La teoría de juegos como herramienta para problemas de reparto.

Amparo M. Mármol Conde
Dpto. Economía Aplicada III y IMUS
Universidad de Sevilla.

Málaga, 20 de Mayo 2014

Contenidos

Sobre la teoría de juegos.

1. Juegos cooperativos de utilidad transferible.
2. Conceptos de solución.
   2.1 El núcleo.
   2.2 El valor de Shapley.
   2.3 El nucleolo.
3. Aplicaciones.

La teoría de juegos estudia situaciones de decisión interactiva caracterizadas por:

- Un conjunto de agentes.
- Cada agente tiene que adoptar una decisión.
- El resultado depende de las decisiones de todos los agentes.
- Cada agente tiene sus propias preferencias sobre el conjunto de resultados.

La Teoría de Juegos

La teoría de juegos estudia situaciones de decisión interactiva caracterizadas por:

- Un conjunto de agentes.
- Cada agente tiene que adoptar una decisión.
- El resultado depende de las decisiones de todos los agentes.
- Cada agente tiene sus propias preferencias sobre el conjunto de resultados.

En palabras de Aumann (2005)

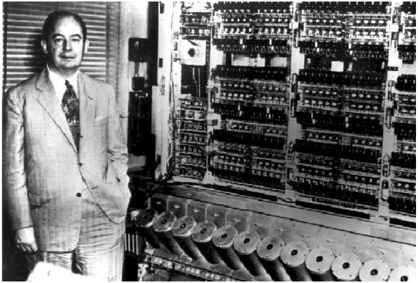
Game theory is optimal decision making in the presence of others with different objectives.

Modelos no cooperativos y modelos cooperativos

- La teoría de juegos **no cooperativos** supone que todos los elementos del juego y todas las posibilidades de acción se pueden describir con precisión e incluirse formalmente en el modelo. Se consideran estrategias y pagos. Se supone que los agentes adoptan las estrategias que maximizan sus pagos individuales.
- La teoría de juegos **cooperativos** supone que los agentes pueden adoptar acuerdos vinculantes. Considera coaliciones y asignaciones. Supone que los grupos de agentes asignan los beneficios derivados de la cooperación según distintas nociones de justicia y equidad.
  - Juegos en forma coalicional
    - **Juegos de utilidad transferible** (Juegos TU).
    - Juegos de utilidad no transferible (Juegos NTU).
  - Juegos de negociación (son de utilidad no transferible).

Orígenes y desarrollo

- Precursor: Equilibrio de Cournot (1838).
- Primer resultado importante: Teorema Minimax de von Neumann (1928).
- Trabajo seminal: "The Theory of Games and Economic Behavior" von Neumann y Morgenstern (1944).



John Nash

- Equilibrio de Nash (1950).
- Solución de negociación de Nash (1950):

Orígenes y desarrollo

John Nash

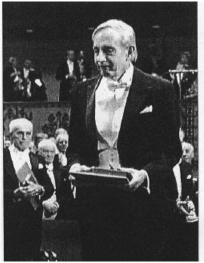
- Equilibrio de Nash (1950).
- Solución de negociación de Nash (1950):

> One states as axioms several properties that would seem natural for the solution to have and then one discovers that the axioms actually determine the solution uniquely.

- Implementación de soluciones cooperativas (1953).

Orígenes y desarrollo

John Nash



- Equilibrio de Nash (1950).
- Solución de negociación de Nash (1950):

> One states as axioms several properties that would seem natural for the solution to have and then one discovers that the axioms actually determine the solution uniquely.

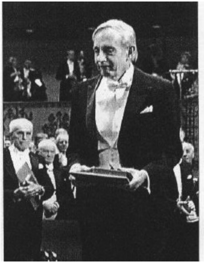
- Implementación de soluciones cooperativas (1953).

John Nash

- Equilibrio de Nash (1950).
- Solución de negociación de Nash (1950):

> One states as axioms several properties that would seem natural for the solution to have and then one discovers that the axioms actually determine the solution uniquely.

- Implementación de soluciones cooperativas (1953).



