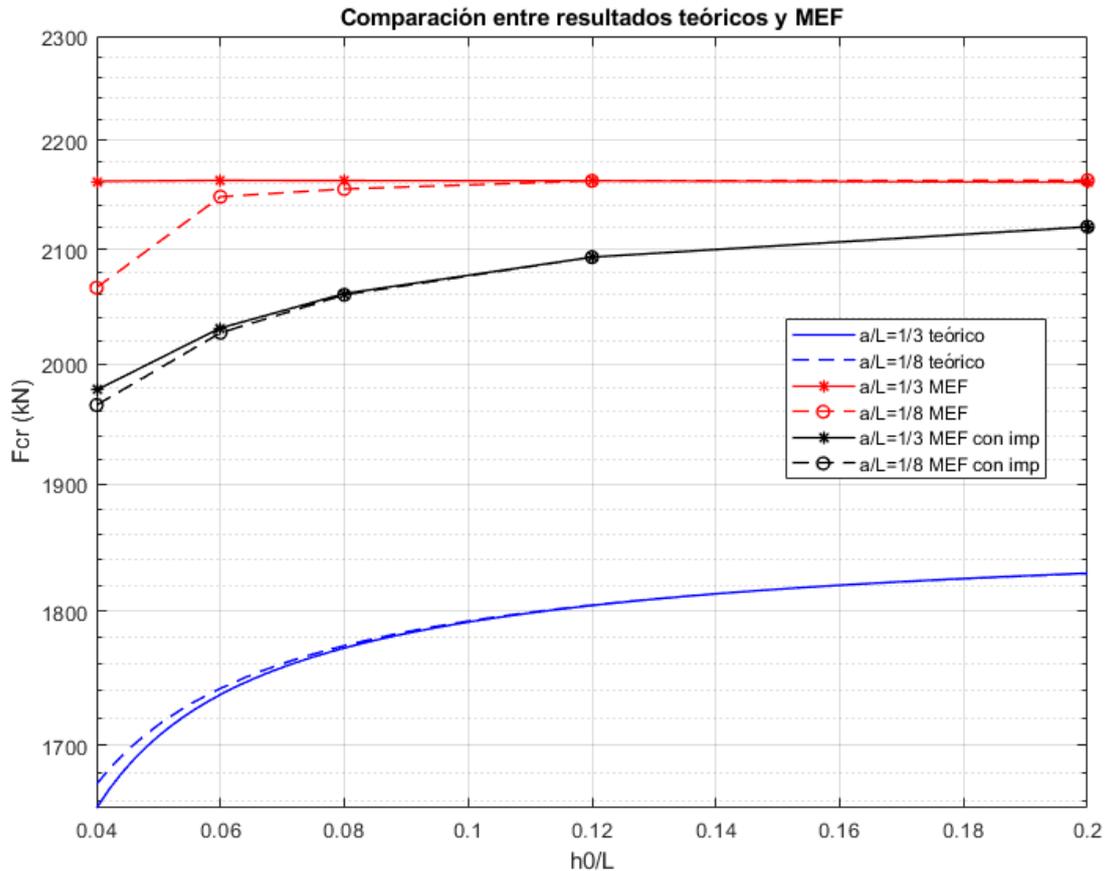


**Gráfica 2.** Comparación del pandeo global o local de los cordones del primer caso.

De esta gráfica no se obtendrán resultados concretos ya que su función es ilustrar si los cordones pandearán de forma local o global. Sólo se muestran para los dos extremos de la variable del número

de módulos, 3 y 8 módulos. Es suficiente para mostrar que el pandeo siempre será global, sea cual sea el caso. Esto coincide con lo que veíamos en la primera gráfica, donde concluimos que el número de módulos no era muy relevante en este caso, lo cual ocurre porque al ser un modo de pandeo del cordón completo su longitud crítica nunca varía, independientemente del número de módulos. Por el contrario, si el pandeo fuera local sí importaría ya que la longitud crítica local depende de cuantos módulos tenga el soporte.

Ahora podemos pasar a sacar los resultados de **Ansys** y compararlos con los que ya tenemos. Nuevamente para 3 y 8 módulos, los resultados comparados de las cargas de pandeo entre ambos análisis son:



**Gráfica 3.** Comparación entre resultados teóricos y del MEF para el caso 1.

En concreto, los resultados del Método de los Elementos Finitos son, en kN:

$h_0/L$	Sin imperfección	Con imperfección
<b>0.04</b>	2164.9	1978.1
<b>0.08</b>	2162.7	2061
<b>0.12</b>	2162.5	2093.3
<b>0.2</b>	2162.8	2120.5

**Tabla 3.** Resultados del MEF (kN) para el primer caso con 3 módulos.

$h_0/L$	Sin imperfección	Con imperfección
<b>0.04</b>	2031.1	1965.4
<b>0.08</b>	2155.0	2059.9
<b>0.12</b>	2162.5	2093.3
<b>0.2</b>	2161.8	2120.6

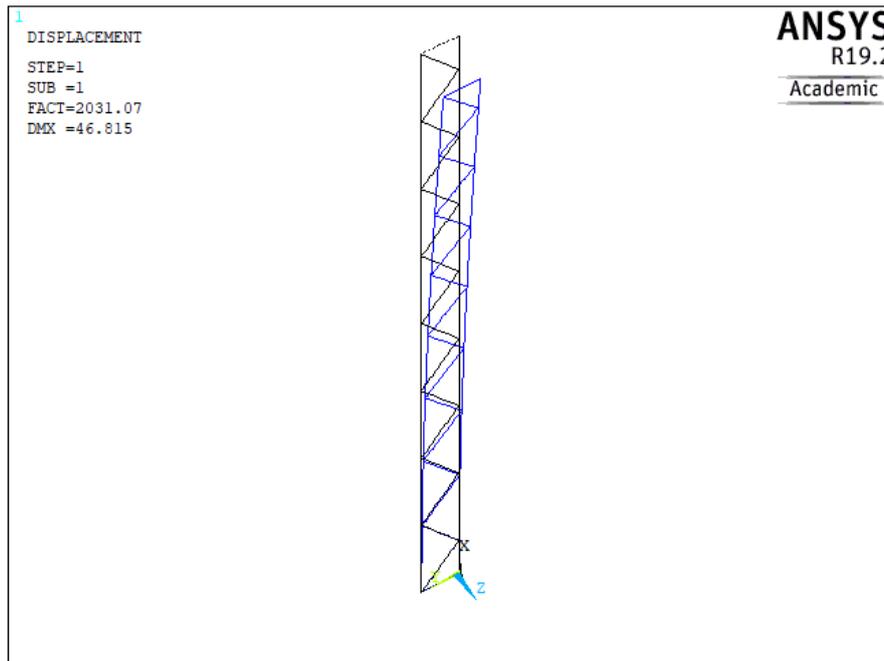
**Tabla 4.** Resultados del MEF (kN) para el primer caso con 8 módulos.

Con estos resultados es evidente que ambos análisis convergen. A pesar de que en la gráfica 3 los resultados del MEF difieran un poco de los teóricos, se consideran correctos ya que la diferencia entre ambos es de unos 200 kN, bastante aceptable ya que el análisis con Elementos Finitos siempre tendrá en cuenta factores que los modelos teóricos, que están del lado de la seguridad, pasan por alto. Es natural que el valor de carga más próximo entre los dos métodos sea el del soporte de 8 módulos más esbelto (con  $h_0/L=0.04$ ) porque en Ansys será el soporte que más se asemeje al modelo teórico de una columna esbelta ideal.

Si consultamos los modos de pandeo en Ansys, para ambos casos de  $n$ , con  $h_0=0.4$  metros:

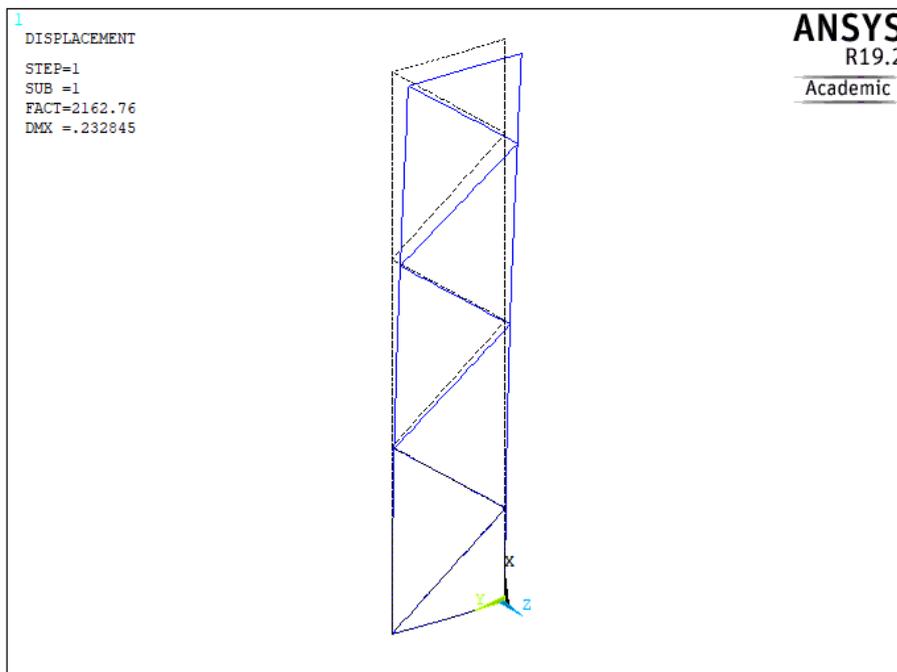


**Figura 33.** Primer modo de pandeo para el primer caso con 3 módulos y  $h_0/L=0.04$ .

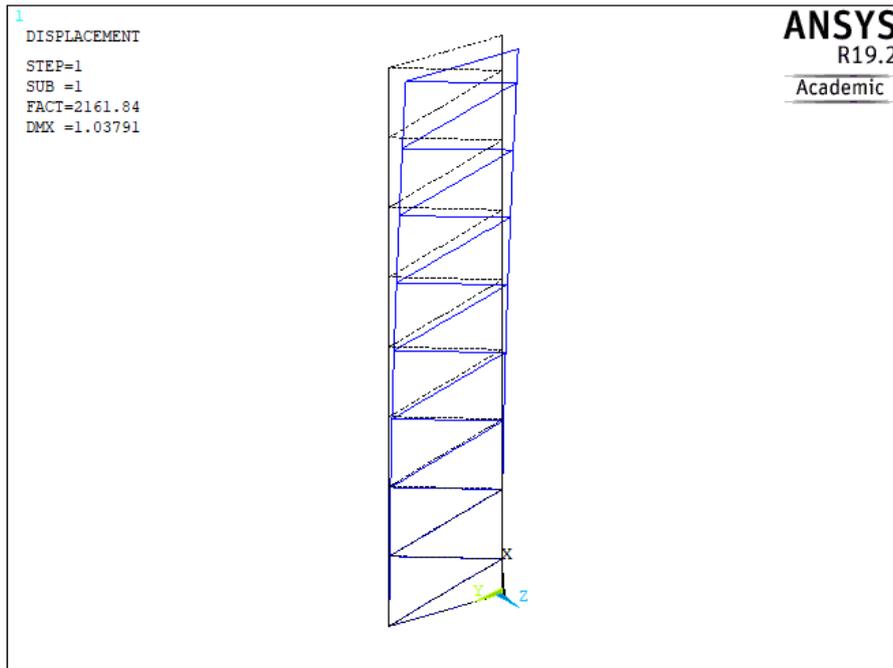


**Figura 34.** Primer modo de pandeo para el primer caso con 8 módulos y  $h_0/L= 0.04$ .

En el otro extremo, para  $h_0= 2$  metros, los modos de pandeo resultan:



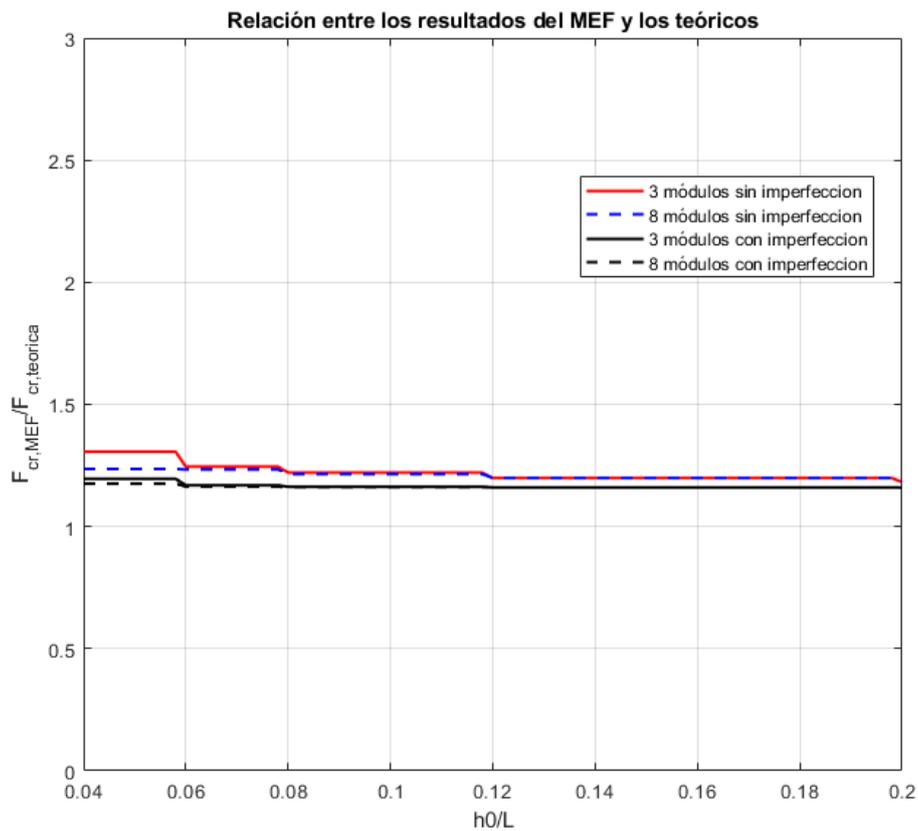
**Figura 35.** Primer modo de pandeo para el primer caso con 3 módulos y  $h_0/L= 0.2$ .



**Figura 36.** Primer modo de pandeo para el primer caso con 8 módulos y  $h_0/L=0.2$ .

Se confirma que con Elementos Finitos obtenemos el mismo resultado que con el análisis teórico. El elemento pandeo en los cordones, de forma global, para cualquier valor de los parámetros de estudio.

Por último, una vez que tenemos todos los resultados de Ansys, podemos comparar los valores entre sí:



**Gráfica 4.** Representación de la relación entre los resultados teóricos y los del MEF del caso 1.

En concreto, la media entre las relaciones de las cargas es:

	3 mód. sin imperfección	8 mód. sin imperfección	3 mód. con imperfección	8 mód. con imperfección
$\left(\frac{F_{cr,MEF}}{F_{cr,teo}}\right)_{med}$	1.22	1.21	1.17	1.16

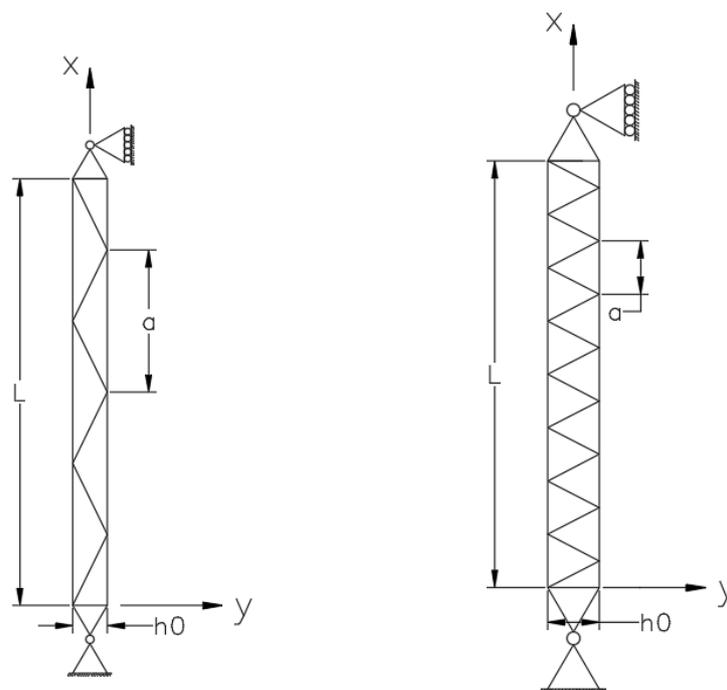
**Tabla 5.** Valor medio de la relación entre las cargas de pandeo de ambos análisis para el primer caso.

Como comentario final a este caso, podemos decir que ambos análisis convergen a un valor al aumentar  $h_0$  para cualquier valor de  $n$ , y además, no hay una variación muy grande entre los resultados de los dos, como vemos en la tabla 5, donde los valores medios son poco superiores a la unidad. También se comprueba así que un soporte en el que tenemos en cuenta la imperfección inicial tiene un comportamiento más similar al del modelo teórico, ya que al añadir la imperfección las cargas en Ansys disminuyen y la relación se aproxima más a la unidad.

## 5.4 Caso 2: soporte compuesto en celosía, biarticulado, triangulado en V y con un plano de enlace.

### 5.4.1. Introducción y especificaciones sobre la geometría.

El segundo ejemplo que se analizará tendrá la misma geometría que el primero, modificando sus condiciones de contorno de manera que en vez de estar empotrado en su base y libre en la testa será biarticulado. Todas las propiedades de las secciones de los cordones y enlaces serán iguales, así como la longitud total y el tipo de triangulación.

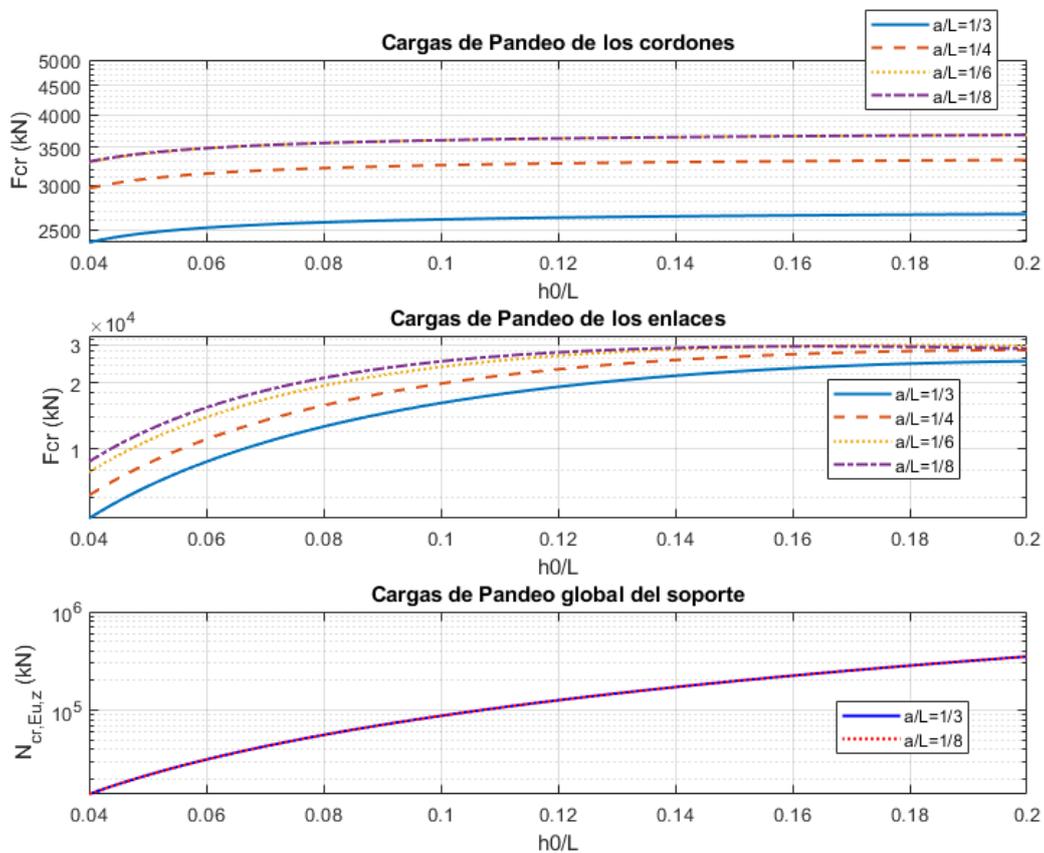


**Figura 37.** Representación de la geometría del segundo caso.

La finalidad de este ejemplo es analizar un soporte mucho más realista, en términos de construcción, ya que en la realidad los soportes empotrados no se dan tanto como aquellos biarticulados. Nos permitirá comprobar una vez más la similitud con el modelo teórico y a su vez analizar cuánto afectan las condiciones de contorno, comparando con los resultados del primer caso. También se añadirá la imperfección inicial, como en el caso anterior, muy relevante en el caso de soportes articulados, ya que la normativa obliga a tenerla en cuenta en el cálculo de ellos.

#### 5.4.2 Resultados y análisis.

Nuevamente, primero analizamos las cargas de pandeo de los cordones y los enlaces en Matlab. La representación gráfica resulta:



**Gráfica 5.** Comparación de las cargas de pandeo de los cordones y enlaces del segundo caso.

$a/L$				
$h_0/L$	1/3	1/4	1/6	1/8
0.04	2375.4	2960.7	3291.2	3301.7
0.08	2578.6	3216.3	3562.3	3563.0
0.12	2628.7	3279.1	3630.9	3630.6
0.2	2666.1	3325.8	3682.2	3681.7

**Tabla 6.** Valores de las cargas de pandeo (kN) de los cordones del segundo caso.

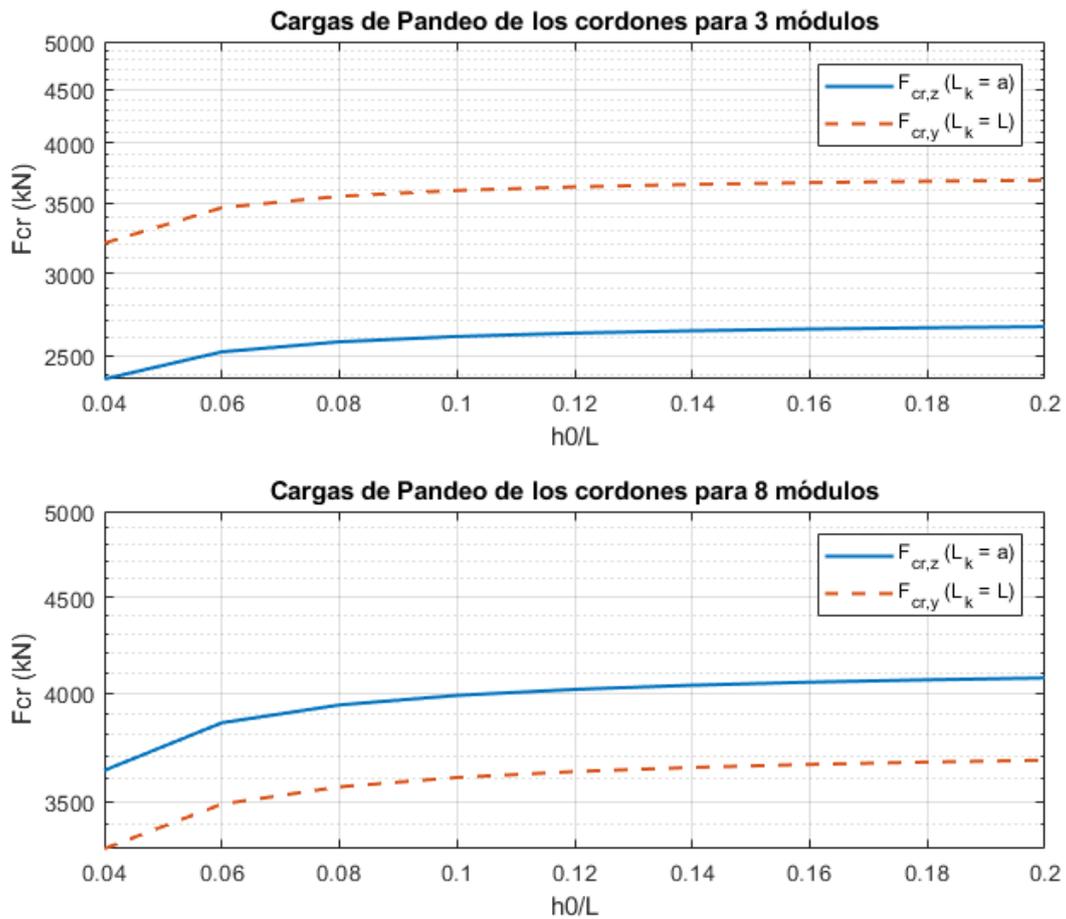
$a/L$	<b>1/3</b>	<b>1/4</b>	<b>1/6</b>	<b>1/8</b>
$h_0/L$				
<b>0.04</b>	4793	6111	7785	8726
<b>0.08</b>	12637	15809	19451	21135
<b>0.12</b>	19236	23160	26730	27700
<b>0.2</b>	25231	28402	29704	28834

**Tabla 7.** Valores de las cargas de pandeo (kN) de los enlaces del segundo caso.

Con estos resultados comprobamos que según el modelo teórico el soporte deberá pandear en los cordones siempre, ya que estas cargas de pandeo son mucho menores a las de los cordones. Además, en las gráficas podemos ver que, al contrario que en el caso anterior, el número de módulos sí condiciona bastante la resistencia del soporte.

La tendencia al modificar la separación entre cordones está clara: cuanto más separados estén mayor será la resistencia del elemento, ya que su esbeltez disminuye.

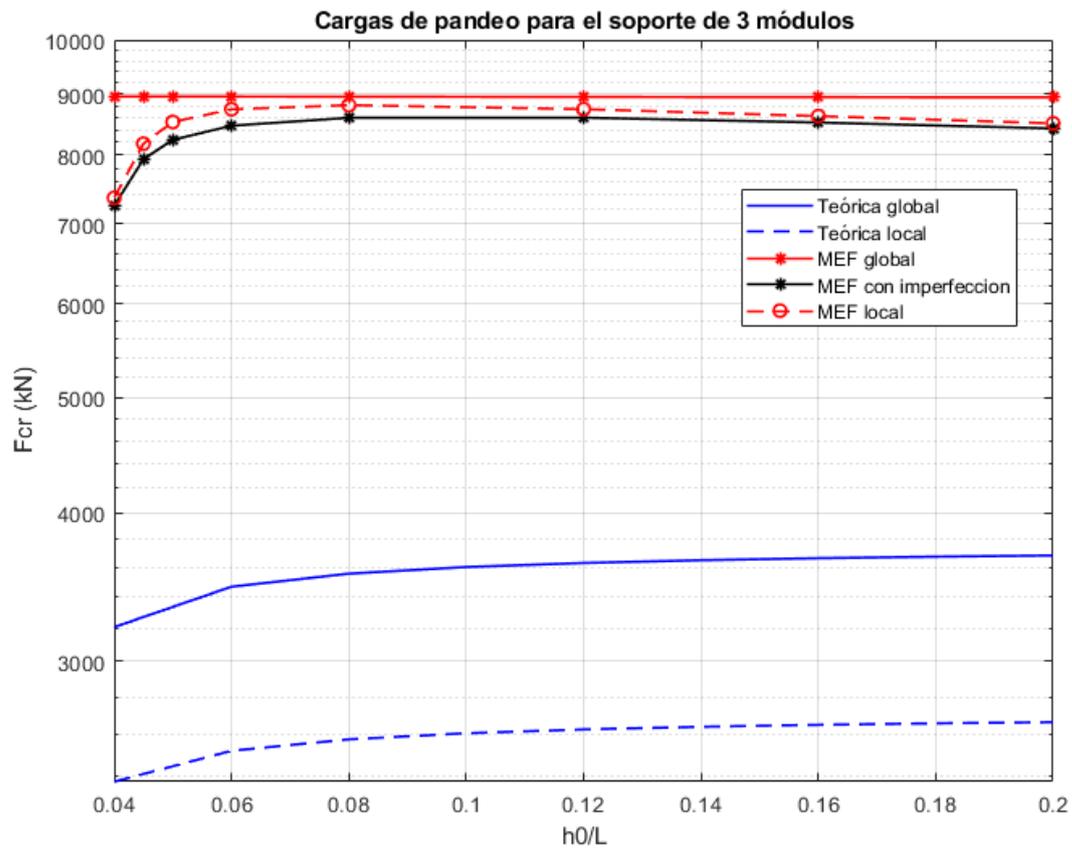
Para ver si los cordones pandearán de forma local o global, en los soportes de 3 y 8 módulos:



**Gráfica 6.** Comparación del pandeo global o local de los cordones del segundo caso.

Vemos que para el soporte de 3 módulos, la comprobación teórica muestra que el pandeo será local, mientras que si el soporte tiene 8 módulos será global. Esto se debe a la interacción entre todos los parámetros del análisis, que significa que para el soporte de 3 módulos, con una longitud de pandeo local  $a_{cr}$  **mayor**, la resistencia local es **menor** que la global. Al aumentar los puntos de enlace y reducir  $a_{cr}$  el valor de resistencia local va **aumentando**, llegando a sobrepasar el valor de resistencia **global**. Es una forma de demostrar que en el análisis teórico según la EAE [2] la longitud de pandeo es **inversamente proporcional** a la resistencia  $N_{rd}$  a pandeo de ese elemento aislado.

