UNIVERZA V LJUBLJANI
PEDAGOŠKA FAKULTETA
Poučevanje, predmetno poučevanje

NINA ŠERE

NEODVISNOSTNO ŠTEVILO GRAFA

MAGISTRSKO DELO

LJUBLJANA, 2020

UNIVERZA V LJUBLJANI
PEDAGOŠKA FAKULTETA
Poučevanje, predmetno poučevanje

NINA ŠERE

NEODVISNOSTNO ŠTEVILO GRAFA

MAGISTRSKO DELO

Mentor: izr. prof. dr. PRIMOŽ ŠPARL

LJUBLJANA, 2020

Najprej bi se rada zahvalila svojemu mentorju, izr. prof. dr. Primožu Šparlu, za njegov čas, potrpežljivost in strokovno pomoč, ki mi jo je namenil tekom pisanja tega magistrskega dela.

Posebna zahvala gre fantu Tadeju, ki tekom pisanja tega dela, ni izgubljal preveč živcev in mi nudil veliko oporo. Hvala.

Zahvaljujem se tudi svojim staršem, sestri Lari, teti Dobrili, babici Gordani in celotni družini, ker ste vedno verjeli vame.

Čisto na koncu, pa hvala tebi dedi, ki si me naučil kako pomembno je, da v življenju vedno vztrajamo do konca. To magistrsko delo posvečam tebi.

Povzetek

V magistrskem delu se ukvarjamo s problemom določanja neodvisnostnega števila grafa. S pomočjo prevedbe problema $3-SAT$ na pripadajoči odločitveni problem o obstoju neodvisnostne množice dane velikosti najprej pokažemo, da ga uvrščamo med tako imenovane NP-polne probleme. Nato se osredotočimo na določanje neodvisnostnega števila za različne grafe. Določimo ga za nekatere dobro znane družine grafov, kot so polni grafi, polni večdelni grafi, cikli, hiperkocke itd. Posvetimo se tudi znani družini posplošenih Petersenovih grafov $GP(n,k)$. Glede na konstrukcijo te družine je jasno, da je zgornja meja neodvisnostnega števila za $GP(n,k)$ največ n, če pa je n liho število, pa celo največ $n-1$. V magistrskem delu raziskujemo, kakšna je prava vrednost neodvisnostnega števila za različne vrednosti parametra k in s tem ugotavljamo, kako dobra (oziroma slaba) je omenjena zgornja meja.

Ključne besede: neodvisnostna množica, neodvisnostno število, NP - polnost, posplošeni Petersenovi grafi

MSC (2010) klasifikacija: 05C69, 68R10, 68Q17

Abstract

In the master's thesis we are dealing with the independence number of a graph. We show, that the well-known problem 3-SAT is reducible to the corresponding decision problem, the so-called independent set problem, which proves that the independent set problem is NP-complete. We then determine the independence number for different graphs, including some very well known infinite families of graphs like complete graphs, multi-partite complete graphs, cycle graphs, hypercube graphs, etc. In the last part of the thesis we focus on the family of generalized Petersen graphs $GP(n, k)$. Based on their construction it is clear, that n is the upper bound for the independence number for $GP(n, k)$. Moreover, if n is odd, the upper bound is $n - 1$. In the master's thesis we determine the exact value of the independence number for different values of parameter k.

Key words: independent set, independence number, NP-completeness, the generalized Petersen graphs

MSC (2010) classification: 05C69, 68R10, 68Q17

Kazalo

Slike

Tabele

Poglavje 1

Uvod

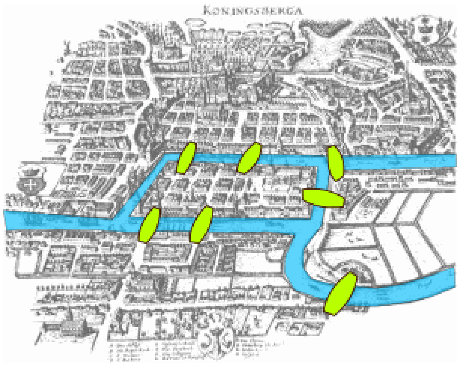
Magistrsko delo pripada zanimivemu področju matematike - teoriji grafov. Čeprav je ta teorija v svoji osnovi dokaj abstraktna, ima lepo lastnost. Na naraven način lahko grafe (strukture, s katerimi se le-ta ukvarja) konkretno upodabljamo, recimo na list papirja. Zagotovo pa v prid privlačnosti tej teoriji govori tudi dejstvo, da se ta dobro povezuje z realnimi problemi, ki jih na prvi pogled ne bi uvrstili na matematično področje.