Premios Nobel

- **Nash, Harsanyi, Selten (1994):** Por sus análisis pioneros del equilibrio en la teoría de los juegos no cooperativos.
- **Aumann, Schelling (2005):**

  Por sus aportaciones a la comprensión de los conflictos y la cooperación por medio del análisis de la Teoría de Juegos.
- **Hurwicz, Maskin, Myerson (2007):**

  Por sentar las bases de la teoría del diseño de los mecanismos.
- **Roth, Shapley (2012):**

  Por su trabajo en la teoría de las asignaciones estables y el diseño de mercado.

1. Juegos cooperativos de utilidad transferible

Un proyecto conjunto

Ana, Berta, Carlos, David y Elena

Ana, Berta, Carlos, David y Elena, deciden asociarse para montar un negocio. Cada uno puede aportar a la empresa ciertas habilidades y un determinado capital. Después de estudiar la situación, llegan a la conclusión de que podrían obtener un beneficio anual de 100(en miles de euros) que tendría que repartirse entre todos.

Un proyecto conjunto

Ana, Berta, Carlos, David y Elena

Ana, Berta, Carlos, David y Elena, deciden asociarse para montar un negocio. Cada uno puede aportar a la empresa ciertas habilidades y un determinado capital. Después de estudiar la situación, llegan a la conclusión de que podrían obtener un beneficio anual de 100(en miles de euros) que tendría que repartirse entre todos.

- En principio, un reparto de 20 cada uno podría parecer razonable.
- David y Elena han hecho sus cálculos, y solos obtendrían un beneficio de 45.
- Ana, Berta y Carlos, también han hecho sus cuentas, y juntos sólo obtendrían 25, por lo que les interesa mantener a David y a Elena en el grupo. Le ofrecen a David y Elena 46, y se repartirían los 54 restantes.
- Carlos, David y Elena analizan su situación: podrían obtener 70 ($> 46 + 18$). Ana y Berta no tienen bastante capital para empezar por su cuenta, deciden cederle 71 a Carlos, David y Elena, y dividir el resto entre las dos.

Un proyecto conjunto

- Si Carlos, David y Elena también deciden dividir los 71 a partes iguales, resulta que Berta, David y Elena pueden obtener conjuntamente un beneficio de 65, que es más que lo que el último reparto les asigna ($65 > 2 \times 71/3 + 29/2$).
- ....

Mientras tanto están perdiendo la oportunidad del negocio, pues ninguno de ellos quiere actuar sin saber antes cómo se van a repartir los beneficios.

Un proyecto conjunto

- Si Carlos, David y Elena también deciden dividir los 71 a partes iguales, resulta que Berta, David y Elena pueden obtener conjuntamente un beneficio de 65, que es más que lo que el último reparto les asigna ($65 > 2 \times 71/3 + 29/2$).
- ....

Mientras tanto están perdiendo la oportunidad del negocio, pues ninguno de ellos quiere actuar sin saber antes cómo se van a repartir los beneficios.

La **teoría de juegos cooperativos** proporciona herramientas para analizar de manera sistemática la situación teniendo en cuenta el **beneficio potencial de todas las coaliciones**.

La siguiente tabla representa el juego completo del ejemplo anterior.

S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)
{1}	0	{1,5}	20	{1,2,4}	35	{3,4,5}	70
{2}	0	{2,3}	15	{1,2,5}	40	{1,2,3,4}	60
{3}	0	{2,4}	25	{1,3,4}	40	{1,2,3,5}	65
{4}	5	{2,5}	30	{1,3,5}	45	{1,2,4,5}	75
{5}	10	{3,4}	30	{1,4,5}	55	{1,3,4,5}	80
{1,2}	0	{3,5}	35	{2,3,4}	50	{2,3,4,5}	90
{1,3}	5	{4,5}	45	{2,3,5}	55	{1,2,3,4,5}	100
{1,4}	15	{1,2,3}	25	{2,4,5}	65	$\emptyset$	0

Juegos de Utilidad Transferible

Definición

Un **juego cooperativo de utilidad transferible** se representa por un par (N, v):

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores,
- v es la función característica, asocia a cada **coalición** $S \subseteq N$ un número real $v(S)$, con $v(\emptyset) = 0$.