Comparamos los resultados de las cargas de los cordones con los de Ansys, de manera local y global, las cargas de los enlaces no nos interesan en principio. Para mostrar la influencia de la imperfección inicial tomaremos los valores mínimos con y sin ella:

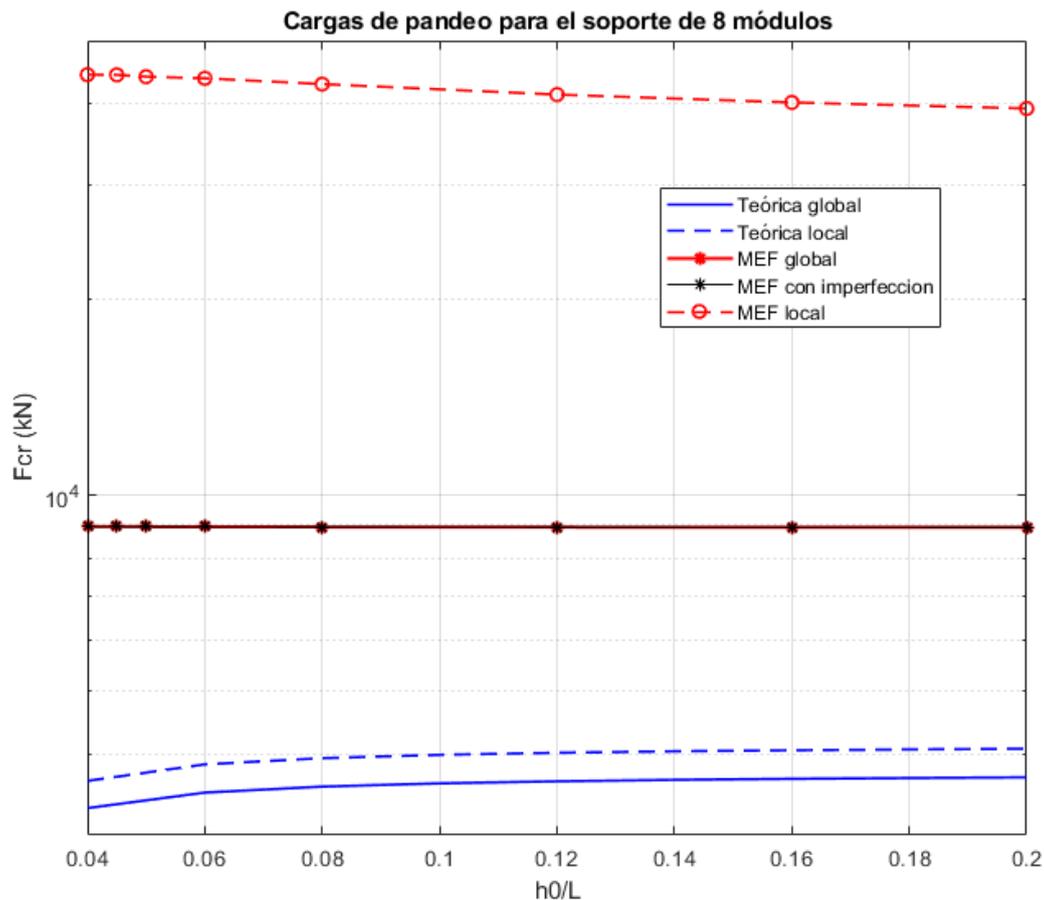


**Gráfica 7.** Comparación entre resultados teóricos y del MEF para el segundo caso con 3 módulos.

En concreto, los valores de Ansys serán:

a/L	Pandeo local sin imperfección	Pandeo local con imperfección	Pandeo global sin imperfección
h <sub>0</sub> /L			
0.04	7363.3	7249.9	8962.1
0.08	8812.6	8599.3	8958.5
0.12	8744.4	8601.2	8954.3
0.2	8507.6	8423.7	8947.1

**Tabla 8.** Resultados de cargas de pandeo (kN) del segundo caso en Ansys para 3 módulos.



**Gráfica 8.** Comparación entre resultados teóricos y del MEF para el segundo caso con 8 módulos.

$h_0/L$	Pandeo local sin imperfección	Pandeo global sin imperfección	Pandeo global con imperfección
<b>0.04</b>	44328	8946	8945.7
<b>0.08</b>	42870	8936	8936.5
<b>0.12</b>	41305	8930	8930.6
<b>0.2</b>	39320	8925.3	8924.2

**Tabla 9.** Resultados de cargas de pandeo (kN) del segundo caso en Ansys para 8 módulos.

En este caso es importante distinguir aún más entre el elemento con 3 módulos y el de 8, para comprobar si ese cambio en el modo de pandeo se manifiesta en el MEF también.

Vemos que, a pesar de que entre ambos análisis los valores varíen, el valor de la carga de pandeo al variar  $h_0$  no sufre modificaciones muy grandes en ninguno de los análisis. Sólo hay un salto mayor desde considerar  $h_0 = 40 \text{ cm}$  a  $h_0 = 80 \text{ cm}$  pero claramente ocurre ya que si la longitud del soporte son 10 metros, un  $h_0$  de 40 cm hace que sea muy esbelto. La variable  $h_0$  parece no influenciar el comportamiento del soporte en gran medida.

Por otro lado, el número de módulos del soporte parece tener mucha más importancia en su comportamiento. Los resultados muestran que para un mayor número de módulos tanto para pandeo local como global la resistencia aumenta. Esto ocurre porque el número de módulos cambia

directamente la rigidez a cortante del soporte, haciendo que aumente cuantos más haya. Esta rigidez a cortante es tan importante en los soportes compuestos como la inercia del elemento.

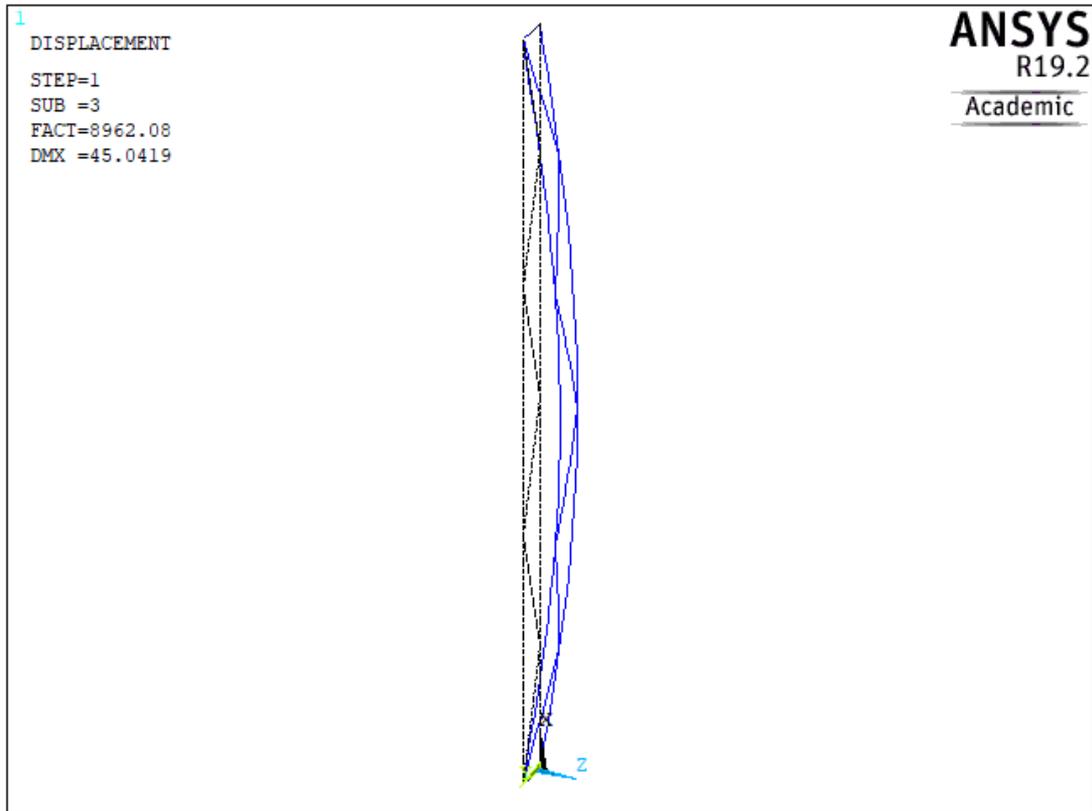
Además, según Ansys, la diferencia de la resistencia local **entre ambos soportes** es muy grande, pasando de una carga en torno a 8600 kN a 40000 kN cuando aumentamos de 3 a 8 módulos. Por los resultados de todos los análisis de los soportes queda claro que el MEF tiene mucho más en cuenta el número de módulos que el método teórico, ya que los resultados sufren variaciones muy importantes al cambiar el parámetro.

Si seguimos con la comparación entre añadir o no añadir la imperfección inicial en el MEF, buscando la mayor similitud al problema teórico posible, vuelve a ocurrir que al añadirla la carga se asemeja más a la que resulta según la EAE [2], aunque para el caso del soporte con 8 módulos la variación es mínima.

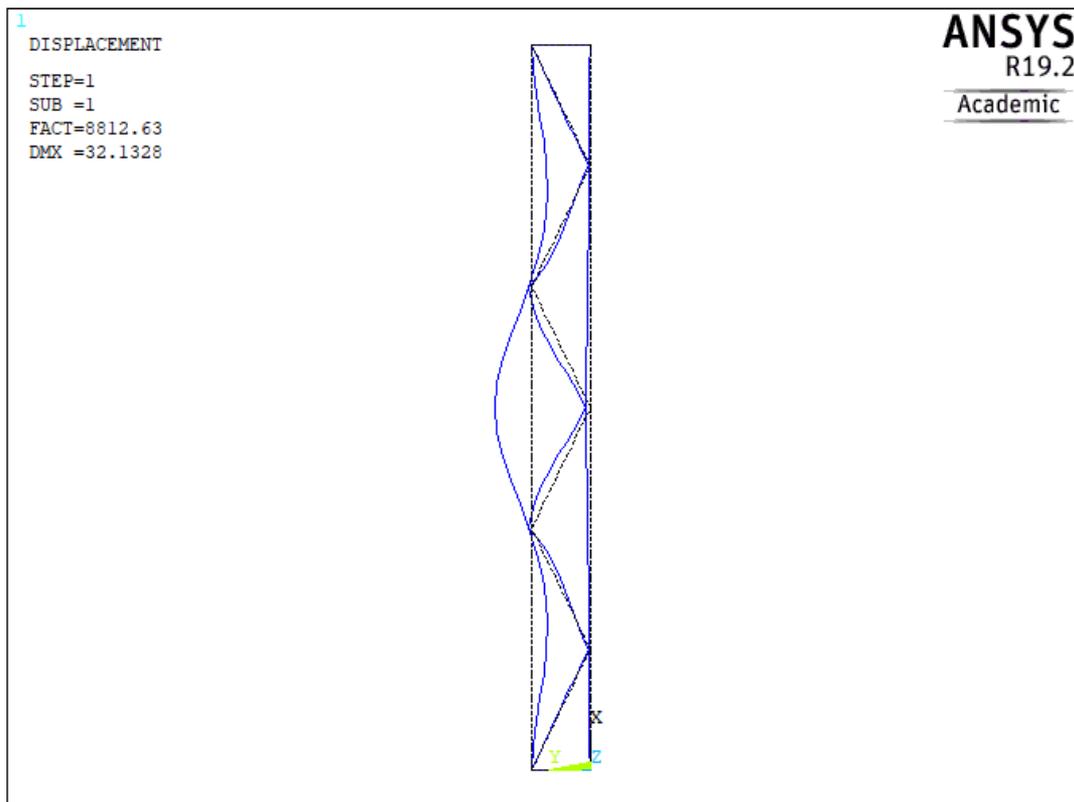
Consultamos los modos de pandeo en Ansys. Para comprobar como varían al cambiar el valor de  $h_0$  representamos los modos globales y locales para los casos de  $h_0/L = 0.04, h_0/L = 0.08$  y  $h_0/L = 0.2$ . Primero los representamos para **3 módulos**:



**Figura 38.** Primer modo de pandeo local del segundo caso para 3 módulos y  $h_0/L = 0.04$ .



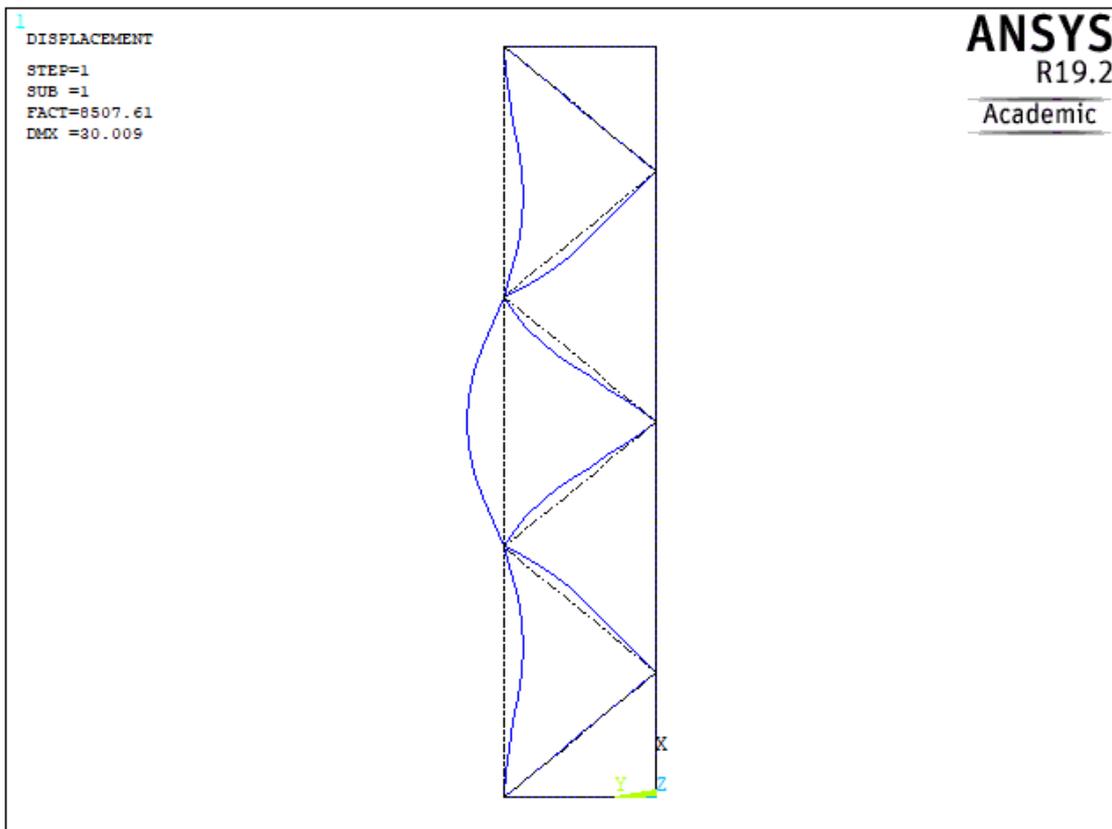
**Figura 39.** Primer modo de pandeo global del segundo caso para 3 módulos y  $h_0/L = 0.04$ .



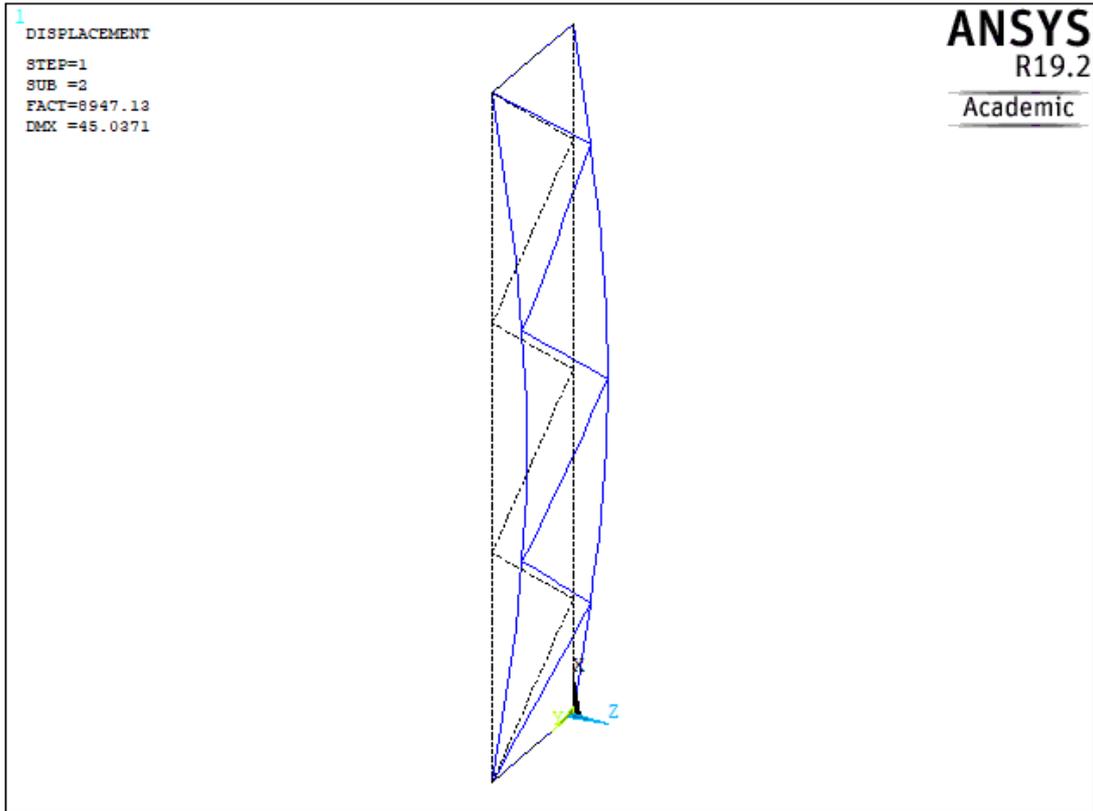
**Figura 40.** Primer modo de pandeo local del segundo caso para 3 módulos y  $h_0/L = 0.08$ .



**Figura 41.** Primer modo de pandeo global del segundo caso para 3 módulos y  $h_0/L = 0.08$ .

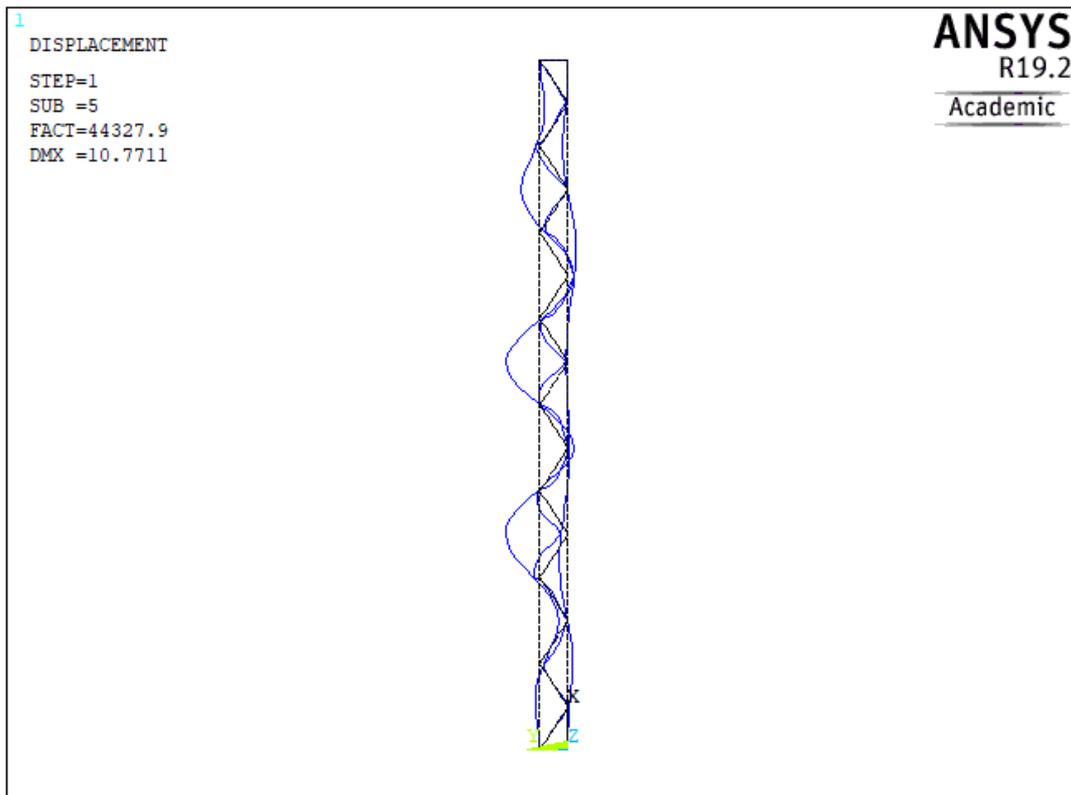


**Figura 42.** Primer modo de pandeo local del segundo caso para 3 módulos y  $h_0/L = 0.2$

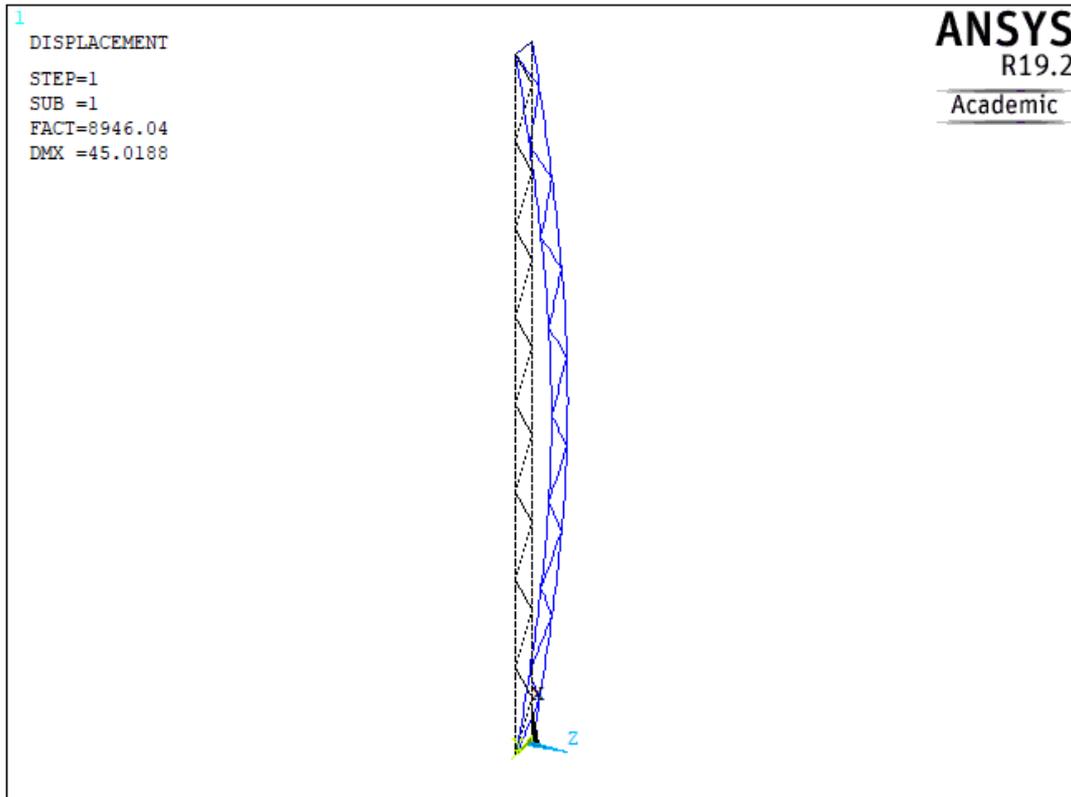


**Figura 43.** Primer modo de pandeo global del segundo caso para 3 módulos y  $h_0/L = 0.2$

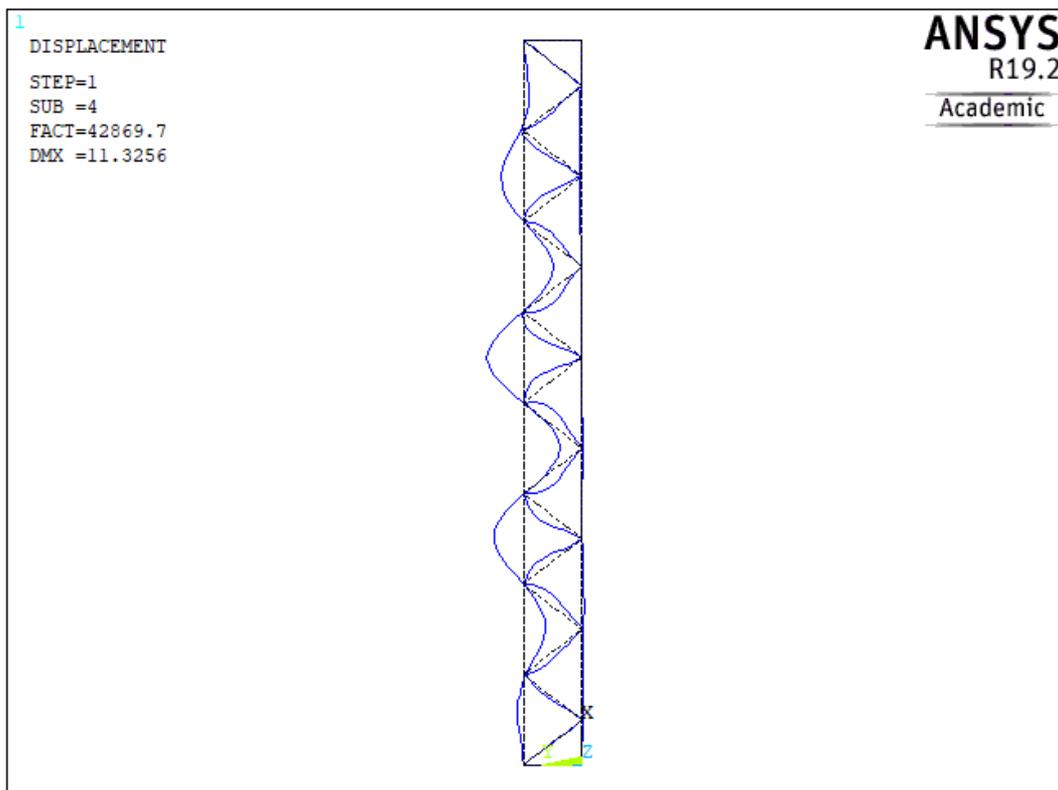
A continuación los modos de los soportes de **8 módulos**:



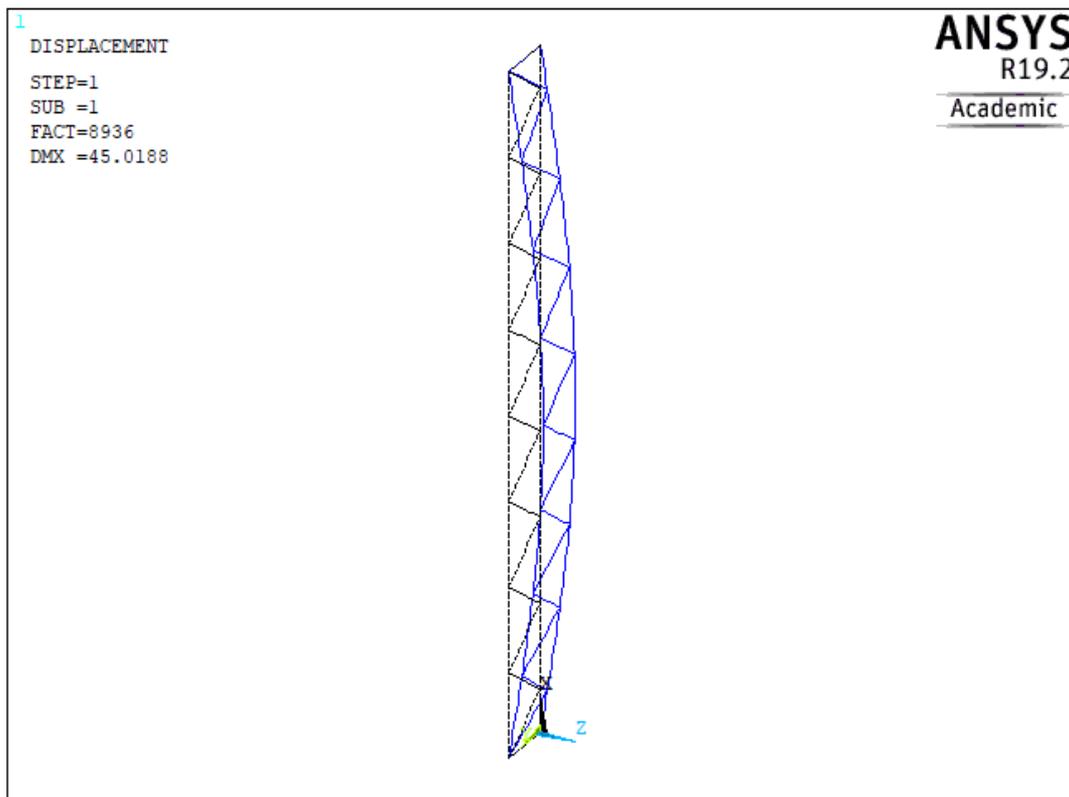
**Figura 44.** Primer modo de pandeo local del segundo caso para 8 módulos y  $h_0/L = 0.04$



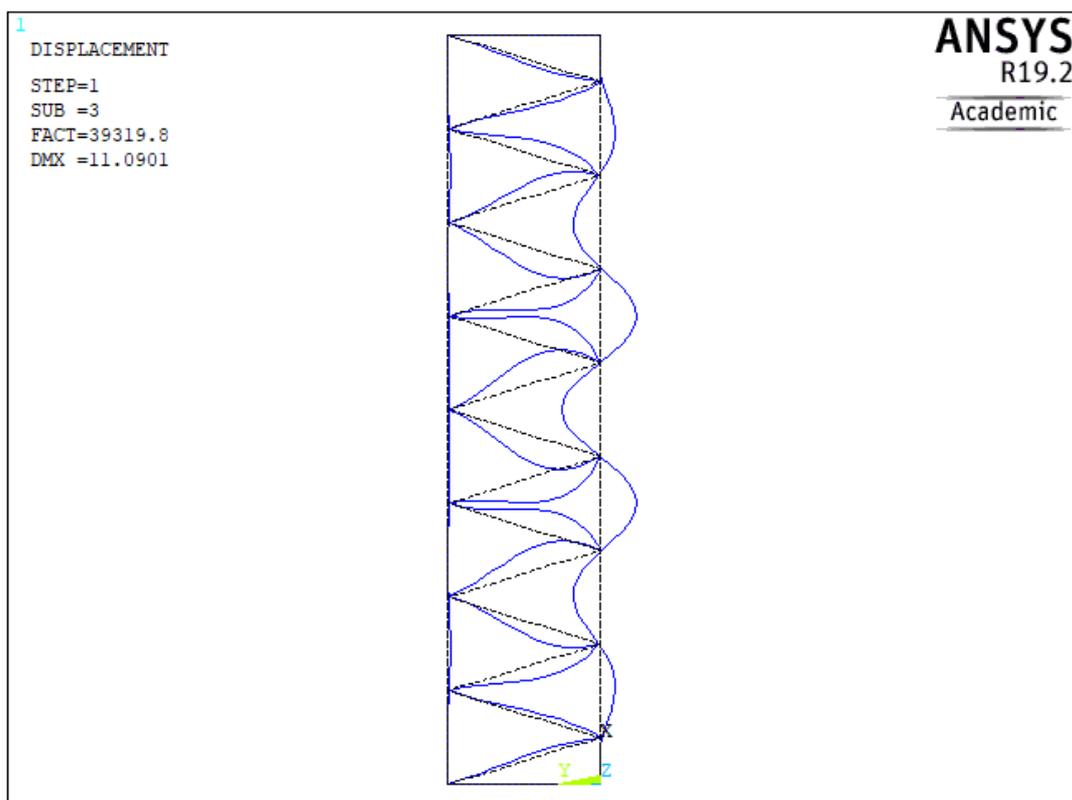
**Figura 45.** Primer modo de pandeo global del segundo caso para 8 módulos y  $h_0/L = 0.04$