Oglejmo si konkreten primer. Recimo, da želimo v nekem križišču postaviti semaforje. Smeri, ki jih skozi križišče dopuščamo, so znane. Kar želimo poiskati je minimalno število "zelenih" intervalov, da bomo skozi križišče spustili vse smeri (v teh intervalih), pri čemer smeri, ki se križata, nimata zelene luči ob istem intervalu [15]. Bralca vabimo, da poišče primerno interpretacijo tega problema v jeziku teorije grafov. Namignemo mu lahko, da je povezan z barvanjem vozlišč grafa.

Realne probleme, opisane v matematičnem jeziku, pa pokriva tudi teoretično računalništvo - ukvarja se z algoritmi, ki te probleme rešujejo. V magistrskem delu nekaj pozornosti namenimo tudi vprašanju, kako se le-to povezuje s teorijo grafov (oziroma obratno).

V (diskretni) matematiki je graf diskretna struktura, predstavljena z množico vozlišč in povezav med njimi. Formalno ga definiramo kot urejen par dveh množic, $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$, kjer $V(\Gamma)$ predstavlja neprazno množico vozlišč, $E(\Gamma)$ pa množico povezav [16]. Teorija se je začela razvijati v 18. stoletju, precej stran od današnjega formalnega matematičnega jezika. Njen začetnik je Leonhard Euler, s člankom *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* [17]. V članku je objavil rešitev, za tisti čas aktualnega, problema Königsbergških mostov. Königsberg (danes Kaliningrad) je bilo mesto v takratni Vzhodni Prusiji, razdeljeno na štiri dele in le-te je povezovalo sedem mostov.

Meščani so zaman skušali najti obhod po mestu tako, da bi prečkali vsak most natanko enkrat in se za tem vrnili na začetno točko. Da težava meščanov nima rešitve, je Leonhard Euler dokazal v zgoraj omenjenem članku. Čeprav članek ni napisan v (današnjem) jeziku teorije grafov, lahko med njegovimi idejami in to te-



Slika 1.1: Zemljevid mesta Königsberg in sedem mostov, ki ga povezuje.

Vir slike: [19]

orijo najdemo veliko vzporednic. Zato Leonhard Euler velja za začetnika te teorije [17]. Danes bi rekli, da je Euler v svojem članku dokazal, da lahko v grafu naredimo obhod po vseh povezavah tako, da gremo čez vsako povezavo samo enkrat, natanko tedaj, ko je graf povezan in so vsa njegova vozlišča sode stopnje.

Če problem Königsbergških mostov posplošimo in formalno definiramo, rečemo, da nas zanima, ali ima dan graf Γ Eulerjev obhod. To je samo eno izmed mnogih vprašanj, ki si jih lahko zastavimo, ko študiramo grafe. V tem magistrskem delu nas na primer zanima moč največje neodvisnostne množice v danem grafu. Neodvisnostna množica je množica vozlišč, v kateri nobeni dve vozlišči nista povezani. Največja neodvisnostna množica je tista, ki ima med vsemi neodvisnostnimi množicami največjo velikost. Moč take množice imenujemo neodvisnostno število grafa Γ in ga označimo z $\alpha(\Gamma)$ [16]. Neodvisnostno število podrobneje obravnavamo v Poglavju 3, kjer se (med drugim) ukvarjamo s tem, kako se neodvisnostno število povezuje z drugimi karakteristikami grafa, kot recimo dominacijsko ali klično število. Zanima nas tudi, kakšne so zgornje meje neodvisnostnega števila nekaterih dobro znanih družin grafov in koliko predstavnikov teh družin jo tudi doseže. Pri polnih grafih, ciklih ali zvezdah je to zelo trivialna naloga, spet druge družine zahtevajo nekoliko več razmisleka.