$v(S)$ es el valor de la coalición S, representa lo que la coalición S puede conseguir sin ayuda de los jugadores fuera de la coalición. A $v(N)$ se le denomina **valor del juego**.

Juegos de Utilidad Transferible

Definición

Un **juego cooperativo de utilidad transferible** se representa por un par (N, v):

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores,
- v es la función característica, asocia a cada **coalición** $S \subseteq N$ un número real $v(S)$, con $v(\emptyset) = 0$.

$v(S)$ es el valor de la coalición S, representa lo que la coalición S puede conseguir sin ayuda de los jugadores fuera de la coalición. A $v(N)$ se le denomina **valor del juego**.

- (N, v) es **superaditivo** si, para $S, T \subseteq N$ tales que $S \cap T = \emptyset$ se verifica:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

- (N, c) es **subaditivo** si, para $S, T \subseteq N$ tales que $S \cap T = \emptyset$, se verifica:

$$c(S \cup T) \leq c(S) + c(T).$$

Repartos

Una de las cuestiones fundamentales es el reparto del resultado de la cooperación.

Definición

Un **reparto** del juego (N, v) es un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \geq 0 \ \forall i$, tal que:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N).$$

$I(N, v)$ denota el conjunto de repartos del juego (N, v).

x_i representa la parte que se le asigna en el reparto al agente i.

Ejemplos

El juego del guante

Tres jugadores desean repartir los beneficios de la venta de un par de guantes. El jugador 1 tiene un guante de la mano izquierda y los jugadores dos y tres tienen cada uno un guante de la mano derecha. El par de guantes se vende por 100 euros.

Ejemplos

El juego del guante

Tres jugadores desean repartir los beneficios de la venta de un par de guantes. El jugador 1 tiene un guante de la mano izquierda y los jugadores dos y tres tienen cada uno un guante de la mano derecha. El par de guantes se vende por 100 euros.
La situación puede representarse como un juego TU, (N, v):
donde $N = \{1, 2, 3\}$,
$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0$, y $v(12) = v(13) = v(N) = 100$.

Ejemplos

El juego del guante

Tres jugadores desean repartir los beneficios de la venta de un par de guantes. El jugador 1 tiene un guante de la mano izquierda y los jugadores dos y tres tienen cada uno un guante de la mano derecha. El par de guantes se vende por 100 euros.

La situación puede representarse como un juego TU, (N, v):

donde $N = \{1, 2, 3\}$,

$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0$, y $v(12) = v(13) = v(N) = 100$.

Reparto del millón

Un hombre rico muere y le deja un millón de euros a sus tres sobrinos, con la condición de que al menos dos de ellos deben de estar de acuerdo en cómo hacer el reparto entre los tres. En otro caso el millón de euros será donado a una institución.

Ejemplos

El juego del guante

Tres jugadores desean repartir los beneficios de la venta de un par de guantes. El jugador 1 tiene un guante de la mano izquierda y los jugadores dos y tres tienen cada uno un guante de la mano derecha. El par de guantes se vende por 100 euros.
La situación puede representarse como un juego TU, (N, v):
donde $N = \{1, 2, 3\}$,
$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0$, y $v(12) = v(13) = v(N) = 100$.

Reparto del millón

Un hombre rico muere y le deja un millón de euros a sus tres sobrinos, con la condición de que al menos dos de ellos deben de estar de acuerdo en cómo hacer el reparto entre los tres. En otro caso el millón de euros será donado a una institución.
La situación puede representarse como un juego TU, (N, v):
donde $N = \{1, 2, 3\}$,
$v(1) = v(2) = v(3) = 0$, y $v(12) = v(13) = v(23) = v(N) = 1$.

La cuestión fundamental es la selección para cada juego, de **un reparto o de un conjunto de repartos que sea admisible para todos los jugadores**.

Soluciones y Valores

- Una **solución** para juegos de utilidad transferible es una aplicación, φ, que a cada juego (N, v) le asigna un subconjunto de repartos: $\varphi(N, v) \subseteq I(N, v)$.
- Un **valor** es una solución que a cada juego (N, v) le asigna un único reparto: $\varphi(N, v) \in I(N, v)$.