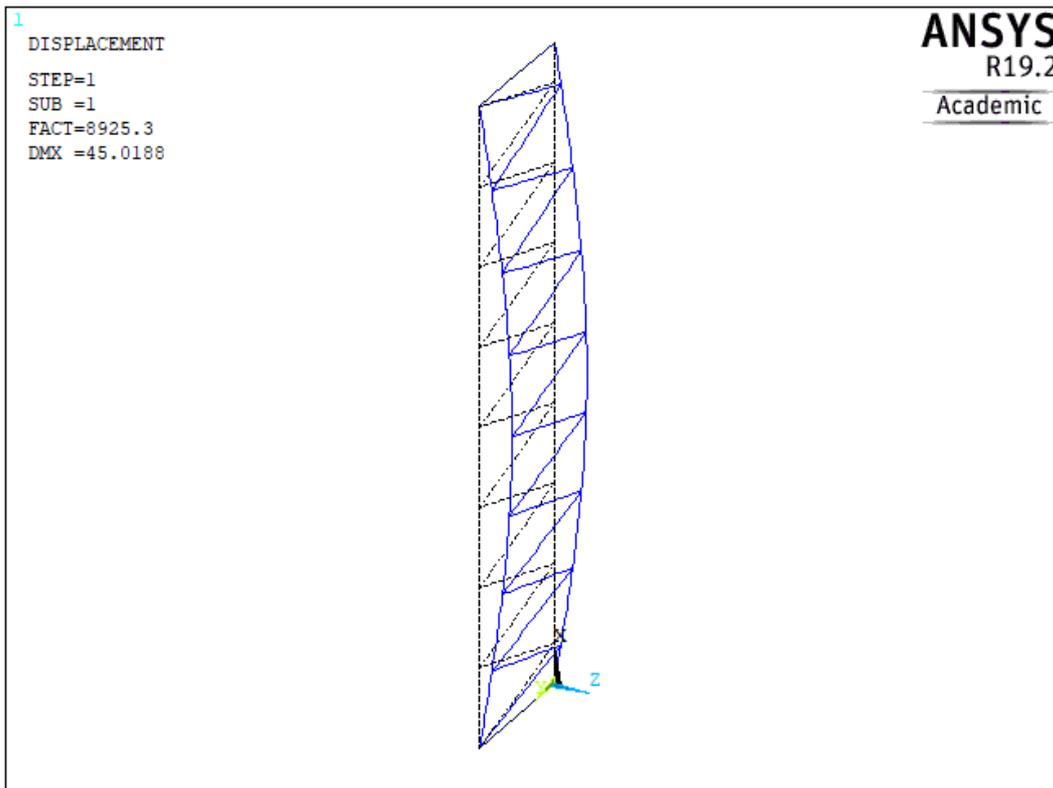
**Figura 46.** Primer modo de pandeo local del segundo caso para 8 módulos y  $h_0/L = 0.08$



**Figura 47.** Primer modo de pandeo global del segundo caso para 8 módulos y  $h_0/L = 0.08$



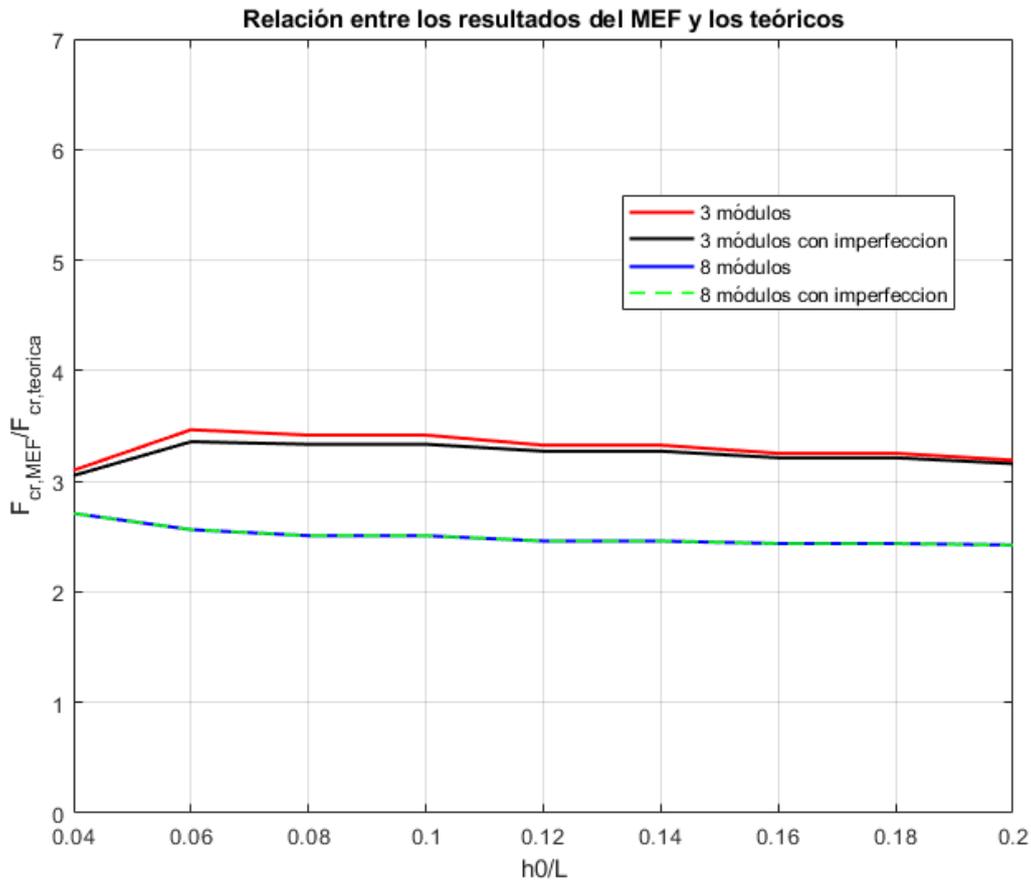
**Figura 48.** Primer modo de pandeo local del segundo caso para 8 módulos y  $h_0/L = 0.2$



**Figura 49.** Primer modo de pandeo global del segundo caso para 8 módulos y  $h_0/L = 0.2$

Todos los modos de pandeo coinciden con lo establecido en la teoría básica de inestabilidad de un elemento, tomando las formas adecuadas para unas condiciones de contorno de soporte biarticulado.

Al igual que en el primer caso, ahora analizamos la relación entre los resultados de los dos análisis, sin tener y teniendo en cuenta la imperfección inicial:



**Gráfica 9.** Representación de la relación entre los resultados teóricos y los del MEF del caso 2.

En concreto, la media entre las relaciones de las cargas es:

	<b>3 mód. sin imperfección</b>	<b>8 mód. sin imperfección</b>	<b>3 mód. con imperfección</b>	<b>8 mód. con imperfección</b>
$\left(\frac{F_{cr,MEF}}{F_{cr,teo}}\right)_{med}$	3.31	2.5	3.25	2.5

**Tabla 10.** Valor medio de la relación entre las cargas de pandeo de ambos análisis para el segundo caso.

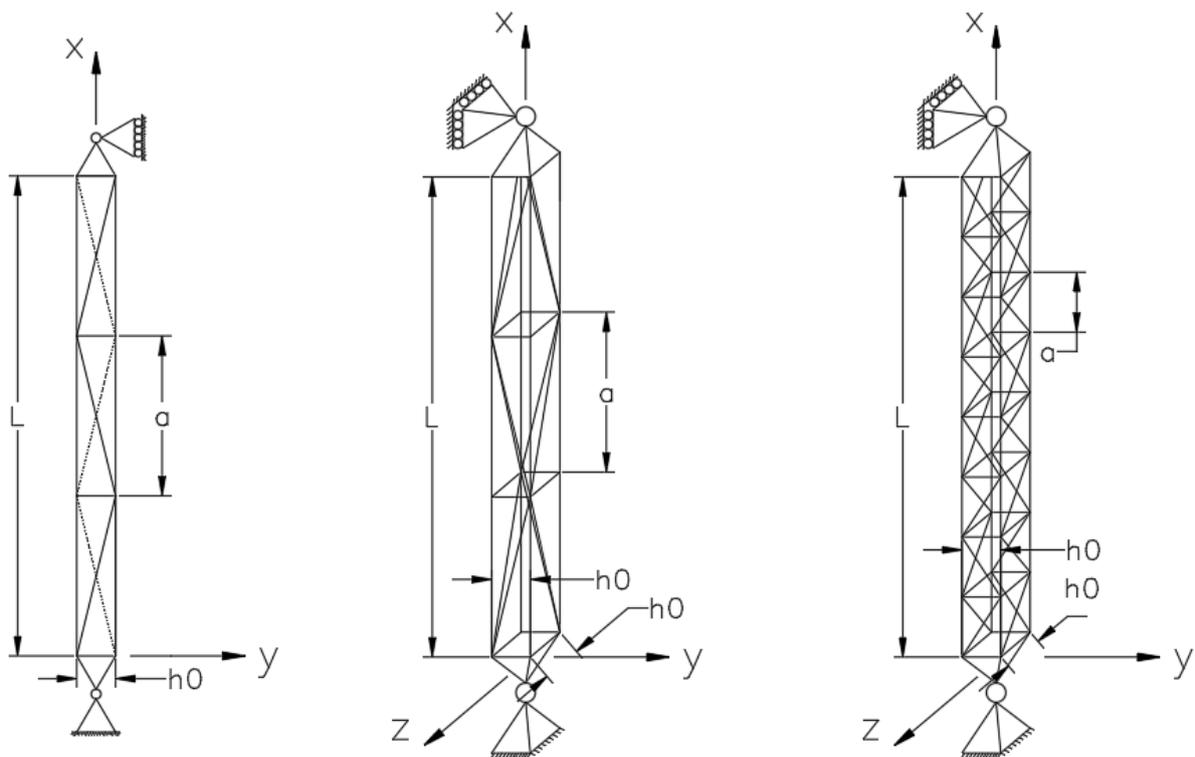
Para nuestro estudio, a pesar de que se observa que hay una gran diferencia entre los resultados de ambos análisis, hay que tener en cuenta que el Método de los Elementos Finitos considera muchas más variables que el método teórico, que estará del lado de la seguridad. No sería correcto considerar que los resultados de Ansys son exactos y tomar estas cargas de pandeo si se quisiera llevar a la práctica el proyecto. Lo que sí podríamos afirmar es que un soporte con estas características optimiza su resistencia cuantos más módulos tenga y más separados estén sus cordones, ya que para todas las variables y entre ambos análisis esa tendencia se mantiene.

## 5.5 Caso 3: soporte compuesto en celosía, biarticulado, triangulado en K y con dos planos de enlace.

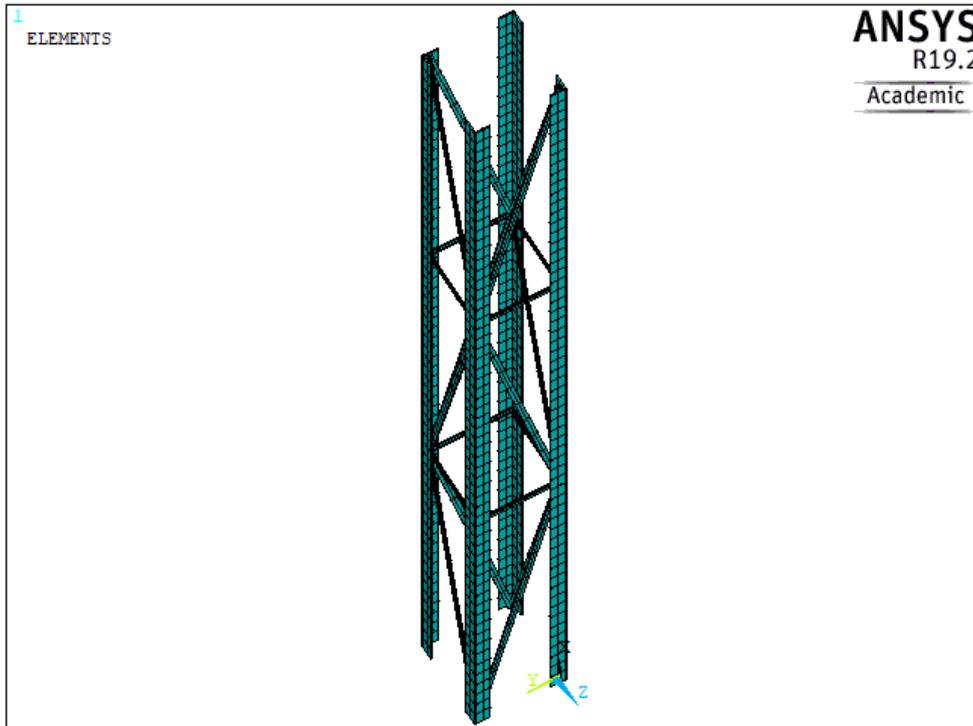
### 5.5.1. Introducción y especificaciones sobre la geometría.

El tercer caso de estudio se trata de un soporte completamente distinto a los dos anteriores, con una geometría, una forma de triangulación y unos elementos diferentes. En este caso, se tratará de un soporte con dos planos de enlace en el eje Y y otros dos en Z, haciendo que no esté contenido en ningún plano. Siguiendo la metodología anterior, definimos sus características geométricas principales:

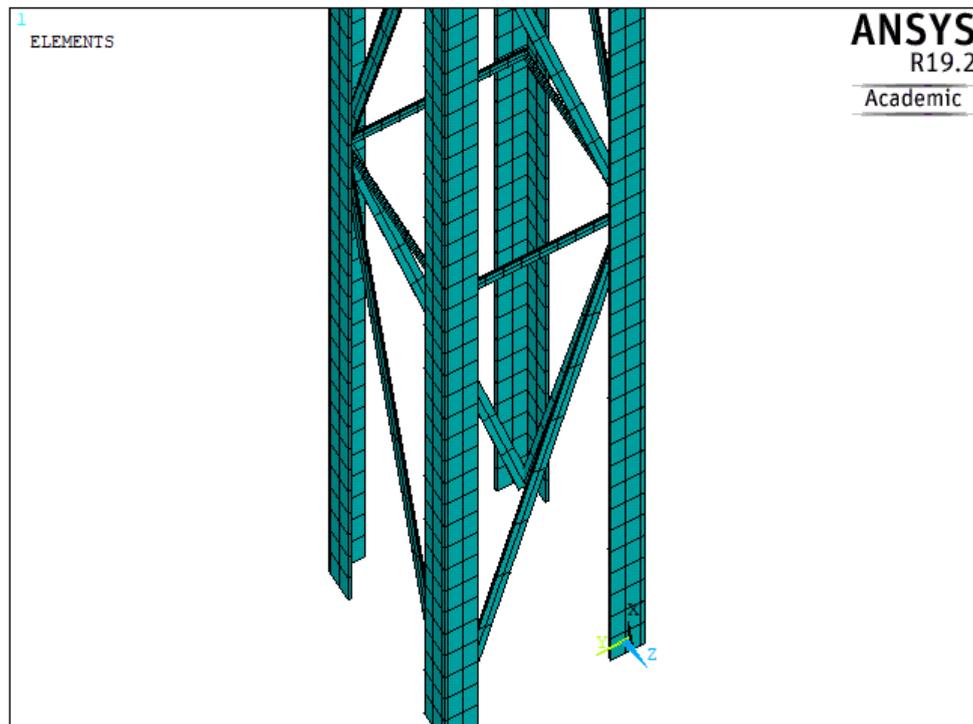
- La longitud total de los cordones es de 10 metros.
- Se trata de acero tipo S275.
- Los cordones son perfiles en L de 150x150x15, y los enlaces serán placas de 60x12 mm.
- Los enlaces estarán unidos a los perfiles L en su interior.
- La distancia entre cordones será la misma tanto en el plano Y como en el plano Z.



**Figura 50.** Representación de la geometría del soporte del tercer caso, alzado y perspectiva para el de 3 módulos (a y b) y perspectiva para el de 8 módulos (c).



**Figura 51.** Mallado en Ansys del soporte del tercer caso para 3 módulos.



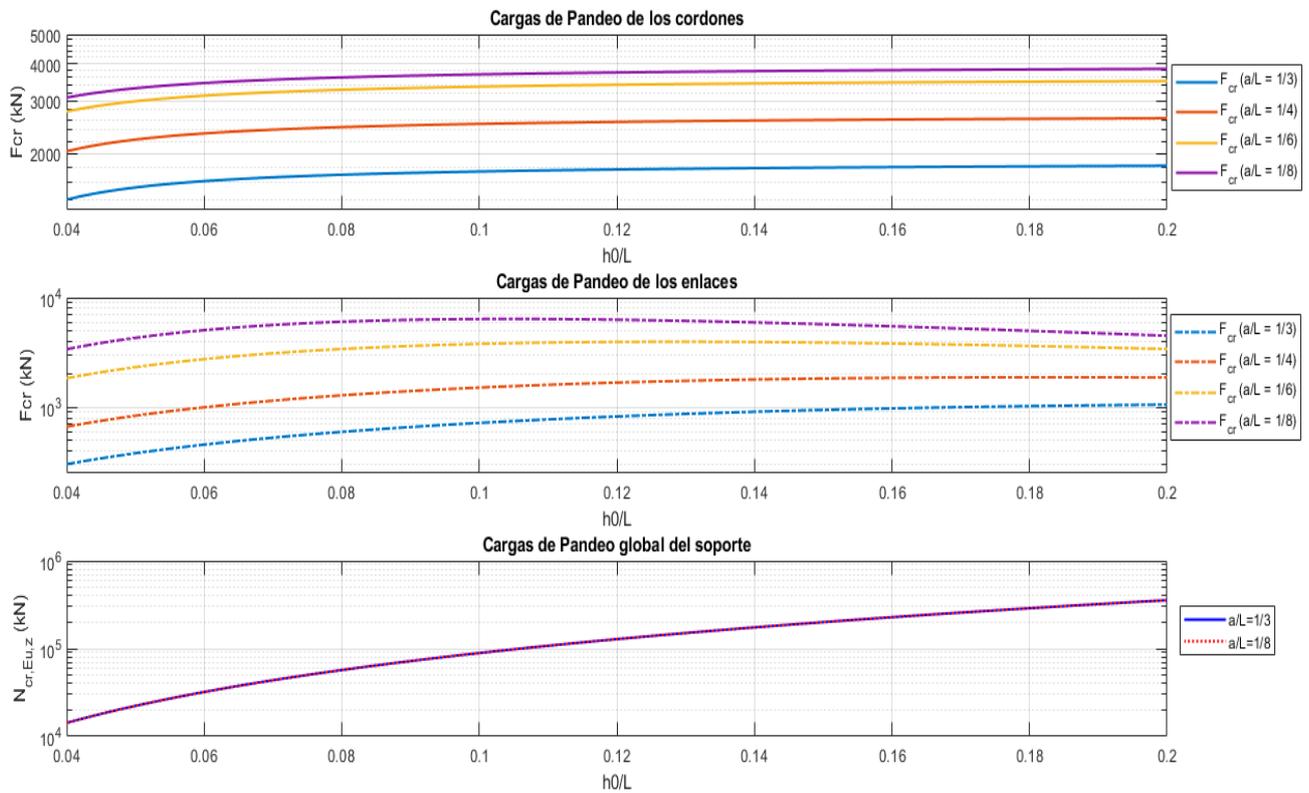
**Figura 52.** Detalle de la base del mallado en Ansys del soporte del tercer caso para 3 módulos.

Las figuras anteriores muestran la geometría, siguiendo la línea que define el centro de masa de las secciones en la figura 51, y de forma ilustrativa el mallado en Ansys en 52 y 53..

Como se explicó anteriormente, la metodología para analizar este soporte será igual que la anterior. Tomaremos las dos variables  $h_0$ , entre 0.4 y 2 metros, y  $n$ , entre 3 y 8 módulos, para analizar su comportamiento en los diferentes casos. Este soporte sólo se analizará como biarticulado.

### 5.5.2 Resultados y análisis.

Tras implementar el análisis de la EAE [2] nuevamente en Matlab, con las características de este soporte, si representamos las cargas críticas de pandeo de los cordones y de los enlaces, junto con la carga crítica de Euler  $N_{cr,Eu,z}$ , obtenemos:



**Gráfica 10.** Comparación de las cargas teóricas de pandeo de los cordones y los enlaces del tercer caso.

En concreto, los valores son:

$a/L$				
$h_0/L$	1/3	1/4	1/6	1/8
0.04	1407.3	2039.2	2767.2	3079.4
0.08	1702.9	2454.6	3269.3	3595.4
0.12	1773.2	2555.1	3398.5	3733.9
0.2	1824.7	2629.2	3495.6	3839.4

**Tabla 11.** Valores de las cargas de pandeo (kN) de los cordones del tercer caso.

$a/L$				
$h_0/L$	1/3	1/4	1/6	1/8
0.04	302.0	664.0	1838.3	3384.1

<b>0.08</b>	595.5	1283.3	3399.4	6032.5
<b>0.12</b>	823.5	1678.8	3946.0	6291.1
<b>0.2</b>	1055.8	1866.1	3397.5	4493.5

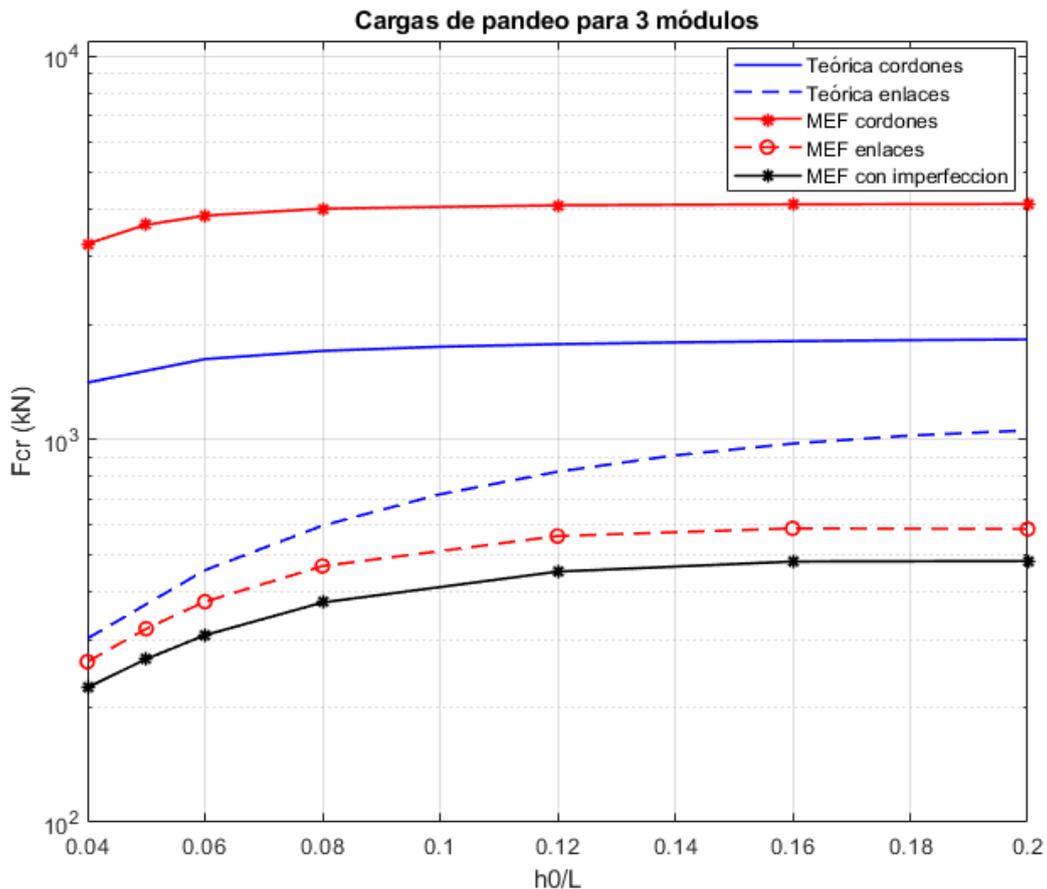
**Tabla 12.** Valores de las cargas de pandeo (kN) de los enlaces del tercer caso.

Comparando los valores vemos que los resultados son mucho más diversos que los de los dos primeros casos. Según el método teórico, en los soportes con 3 y 4 módulos siempre pandearán los enlaces, sin importar la distancia entre los cordones. También vemos que para el de 8 módulos siempre pandearán los cordones, mientras que para el de 6 en ciertos casos de  $h_0$  fallarán unos u otros. También se muestra en la tendencia de los enlaces esa disminución de la carga de pandeo al aumentar  $h_0$ , porque los enlaces se alargan y su resistencia disminuye.

Ante esta complejidad, comprobaremos los resultados de Ansys antes de seguir sacando conclusiones. En este caso no compararemos por tanto cargas de pandeo local y global de los cordones, sino cargas de pandeo entre cordones y enlaces.

Además, de nuevo sólo se aplicará la imperfección en Ansys en aquel caso con carga de pandeo menor, ya sea con fallo en los cordones o en los enlaces, porque este será el modo de pandeo que se mostraría realmente.

Representando los valores teóricos frente a los del MEF, resulta para cada caso:



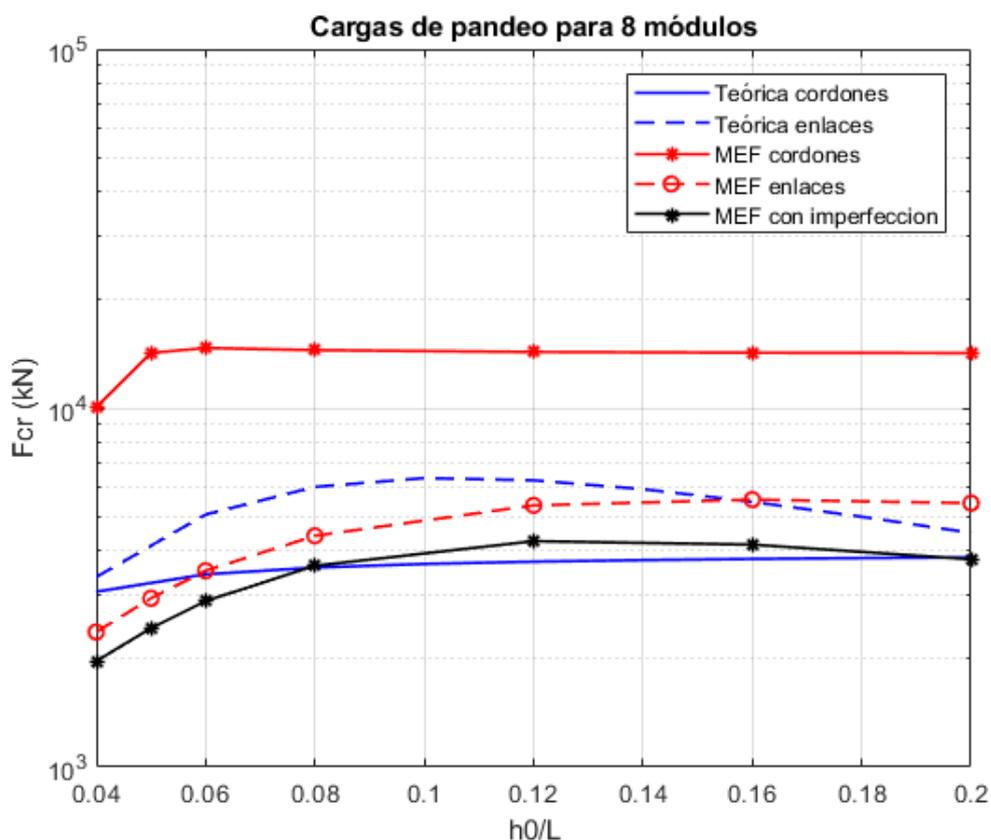
**Gráfica 11.** Comparación entre resultados teóricos y del MEF para el tercer caso con 3 módulos.

$a/L$	Pandeo de los cordones	Pandeo de los enlaces	Pandeo con imperfección
$h_0/L$			
0.04	3244.9	262.56	224.96
0.08	4006	466.91	375.04
0.12	4088.2	559.23	451.52
0.2	4120.9	583.44	481.15

**Tabla 13.** Resultados de cargas de pandeo (kN) del tercer caso en Ansys para 3 módulos.

Podemos ver que para el soporte con **3 módulos**, según el modelo teórico deben pandear siempre los enlaces. En esto Ansys coincide, según la gráfica 11, además con valores de las cargas de pandeo no muy diferentes a los de la EAE [2], no llegan a ser ni el doble de éstas. Sin embargo, el Método de los Elementos Finitos para aquí obtiene valores menores que los teóricos, lo cual no es muy frecuente en ninguna comparación entre análisis. Sin embargo, como los valores no son muy diferentes entre sí, no se considera un problema.

Al añadir la imperfección, de nuevo la carga en Ansys disminuye, el elemento está más solicitado. En la tendencia se observa también que la resistencia aumenta bastante al ampliar la distancia entre cordones, ya que esta se relaciona directamente con la inercia efectiva de los soportes.