Naslednje poglavje (Poglavje 4) je namenjeno vprašanju, kako težek (v algoritmičnem smislu) je problem določanja neodvisnostnega števila grafa. Ko govorimo o kompleksnosti odločitvenih problemov, običajno največjo pozornost namenimo razlikovanju med tako imenovanima razredoma P in NP, pri čemer je razred P vsebovan v razredu NP. Razred P pokriva probleme, za katere poznamo deterministične algoritme, ki jih rešijo v polinomskem času (glede na "velikost" konkretnega primera oziroma vhodnih podatkov). V njem se nahaja tudi zgoraj omenjena posplošitev Königsbergških mostov na poljubne grafe. Razred NP je razred tistih problemov, za katere poznamo nedeterministične polinomske algoritme. V njem (poleg vseh problemov iz razreda P) najdemo še veliko več problemov, ki jih obravnava teorija grafov. Med bolj znane sodijo recimo obstoj Hamiltonovega cikla v grafu, problem trgovskega potnika, določanje kromatičnega števila grafa, določanje kromatičnega indeksa grafa .... Najpomembnejši problem razreda NP je zagotovo problem izpolnljivosti izjavnih izrazov (angl. Boolean Satisfiability problem - krajše SAT), ki ga je v letu 1971 proučeval Stephen Cook. Dokazal je, da lahko vsak problem, ki se nahaja znotraj NP, v polinomskem času prevedemo na problem SAT, s čimer problem SAT postane tako imenovan NP-poln problem. To je prvi problem, za katerega je bilo dokazano, da je NP-poln. Če torej najdemo deterministični polinomski algoritem, ki bi rešil problem SAT (s čimer bi torej dokazali, da je ta problem v resnici v razredu P), smo našli deterministični polinomski algoritem za poljuben problem iz NP [5, 6]. Z drugimi besedami to pomeni, da je problem SAT vsaj tako zahteven, kot kateri koli drug problem iz razreda NP. Takšnega algoritma do danes še ni našel nihče, vendar to ne dokazuje njegovega neobstoja. Za nas problem SAT ne bo tako pomemben kot njegova poenostavljena različica 3-SAT, za katero je tudi dokazano, da je NP-poln problem. Kaj vse to pomeni za problem določanja neodvisnostnega števila, ki ga tematiziramo v tem magistrskem delu? Če nam uspe najti prevedbo polinomske časovne zahtevnosti problema 3-SAT na problem določanja neodvisnostnega števila grafa (hkrati pa pokažemo, da je naš problem sploh res v razredu NP), s tem pokažemo, da je tudi ta NP-poln.

Zadnje poglavje (Poglavje 5) je najobsežnejše poglavje tega magistrskega dela. Pod drobnogled smo vzeli eno izmed družin grafov, za člane katere je določitev neodvisnostnega števila nekoliko težja naloga. To je družina posplošenih Petersenovih grafov, ki smo jo obravnavali tudi v diplomskem delu [11]. Ni težko pokazati, da je zgornja meja neodvisnostnega števila za to družino največ n (kjer je red obravnavanega grafa $2n$), če pa je n liho število, pa celo največ $n-1$ [4]. Preveriti, koliko predstavnikov to mejo dejansko doseže, in ugotoviti, kakšna je v vseh ostalih primerih prava vrednost neodvisnostnega števila, zahteva nekoliko več dela.

Poglavje 2

Osnovni pojmi

V tem poglavju bomo spoznali ključne pojme in rezultate, pomembne za naše magistrsko delo. Opiramo se na literaturo [7], [11], [14] in [16].