Conceptos de solución

Los **conceptos de solución** se basan en dos ideas fundamentales.

- Soluciones basadas en nociones de estabilidad:
  - **El Núcleo** (Gillies (1953))
  - Conjuntos estables (von Neumann and Morgenstern (1944))
  - Conjunto de negociación (Aumann and Maschler (1964)).
- Soluciones basadas en nociones de justicia y equidad. Proponen repartos que representan compromisos justos para los jugadores.
  - **El valor de Shapley** (Shapley (1953))
  - **El nucleolo** (Schmeidler (1969))
  - El valor de Tijs(Tijs (1981)).

El Núcleo

Estabilidad:

Ningún jugador, ni ninguna coalición tiene incentivo para abandonar el juego pues lo que obtiene con el reparto es al menos lo que puede garantizarse por sí mismo.

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\,,\ \forall\, S \subset N \ (\mathit{Racionalidad\ colectiva}).$$

El **núcleo** del juego (N, v) se define como

$$C(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\,,\ \forall\, S \subset N\}.$$

El Núcleo

Estabilidad:

Ningún jugador, ni ninguna coalición tiene incentivo para abandonar el juego pues lo que obtiene con el reparto es al menos lo que puede garantizarse por sí mismo.

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\,,\ \forall\, S \subset N\ (\mathit{Racionalidad\ colectiva}).$$

El **núcleo** del juego (N, v) se define como

$$C(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\,,\ \forall\, S \subset N\}.$$

El núcleo de un juego es un **poliedro** (compacto y convexo). Puede ser vacío, tener un único elemento o un número infinito de elementos.

El Núcleo del Juego del Guante

$$C(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^3_+ : x_2 + x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 \geq 100,\ x_1 + x_3 \geq 100, x_1 + x_2 + x_3 = 100\}$$

El Núcleo del Juego del Guante

$$C(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^3_+ : \ x_2+x_3 \geq 0, \ x_1+x_2 \geq 100, \ x_1+x_3 \geq 100, x_1+x_2+x_3 = 100\}$$

$$C(N,v) = \{(100,0,0)\}$$

El Núcleo

El Núcleo del Juego del Guante

$$C(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^3_+ : \; x_2+x_3 \geq 0, \; x_1+x_2 \geq 100, \; x_1+x_3 \geq 100, x_1+x_2+x_3 = 100\}$$

$$C(N,v) = \{(100,0,0)\}$$

El Núcleo del Juego Reparto del Millón

$$C(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^3_+ : \; x_2+x_3 \geq 1, \; x_1+x_2 \geq 1, \; x_1+x_3 \geq 1, x_1+x_2+x_3 = 1\}$$

El Núcleo

El Núcleo del Juego del Guante

$$C(N,v)=\{x\in \mathbb{R}^3_+ :\ x_2+x_3\geq 0,\ x_1+x_2\geq 100,\ x_1+x_3\geq 100, x_1+x_2+x_3=100\}$$

$$C(N,v)=\{(100,0,0)\}$$

El Núcleo del Juego Reparto del Millón

$$C(N,v)=\{x\in \mathbb{R}^3_+ :\ x_2+x_3\geq 1,\ x_1+x_2\geq 1,\ x_1+x_3\geq 1, x_1+x_2+x_3=1\}$$

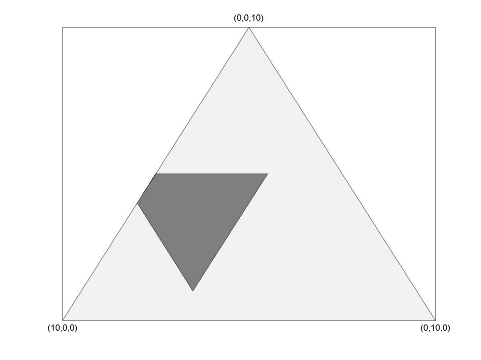
$$C(N,v)=\{\emptyset\}$$

El Núcleo

Otro Juego

$v(\{1\}) = 0,\ v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$
$v(\{1,2\}) = 5,\ v(\{1,3\}) = 7,\ v(\{2,3\}) = 4,$
$v(\{1,2,3\}) = 10.$

$$C(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^3_+ : \ x_1 + x_2 \geq 5,\ x_1 + x_3 \geq 7,\ x_2 + x_3 \geq 4, x_1 + x_2 + x_3 = 10\}$$



El valor de Shapley (1953)

Justicia:

Cada jugador debe recibir un pago en función de su aportación global al juego.