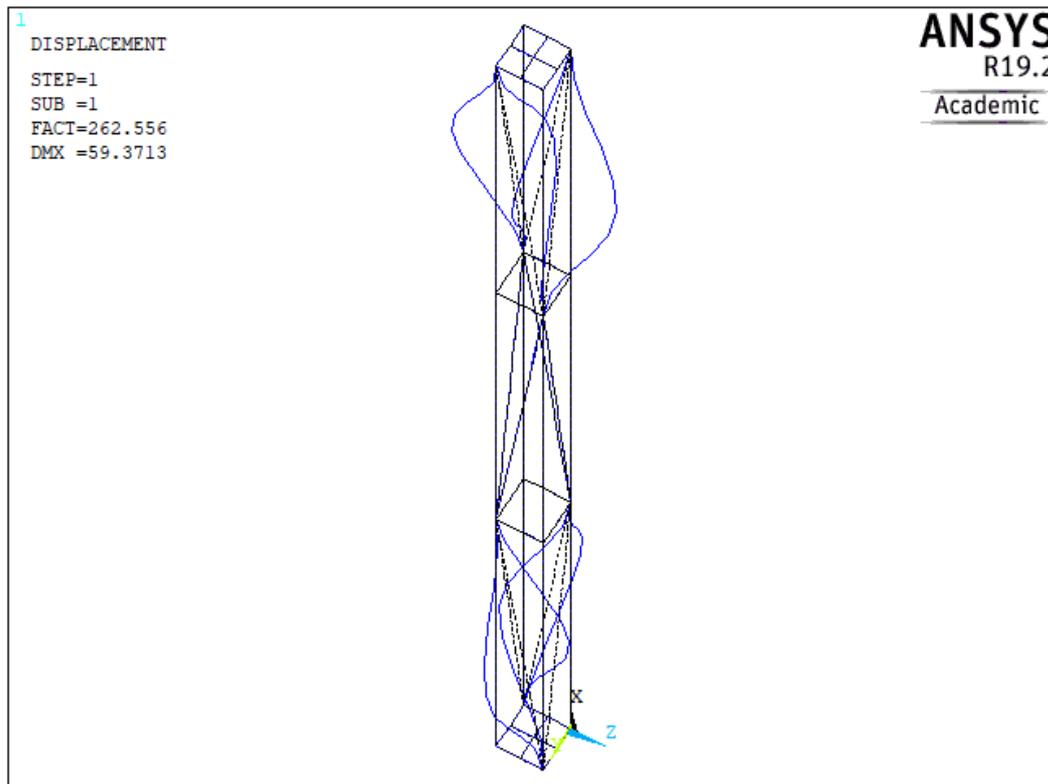
**Gráfica 12.** Comparación entre resultados teóricos y del MEF para el tercer caso con 8 módulos.

$h_0/L$	Pandeo de los cordones	Pandeo de los enlaces	Pandeo con imperfección
<b>0.04</b>	10059	2378.3	1973.2
<b>0.08</b>	14500	4408.8	3637.3
<b>0.12</b>	14330	5357.5	4258.9
<b>0.2</b>	14232	5436.7	3792.8

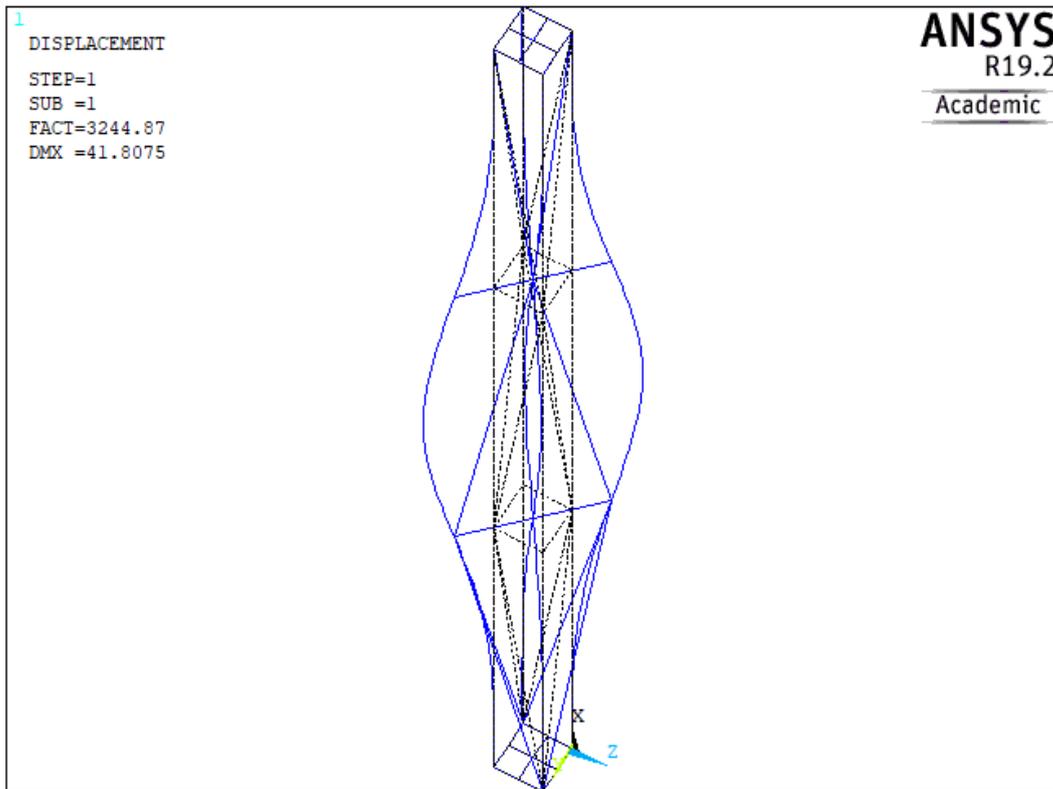
**Tabla 14.** Resultados de cargas de pandeo (kN) del tercer caso en Ansys para 8 módulos.

El soporte de **8 módulos** es más complicado de analizar. En la gráfica **12** anterior se muestra que el modelo teórico da valores de resistencia al pandeo más bajos para los cordones, mientras que Ansys siempre considera que pandearán los enlaces. Además, en este caso los valores entre las diferentes cargas de cordones y enlaces varían mucho para los dos análisis. Claramente, cuanto más compleja es la geometría del soporte más difieren los resultados, teniendo en cuenta que para el análisis de la EAE [2] lo único que modificamos entre un caso y otro son algunos parámetros, mientras que en Ansys es un problema completamente diferente con una complejidad mayor.

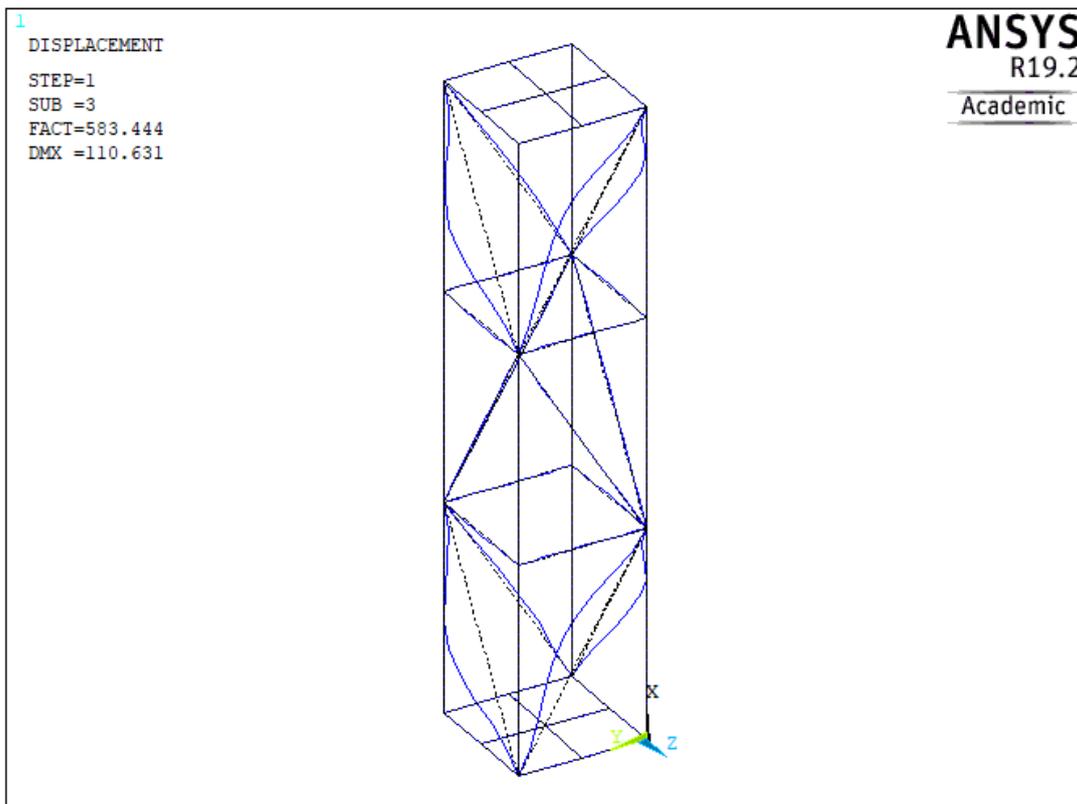
Los modos de pandeo que se mostrarán serán para los casos de  $h_0/L = 0.04$  y  $h_0/L = 0.2$ .



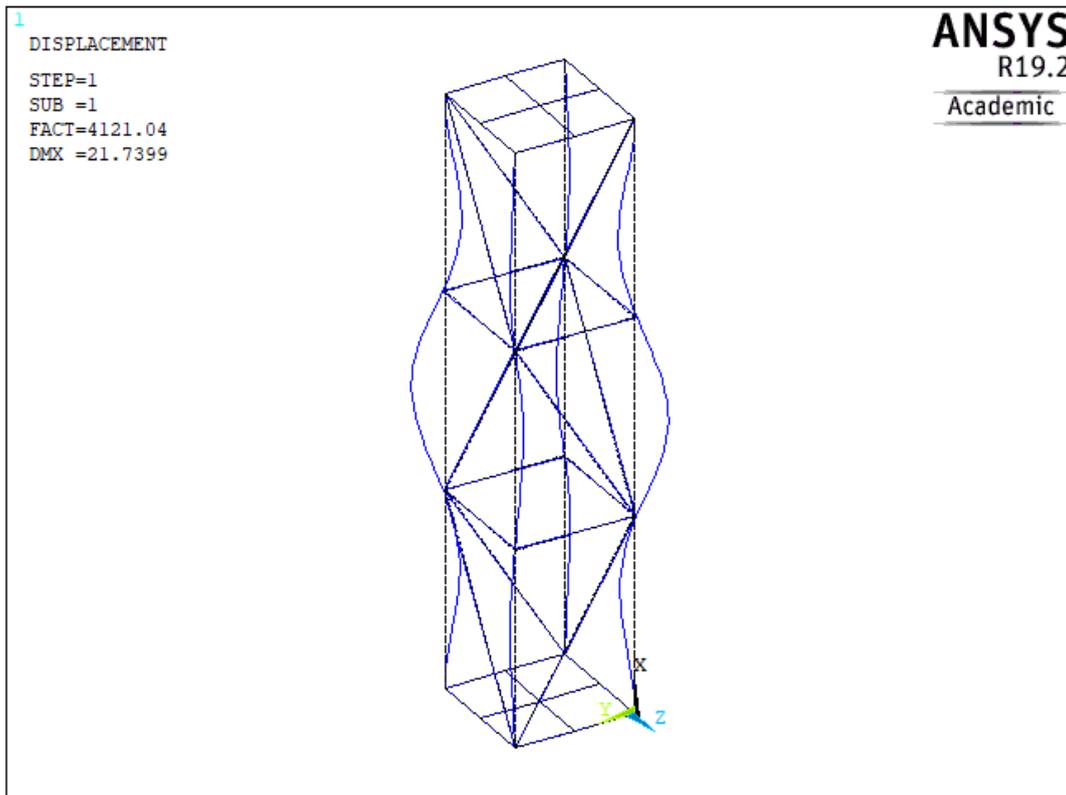
**Figura 53.** Primer modo de pandeo para el fallo de los enlaces en el tercer caso, soporte de 3 módulos y  $h_0/L = 0.04$ .



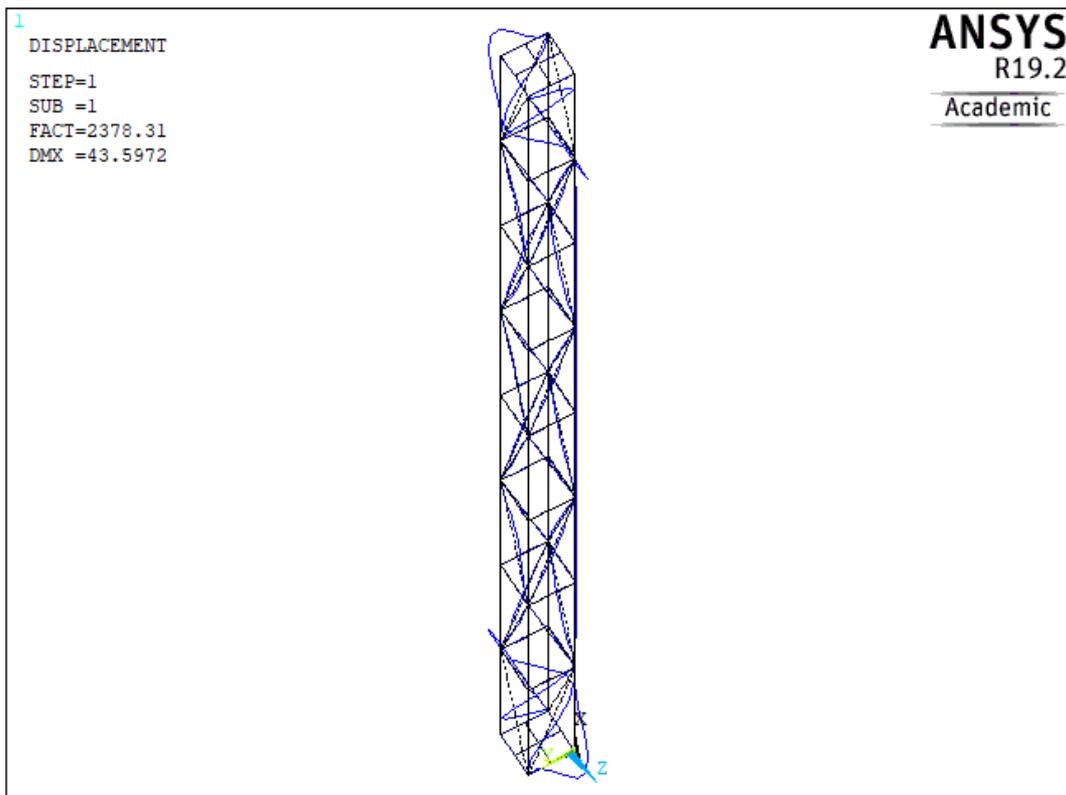
**Figura 54.** Primer modo de pandeo para el fallo de los cordones en el tercer caso, soporte de 3 módulos y  $h_0/L = 0.04$ .



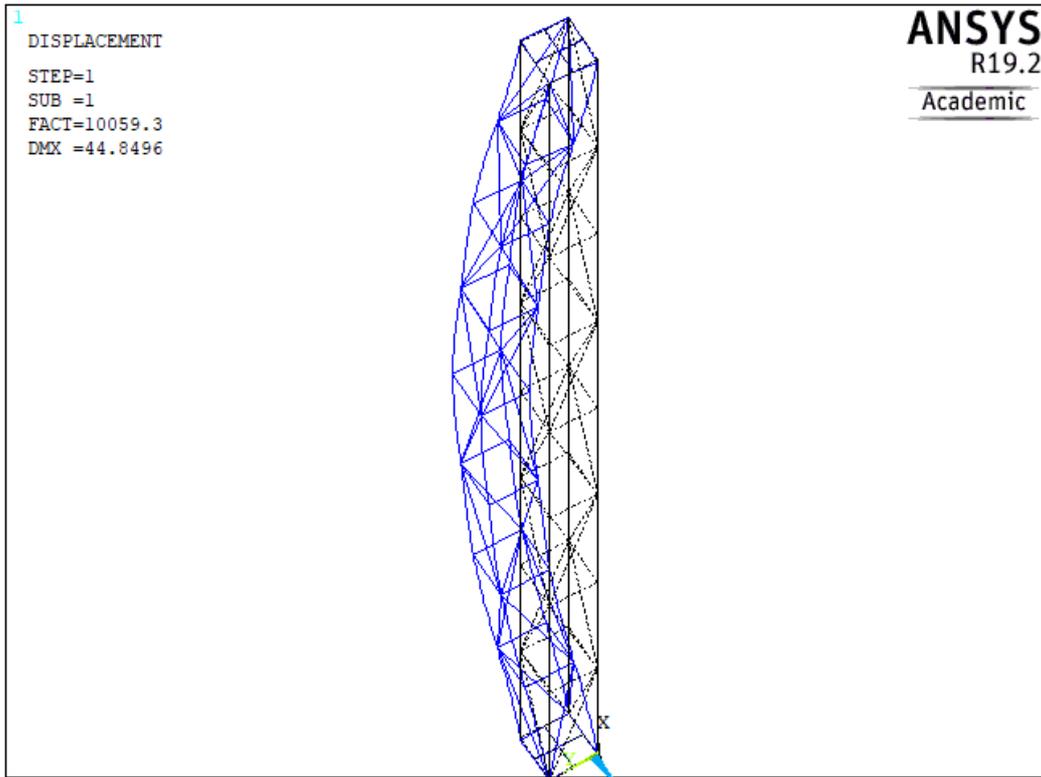
**Figura 55.** Primer modo de pandeo para el fallo de los enlaces en el tercer caso, soporte de 3 módulos y  $h_0/L = 0.2$ .



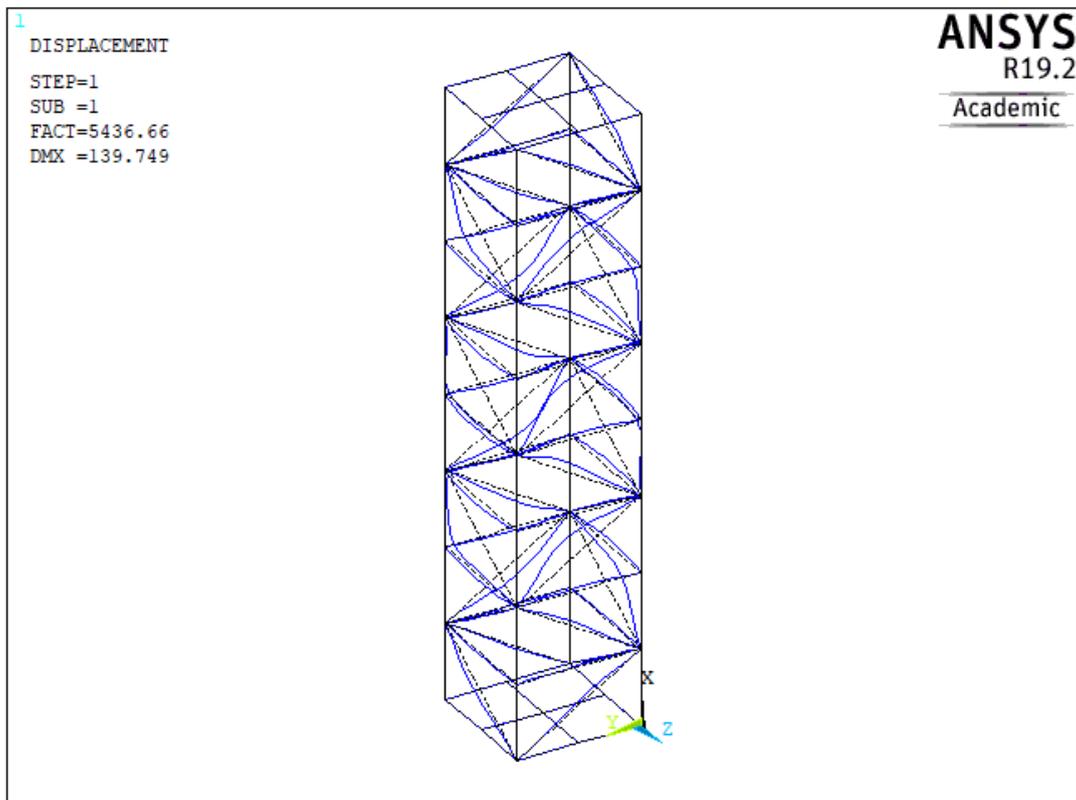
**Figura 56.** Primer modo de pandeo para el fallo de los cordones en el tercer caso, soporte de 3 módulos y  $h_0/L = 0.2$ .



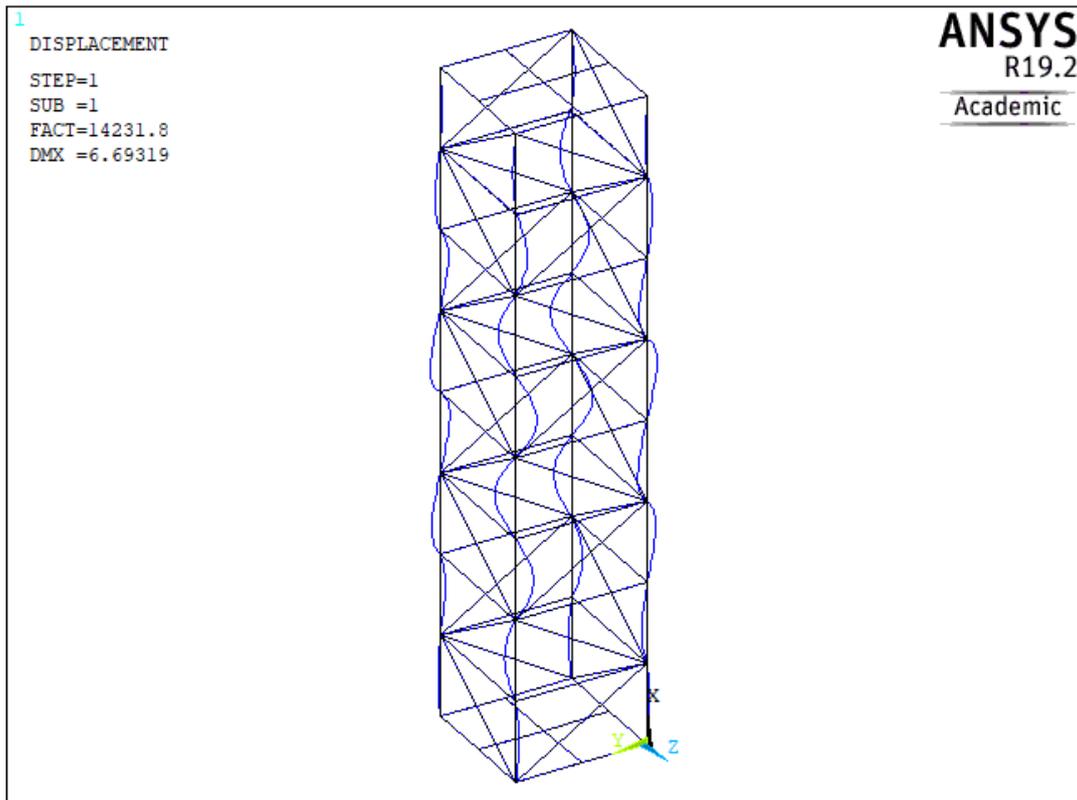
**Figura 57.** Primer modo de pandeo para el fallo de los enlaces en el tercer caso, soporte de 8 módulos y  $h_0/L = 0.04$ .



**Figura 58.** Primer modo de pandeo para el fallo de los cordones en el tercer caso, soporte de 8 módulos y  $h_0/L = 0.04$ .



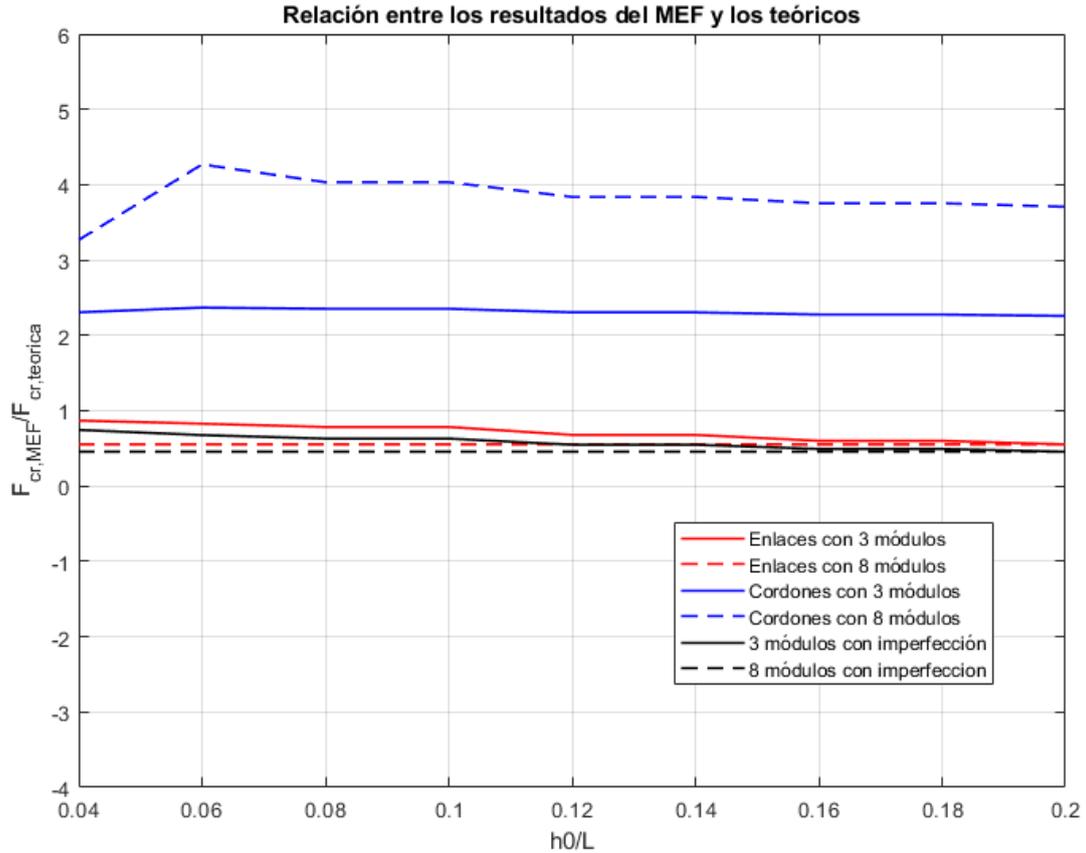
**Figura 59.** Primer modo de pandeo para el fallo de los enlaces en el tercer caso, soporte de 8 módulos y  $h_0/L = 0.2$ .



**Figura 60.** Primer modo de pandeo para el fallo de los cordones en el tercer caso, soporte de 8 módulos y  $h_0/L = 0.2$ .

De nuevo, la geometría de los modos es coherente con lo que la teoría establece. Vemos como siempre pandean los enlaces diagonales, ya que su longitud de pandeo será mayor que la de los enlaces montantes. El pandeo de los cordones, además de tener valores mucho más altos que el de los enlaces, de nuevo varía entre pandeo local y global según la esbeltez del elemento.

Por último para concluir el análisis, representamos a continuación la relación entre las cargas de los dos análisis. En este caso, podemos sacar una relación para el pandeo de los cordones, otra para el de los enlaces, y otra para el caso en el que consideramos la imperfección inicial:



**Gráfica 13.** Representación de la relación entre los resultados teóricos y los del MEF para el caso 3. En concreto, la media entre las relaciones de las cargas es:

	Enlaces	Imperfección	Cordones
$\left(\frac{F_{cr,MEF}}{F_{cr,teo}}\right)_{med}$	0.71	0.56	2.31

**Tabla 15.** Valor medio de la relación entre las cargas de pandeo de ambos análisis para el tercer caso, con 3 módulos.

	Enlaces	Imperfección	Cordones
$\left(\frac{F_{cr,MEF}}{F_{cr,teo}}\right)_{med}$	0.55	0.46	3.83

**Tabla 16.** Valor medio de la relación entre las cargas de pandeo de ambos análisis para el tercer caso, con 8 módulos.

Estos valores nos confirman el análisis anterior. Cuando añadimos la imperfección la media se aleja de la unidad ya que el MEF da valores menores de resistencia, más alejados de los teóricos en este caso, porque resultan menores. Sin embargo, no hay mucha diferencia entre los valores, que estarán en torno a 4000 o 5000 kN. Para los cordones encontramos una diferencia mucho mayor, claramente por la interacción entre ellos y los puntos de enlace que Ansys sí tiene en cuenta.

Otro punto que debe hacerse es que en este caso es natural que pandeen los enlaces casi en todos los soportes, ya que se tratan de placas con un espesor muy pequeño y con un canto de 12 mm. El caso anterior contaba con unos enlaces tubulares, cuya geometría hace muy difícil el pandeo, por lo que siempre resultaba pandeo en los cordones. Cabría la posibilidad de analizar el comportamiento de este soporte con unos enlaces más resistentes al pandeo, aunque en la práctica para enlazar perfiles en L los enlaces de placas sea la solución más común.

## **5.6 Caso 4: soporte compuesto en celosía, empotrado-libre, triangulado en K y con tres planos de enlace.**

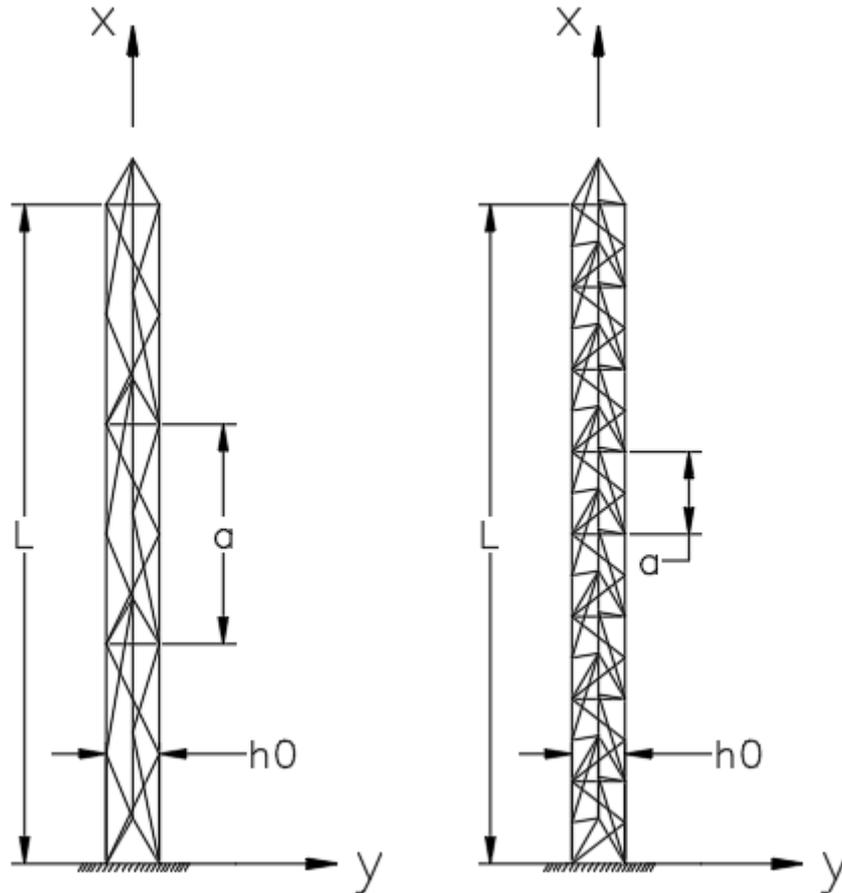
### **5.6.1. Introducción y especificaciones sobre la geometría.**

Este último caso se tratará de un ejemplo tomado de una construcción real, un soporte compuesto con una geometría que varía de la tradicional a la que se le aplican directamente las especificaciones de la normativa. Como ya se explicó en la introducción al proyecto, la finalidad del estudio de este cuarto caso será intentar expandir las directrices de la norma, analizando el comportamiento de un soporte diferente y extrapolando los resultados a lo que podría ser el modelo teórico de un soporte de estas características. En concreto, la gran diferencia que tiene la geometría de este soporte con el resto de casos es que sus cordones están dispuestos en triángulo, es decir, en planta forman un triángulo equilátero. A continuación se adjunta una foto del soporte real:



**Figura 61.** Fotografía del soporte real en el que se basa el cuarto caso.

La geometría del soporte quedaría, entonces, si representamos la línea media de las secciones del soporte:



**Figura 62.** Representación de la geometría del soporte del cuarto caso: alzado del ejemplo de 3 módulos y de 8 módulos.