2.1 Teorija grup

Osnovno o grupah

Definicija 2.1. Naj bo G neprazna množica in $\cdot$ notranja operacija na G (to je, za poljubna $g_1, g_2 \in G$ je $g_1 \cdot g_2 \in G$). Tedaj je $(G, \cdot)$ grupa, če velja:

- Operacija $\cdot$ je asociativna, to je, za $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ je $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$,
- V množici G obstaja nevtralni element e, da za $\forall g \in G$ velja $g \cdot e = e \cdot g = g$,
- Vsak $g \in G$ ima inverzni element glede na nevtralni element e, to je: $\forall g \in G : (\exists g^{-1} \in G : g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e)$.

Če dodatno velja še, da je operacija $\cdot$ komutativna, to je, če za $\forall g_1, g_2 \in G$ velja $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$, je grupa $(G, \cdot)$ komutativna. Kadar gre za komutativno grupo, se namesto znaka $\cdot$ običajno uporablja znak $+$, pri inverznem elementu pa namesto g^{-1} pišemo kar $-g$.

V splošnem znak za operacijo opuščamo, torej namesto $g_1 \cdot g_2$ pišemo $g_1 g_2$ in govorimo kar o grupi G namesto o grupi $(G, \cdot)$.

V grupah velja pravilo krajšanja z leve in z desne strani, to je, za poljubne $x, g_1, g_2 \in G$ velja: $xg_1 = xg_2 \Rightarrow g_1 = g_2$ in $g_1 x = g_2 x \Rightarrow g_1 = g_2$.

Definicija 2.2. Naj bo G grupa in $g \in G$. Tedaj je red grupe G, ki ga označimo z $|G|$, enak številu elementov, ki jih G premore. Red elementa g je definiran kot najmanjše naravno število $r(g) = r \in \mathbb{N}$, da je $g^r = e$. Če tak r ne obstaja, ima g neskončen red.

Definicija 2.3. Naj bo $(G, \cdot)$ grupa in $H \subseteq G$ neprazna podmnožica. Če je tudi $(H, \cdot)$ grupa, je H podgrupa grupe G, kar označimo s $H \leq G$.

Dobro znano dejstvo je, da je v končni grupi G neprazna podmnožica H njena podgrupa natanko tedaj, ko je H zaprta za podedovano operacijo.

Definicija 2.4. Naj bo G grupa in $\emptyset \neq S \subseteq G$ poljubna neprazna podmnožica. Tedaj je $\langle S \rangle$ najmanjša podgrupa grupe G, ki vsebuje S. Množico S imenujemo množica generatorjev podgrupe $\langle S \rangle$, podgrupo $\langle S \rangle$ pa imenujemo podgrupa grupe G, generirana s S. Če je G taka grupa, da obstaja $g \in G$, za katerega je $\langle \{g\} \rangle = G$, potem je G ciklična grupa, elementu g pa rečemo generator grupe G.

Nekatere družine grup

Spoznajmo družini grup, pomembni za to magistrsko delo.

Definicija 2.5 (Ciklična grupa $\mathbb{Z}_n$)**.** Ciklična grupa $\mathbb{Z}_n$ je komutativna grupa ($\mathbb{Z}_n$, $+$), kjer je $\mathbb{Z}_n$ množica ostankov pri deljenju z n, seštevamo pa po modulu n. Grupa je reda n, nevtralni element grupe je 0, inverzni element elementa i pa je $n-i$. Vsak $k \in \mathbb{Z}_n$, za katerega je $D(k,n) = 1$, je generator grupe $\mathbb{Z}_n$.

Zgled. V $(\mathbb{Z}_8, +)$ je $r(2) = 4$ in $r(3) = 8$.

Definicija 2.6 (Diedrska grupa D_n)**.** Diedrska grupa $(D_n, \cdot)$, kjer je $n \geq 3$, je grupa simetrij pravilnega n-kotnika z operacijo komponiranja preslikav. Včasih jo zapišemo kot $D_n = \langle r, z : r^n = 1, z^2 = 1, zrz = r^{-1} \rangle = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, z, zr, zr^2, \ldots, zr^{n-1}\}$, kjer r predstavlja "osnovno" rotacijo, z pa eno od zrcaljenj pravilnega n-kotnika. Ta grupa je reda $2n$ in ni komutativna.