Los jugadores pueden llegar al juego en orden aleatorio, aportando una cantidad distinta a la coalición en cada caso, su contribución marginal a dicha coalición.

Valor de Shapley de un jugador: media del valor de las aportaciones en todos los posibles órdenes de llegada de los jugadores a las coaliciones.

Juego del guante

	1	2	3
123	0	100	0
213	100	0	0
132	0	0	100
231	100	0	0
312	100	0	0
321	100	0	0
	200/3	100/6	100/6

Reparto del millón

	1	2	3
123	0	1	0
213	1	0	0
132	0	0	1
231	0	0	1
312	1	0	0
321	0	1	0
	1/3	1/3	1/3

El valor de Shapley (1953)

Definición

El valor de Shapley para el jugador i en el juego (N, v) es

$$\phi_i(v) = \sum_{S: i \in S} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S - \{i\}))$$

$|S|$: número de elementos de la coalición S.

En general, el reparto que proporciona el valor de Shapley no tiene por qué pertenecer al núcleo.

Caracterización axiomática del valor de Shapley

$i \in N$ es un **jugador nulo** en el juego (N, v) si para todas las coaliciones $S \subset N$ se cumple que $v(S \cup \{i\}) = v(S)$.

Dos jugadores $i, j \in N$ son **intercambiables** si para toda coalición $S \subset N \setminus \{i, j\}$, se cumple que $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

Axiomas

- **Eficiencia:** Un valor φ cumple eficiencia si $\sum_i \varphi_i(v) = v(N)$.
- **Propiedad del jugador nulo:** Una valor φ cumple la propiedad de jugador nulo si para todo jugador nulo $i \in N$, $\varphi_i(v) = 0$.
- **Simetría:** Un valor φ cumple simetría si para todo par de jugadores intercambiables $i, j \in N$, $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$.
- **Aditividad:** Un valor φ cumple aditividad si para todo par de juegos (N, v), (N, w), se cumple $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$.

Caracterización axiomática del valor de Shapley

$i \in N$ es un **jugador nulo** en el juego (N, v) si para todas las coaliciones $S \subset N$ se cumple que $v(S \cup \{i\}) = v(S)$.

Dos jugadores $i, j \in N$ son **intercambiables** si para toda coalición $S \subset N \setminus \{i, j\}$, se cumple que $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

Axiomas

- **Eficiencia:** Un valor φ cumple eficiencia si $\sum_i \varphi_i(v) = v(N)$.
- **Propiedad del jugador nulo:** Una valor φ cumple la propiedad de jugador nulo si para todo jugador nulo $i \in N$, $\varphi_i(v) = 0$.
- **Simetría:** Un valor φ cumple simetría si para todo par de jugadores intercambiables $i, j \in N$, $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$.
- **Aditividad:** Un valor φ cumple aditividad si para todo par de juegos (N, v), (N, w), se cumple $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$.

Teorema (Shapley, 1953)

El único valor que cumple Eficiencia, Propiedad del jugador nulo, Simetría y Aditividad es el valor de Shapley.

El nucleolo (Schmeidler, 1969)

Solución socialmente justa:

El jugador o coalición más descontento con el reparto no puede estar mejor, el segundo jugador o grupo más descontento, también está lo mejor posible, y así sucesivamente.

El nucleolo (Schmeidler, 1969)

Solución socialmente justa:

El jugador o coalición más descontento con el reparto no puede estar mejor, el segundo jugador o grupo más descontento, también está lo mejor posible, y así sucesivamente.

El **exceso de la coalición** $S \subseteq N$ con respecto al reparto $x \in I(N, v)$ se define como:

$$e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i.$$

Es una medida del grado de descontento de la coalición con el reparto.

Se busca minimizar *conjuntamente* **los descontentos (excesos) de todas las coaliciones**.