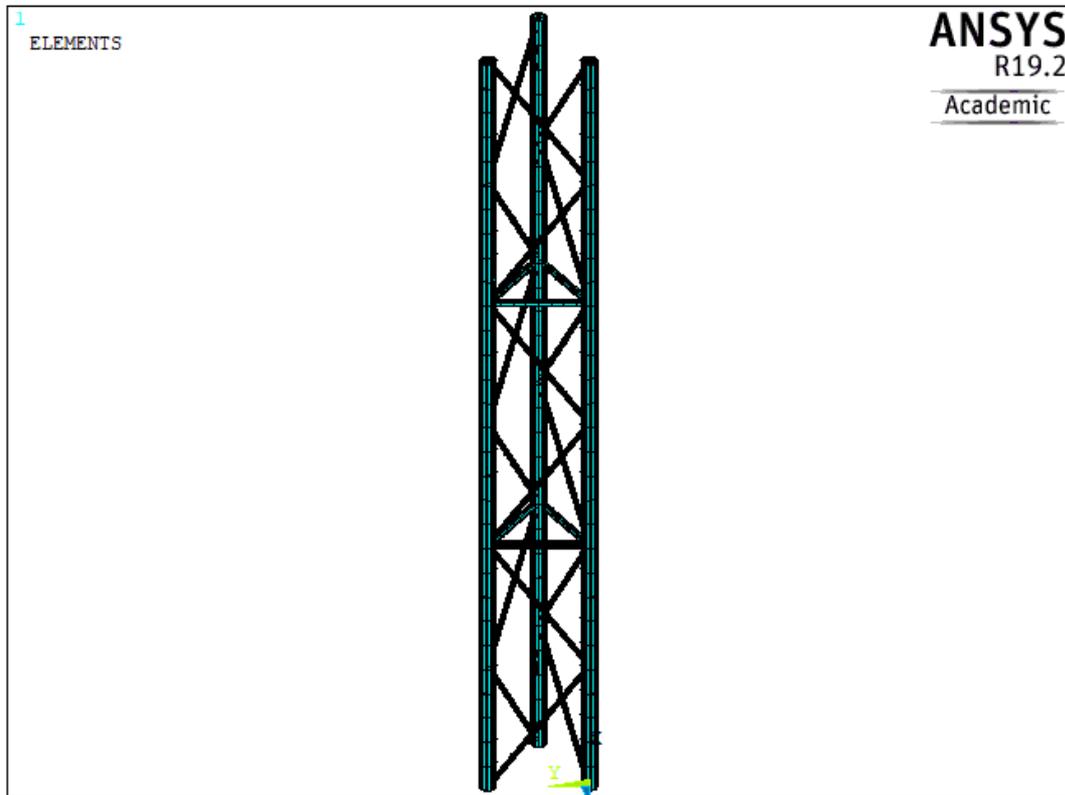
La metodología que se seguirá en este ejemplo será diferente, ya que al no tener un modelo teórico concreto del que partir debemos empezar por definir el soporte en Ansys y analizar su comportamiento, para poder generar un modelo equivalente que se ajuste a las directrices de la normativa pero representando con fidelidad el soporte real. El interés de este estudio está en la configuración de los cordones y la geometría de la triangulación entre ellos, por lo que aunque el soporte real tendrá unas dimensiones concretas, para el ejemplo las siguientes características serán comunes con el resto de soportes que se han analizado:

- Su longitud será de 10 metros.
- Una de las variables de estudio será el número de enlaces (o módulos) que tenga, tal que se dividirá la longitud total entre  $n$  puntos de enlace de forma regular. Esta variable irá, de nuevo, de 3 módulos a 8 módulos.
- La otra variable para el estudio será la distancia entre cordones,  $h_0$ . En este caso, al tener la planta en forma de triángulo equilátero, esta distancia será la misma entre todos los cordones, como se observa en la figura 62. Nuevamente, estudiaremos el comportamiento para una distancia  $h_0$  entre 0.4 y 2 metros.

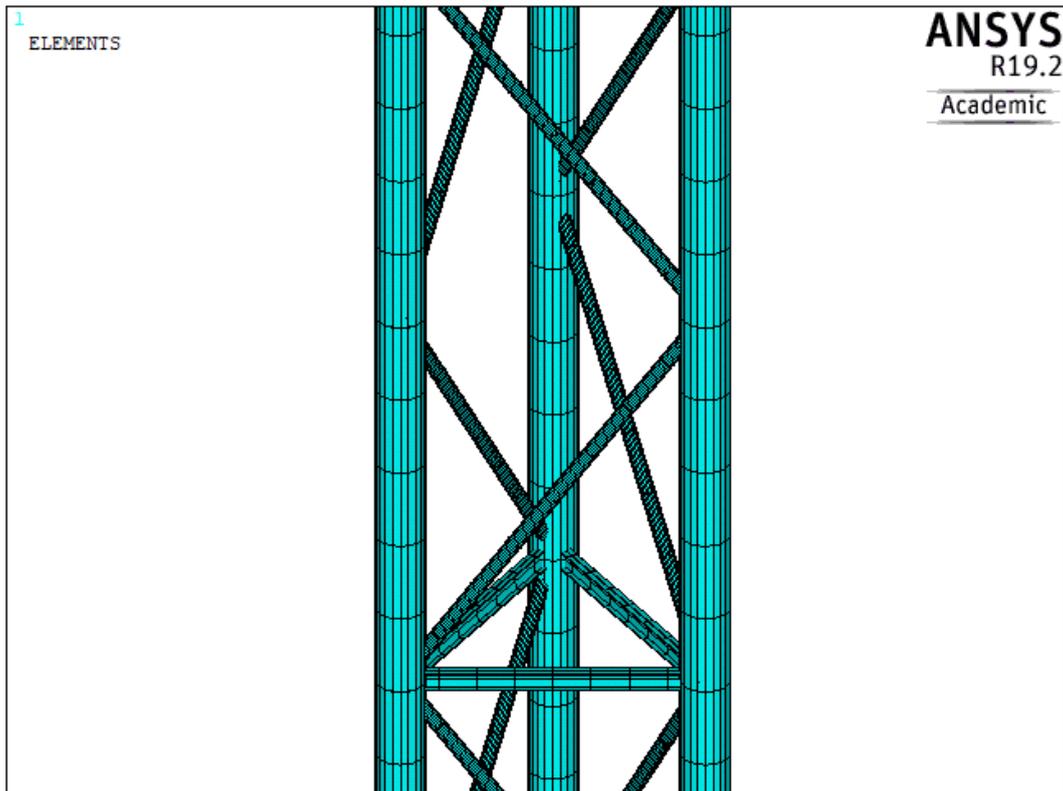
Además, a efectos de este estudio, y ante la imposibilidad de conocer las secciones concretas del soporte real, para el análisis se tomarán secciones que representen el soporte en proporción a las reales. Como se observa en la figura 62, los **cordones** son de **secciones tubulares circulares** de gran diámetro, mientras que los **enlaces diagonales** serán **tubulares en círculo** también pero mucho más reducidas. Los **enlaces montantes**, por el contrario, son **perfiles tipo HEA o IPE**, con unas dimensiones similares a los perfiles tubulares de los otros enlaces. En el modelo final tomaremos las siguientes secciones:

- Para los **cordones** serán perfiles **tubulares** de diámetro externo 200 mm y espesor 10 mm.
- Para los **enlaces diagonales** tendremos perfiles **tubulares** con diámetro externo de 120 mm y espesor 5 mm.
- Los **enlaces montantes** serán perfiles **IPE-80**.

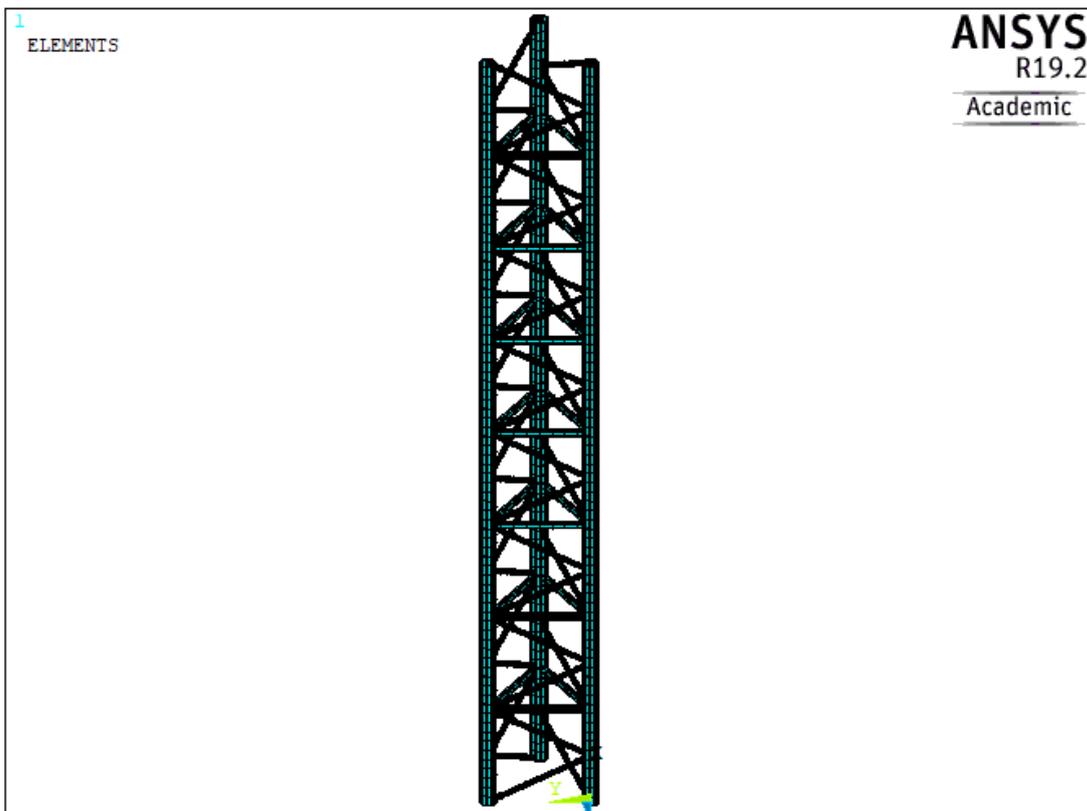
Finalmente, la geometría en Ansys, una vez realizado el mallado, resulta:



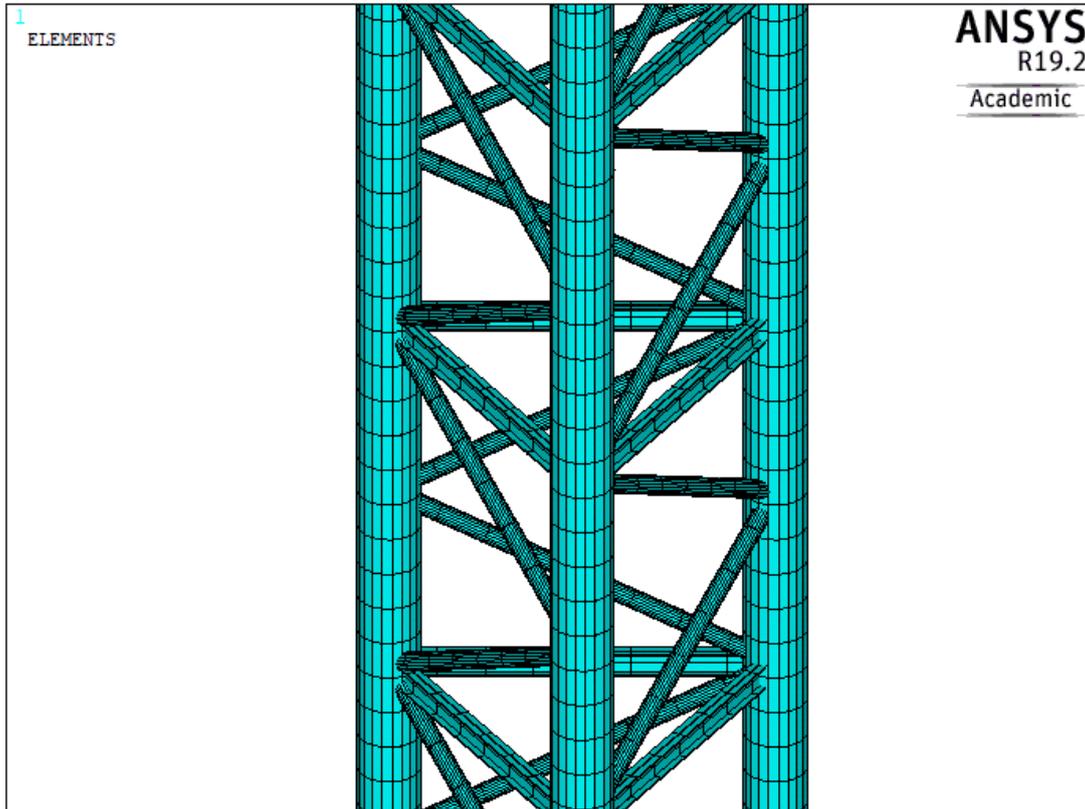
**Figura 63.** Ejemplo del mallado en Ansys del soporte de 3 módulos del cuarto caso.



**Figura 64.** Detalle del mallado en Ansys del soporte de 3 módulos del cuarto caso.



**Figura 65.** Ejemplo del mallado en Ansys del soporte de 8 módulos del cuarto caso.

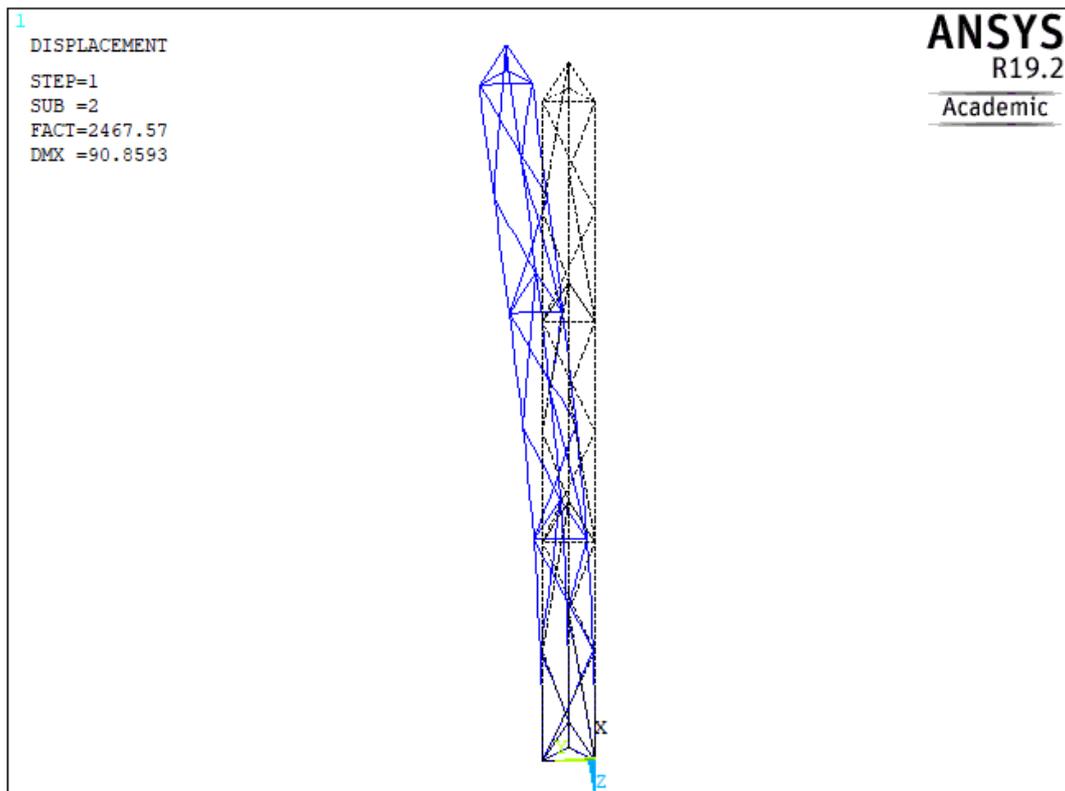


**Figura 66.** Detalle del mallado en Ansys del soporte de 8 módulos del cuarto caso.

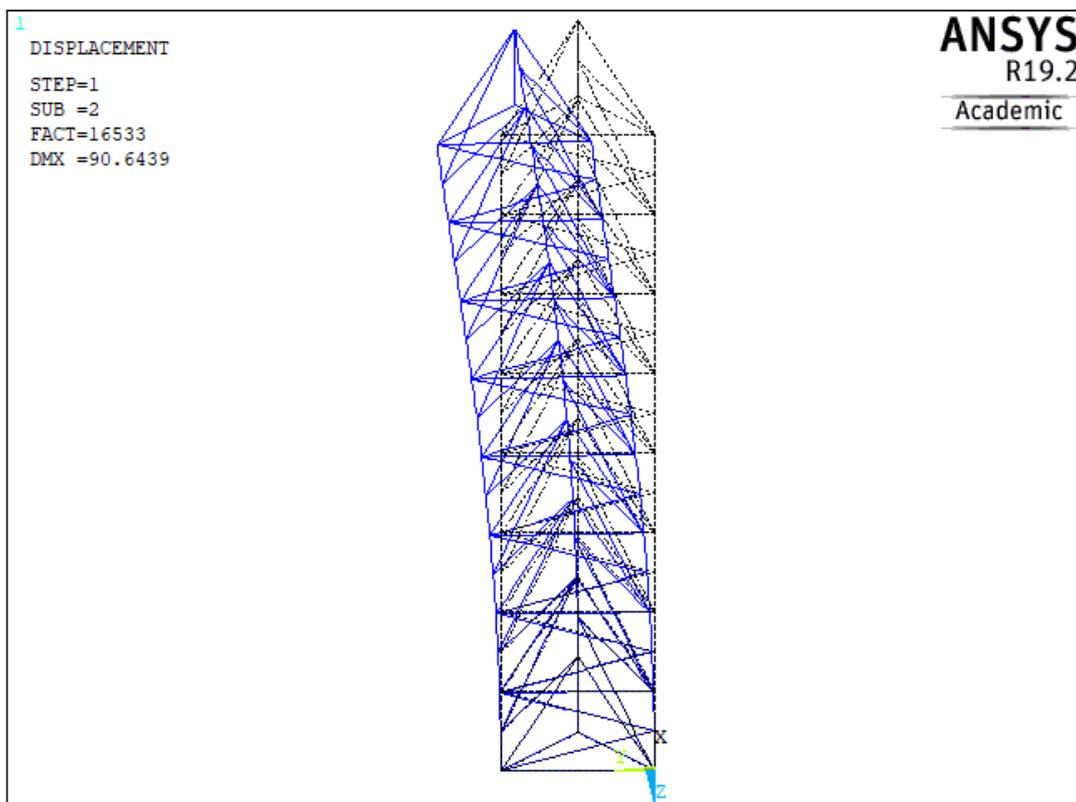
### 5.6.2 Análisis en Ansys y obtención del modelo equivalente.

El modelo que se analizará en Ansys tendrá unas condiciones de contorno tales que el soporte será empotrado en su base y libre en la testa. La metodología será idéntica a la de los ejemplos anteriores: se aplicará una carga unitaria en la cabeza del soporte, en este caso en el centro de masas del triángulo equilátero, y se llevará a cabo un análisis de pandeo en el programa, buscando obtener el factor de pandeo que multiplicado por esa carga unitaria será la carga de pandeo del soporte.

La finalidad de realizar el análisis previo en Ansys es consultar los modos de pandeo y comprobar cómo se deformaría el soporte, ya que la geometría triangular no resulta intuitiva. Una vez se lleva a cabo el análisis, el primer modo de pandeo **siempre resulta**, para cualquier valor de  $h_0$  y cualquier **número de módulos**:



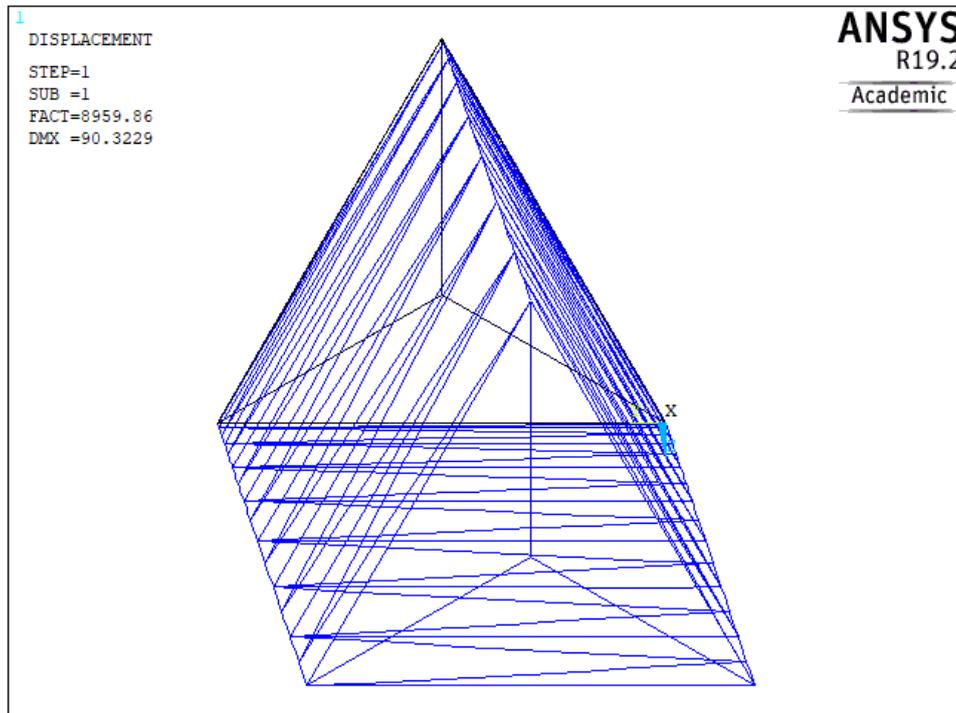
**Figura 67.** Primer modo de pandeo del soporte real del cuarto caso para  $h_0/L= 0.04$  m y 3 módulos.



**Figura 68.** Primer modo de pandeo del soporte real del cuarto caso para  $h_0/L= 0.12$  m y 8 módulos.

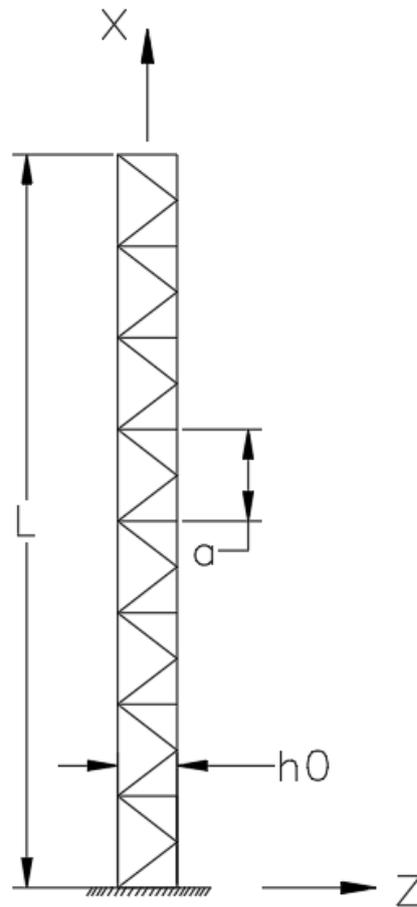
La figuras 68 y 69 muestran los primeros modos de pandeo para dos ejemplos diferentes del soporte. El modo coincide para cualquier caso de  $h_0$  o del número de módulos. Además, coincide con el modo

de pandeo teórico de cualquier columna comprimida que sea empotrada-libre. Lo que nos interesa conocer es en qué planos pandeará el soporte, ya que tendremos que definir un modelo equivalente con una inercia efectiva que se ajuste al comportamiento del soporte. Si consultamos la planta:



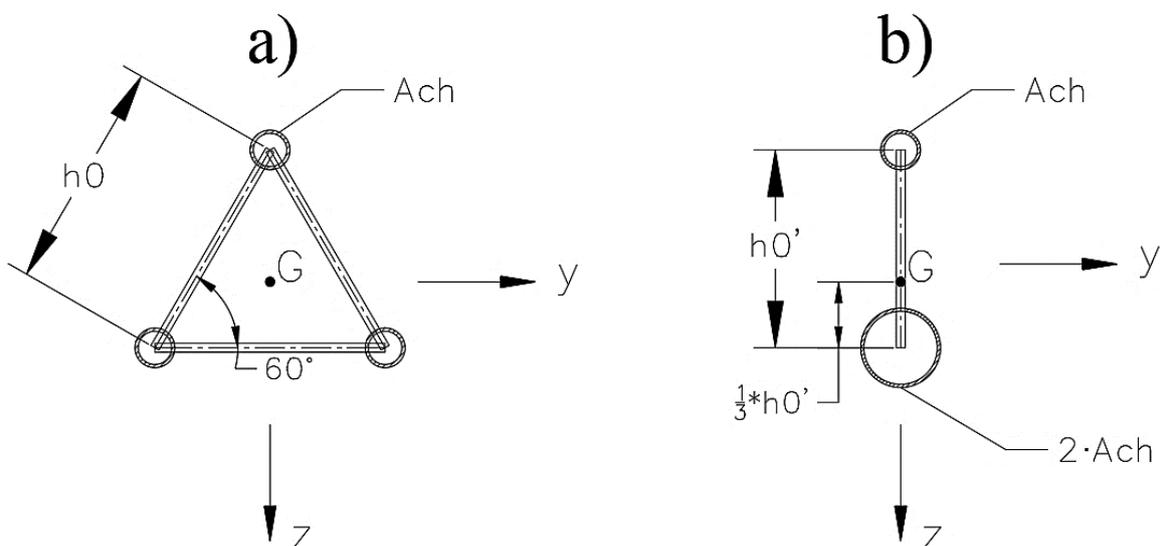
**Figura 69.** Vista en planta del primer modo de pandeo del soporte del cuarto caso.

El soporte pandea siempre en el plano XY. Para poder ajustarlo al modelo teórico de la EAE [2] tenemos que generar un soporte cuyos cordones sean paralelos, y la geometría de la triangulación sea regular. Esta triangulación del modelo teórico tendrá la misma configuración que cualquiera de los 3 planos del soporte real en triángulo, que será:



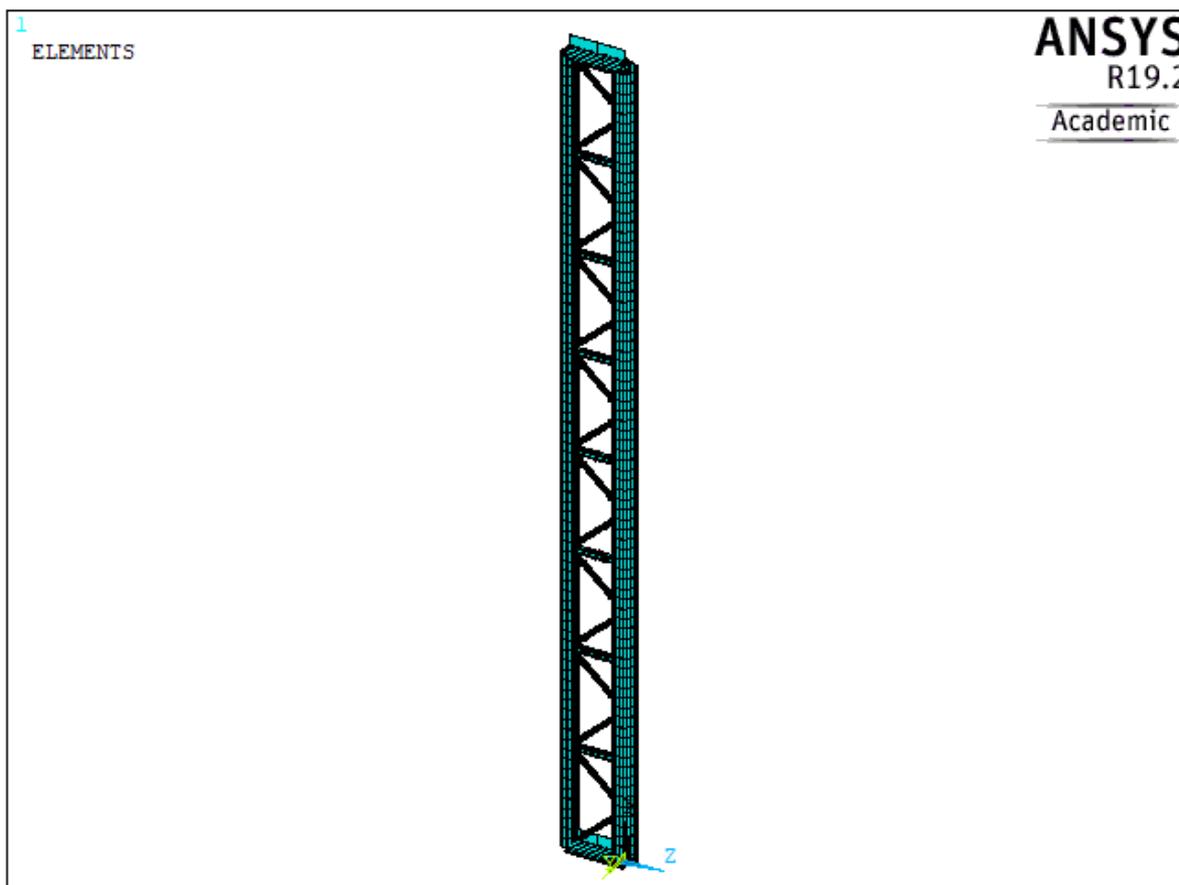
**Figura 70.** Geometría de la triangulación del soporte equivalente para el modelo teórico del cuarto caso.