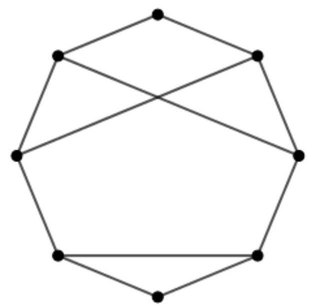
2.2 Teorija grafov

Osnovno o grafih

Definicija 2.7. Enostaven neusmerjen graf $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ je urejeni par dveh množic $V(\Gamma)$ in $E(\Gamma)$, kjer $V(\Gamma)$ predstavlja neprazno množico vozlišč, $E(\Gamma)$ pa je podmnožica množice neurejenih parov različnih vozlišč iz $V(\Gamma)$. Če je jasno, za kateri graf gre, namesto $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ pišemo kar $\Gamma = (V, E)$. Elementom množice $E(\Gamma)$ pravimo povezave grafa. Povezavo $\{u, v\}$ krajše zapišemo kot uv, kar pomeni, da uv predstavlja isto povezavo kot vu. Povezavam, ki se stikajo v skupnem vozlišču, pravimo incidenčne povezave. Če sta $u, v \in V(\Gamma)$ taki vozlišči, da je $uv \in E(\Gamma)$, potem sta to sosedni vozlišči, kar označimo z $u \sim_\Gamma v$ oziroma $u \sim v$, če je jasno, za kateri graf gre. Taki dve vozlišči sta krajišči povezave uv, ta pa je incidenčna s tema dvema vozliščema. Kardinalnosti množice $V(\Gamma)$ pravimo red grafa Γ in jo označimo z $|V(\Gamma)|$ oziroma kar z $|\Gamma|$.

Dogovor. Dogovorimo se, da bomo v nadaljevanju namesto enostaven neusmerjen graf pisali samo graf in s tem vedno mislili na enostaven neusmerjen graf. Naši grafi bodo torej brez zank (povezave, katerih krajišči sta isto vozlišče) in večkratnih povezav (med dvema različnima vozliščema obstaja več povezav).

Definicija 2.8. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf in naj bo $v \in V$. Tedaj množici vozlišč $N(v) = \{u \in V : vu \in E(\Gamma)\}$ pravimo odprta okolica (tudi soseščina) vozlišča v, množici $N[v] = \{u \in V : vu \in E(\Gamma)\} \cup \{v\}$ pa zaprta okolica vozlišča v. Za podmnožico vozlišč $V' \subseteq V$ je $N(V')$ množica vseh vozlišč, ki niso v V', so pa sosedna z vsaj enim vozliščem iz V'. Množica $N[V']$ je tako definirana kot $N[V'] =$



Slika 2.1: Primer upodobitve enostavnega neusmerjenega grafa.

$N(V') \cup V'$. Kardinalnosti $|N(v)|$ pravimo stopnja (tudi valenca) vozlišča v in jo označimo z $deg(v)$. Minimalno stopnjo vozlišč v Γ označimo z $\delta(\Gamma)$, maksimalno pa z $\Delta(\Gamma)$. Če je $\delta(\Gamma) = \Delta(\Gamma)$, je graf regularen in tedaj lahko govorimo o stopnji grafa. Če je $\delta(\Gamma) = \Delta(\Gamma) = k$, je graf k-regularen oziroma stopnje k. Če je $k = 3$, rečemo, da je Γ kubičen.

Lema 2.1 (Lema o rokovanju)**.** *Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Tedaj je vsota stopenj vseh njegovih vozlišč enaka dvakratniku števila njegovih povezav.*

Posledica 2.2. *Naj bo Γ poljuben končen graf. Tedaj ima Γ sodo mnogo vozlišč lihe stopnje. Če je torej Γ regularen graf lihe stopnje, je sodega reda. Tako so torej vsi kubični grafi sodega reda.*