Orden lexicográfico:

$x \in \mathbb{R}^m$ es lexicográficamente menor que $y \in \mathbb{R}^m$ ($x \prec_L y$), si $x_h < y_h$ para la primera componente $h \in \{1, 2, \ldots, m\}$ en que x e y son distintos.
$x \preceq_L y$ si $x = y$ ó $x \prec_L y$.

$x = (1, 2, 7, 4, -20) \prec_L (1, 3, 7, -4, 4) = y$

El nucleolo (Schmeidler, 1969)

Vector de excesos en orden decreciente: $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^N}$.
$\theta(x) = (e(S_1, x), \ldots, e(S_{2^n-2}, x))$: contiene los excesos de la coaliciones.

Definición

El **nucleolo** del juego, $\eta(N, v)$, es el reparto que minimiza lexicográficamente el vector de excesos ordenado.

$$\eta(N, v) = \{x \in I(N, v) \; : \; \theta(x) \preceq_L \theta(y), \, \forall \, y \in I(N, v)\}.$$

Debido a la convexidad y compacidad del conjunto de repartos **el nucleolo del juego se reduce a un único reparto que pertenece al núcleo si éste es no vacío**.

El nucleolo

El nucleolo del juego del guante

El **nucleolo**: $(100, 0, 0)$.
Vector de excesos para este reparto es: $(-100, 0, 0, 0, 0, 0)$.
Por tanto $\theta(x) = (0, 0, 0, 0, 0, -100)$ y el máximo exceso de las coaliciones es 0.

El **valor de Shapley**: $(4/6, 1/6, 1/6)$.
Los excesos de las coaliciones son: $(-4/6, -1/6, -1/6, 1/6, 1/6, -2/6)$,
$\theta(y) = (1/6, 1/6, -1/6, -1/6, -2/6, -4/6)$.
En el valor de Shapley las coaliciones más descontentas, $\{1, 2\}$ y $\{1, 3\}$, pierden $1/6$ con respecto a lo que podrían conseguir por sí mismas.

El nucleolo

El nucleolo del juego del guante

El **nucleolo**: $(100, 0, 0)$.
Vector de excesos para este reparto es: $(-100, 0, 0, 0, 0, 0)$.
Por tanto $\theta(x) = (0, 0, 0, 0, 0, -100)$ y el máximo exceso de las coaliciones es 0.

El **valor de Shapley**: $(4/6, 1/6, 1/6)$.
Los excesos de las coaliciones son: $(-4/6, -1/6, -1/6, 1/6, 1/6, -2/6)$,
$\theta(y) = (1/6, 1/6, -1/6, -1/6, -2/6, -4/6)$.
En el valor de Shapley las coaliciones más descontentas, $\{1, 2\}$ y $\{1, 3\}$, pierden $1/6$ con respecto a lo que podrían conseguir por sí mismas.

El nucleolo del reparto del millón

El **nucleolo**: $(1/3, 1/3, 1/3)$.
Los excesos son: $(-1/3, -1/3, -1/3, 1/3, 1/3, 1/3)$.
$\theta(x) = (1/3, 1/3, 1/3, -1/3, -1/3, -1/3)$
Las coaliciones más descontentas son las coaliciones de dos jugadores, su exceso es: $1 - 2/3 = 1/3$.

Para calcular el nucleolo(Maschler, Peleg y Shapley, 1979)[1]

- Se resuelve, en primer lugar, el problema de minimización del máximo exceso:

$$\left.\begin{array}{ll} min & \alpha_1 \\ s.a: & v(S) - \sum_{i \in S} x_i \leq \alpha_1\,,\ \forall\, S \subset N, S \neq \emptyset \\ & \sum_{i \in N} x_i = v(N) \\ & x_i \geq 0\,,\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{array}\right\}. \tag{1}$$

- Si la solución óptima, (x^*, α_1^*), del problema es única, x^* es el nucleolo;
- En otro caso, las restricciones, $v(\hat{S}) - \sum_{i \in \hat{S}} x_i \leq \alpha_1^*$, para algunas coaliciones $\hat{S}$, en las que dichas restricciones son activas para cualquier solución óptima del problema (1), se sustituyen por igualdades, $v(\hat{S}) - \sum_{i \in \hat{S}} x_i = \alpha_1^*$, y se resuelve el problema resultante.
- Tras un número finito de iteraciones, se obtiene el nucleolo del juego.