Además, en vista del modo de pandeo del soporte, para que el modelo que generemos pandee de la misma manera, será de dos cordones, y tendrá un cordón cuyo área sea el doble del otro, de manera que, consultando la figura 70, virtualmente se unen los dos cordones contenidos en el plano XY. La siguiente figura ilustra, en planta, el cambio del modelo real al teórico de la EAE [2].



**Figura 71.** Vista en planta de a) soporte real b) modelo teórico equivalente para el estudio según la EAE [2].

Por tanto, si hacemos el modelo en Ansys, el soporte tendrá esta geometría:



**Figura 72.** Representación de la geometría y el mallado en Ansys del modelo del soporte del cuarto caso.

A continuación, se deben definir los dos parámetros fundamentales en el estudio de un soporte compuesto: la **inercia efectiva** ( $I_{eff}$ ) del soporte y la **rigidez a cortante** ( $S_v$ ) del mismo. No podemos tomar las expresiones de la EAE [2] ya que éstas están calculadas para dos soportes idénticos, los nuestros tienen áreas diferentes.

Comenzamos por la inercia efectiva, que si recordamos tenía la siguiente expresión en un soporte con dos cordones idénticos y paralelos:

$$I_{eff} = 0.5 \cdot h_0^2 \cdot A_{ch} \quad (5.7)$$

Y para un soporte de 4 cordones idénticos separados entre sí una distancia igual de valor  $h_0$  :

$$I_{eff} = h_0^2 \cdot A_{ch} \quad (5.8)$$

Para nuestro modelo, la distancia entre cordones será  $h'_0$  o  $h_{0\_eq}$ , cuyo valor es igual a la altura del triángulo equilátero del soporte real, por lo que:

$$h_{0\_eq} = \cos(30^\circ) \cdot h_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h_0 \quad (5.9)$$

Cuando representemos los resultados, los límites de esta variable serán los equivalentes a  $h_0 = 0.4$  m y  $h_0 = 2$  m.

Como uno de los cordones tendrá el doble de área del otro, el centro de masas del sistema compuesto por ambos cordones estará a  $\frac{1}{3}h_{0\_eq}$  del cordón con área doble, y a  $\frac{2}{3}h_{0\_eq}$  del otro. La inercia efectiva del sistema de ambos cordones ( $I_{eff\_eq}$ ) calculada con esa posición del centro de masas y el valor de  $h_{0\_eq}$ , resulta:

$$I_{eff\_eq} = \frac{2}{3}h_{0\_eq}^2 \cdot A_{ch} \quad (5.10)$$

Donde  $A_{ch}$  será el área de un cordón.

Por otro lado, si recordamos los valores de la **rigidez a cortante** ( $S_v$ ) que proporciona la normativa:

System			
$S_v$	$\frac{nEA_d ah_0^2}{2d^3}$	$\frac{nEA_d ah_0^2}{d^3}$	$\frac{nEA_d ah_0^2}{d^3 \left[ 1 + \frac{A_d h_0^3}{A_v d^3} \right]}$

**Figura 73.** Valores conocidos de  $S_v$ , rigidez a cortante de un soporte compuesto.

La configuración del soporte de nuestro modelo no coincide con ninguno de los anteriores, como podemos ver en la figura 74 anterior. La rigidez a cortante se calcula a partir de la resistencia de los **enlaces**, no los cordones. Por tanto, primero tenemos que conocer el valor del cortante que tendrá que resistir cada enlace. Será un cortante que recibirán por la carga de compresión  $N_{Ed}$  que actúa en la cabeza de todo el soporte. Si recordamos las expresiones del capítulo 3 de esta memoria, el cortante que recibe el soporte es:

$$V = \frac{\pi}{L} M_{Ed} \quad (5.11)$$

Donde

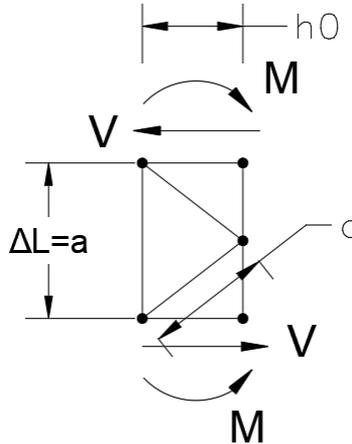
$$M_{Ed} = \frac{N_{Ed} \cdot e_0 + M_{Ed}^I}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} - \frac{N_{Ed}}{S_v}} \quad (5.12)$$

Todos los valores de la expresión de 5.12 se han explicado anteriormente. La diferencia en este ejemplo es que, al tener forma triangular, si aplicamos un cortante  $V$  sobre todo el soporte, el reparto en los planos inclinados será:

$$V' = \frac{V}{\cos(30^\circ)} = \frac{2}{\sqrt{3}}V \quad (5.13)$$

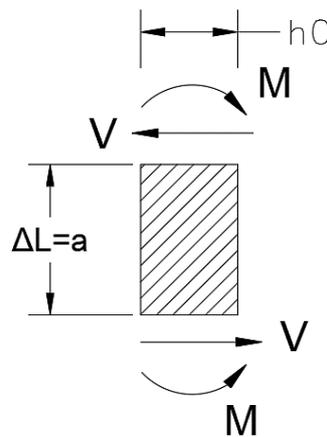
Por tanto, tendremos que comprobar la resistencia de los enlaces bajo el cortante  $V'$  y no  $V$ .

Para obtener la expresión de la rigidez hay que hacer una equivalencia entre la **energía de deformación** de un elemento diferencial del soporte triangulado, es decir, un **módulo**, y la **energía** de una pieza con las mismas dimensiones de ese módulo a **flexión simple**. Siguiendo las indicaciones de la referencia [3] de esta memoria el elemento diferencial del soporte será el siguiente:



**Figura 74.** Elemento diferencial del modelo del 4º soporte.

Mientras que una pieza equivalente a flexión simple será:



**Figura 75.** Elemento equivalente al diferencial.

La expresión de la energía de deformación del elemento, bajo esfuerzos axiales, debidos a la flexión conjunta del elemento, será:

$$U_{dc} = \frac{1}{2} \sum_{barras} \int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x d\Omega = \frac{1}{2} \sum_{barras} \frac{N_i}{A_i} \frac{N_i}{E_i} L_i \quad (5.14)$$

Donde  $N_i$  será el axil de cada barra (de la figura 75),  $A_i$  su área,  $E_i$  y  $L_i$  su módulo de deformación y longitud correspondiente. Para la pieza a flexión simple con las mismas dimensiones, la energía es:

$$U_{ps,eq} = \frac{1}{2} \sum_{barras} \int_L \frac{M_z^2}{E \cdot I_{z,eff}} dx + \frac{1}{2} \int_L \frac{V_y^2}{G \cdot A_{e,y}} dx \quad (5.15)$$

Donde el término  $G \cdot A_{e,y}$  será la rigidez  $S_v$ . De la expresión 5.15 el segundo término de la suma es el que se refiere al cortante, por lo que tendremos que igualar:

$$\frac{1}{2} \sum_{barras} \frac{N_i}{A_i} \frac{N_i}{E_i} L_i = \frac{1}{2} \int_L \frac{V_y^2}{G \cdot A_{e,y}} dx \quad (5.16)$$

El axil de los enlaces tendrá el valor:

$$N_d = \frac{V'}{\cos \alpha} = \frac{V' \cdot d}{h_0} \quad (5.17)$$

Por tanto, el cálculo según 5.16 para el elemento de la figura 75 es:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{V'^2 \cdot d^2}{h_0^2} \cdot \frac{d}{E \cdot A_d} \cdot 4 \right) = \frac{V'^2 \cdot a}{2 \cdot S_v} \quad (5.18)$$

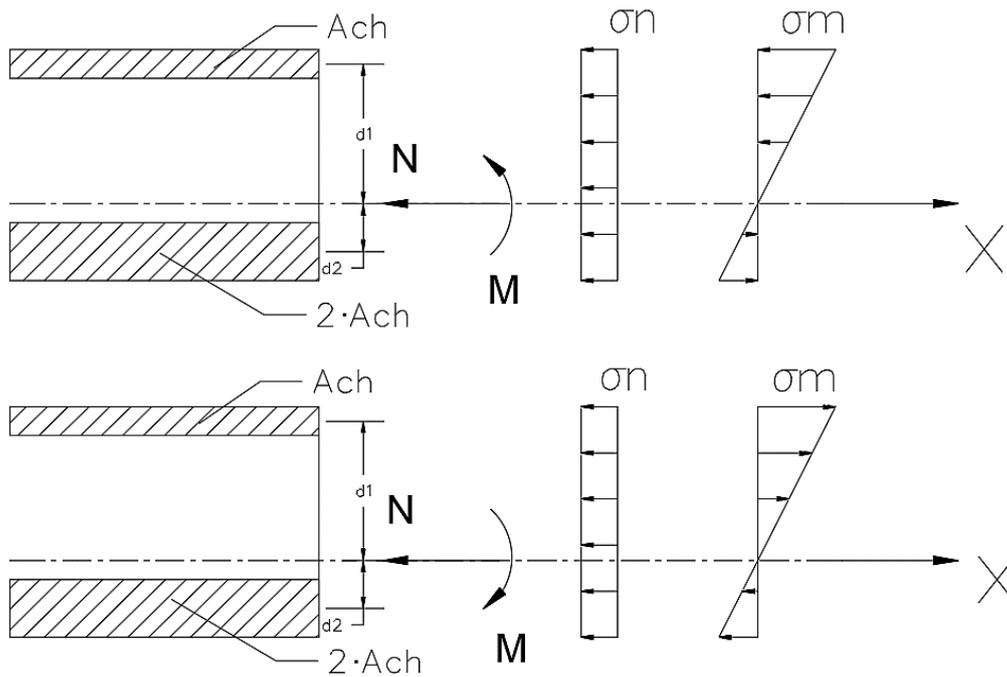
Agrupando y despejando, la expresión de la rigidez queda:

$$S_v = \frac{a \cdot h_0^2 \cdot E \cdot A_d}{4d^3} \quad (5.19)$$

Muy similar a la de la configuración de la triangulación en N, última en la figura 74, pero para dos diagonales enlazadas dentro de un módulo, y cuatro barras que se llevan la acción del cortante. El valor de  $h_0$  en esa expresión será  $h_{0_{eq}}$  en nuestro caso.

Por último en este subapartado, también es necesario calcular el axil bajo el que trabajan **los cordones** de nuestro nuevo modelo. No podemos considerar la misma expresión que proporciona la norma, de nuevo porque los cordones no son idénticos y el centro de masas del sistema no está en medio de los dos.

Tenemos que analizar las tensiones en cada uno de los cordones cuando actúa el axil de compresión y el momento flector. La siguiente figura esquematiza el problema, para un momento flector positivo o negativo:



**Figura 76.** Esquema del diagrama de tensiones en el ejemplo con cordones diferentes.

Las tensiones en la fibra más comprimida generadas por el axil serán  $\sigma_N$ , las que genera el momento serán  $\sigma_M$ . Sus valores siempre serán:

$$\sigma_N = \frac{N_{Ed}}{A_T} ; \sigma_M = \frac{M_{Ed}}{W_i} ; \quad (5.20)$$

Donde el módulo resistente tiene el valor  $W_i = \frac{I_{eff\_eq}}{d_i}$ .

Entonces, cada cordón resistirá:

$$N_i = A_i \cdot \sigma_i = A_i \cdot \frac{N_{Ed}}{A_T} \pm A_i \cdot \frac{M_{Ed} \cdot d_i}{I_{eff\_eq}} \quad (5.21)$$

Esto nos lleva a **4 comprobaciones necesarias**, debemos comprobar cada cordón según si el momento es positivo o negativo. Recordemos que la comprobación consiste en que el axil  $N_i$  de (5.21) sea igual a la resistencia al pandeo del cordón  $N_{Rd}$ . Por tanto, conocidos todos los parámetros en (5.21), somos capaces de implementar el cálculo en Matlab y calcular la carga de pandeo teórica del modelo que acabamos de construir. Las comprobaciones serán:

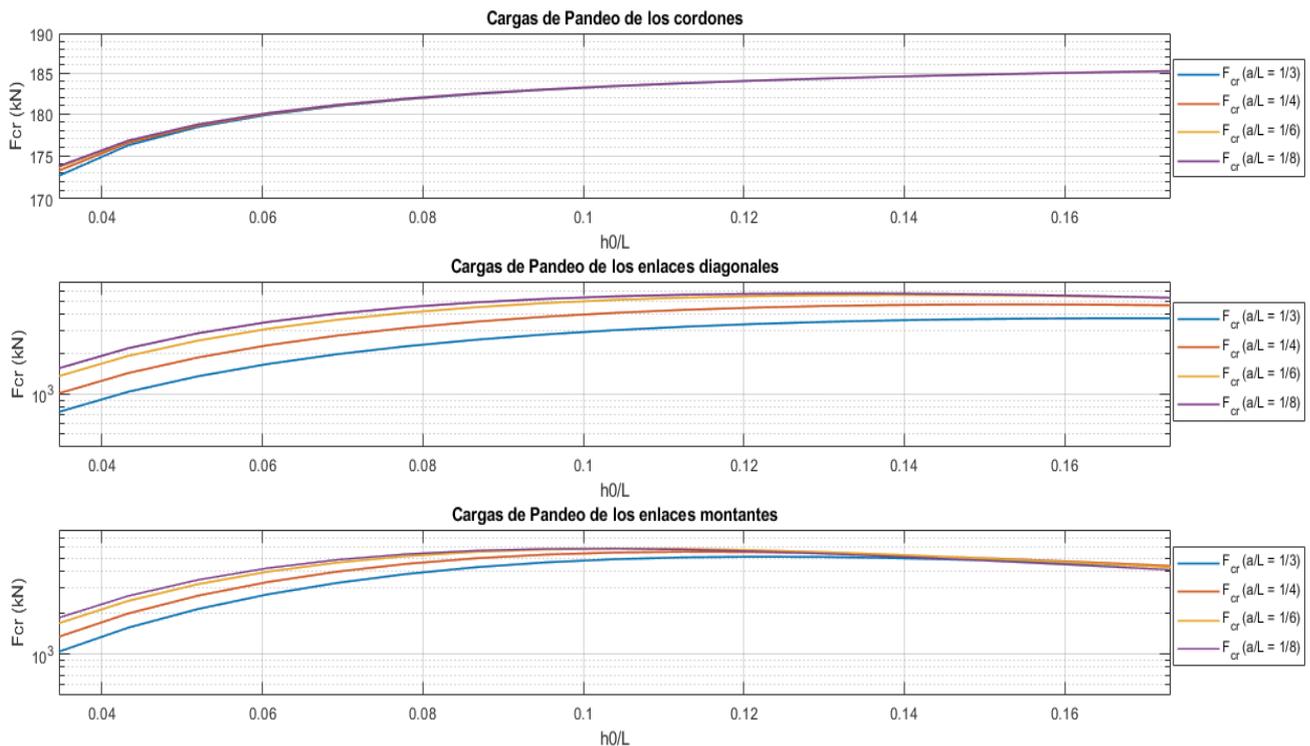
	<b>Cordón con</b> $A_1 = A_{ch}$	<b>Cordón con</b> $A_2 = 2 \cdot A_{ch}$
<b>Momento positivo</b>	$N_{Rd} = \frac{N_{Ed}}{3} + \frac{M_{Ed}}{h_0}$	$N_{Rd} = \frac{2 \cdot N_{Ed}}{3} - \frac{M_{Ed}}{h_0}$
<b>Momento negativo</b>	$N_{Rd} = \frac{N_{Ed}}{3} - \frac{M_{Ed}}{h_0}$	$N_{Rd} = \frac{2 \cdot N_{Ed}}{3} + \frac{M_{Ed}}{h_0}$

**Tabla 17.** Tabla que recoge las comprobaciones del caso del cuarto ejemplo.

Donde el valor de  $N_{Ed}$  es nuestra incógnita, tal que  $N_{Ed} = F_{cr,teorica}$ . La expresión de  $M_{Ed}$  en función de  $N_{Ed}$  es conocida también.

### 5.6.3 Resultados y análisis.

Al realizar el cálculo en Matlab, con los valores de la inercia y la rigidez a cortante del nuevo ejemplo, si realizamos las 4 comprobaciones en los cordones y tomamos el mínimo valor de  $F_{cr}$ , y comprobamos los cordones, resulta:



**Gráfica 14.** Comparación de las cargas de pandeo de los cordones y enlaces del cuarto caso.

$\frac{a/L}{h_0/L}$	<b>1/3</b>	<b>1/4</b>	<b>1/6</b>	<b>1/8</b>
<b>0.04</b>	172.66	173.25	173.65	173.78
<b>0.08</b>	180.96	181.02	181.07	181.08
<b>0.12</b>	183.37	183.39	183.40	183.40
<b>0.2</b>	185.26	185.26	185.25	185.25

**Tabla 18.** Valores de las cargas de pandeo (kN) de los cordones del cuarto caso.

$a/L$	<b>1/3</b>	<b>1/4</b>	<b>1/6</b>	<b>1/8</b>
$h_0/L$				
<b>0.04</b>	734.9	1012.8	1364.8	1563.2
<b>0.08</b>	1992.9	2749.4	3165.5	4025.7
<b>0.12</b>	3022.0	4078.4	5099.9	5421.6
<b>0.2</b>	3713.5	4644.8	5298.1	5292.6

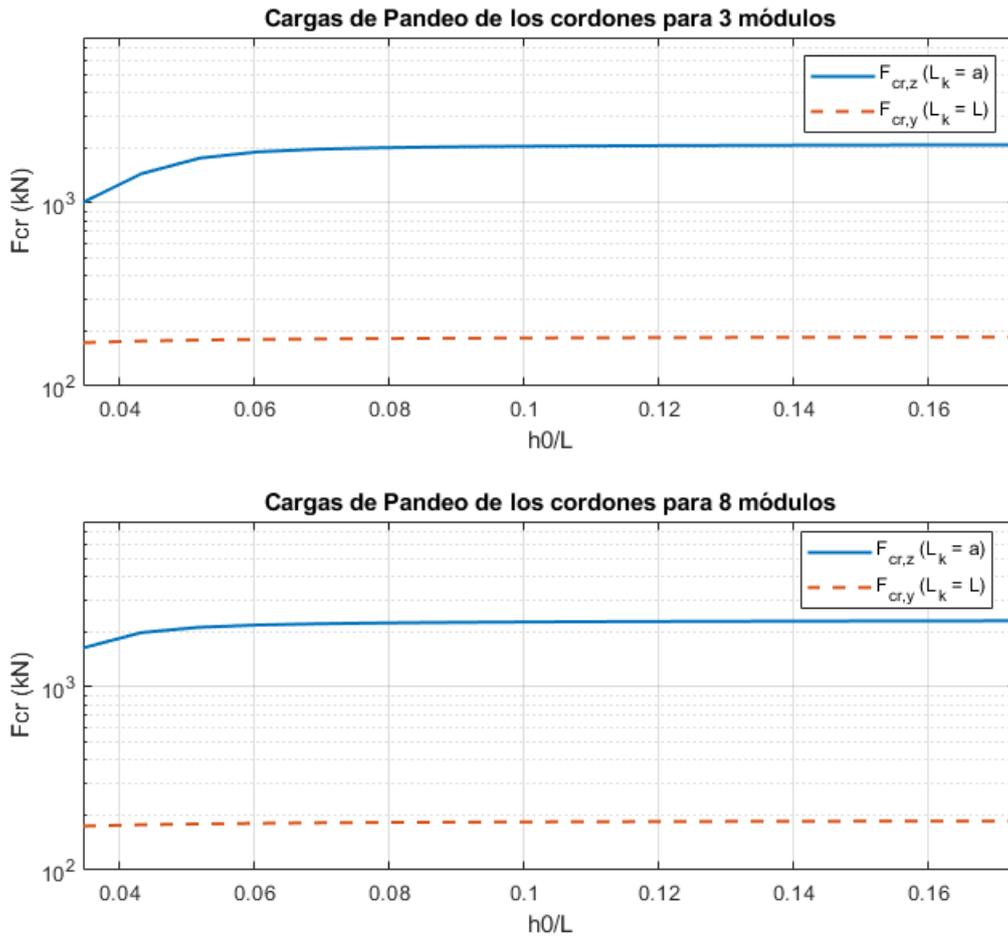
**Tabla 19.** Valores de las cargas de pandeo (kN) de los enlaces diagonales del cuarto caso.

$a/L$	<b>1/3</b>	<b>1/4</b>	<b>1/6</b>	<b>1/8</b>
$h_0/L$				
<b>0.04</b>	1038.3	1333.7	1672.3	1832.9
<b>0.08</b>	3284.4	3967.2	4617.4	4840.9
<b>0.12</b>	4888.7	5468.0	5842.3	5831.0
<b>0.2</b>	4294.0	4364.6	4269.7	4089.5

**Tabla 20.** Valores de las cargas de pandeo (kN) de los enlaces montantes del cuarto caso.

La carga de pandeo de los cordones resulta mucho menor que los valores de los enlaces, lo cual coincide con el modo de pandeo de una columna comprimida empotrada en su base.

Podemos consultar si el pandeo será global o local:

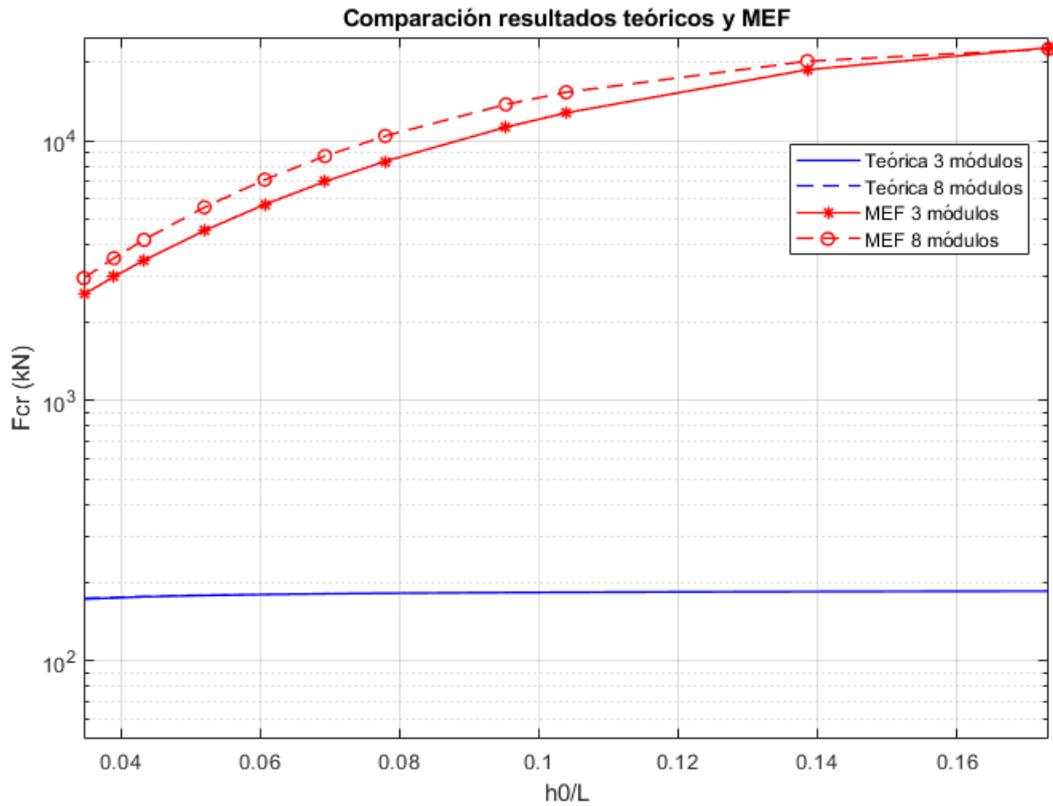


**Gráfica 15.** Comparación del pandeo global o local de los cordones del cuarto caso.

Claramente, el pandeo se produce de forma global, por lo que pandeará el soporte completo.

Es intuitivo que en un modelo con estas condiciones de contorno el pandeo se produzca de manera general en todo el soporte. Además, la tabla 18 muestra que, para el pandeo de todo el soporte, a penas influyen ninguna de las dos variables principales del problema, la carga se mantiene constante en torno a 180 kN sea cual sea la separación entre cordones y el número de módulos. Esto se debe una vez más a las condiciones de contorno, ya que la longitud crítica de todos los casos es la misma (el doble de la del soporte, ya que para estas condiciones  $L_{cr} = \beta \cdot L$ , con  $\beta = 2$ ). Sin embargo, en las tablas 5-19 y 5-20 sí que encontramos variación para la carga de los enlaces al variar sus longitudes críticas, al cambiar la geometría.

Seguiremos comprobando resultados del MEF del soporte equivalente, con los cordones diferentes. Si representamos los resultados:

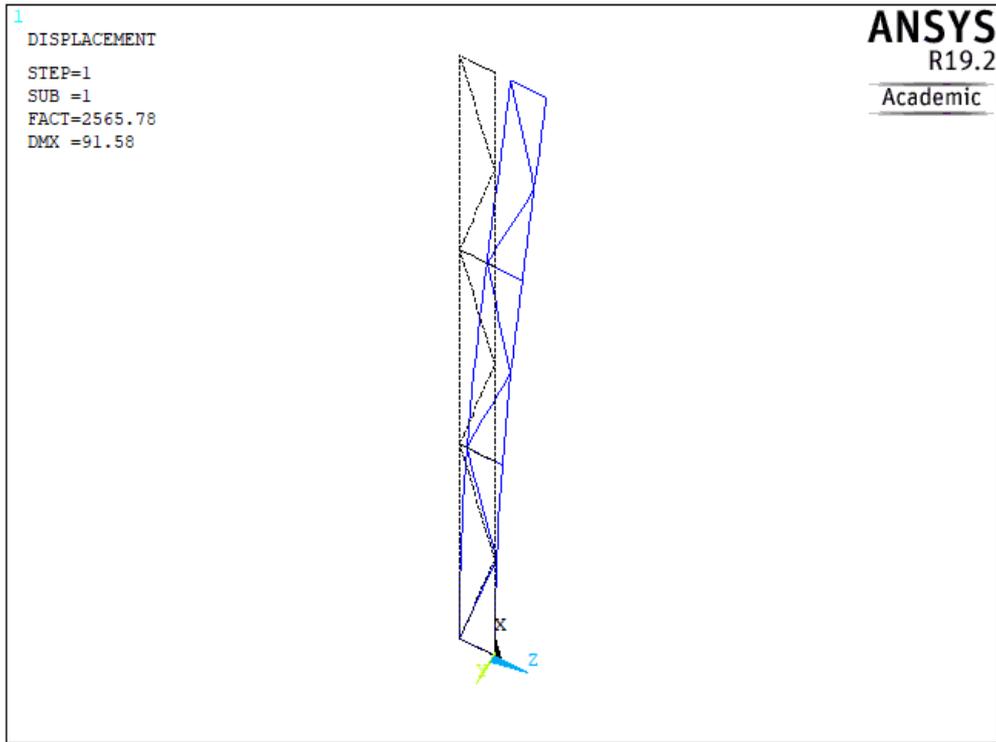


**Gráfica 16.** Comparación entre resultados teóricos y del MEF para el modelo del cuarto caso.

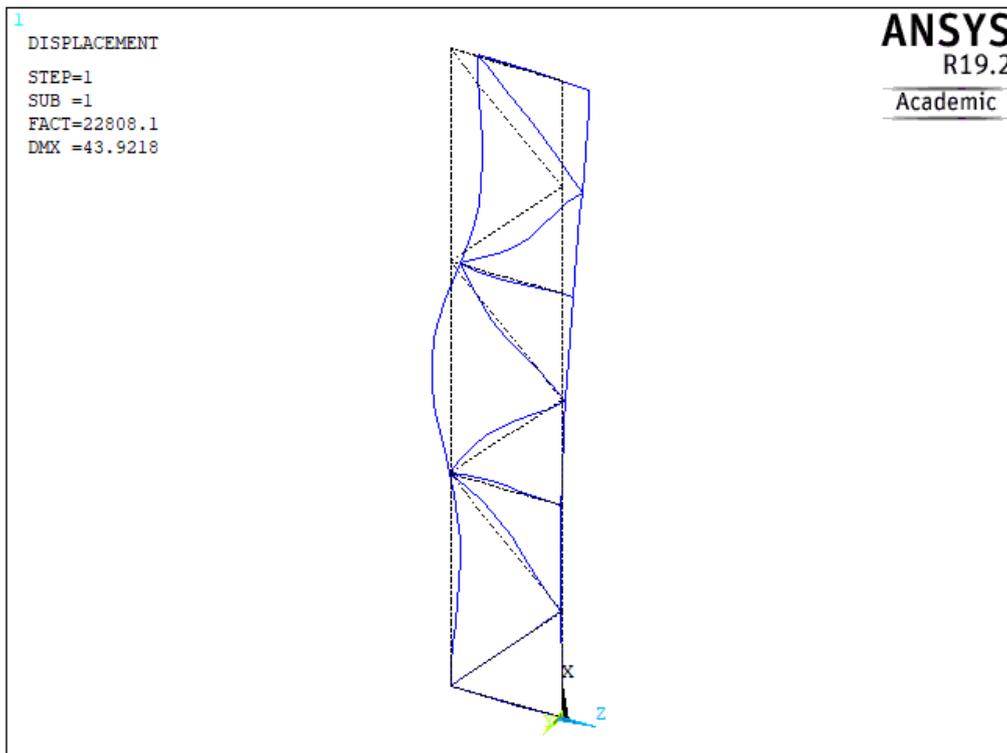
Los valores en Ansys son:

$a/L$		
$h_0/L$	1/3	1/8
0.04	2565.8	2965.1
0.08	6970.4	7089.5
0.12	12810	15373
0.2	22808	22547

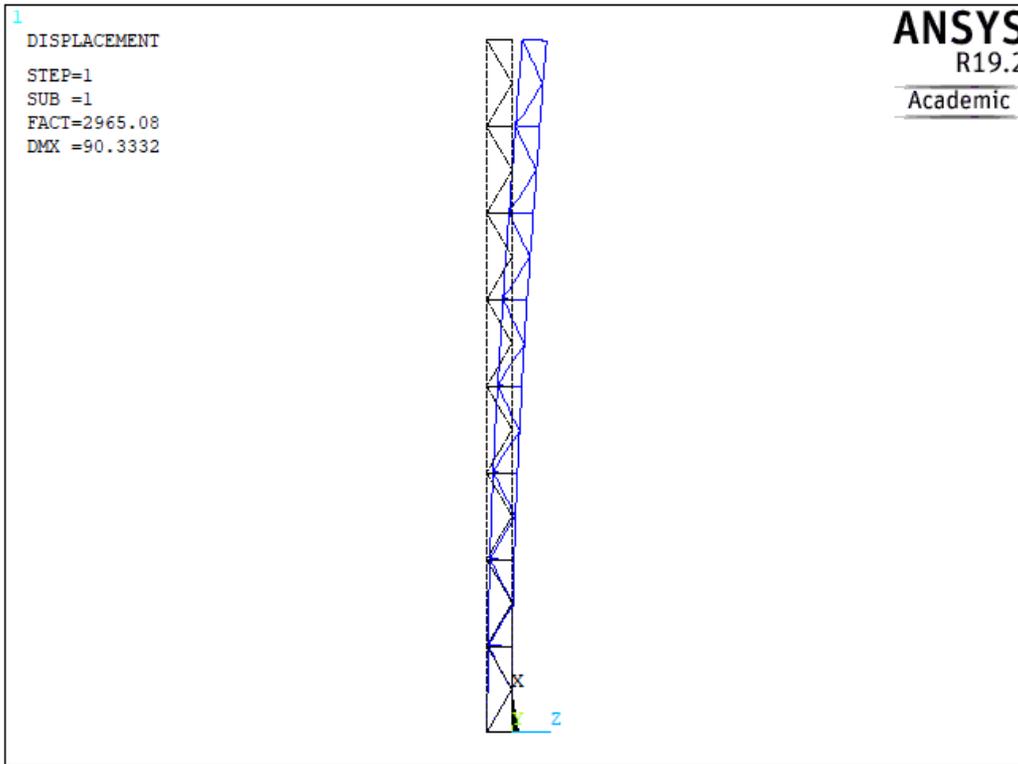
**Tabla 21.** Valores de los resultados de Ansys (kN) del modelo equivalente del cuarto caso.



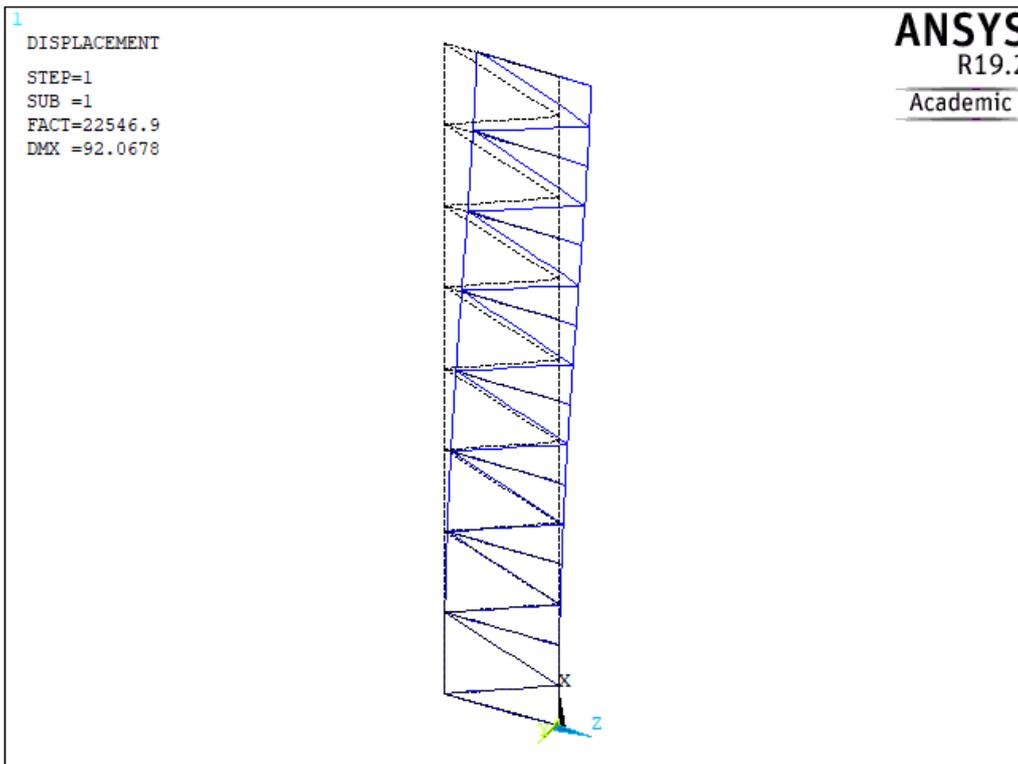
**Figura 77.** Primer modo de pandeo del modelo del cuarto caso para 3 módulos y  $h_0/L = 0.04$ .



**Figura 78.** Primer modo de pandeo del modelo del cuarto caso para 3 módulos y  $h_0/L = 0.2$ .



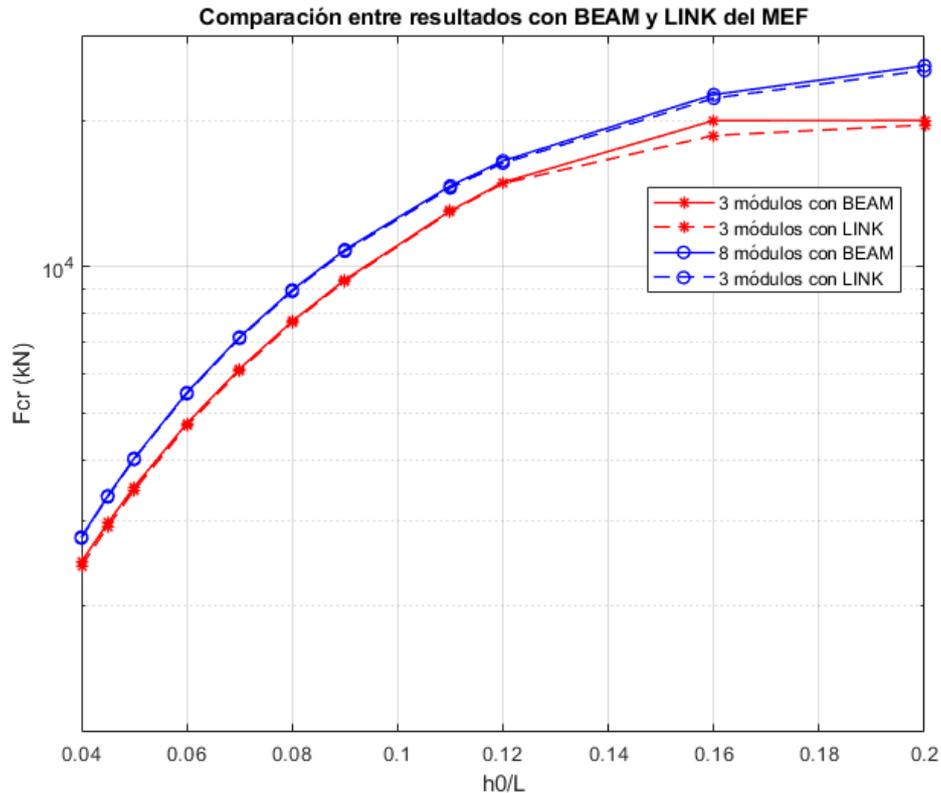
**Figura 79.** Primer modo de pandeo del modelo equivalente del cuarto caso para 8 módulos y  $h_0/L = 0.04$ .



**Figura 80.** Primer modo de pandeo del modelo equivalente del cuarto caso para 8 módulos y  $h_0/L = 0.2$ .

El siguiente paso es consultar la relación entre los resultados de los dos análisis. Podemos comparar los resultados **del soporte real, con los 3 cordones en disposición triangular**, y del soporte modelo, con los cordones no idénticos. Así comprobaremos cómo de exacto es el modelo que hemos construido.

Si obtenemos los resultados del soporte con 3 cordones en Ansys, modelando los enlaces con elementos BEAM188 y LINK180:



**Gráfica 17.** Comparación entre los resultados de Ansys con BEAM y LINK del soporte en triángulo.

A simple vista, los valores son mucho mayores que los de nuestro modelo. Si los recogemos en una tabla:

<b>a/L</b>	<b>1/3</b>	<b>1/8</b>
<b>h<sub>0</sub>/L</b>		
<b>0.04</b>	2416.4	2761.2
<b>0.08</b>	7662.1	7122.2
<b>0.12</b>	14854	16351
<b>0.2</b>	19601	25390

**Tabla 22.** Valores de los resultados de Ansys (kN) del modelo en Ansys del soporte real del cuarto caso.

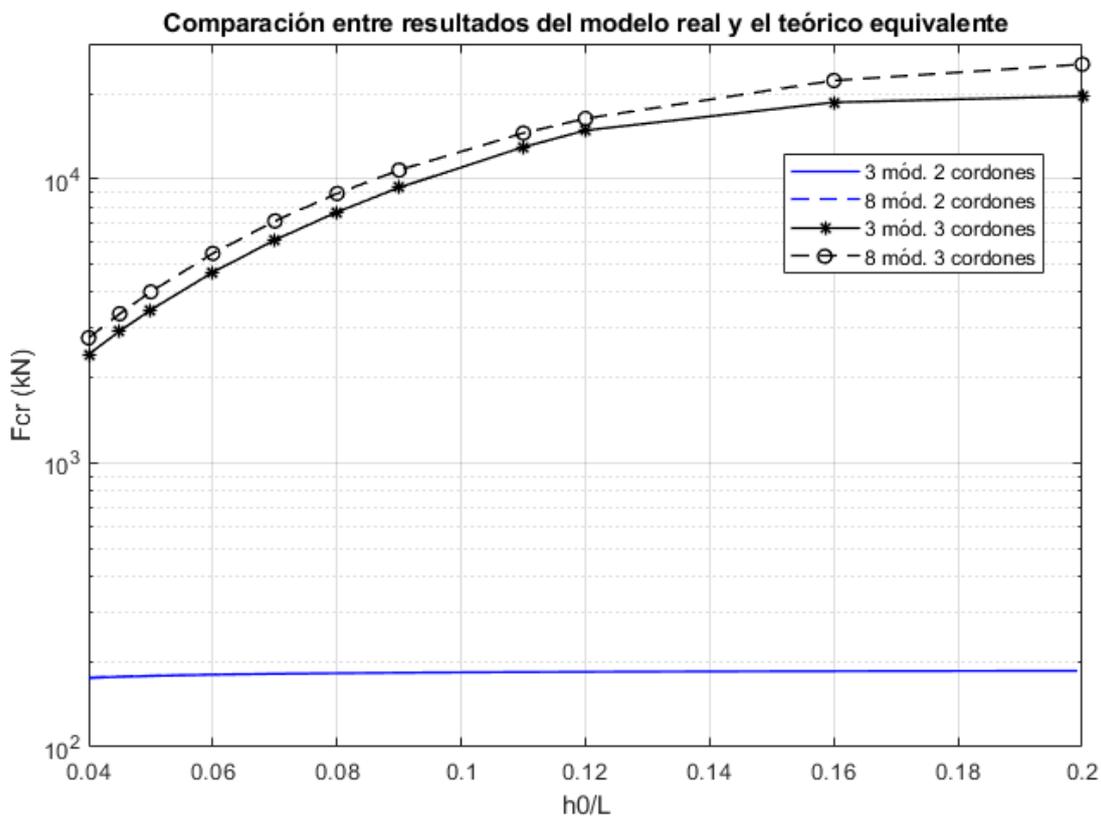
El análisis se ha llevado a cabo usando los dos tipos de elementos de Ansys ya descritos, llegando a la conclusión de que en este caso no influye mucho el tipo de elemento empleado en los enlaces, de nuevo porque el pandeo se produce en los cordones, que siempre son elementos BEAM188. Lo importante en esos resultados, como muestra la gráfica 17, es que la separación entre los cordones influye muchísimo para este soporte. La carga aumenta casi **10 veces** entre el soporte con  $h_0/L = 0.04$  y  $h_0/L = 0.2$ . El

número de módulos no parece importar tanto, aunque sí que se mantiene que para 8 módulos el soporte sea más resistente. No podemos conocer la carga de colapso de los enlaces, pero se intuye que ésta será muy alta, ya que el modelo de Ansys proporciona todos los modos de pandeo como del soporte completo.

Los valores son muy similares a los que hemos obtenido al analizar el soporte equivalente con los cordones diferentes en Ansys.

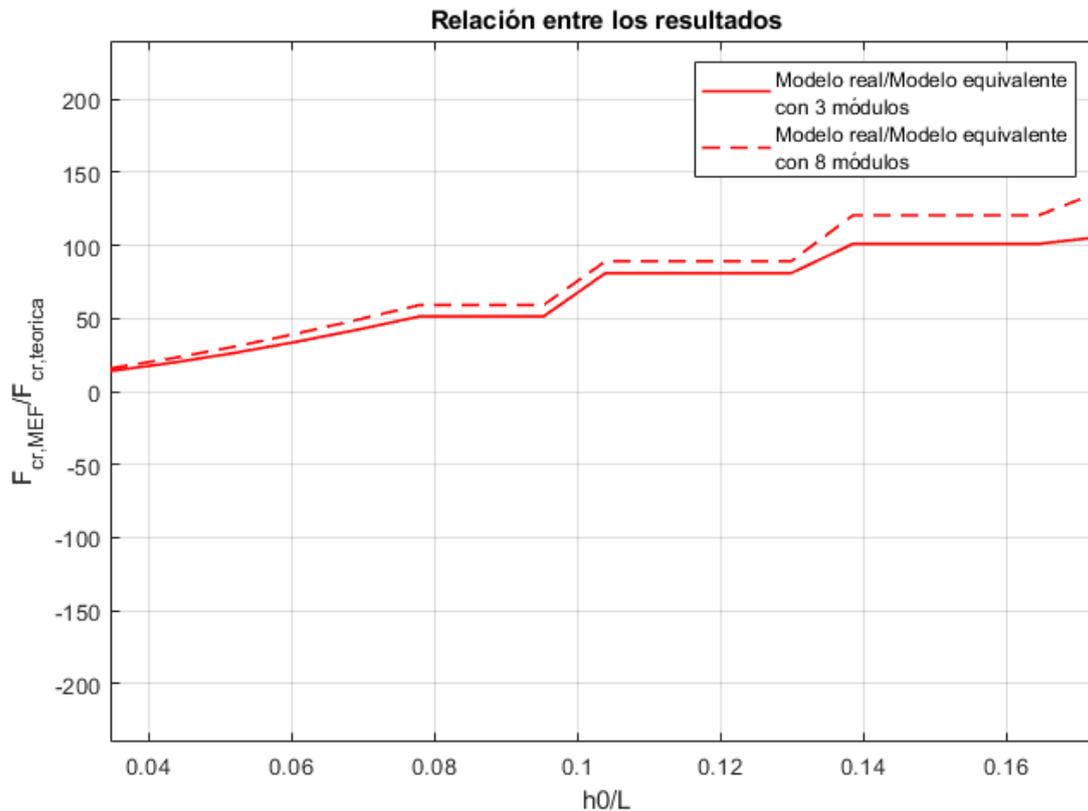
Cabe mencionar que en la introducción de este subapartado (5.6.1) ya se mostraron modos de pandeo de este soporte, por lo que no se incluirán junto a los valores de las cargas como se ha hecho en el resto de casos.

Si incluimos en la gráfica los resultados según el modelo teórico del soporte equivalente de dos cordones:



**Gráfica 18.** Comparación entre los resultados de Ansys de los dos modelos del cuarto caso.

El último paso es comprobar cómo de diferente son los resultados entre sí, ya sea entre los dos modelos de Ansys, o entre cada uno de ellos y los resultados teóricos:



**Gráfica 19.** Relación entre los resultados del modelo equivalente en Ansys y los teóricos del cuarto caso.

Los valores medios son, en concreto:

$\left(\frac{F_{cr,real}}{F_{cr,teo}}\right)_{3\ mod}$	$\left(\frac{F_{cr,real}}{F_{cr,teo}}\right)_{8\ mod}$
66.1	77.1

**Tabla 23.** Valor medio de la relación entre las cargas de pandeo para el cuarto caso.

La relación entre los resultados es mayor que en cualquier otro de los casos de estudio de este proyecto, acercándose a que los resultados de Ansys sean **70 veces** mayores que los del modelo teórico que hemos calculado. Claramente vuelve a demostrarse que a mayor complejidad del problema más difieren los resultados, de nuevo porque el modelo con Elementos Finitos cuenta con muchas más variables que los estudios teóricos, sobre todo, la interacción entre los cordones y los enlaces, que en el modelo teórico sólo se cuenta con la rigidez a cortante, un parámetro que no influye de forma crucial en el cálculo. Además, el cálculo teórico de la rigidez a cortante siempre es una aproximación de la estructura de enlaces.

Con la comparación entre los resultados del modelo real y el teórico equivalente vemos cómo de lejos está la aproximación teórica de una estructura compleja, como es esta, en la que hay que tener en cuenta un soporte que no está incluido en un plano, con un valor de la inercia efectiva que dependerá mucho de la distancia entre los cordones y de que el centro de masa esté en el baricentro del triángulo de la planta.

En conclusión, con este caso hemos demostrado que para un soporte con condiciones ligeramente diferentes a las de la EAE [2] es posible calcular un modelo teórico con buenos resultados, ya que la

relación que hemos obtenido entre estos y el modelo MEF de mismas características ronda un valor de 4, similar a la que hemos obtenido en el resto de casos. También podemos concluir que claramente para un soporte compuesto que se escapa de lo tradicional es necesario realizar un estudio más específico si no se quiere llegar a un valor muy conservador, como se demuestra viendo la relación entre el modelo de Ansys del soporte real, y el modelo teórico de nuestra aproximación, la cual nos dice que la resistencia teórica es en torno a 70 veces menor que la que el MEF obtiene. Futuros casos de estudio podrían centrarse en llegar a un modelo teórico real de un soporte en triángulo.

# 6. CONCLUSIÓN DEL PROYECTO Y TRABAJOS FUTUROS.

---

## 6.1 Resumen.

En este proyecto se ha analizado el comportamiento de las estructuras metálicas conocidas como soportes compuestos, las cuales se conforman enlazando dos perfiles aislados (cordones) con una estructura en celosía que forma los enlaces. Al tratarse de soportes, la comprobación de la resistencia de estos elementos es una comprobación ante el pandeo que puede generar la carga que la columna compuesta soporta. A través de la comparación entre dos análisis diferentes, uno analítico y el otro numérico, se ha estudiado la influencia de diferentes parámetros en la resistencia del elemento. Estos parámetros han sido tanto geométricos como de la estructura (las condiciones de contorno).

Los análisis se han llevado a cabo siguiendo las indicaciones del método propuesto por la Instrucción Española de Acero Estructural (EAE) [2] para la comprobación de soportes compuestos. El análisis teórico ha sido una implementación directa de esas premisas en el software Matlab, mientras que el numérico ha consistido en generar un modelo de Elementos Finitos en el software Ansys y someterlo a un análisis de pandeo. Se ha buscado en todo momento la *carga de pandeo* de los diferentes casos.

Por último, para ampliar la extensión del método propuesto por la EAE [2], se han estudiado soportes cuyas especificaciones difieren de las condiciones necesarias para poder aplicar este método, buscando obtener un método que recoja más posibilidades y optimice el dimensionamiento de estos elementos.

## 6.2 Conclusiones.

Tras haber comentado los resultados obtenidos en cada caso en su apartado correspondiente en el capítulo 5, en esta sección se analizarán en conjuntos, teniendo en cuenta los objetivos del proyecto, buscando llegar a conclusiones concretas que aporten información sobre el comportamiento y el dimensionamiento optimizado de los soportes compuestos.

Siguiendo con la línea establecida en la introducción y los objetivos del proyecto, podemos obtener las siguientes conclusiones:

- En primer lugar, en cuanto a la geometría de los elementos que componen el soporte, es decir, sus secciones, podemos llegar a la conclusión razonable de que las secciones de pared delgada **abiertas** presentan un comportamiento mucho menos resistente ante el pandeo. El ejemplo claro está en el soporte del caso 3, cuyos enlaces se tratan de placas delgadas, y en el que vimos que el fallo siempre se producía en ellos, en ningún caso en los cordones. Además, si comparamos los valores con aquellos obtenidos en otros casos, teniendo en cuenta que el análisis teórico es análogo en todos los ejemplos, por ejemplo para las secciones del cuarto caso, que son tubulares circulares y de perfil IPE, las cargas de pandeo son mucho más altas que para el ejemplo anterior. Al margen de otras variables como la altura, ancho o el número de cordones, un soporte con secciones de pared delgada cerradas proporcionará siempre una resistencia más alta.
- Otras de las variables más significativas en el estudio son las **condiciones de contorno** del soporte completo. Se trata de una variable crucial ya que define directamente la carga de pandeo crítica de Euler, fundamental en el cálculo. La comparación más clara está entre el caso 1 y el 2, ya que son el mismo soporte sólo modificando las condiciones de contorno. Claramente el soporte empotrado-libre tiene una resistencia mucho más baja que el biarticulado, porque la resistencia de los cordones ante el pandeo global siempre será la menor (su longitud de pandeo

es la más alta), y el caso empotrado-libre tiene mucha más libertad para pandear así que si el soporte está articulado en sus extremos, caso en el que puede darse tanto el pandeo de los enlaces como el de los cordones, pero con cargas mucho más elevadas.

- En cuanto a la **esbeltez geométrica**, que ha sido el parámetro  $h_0/L$  a lo largo de este proyecto, la conclusión es clara: a menor esbeltez, mayor es la resistencia del soporte compuesto. Es un parámetro de vital importancia ya que la **inercia efectiva  $I_{eff}$**  del soporte depende de él.

En todos los casos se muestra una tendencia a aumentar la carga de pandeo cuando el soporte tiene los cordones más separados, independientemente de sus condiciones de contorno o del modo de pandeo que se presente. Además, esta variable influye mucho más si pandean los enlaces o los cordones de forma local, porque de ella depende la longitud del elemento que pandea. En alguno de ellos se observa que para los enlaces la resistencia disminuye al llegar a casos con valores de  $h_0$  altos, debido a la interacción entre la resistencia  $N_{rd}$  y la longitud de pandeo, como ya se ha explicado en el capítulo 5. Sin embargo esto no es relevante en esos casos, porque el modo de pandeo predominante no está en esos enlaces.

- Por otro lado, la otra gran variable de estudio en este proyecto ha sido el número de puntos de enlace en la triangulación del soporte, o el **número de módulos  $n$** . También se observa que en todos los casos aumenta la resistencia cuantos más módulos tiene el soporte, pero en especial si pandean los enlaces o los cordones de forma **local**, de nuevo porque influye en la longitud de pandeo  $L_{cr}$  del elemento, haciendo que cuantos más módulos haya más pequeña sea esa longitud y mayor sea la resistencia. Para los casos en los que el modo de pandeo predominante sea del soporte completo, como el caso 1 y el 4, esta variable no parece ser nada relevante.
- Analizando la influencia del **número de cordones** que se empleen en un soporte, vemos como para soportes con más de dos cordones la resistencia aumenta. El modelo teórico no analiza bien esta variable, ya que su comprobación consiste en calcular el pandeo del elemento aislado tomando la rigidez a cortante  $S_v$  como único parámetro en el que influye el número de cordones. Sin embargo, esta rigidez toma un valor muy pequeño en el cálculo y no influye directamente.

Por otro lado, según el MEF, en el caso del soporte de 4 cordones, como ya se ha explicado, el modo de pandeo está en los enlaces porque son secciones muy poco resistentes, pero para los modos en los que pandean los cordones se observa que la carga es muy alta. Lo mismo ocurre en el caso del soporte de 3 cordones, a pesar de sus condiciones de contorno, sigue mostrando una carga de pandeo alta para el soporte completo.

- Por último, se quiere hacer un apunte en cuanto a la diferencia entre los resultados de ambos análisis, el teórico y el numérico. Claramente cuanto más compleja es la configuración del soporte compuesto más difieren entre sí los resultados. Esto nos lleva a concluir que el método teórico está lejos de representar el comportamiento de soportes complejos, como se ha demostrado con el análisis del cuarto caso, o viendo en el tercer caso que la relación entre ambos también ha aumentado con respecto a la de los primeros, que eran más simples. No obstante no se quiere decir con esto que el Método de los Elementos Finitos proporcione resultados exactos y totalmente fiables, ya que también proviene de un proceso de aproximación de un modelo real y la modelización debe ser muy exacta, sino que tiene en cuenta más variables que un modelo teórico y deja ver que estos son a veces conservadores.

### 6.3 Línea futura de trabajo.

En vista a los objetivos establecidos y las conclusiones obtenidas, se proponen como líneas futuras de trabajo:

- Un estudio de soportes con una geometría diferente a la que la normativa establece, por ejemplo, en los que el ancho sea variable o se tengan más de dos cordones enlazados entre sí en el mismo plano.
- El análisis de las cargas de pandeo que siga la misma línea que este proyecto pero tenga en cuenta un comportamiento elasto-plástico del material, para asemejar aún más un modelo real.
- Una implementación en la normativa de otras configuraciones, como el modelo que se propone en este proyecto, que ayude al cálculo de la resistencia de soportes compuestos complejos sin necesidad de emplear un modelo analítico.
- Un estudio de soportes compuestos con condiciones de contorno más complejas, como arriostamientos, desplazamientos impedidos a mitad del soporte, configuraciones empotradas en ambos extremos... teniendo en cuenta que constructivamente las posibilidades son muy amplias.

# REFERENCIAS

---

- [1] Alexander. Chajes, “*Principles of Structural Theory*”. Prentice-Hall (1974).
- [2] Ministerio de Fomento. “*Instrucción de Acero Estructural*”. 3º ed. noviembre 2012.
- [3] Rodríguez-Tembleque Solano, Luis. Abascal García, Ramón. “*Estructuras metálicas*”. Publicaciones de la Universidad de Sevilla, capítulo 6. Año 2016.
- [4] Bernuzzi, Claudio. Cordova, Benedetto. “*Structural Steel Design to Eurocode and AISC specifications*”. WILEY Blackwell. Capítulo 16. 1ª edición, 2016.
- [5] Arcelor Mittal, Peiner Träger y Corus. “*Steel buildings in Europe: Single-Storey Steel B*”. Capítulo 6.
- [6] Kalochairetis, Konstantinos E. Gantes, Charis J. Artículo “*Numerical and analytical investigation of collapse loads of laced built-up columns*”. Noviembre, 2010.
- [7] Timoshenko & Gere. “*Theory of elastic stability*”. 2ª Edición. McGraw-Hill. 1963.
- [8] UNE-EN 1993-1-1, “*Eurocódigo 3: Proyecto de estructuras de acero. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificios*” mayo 2008.