Puede probarse que existen coaliciones que alcanzan el máximo exceso en todas las soluciones óptimas del problema. Son aquellas con variables duales no nulas.

[1] aplicando el algoritmo de Kopelowitz(1967).

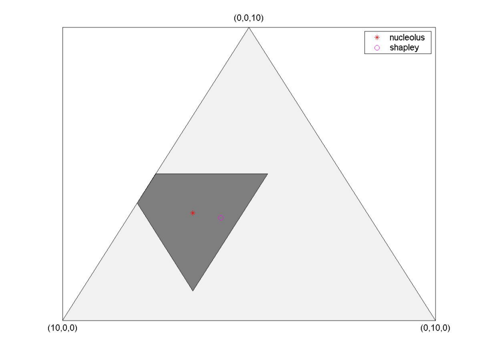
PARA LOS CÁLCULOS, EL TUGlab
http://193.146.47.208/TUGlabWEB

Con TUGlab

Otro Juego

$v(\{1\}) = 0,\ v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$
$v(\{1,2\}) = 5,\ v(\{1,3\}) = 7,\ v(\{2,3\}) = 4,$
$v(\{1,2,3\}) = 10.$

$$C(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^3_+ :\ x_1 + x_2 \geq 5,\ x_1 + x_3 \geq 7,\ x_2 + x_3 \geq 4, x_1 + x_2 + x_3 = 10\}$$



El profesor visitante. Un juego de costes.

Tres grupos de investigación pertenecientes a las Universidades de Málaga, Sevilla y Oviedo invitan a un profesor americano a impartir un curso de Teoría de Juegos en sus centros respectivos. Para minimizar el coste de la visita deciden coordinar los cursos y compartir los gastos.

Se trata de proponer **repartos del coste total del viaje**.

El coste estimado de visitar las posibles coaliciones es:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c(S)$	1500	1600	1900	1600	2900	3000	3000

(N, c) es un **juego de costes**. Es subaditivo.

$$C(N,c) = \{x \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 \leq 1500,\ x_2 \leq 1600,\ x_3 \leq 1900,\ x_1 + x_2 \leq 1600,$$

$$x_1 + x_3 \leq 2900,\ x_2 + x_3 \leq 3000,\ x_1 + x_2 + x_3 = 3000\,\}.$$

Puede tratarse como un **juego de ahorro** (N, v), definiendo para $S \subseteq N$,

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S).$$

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c(S)$	1500	1600	1900	1600	2900	3000	3000
$v(S)$	0	0	0	1500	500	500	2000

El profesor visitante. Los repartos.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
$c(S)$	1500	1600	1900	1600	2900	3000	3000
$v(S)$	0	0	0	1500	500	500	2000

	$\phi(N,v)$	$\phi(N,c)$	$\nu(N,v)$	$\nu(N,c)$
1	$833'\widehat{33}$	$666'\widehat{66}$	875	625
2	$833'\widehat{33}$	$766'\widehat{66}$	875	725
3	$333'\widehat{33}$	$1566'\widehat{66}$	250	1650

Bibliografía y lecturas

- Casas B., Fiestras M.G., García I., González J. (2012) *Introducción a la Teoría de Juegos*. Universidad de Santiago de Compostela.
- González J., García, Fiestras M.G.(2010) *An Introductory Course on Mathematical game Theory*. American Mathematical Society.
- Mirás M.A., Sánchez E.(2008) *Juegos Cooperativos con Utilidad Transferible usando MATLAB: TUGlab*. Servizo de Publicacions Universidade de Vigo.
- Pérez J., Jimeno J.L., Cerdá E.(2013) *Teoría de Juegos. 2ª Edición*. Garceta. Grupo Editorial.
- Poundstone W. (1995) *El Dilema del Prisionero*. Alianza Editorial.
- Thomas L.C. (2003) *Games, Theory and Applications*. Dover Publications, Inc.