## Anexo 1: Código de Matlab para los casos de estudio.

Debido a la gran extensión del código de Matlab de los últimos ejemplos, se incluye el código del segundo caso, para el soporte articulado con un plano de enlace, teniendo en cuenta que todos los ejemplos siguen el mismo esquema con mayor o menor complejidad según el soporte concreto y con sus características. Además, se dispondrán en dos columnas, de manera que en la misma página quepa el doble de texto.

```

close all;
%Datos del acero
fy=275e3; %Límite elástico en
kN/m2
E=210e6; %Módulo de deformación en
kN/m2

%Datos de las secciones de los
elementos en metros
%Cordones IPE 400
Ach=84.5e-4;
iyc=0.1654;
izc=0.0395;
h=0.4;
b=0.18;
t1=0.0135;

%Enlaces diagonales tubulares
circulares, 100.5
Ad=14.92e-4;
id=0.0336;

%Datos de la geometria del
elemento
L=10; %en metros
triangulacion=2; %tipo de
triangulacion del elemento: en N,
V o K
%N=1, V=2 o K=3
empresillado=0; %la norma recoge
elementos empresillados o
triangulados

Fcrv_ad_c=[]; %vector que recoge
la carga critica en los cordones
FCrv_ad_e=[]; %vector que recoge
la carga critica en los enlaces

Fcr_z_3=[]; % Fza que pandeo_z-z
los cordones con longitud de
pandeo 'a', para n_puntos=3
Fcr_z_4=[]; % Fza que pandeo_z-z
los cordones con longitud de
pandeo 'a', para n_puntos=4

Fcr_z_6=[]; % Fza que pandeo_z-z
los cordones con longitud de
pandeo 'a', para n_puntos=6
Fcr_z_8=[]; % Fza que pandeo_z-z
los cordones con longitud de
pandeo 'a', para n_puntos=8

Fcr_y_3=[]; % Fza que pandeo_y-y
los cordones con longitud de
pandeo 'L', para n_puntos=3
Fcr_y_4=[]; % Fza que pandeo_y-y
los cordones con longitud de
pandeo 'L', para n_puntos=4
Fcr_y_6=[]; % Fza que pandeo_y-y
los cordones con longitud de
pandeo 'L', para n_puntos=6
Fcr_y_8=[]; % Fza que pandeo_y-y
los cordones con longitud de
pandeo 'L', para n_puntos=8

Fcrv_c_3=[];
Fcrv_c_4=[];
Fcrv_c_6=[];
Fcrv_c_8=[];

Fcrv_e_3=[];
Fcrv_e_4=[];
Fcrv_e_6=[];
Fcrv_e_8=[];

Ncrv_3=[];
Ncrv_8=[];
Delta_v_3=[];
Delta_v_8=[];
Delta_v_3_2=[];
Delta_v_8_2=[];

for n_puntos=3:1:8 %numero de
modulos
    a=L/n_puntos;

    h0Lv=[];
    Fcrv_c=[];
    Fcrv_e=[];
    Ncrv=[];

```

```

for cont=0.04:0.02:0.2 %valores
de h0 entre 0.04 y 0.2 metros

h0=cont*L;

n=1; %numero de planos de enlace
if triangulacion==2
    d=sqrt(h0^2+(a/2)^2);
else
    d=sqrt(h0^2+a^2);
end
f=1.05; %factor de seguridad gamma
= 1.05;

e0=L/500;
%el valor de la inercia depende de
si es empresillado o triangulado
if empresillado==1
    I1=0.5*h0^2*Ach+2*Ich;
    i0=sqrt(I1/(2*Ach));
    lambda_e=L/i0;
    if lambda_e>150
        mu=0;
    end
    if 75<lambda_e<150
        mu=2-(lambda_e/75);
    end
    if lambda_e<75
        mu=1;
    end
    Ieff=0.5*h0^2*Ach+2*mu*Ich;
else
    Ieff=0.5*h0^2*Ach;
end

Lcr=1*L; %longitud critica para
biarticulado
acr=a;
dcr=d; %longitudes criticas
locales

Ncr=(pi^2*E*Ieff)/(Lcr^2);

if empresillado==1

Sv=(24*E*Ich)/(a^2*(1+((2*Ich*h0)/(
n*Ib*a)))));
    Sv2=(2*pi.^2*E*Ich)/(a.^2);
    if Sv2<Sv
        Sv=Sv2;
    end
else
    if triangulacion==1
%triangulacion en N

Sv=(n*E*Ad*a*h0^2)/(d^3*(1+((Ad*h0
^3)/(Av*d^3)))));
    end
    if triangulacion==2
%triangulacion en V

Sv=(n*E*Ad*a*h0^2)/(2*d^3);
    end
    if triangulacion==3
%triangulacion en K
        Sv=(n*E*Ad*a*h0^2)/(d^3);
    end
end

if empresillado==1
    iyc=i0;
end

%Cálculo de fuerza para que pandee
el elemento

%Pandeo de los cordones

lambda_global=Lcr/iyc; %longitud
critica de pandeo global
lambda_local=acr/izc; %longitud
critica de pandeo local
lambda_1=93.9*(sqrt(235e3/fy));
lambda_global_ad=lambda_global/lam
bda_1; %esbeltez adimensional
lambda_local_ad=lambda_local/lambd
a_1;

%Curva de pandeo para perfiles
laminados
t=t1;
if h/b > 1.2
    if t < 0.04
        alpha_global=0.21;
        alpha_local=0.34;
    else
        alpha_global=0.34;
        alpha_local=0.49;
    end
else
    if t < 0.1
        alpha_global=0.34;
        alpha_local=0.49;
    else
        alpha_global=0.76;
        alpha_local=0.76;
    end
end

phi_global=0.5*(1+alpha_global*(la
mbda_global_ad-0.2))+
(lambda_global_ad).^2);
phi_local=0.5*(1+alpha_local*(lamb
da_local_ad-0.2))+
(lambda_local_ad).^2);
chi_global=1/(phi_global+sqrt(phi_
global^2-(lambda_global_ad)^2));
chi_local=1/(phi_local+sqrt(phi_lo
cal^2-(lambda_local_ad)^2));

```

```

Nrd_c_local= (chi_local*Ach*fy)/f;
Nrd_c_global=
(chi_global*Ach*fy)/f;

A=e0/h0;
B=(1/Ncr)+(1/Sv);

%Resolvemos la ecuación del
calculo de la carga

Fcr_c_local=fzero(@(F)
((F/2)+((A*F)/(1-B*F)))-
Nrd_c_local),1);
Fcr_c_global=fzero(@(F2)
((F2/2)+((A*F2)/(1-B*F2)))-
Nrd_c_global),1);

Fcr_cordones=min(Fcr_c_local,Fcr_c
_global); %Determinacion del plano
debil

%Calculo de fuerza para que
pandeen los enlaces

lambda_e=dcr/id; %longitud critica
d
lambda_e_1=lambda_e/lambda_1;

alpha_e=0.21; %Secciones huecas
en caliente siempre son curvas a
phi_enlaces=0.5*(1+alpha_e*(lambda
_e_1-0.2)+ (lambda_e_1).^2);
chi_e=1/(phi_enlaces+sqrt(phi_enla
ces^2-(lambda_e_1)^2));

Nrd_enlaces=chi_e*Ad*fy/f;
A2=((pi*d)/(L*n*h0));

Fcr_enlaces=fzero(@(F)
(A2*((F*e0)/(1-F*B)))-
Nrd_enlaces,1);

if n_puntos==3
    Fcr_z_3=[Fcr_z_3 Fcr_c_local];
    Fcr_y_3=[Fcr_y_3
Fcr_c_global];
    Fcrv_c_3=[Fcrv_c_3
Fcr_cordones];
    Fcrv_e_3=[Fcrv_e_3
Fcr_enlaces];
    Ncrv_3=[Ncrv_3 Ncr];
end
if n_puntos==4
    Fcr_z_4=[Fcr_z_4 Fcr_c_local];
    Fcr_y_4=[Fcr_y_4
Fcr_c_global];
    Fcrv_c_4=[Fcrv_c_4
Fcr_cordones];
    Fcrv_e_4=[Fcrv_e_4
Fcr_enlaces];
    Ncrv_4=[Ncrv_4 Ncr];
end

Fcrv_e_4=[Fcrv_e_4
Fcr_enlaces];
end
if n_puntos==6
    Fcr_z_6=[Fcr_z_6 Fcr_c_local];
    Fcr_y_6=[Fcr_y_6
Fcr_c_global];
    Fcrv_c_6=[Fcrv_c_6
Fcr_cordones];
    Fcrv_e_6=[Fcrv_e_6
Fcr_enlaces];
end
if n_puntos==8
    Fcr_z_8=[Fcr_z_8 Fcr_c_local];
    Fcr_y_8=[Fcr_y_8
Fcr_c_global];
    Fcrv_c_8=[Fcrv_c_8
Fcr_cordones];
    Fcrv_e_8=[Fcrv_e_8
Fcr_enlaces];
    Ncrv_8=[Ncrv_8 Ncr];
end

h0Lv=[h0Lv h0/L];
Fcrv_c=[Fcrv_c Fcr_cordones];
Fcrv_e=[Fcrv_e Fcr_enlaces];
Ncrv=[Ncrv Ncr];

%-----
%Relación entre teóricos y MEF
%-----

%Resultados del MEF

h0_MEF=[0.04,0.045,0.05,0.06,0.08,
0.12,0.16,0.2];
MEF_3_local=[7363.31,8179.1,8529.7
,8742.1,8812.6,8744.4,8627.8,8507.
6];
MEF_3_imp=[7249.86,7937.4,8239.7,8
468.9,8599.3,8601.2,8521.2,8423.7]
;
MEF_3_global=[8962.08,8961.7,8961.
3,8960.5,8958.5,8954.3,8950.4,8947
.1];
MEF_8_local=[44328,44292,44008,437
53,42870,41305,40167.8,39320];
MEF_8_global=[8946,8944.5,8943,894
0,8936,8930,8927.3,8925.3];
MEF_8_imp=[8945.7,8944.3,8942.8,89
40.2,8936.5,8930.6,8926,8924.2];
%para 8 modulos, con o sin
imperfeccion resulta lo mismo

Fcr=min(Fcr_cordones,Fcr_enlaces);

%calculamos las relaciones entre
los valores

```

```

if n_puntos==3
if cont==0.04
    delta_1=7363.31/Fcr;
    delta_2=MEF_3_imp(1)/Fcr;
end
if cont==0.045
    delta_1=8179.1/Fcr;
    delta_2=MEF_3_imp(2)/Fcr;
end
if cont==0.05
    delta_1=8529.7/Fcr;
    delta_2=MEF_3_imp(3)/Fcr;
end
if cont==0.06
    delta_1=8742.1/Fcr;
    delta_2=MEF_3_imp(4)/Fcr;
end
if cont==0.08
    delta_1=8812.6/Fcr;
    delta_2=MEF_3_imp(5)/Fcr;
end
if cont==0.12
    delta_1=8744.4/Fcr;
    delta_2=MEF_3_imp(6)/Fcr;
end
if cont==0.16
    delta_1=8628/Fcr;
    delta_2=MEF_3_imp(7)/Fcr;
end
if cont==0.2
    delta_1=8508/Fcr;
    delta_2=MEF_3_imp(8)/Fcr;
end
Delta_v_3=[Delta_v_3 delta_1];
Delta_v_3_2=[Delta_v_3_2 delta_2];
    if cont==0.2
Delta_3=mean(Delta_v_3)
Delta_3_2=mean(Delta_v_3_2)
    end
end

if n_puntos==8
if cont==0.04
    delta_1=8946/Fcr;
    delta_2=MEF_8_imp(1)/Fcr;
end
if cont==0.045
    delta_1=8944.5/Fcr;
    delta_2=MEF_8_imp(2)/Fcr;
end
if cont==0.05
    delta_1=8943/Fcr;
    delta_2=MEF_8_imp(3)/Fcr;
end
if cont==0.06
    delta_1=8940/Fcr;
    delta_2=MEF_8_imp(4)/Fcr;
end
if cont==0.08
    delta_1=8936/Fcr;
    delta_2=MEF_8_imp(5)/Fcr;
end
end

if cont==0.12
    delta_1=8930/Fcr;
    delta_2=MEF_8_imp(6)/Fcr;
end
if cont==0.16
    delta_1=8927.3/Fcr;
    delta_2=MEF_8_imp(7)/Fcr;
end
if cont==0.2
    delta_1=8925.3/Fcr;
    delta_2=MEF_8_imp(8)/Fcr;
end
Delta_v_8=[Delta_v_8 delta_1];
Delta_v_8_2=[Delta_v_8_2 delta_2];
    if cont==0.2
Delta_8=mean(Delta_v_8)
Delta_8_2=mean(Delta_v_8_2)
    end
end

Fcrv_ad_c=Fcrv_c/(Fcrv_c(1));
%adimensionalizacion a partir del
primer valor
Fcrv_ad_e=Fcrv_e/(Fcrv_e(1));

end

%Gráficas que muestran como varían
las cargas de pandeo de los
cordones
%o enlaces según la separación
entre cordones y el número de
módulos

figure(1)
subplot(3,1,1)
semilogy(h0Lv,Fcrv_c_3,'-
','LineWidth',1.5);hold on;
semilogy(h0Lv,Fcrv_c_4,'--
','LineWidth',1.5);hold on;
semilogy(h0Lv,Fcrv_c_6,':','LineWi
dth',1.5);hold on;
semilogy(h0Lv,Fcrv_c_8,'-
.','LineWidth',1.5);hold on;
legend('a/L=1/3','a/L=1/4','a/L=1/
6','a/L=1/8')
xlabel('h0/L'); ylabel('Fcr
(kN)'); grid;
title('Cargas de Pandeo de los
cordones');
axis([0.04 0.2 0 5000]);

subplot(3,1,2)
semilogy(h0Lv,Fcrv_e_3,'-
','LineWidth',1.5);hold on;
semilogy(h0Lv,Fcrv_e_4,'--
','LineWidth',1.5);hold on;

```

```

semilogy(h0Lv,Fcrv_e_6,':','LineWidth',1.5);hold on;
semilogy(h0Lv,Fcrv_e_8,'-','LineWidth',1.5);hold on;
legend('a/L=1/3','a/L=1/4','a/L=1/6','a/L=1/8')
xlabel('h0/L'); ylabel('Fcr (kN)'); grid;
title('Cargas de Pandeo de los enlaces');
axis([0.04 0.2 0 33000]);

```

```

subplot(3,1,3)
semilogy(h0Lv,Ncrv_3,'-b','LineWidth',1.5);hold on;
semilogy(h0Lv,Ncrv_8,':r','LineWidth',1.5);hold on;
legend('a/L=1/3','a/L=1/8')
xlabel('h0/L');
ylabel('N_{cr,Eu,z} (kN)'); grid;
title('Cargas de Pandeo global del soporte');
axis([0.04 0.2 0 1000000]);

```

%Gráfica que muestra si el soporte pandea de forma local o global

```

figure(2)
subplot(2,1,1)
semilogy(h0Lv,Fcr_z_3,'-','LineWidth',1.5);hold on;
semilogy(h0Lv,Fcr_y_3,'--','LineWidth',1.5);
legend('F_{cr,z} (L_k = a)','F_{cr,y} (L_k = L)')
xlabel('h0/L'); ylabel('Fcr (kN)'); grid;
title('Cargas de Pandeo de los cordones para 3 módulos');
axis([0.04 0.2 0 5000]);

```

```

subplot(2,1,2)
semilogy(h0Lv,Fcr_z_8,'-','LineWidth',1.5);hold on;
semilogy(h0Lv,Fcr_y_8,'--','LineWidth',1.5);
legend('F_{cr,z} (L_k = a)','F_{cr,y} (L_k = L)')
xlabel('h0/L'); ylabel('Fcr (kN)'); grid;
title('Cargas de Pandeo de los cordones para 8 módulos');
axis([0.04 0.2 0 5000]);

```

%Gráficas que comparan los resultados teóricos con los del MEF

```

figure(3)
semilogy(h0Lv,Fcr_y_3,'-b','LineWidth',1.2);hold on;
semilogy(h0Lv,Fcr_z_3,'--b','LineWidth',1.2);hold on;
semilogy(h0_MEF,MEF_3_global,'-*r','LineWidth',1.2);hold on;
semilogy(h0_MEF,MEF_3_imp,'-*k','LineWidth',1.2);hold on;
semilogy(h0_MEF,MEF_3_local,'--or','LineWidth',1.2);hold on;
legend('Teórica global','Teórica local','MEF global','MEF con imperfeccion','MEF local')
xlabel('h0/L'); ylabel('Fcr (kN)'); grid;
title('Cargas de pandeo para el soporte de 3 módulos');
axis([0.04 0.2 0 10000]);

```

```

figure(4)
semilogy(h0Lv,Fcr_y_8,'-b','LineWidth',1.2);hold on;
semilogy(h0Lv,Fcr_z_8,'--b','LineWidth',1.2);hold on;
semilogy(h0_MEF,MEF_8_global,'-*r','LineWidth',1.5);hold on;
semilogy(h0_MEF,MEF_8_imp,'-*k','LineWidth',0.8);hold on;
semilogy(h0_MEF,MEF_8_local,'--or','LineWidth',1.2);hold on;
legend('Teórica global','Teórica local','MEF global','MEF con imperfeccion','MEF local')
xlabel('h0/L'); ylabel('Fcr (kN)'); grid;
title('Cargas de pandeo para el soporte de 8 módulos');
axis([0.04 0.2 3000 50000]);

```

```

figure(5)
plot(h0Lv,Delta_v_3,'-r','LineWidth',1.5);hold on;
plot(h0Lv,Delta_v_3_2,'-k','LineWidth',1.5);hold on;
plot(h0Lv,Delta_v_8,'-b','LineWidth',1.5);hold on;
plot(h0Lv,Delta_v_8_2,'--g','LineWidth',1.2);hold on;
legend('3 módulos','3 módulos con imperfeccion','8 módulos','8 módulos con imperfeccion')
xlabel('h0/L');
ylabel('F_{cr,MEF}/F_{cr,teorica}'); grid;
title('Relación entre los resultados del MEF y los teóricos');
axis([0.04 0.2 0 7]);

```

## **Anexo 2: Código de Ansys para los casos de estudio.**

Al igual que sucedía en el anexo anterior, en este se incluirán un par de ejemplos de los numerosos códigos de Ansys que se han empleado en este proyecto, debido a su larga extensión.

- **Código del segundo caso: soporte biarticulado, triangulado en V y con un plano de enlace, en concreto para 8 módulos y una separación  $h_0 = 0.40$  m.**

FINISH

```
/CLEAR                                K,100,a/2,0,0
                                         KGEN,n,100,,,a,0,0

!Cambiamos el color de fondo a blanco

/RGB,INDEX,100,100,100, 0              K,200,0,h,0
/RGB,INDEX, 80, 80, 80,13              L,1,200
/RGB,INDEX, 60, 60, 60,14              L,200,100
/RGB,INDEX, 0, 0, 0,15

                                         LSEL,S,LOC,X,a/4

/Prep7                                  LGEN,n,ALL,,,a,0,0
!-----                                ALLSEL

!Geometria

!-----                                K,300,a,h,0
                                         L,100,300

n=8 !numero de puntos de enlace

                                         LSEL,S,LOC,X,3*a/4

L=10000                                  LGEN,n,ALL,,,a,0,0
a=L/n                                    ALLSEL
h=0.04*L
e0=L/500 !imperfeccion inicial          NUMMRG,KP

!Creamos el plano de enlace

K,1,0,0,0                                K,500,L,h,0
K,2,a,0,0                                L,400,500
L,1,2
LGEN,n,1,,,a,0,0                          NUMMRG,KP
LGEN,2,ALL,,,0,h,0
```

K,5000,L,0,0 !keypoint para orientar el elemento rigido de la base

N,1,0,h/2,0

N,2,L,h/2,0

!-----

!Elementos

!-----

ET,1,BEAM188

ET,2,LINK180

!KEYOPT,1,1,1 !!! comentar si se usa la version superior a ANSYS-13

!-----

!Material

!-----

MP,EX,1,210 !unidades en kN y mm2

MP,PRXY,1,0.3

MP,DENS,1,7850e-11

!-----

!Geometria de las secciones

!-----

SECTYPE,1,BEAM,I !cordones IPE-400

SECDATA,180,180,400,13.5,13.5,8.6

SECTYPE,2,BEAM,CTUBE !enlaces montantes 100-5

SECDATA,45,50,10

SECTYPE,3,LINK

SECDATA,1491.8 !seccion de área igual al perfil 100-5

SECTYPE,4,BEAM,ASEC,,0 !elemento rigido para el extremo

SECDATA,91e2\*1e8,8091e4\*1e8,,2843e4\*1e8,295.4e9\*1e8,76.57e4\*1e8,,,,,220,220

!valores para un HE 220 multiplicados \* 1e8

!-----

!Mallado

!-----

!Cordones

LSEL,S,LOC,Y,0

LSEL,A,LOC,Y,h

LATT,1,,1,,,1

LESIZE,ALL,,10

LMESH,ALL

!Enlaces

LSEL,S,LOC,Y,h/2

LSEL,U,LOC,X,L

LSEL,U,LOC,X,0

LATT,1,,1,,,2 !mallado con BEAM

LESIZE,ALL,,10

!LATT,1,,2,,,3 !mallado con LINK

!LESIZE,ALL,,1

LMESH,ALL

!Elementos rigidos en el extremo y la base

LSEL,S,LOC,X,L  
LATT,1,,1,,1,,4  
LESIZE,ALL,,2  
LMESH,ALL  
ALLSEL

LSEL,S,LOC,X,0  
LATT,1,,1,,5000,,4  
LESIZE,ALL,,2  
LMESH,ALL  
ALLSEL

NUMMRG,NODES

NSEL,S,LOC,X,0  
CERIG,1,ALL,ALL  
ALLSEL

NSEL,S,LOC,X,L  
CERIG,2,ALL,ALL !region rigida para aplicar  
la carga  
ALLSEL

!-----

!Cargas

!-----

F,2,FX,-1  
F,2,MZ,e0

!-----

!Condiciones de contorno

!-----

D,1,UX,0 !articulacion en la base  
D,1,UY,0  
D,1,UZ,0  
D,1,ROTX,0  
ALLSEL

D,2,UY,0 !articulacion en la cabeza  
D,2,UZ,0  
D,2,ROTX,0  
ALLSEL

NSEL,S,LOC,Y,0  
NSEL,A,LOC,Y,h

D,ALL,ROTX,0 !los cordones no pueden rotar  
en X

ALLSEL

/SOLU

PSTRES,ON

SOLVE

FINISH

!-----

!ANALISIS DE PANDEO

!-----

/SOLU

ANTYPE,1

BUCOPT,LANB,5,0,0,CENTER

/STATUS,SOLU

SOLVE

FINISH

```

/POST1
SET,LIST
SET,FIRST
PLDISP,1
/REPLOT

```

- Código del ejemplo real del cuarto caso: soporte empotrado-libre, triangulado en K, con tres planos de enlaces dispuestos de forma triangular. En concreto, para 3 módulos y una separación  $h_0 = 2.0$  m.

```

FINISH                                L,1,2
/CLEAR                                  LGEN,n,1,,,a,0,0
                                          LGEN,2,ALL,,,0,h,0
!Cambiamos el color de fondo a blanco  LSEL,S,LOC,Y,0
/RGB,INDEX,100,100,100, 0              LGEN,2,ALL,,,0,h/2,(-sqrt(3)/2)*h
/RGB,INDEX, 80, 80, 80,13              ALLSEL
/RGB,INDEX, 60, 60, 60,14
/RGB,INDEX, 0, 0, 0,15                  !Primer plano de enlace

/Prep7                                  K,100,a/2,0,0
                                          KGEN,n,100,,,a,0,0

!-----
!Geometria                              K,120,0,h,0
!-----                                  L,1,120
                                          L,120,100

n=3 !numero de puntos de enlace

                                          LSEL,S,LOC,X,a/4
L=10000                                  LGEN,n,ALL,,,a,0,0
a=L/n                                     ALLSEL
h=0.2*L
e0=L/500                                  K,140,a,h,0
                                          L,100,140

K,1,0,0,0
K,2,a,0,0                                LSEL,S,LOC,X,3*a/4

```

LGEN,n,ALL,,,a,0,0

ALLSEL

NUMMRG,KP

!Segundo plano

K,200,a/2,h/2,(-sqrt(3)/2)\*h

KGEN,n,200,,,a,0,0

K,220,0,h/2,(-sqrt(3)/2)\*h

L,1,220

L,1,200

LSEL,S,LOC,Y,h/4

LSEL,R,LOC,X,a/4

LGEN,n,ALL,,,a,0,0

ALLSEL

K,240,a,0,0

L,200,240

LSEL,S,LOC,X,3\*a/4

LSEL,R,LOC,Z,(-sqrt(3)/4)\*h

LGEN,n,ALL,,,a,0,0

ALLSEL

NUMMRG,KP

!Tercer plano

K,300,a/2,h,0

KGEN,n,300,,,a,0,0

K,310,0,h,0

K,320,0,h/2,(-sqrt(3)/2)\*h

L,300,320

L,310,320

LSEL,S,LOC,Y,3\*h/4

LSEL,R,LOC,X,a/4

LGEN,n,ALL,,,a,0,0

ALLSEL

K,340,a,h/2,(-sqrt(3)/2)\*h

L,300,340

LSEL,S,LOC,Y,3\*h/4

LSEL,R,LOC,X,3\*a/4

LGEN,n,ALL,,,a,0,0

ALLSEL

NUMMRG,KP

!Keypoints para orientar los montantes

K,110,0,3\*h/4,(-sqrt(3)/4)\*h

!-----

!Elemento

!-----

ET,1,BEAM188

!KEYOPT,1,1,1 !!! comentar si se usa la  
version superior a ANSYS-13

!-----

```

!Material
!-----
MP,EX,1,210 !unidades en kN y mm2
MP,PRXY,1,0.3
MP,DENS,1,7850e-11

!-----
!Geometria de las secciones
!-----

SECTYPE,1,BEAM,CTUBE !cordones
SECDATA,90,100,20

SECTYPE,2,BEAM,CTUBE !enlaces
diagonales
SECDATA,27.5,30,20

SECTYPE,3,BEAM,I !enlaces montantes
SECDATA,46,46,80,5.2,5.2,3.8

SECTYPE,4,BEAM,ASEC,,0 !elemento
rigido para el extremo
SECDATA,91e2*1e6, 8091e4*1e6,,
2843e4*1e6,295.4e9*1e6,76.57e4*1e6,,,,,220,
220

!-----
!Mallado
!-----

!Cordones

LSEL,S,LOC,Z,0
LSEL,U,LOC,Y,h/2

LSEL,A,LOC,Z,(-sqrt(3)/2)*h
LATT,1,,1,,,1
LESIZE,ALL,,10
LMESH,ALL

!Enlaces

!Diagonales

LSEL,S,LOC,Z,(-sqrt(3)/4)*h
LSEL,A,LOC,Y,h/2
LSEL,U,LOC,Z,(-sqrt(3)/2)*h
LSEL,U,LOC,X,0
LATT,1,,1,,,2 !mallado con BEAM
LESIZE,ALL,,8
LMESH,ALL

!Montantes

LSEL,S,,,25 !creamos y mallamos los
montantes
LSEL,A,,,17
LGEN,(n+1),ALL,,,a,0,0
LSEL,U,LOC,X,0
LSEL,U,LOC,X,L
LATT,1,,1,,1,,3 !mallado con BEAM
LESIZE,ALL,,8
LMESH,ALL

LSEL,S,,,10
LGEN,(n+1),ALL,,,a,0,0
LSEL,U,LOC,X,0
LSEL,U,LOC,X,L
LATT,1,,1,,110,,3 !mallado con BEAM

```

```

LESIZE,ALL,,8
LMESH,ALL

!Elemento en el extremo para aplicar la carga

LSEL,S,LOC,X,L
LSEL,A,LOC,X,0
LATT,1,,1,,,4
LESIZE,ALL,,2
LMESH,ALL

ALLSEL
NUMMRG,NODES

!Ligaduras

N,400,L,h/2,(-sqrt(3)/6)*h
NSEL,S,LOC,X,L
E,400,53
E,400,84
E,400,22
CERIG,400,ALL,ALL
ALLSEL

N,420,0,h/2,(-sqrt(3)/6)*h
NSEL,S,LOC,X,0
E,420,63
E,420,32
E,420,1
CERIG,420,ALL,ALL
ALLSEL

!-----
!Cargas
!-----

F,400,FX,-1
F,400,MZ,e0 !momento que impone la
imperfeccion inicial

!-----
!Condiciones de contorno
!-----

D,420,ALL,0 !empotramiento en la base

/SOLU
PSTRES,on
SOLVE
FINISH

!-----
!ANALISIS DE PANDEO
!-----

/SOLU
ANTYPE,1
BUCOPT,LANB,10,0,0,CENTER

/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH

/POST1
SET,LIST
SET,FIRST

PLDISP,1 !mostramos el primer modo de
pandeo

```

- Código del modelo del cuarto caso: soporte empotrado-libre, triangulado en K, con un plano de enlace y un cordón con el doble de área del otro. En concreto, para 8 módulos y una separación  $h_0 = 0.80$  m.

```

FINISH                                K,100,a/2,0,0
/CLEAR                                KGEN,n,100,,,a,0,0

!Cambiamos el color de fondo a blanco K,120,0,0,-h
/RGB,INDEX,100,100,100, 0            L,1,120
/RGB,INDEX, 80, 80, 80,13           L,120,100
/RGB,INDEX, 60, 60, 60,14
/RGB,INDEX, 0, 0, 0,15              LSEL,S,LOC,X,a/4
                                      LGEN,n,ALL,,,a,0,0

/Prep7                                ALLSEL

!-----                                K,140,a,0,-h
!Geometria                            L,100,140
!-----

                                      LSEL,S,LOC,X,3*a/4
n=8 !numero de puntos de enlace      LGEN,n,ALL,,,a,0,0
                                      ALLSEL

L=10000
a=L/n                                 NUMMRG,KP
h0=0.08*L !separacion entre cordones
h=(sqrt(3)/2)*h0                     !-----
e0=L/500                              !Elemento
                                      !-----

K,1,0,0,0
K,2,a,0,0                             ET,1,BEAM188
L,1,2                                  !Material
LGEN,n,1,,,a,0,0
LGEN,2,ALL,,,0,0,-h                 MP,EX,1,210 !unidades en kN y mm2
                                      MP,PRXY,1,0.3
!Primer plano de enlace              MP,DENS,1,7850e-11

```

```

!-----
!Geometria de las secciones
!-----

SECTYPE,1,BEAM,CTUBE !cordones
SECDATA,90,100,20

SECTYPE,2,BEAM,CTUBE !cordon con área
doble
SECDATA,sqrt(2)*90,sqrt(2)*100,20

SECTYPE,3,BEAM,CTUBE !enlaces
diagonales
SECDATA,27.5,30,20

SECTYPE,4,BEAM,I !enlaces montantes
SECDATA,46,46,80,5.2,5.2,3.8

SECTYPE,5,BEAM,ASEC,,0 !elemento
rigido para el extremo
SECDATA,91e2*1e6, 8091e4*1e6,,
2843e4*1e6,295.4e9*1e6,76.57e4*1e6,,,,,220,
220

!-----
!Mallado
!-----

!Cordones

LSEL,S,LOC,Z,0
LATT,1,,1,,,,,2
LESIZE,ALL,,10
LMESH,ALL

LSEL,S,LOC,Z,-h

LATT,1,,1,,,,,1
LESIZE,ALL,,10
LMESH,ALL

!Enlaces

!Diagonales

LSEL,S,LOC,Z,-h/2
LSEL,U,LOC,X,0
LATT,1,,1,,,,,3 !mallado con BEAM
LESIZE,ALL,,8
LMESH,ALL

!Montantes

LSEL,S,,,17 !creamos y mallamos los
montantes
LGEN,(n+1),ALL,,,a,0,0
LSEL,U,LOC,X,0
LSEL,U,LOC,X,L
LATT,1,,1,,1,,4 !mallado con BEAM
LESIZE,ALL,,8
LMESH,ALL

!Elemento en el extremo para aplicar la carga

LSEL,S,LOC,X,L
LSEL,A,LOC,X,0
LATT,1,,1,,,,,5
LESIZE,ALL,,2
LMESH,ALL

ALLSEL

```

```

NUMMRG,NODES                                !D,407,UY,0
                                              !D,407,UZ,0
!Ligaduras                                    !D,407,ROTX,0

N,406,L,0,-h/3                               D,407,ALL,0 !empotramiento en la base
E,406,72
E,406,153                                     /SOLU
NSEL,S,LOC,X,L                               PSTRES,on
CERIG,406,ALL,ALL                           SOLVE
ALLSEL                                       FINISH

N,407,0,0,-h/3                               !-----
E,407,1                                       !ANALISIS DE PANDEO
E,407,82                                       !-----
NSEL,S,LOC,X,0
CERIG,407,ALL,ALL                           /SOLU
ALLSEL                                       ANTYPE,1
                                              BUCOPT,LANB,10,0,0,CENTER
!-----                                       /STATUS,SOLU
!Cargas                                       SOLVE
!-----                                       FINISH

F,406,FX,-1                                  /POST1
F,406,MY,-e0                                  SET,LIST
                                              SET,FIRST
!-----                                       PLDISP,1 !mostramos el primer modo de
!Condiciones de contorno                    pandeo
!-----

!D,406,UY,0 !articulacion en la cabeza
!D,406,UZ,0
!D,406,ROTX,0

!D,407,UX,0 !articulacion en la base

```