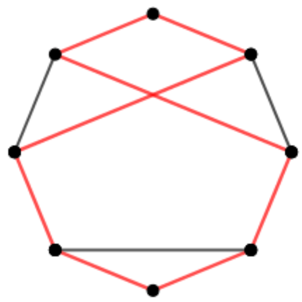
Definicija 2.9. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Zaporedje vozlišč $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ grafa Γ je sprehod v Γ, če za poljuben $1 \leq i \leq n$ velja $v_{i-1} \sim v_i$, to je, če sta poljubni zaporedni vozlišči v tem zaporedju sosednji. Vozlišču v_0 pravimo začetno, vozlišču v_n pa končno vozlišče tega sprehoda, dani sprehod pa je dolžine n. Če so vse pripadajoče povezave tega sprehoda paroma različne, je to enostaven sprehod, če so paroma različna tudi vozlišča, gre za pot. Če je $v_0 = v_n$, je to obhod. Obhodu, v katerem sta enaka samo v_0 in v_n, ostala vozlišča pa so paroma različna, pravimo cikel. Cikel dolžine n se imenuje n-cikel.

Definicija 2.10. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Tedaj ciklu dolžine $|V|$ v Γ pravimo hamiltonski cikel grafa Γ.

Povedano drugače, hamiltonski cikel je cikel, ki obišče vsa vozlišča v grafu, zato je dolžine $|V|$. Za zgled vzemimo kar graf na sliki 2.1. Slednji vsebuje hamiltonski cikel, eden izmed njih pa je z rdečo barvo označen na sliki 2.2.

Definicija 2.11. Naj bosta $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ in $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ grafa. Tedaj je Γ_1 podgraf grafa Γ_2, če je $V_1 \subseteq V_2$ in $E_1 \subseteq E_2$. Če je $V_1 = V_2$, je Γ_1 vpet podgraf grafa Γ_2. Če velja, da je $E_1 = \{uv \in E_2 : u, v \in V_1\}$, je graf Γ_1 podgraf grafa Γ_2, induciran na V_1. V tem primeru ga običajno označimo z oznako $\Gamma_2[V_1]$.

Definicija 2.12. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Tedaj je Γ dvodelen, če lahko množico vozlišč V razbijemo na dve neprazni podmnožici V_1 in V_2 tako, da ima vsaka povezava grafa Γ po eno krajišče v V_1 in drugo v V_2.



Slika 2.2: Hamiltonski cikel.

Izrek 2.3. *Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Tedaj so naslednje trditve ekvivalentne:*

i. Graf Γ je dvodelen.

ii. Vozlišča grafa Γ je mogoče obarvati z dvema barvama tako, da nobeni dve vozlišči iste barve nista sosednji.

iii. Graf Γ ne premore nobenega cikla lihe dolžine.

Definicija 2.13. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Komplement grafa Γ, ki ga označimo z Γ^c, je graf z množico vozlišč V, različni vozlišči u in v pa sta v njem sosednji natanko tedaj, ko nista sosednji v Γ.

Definicija 2.14. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf in naj bo $v \in V$. Komponenta povezanosti grafa Γ, ki vsebuje vozlišče v, je množica vseh tistih vozlišč $u \in V$, za katere v grafu Γ obstaja vsaj en sprehod med u in v. Če ima Γ samo eno komponento povezanosti, kar pomeni, da med poljubnima dvema vozliščema v tem grafu obstaja sprehod, rečemo, da je Γ povezan.

Definicija 2.15. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Graf povezav grafa Γ, katerega označimo z $L(\Gamma)$, je graf z množico vozlišč E, pri tem pa sta dve različni povezavi iz E sosednji vozlišči v $L(\Gamma)$, če imata v Γ skupno krajišče (če sta incidenčni).

Definicija 2.16. Naj bosta $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ in $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ grafa. Preslikava $\varphi : V_1 \to V_2$ je izomorfizem grafov, če je bijektivna in za poljuben par vozlišč $u_1, v_1 \in V_1$ velja:

$$u_1 \sim_{\Gamma_1} v_1 \iff \varphi(u_1) \sim_{\Gamma_2} \varphi(v_1).$$

Grafa Γ_1 in Γ_2 sta izomorfna, kar označimo z $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$, če med njima obstaja kak izomorfizem grafov.

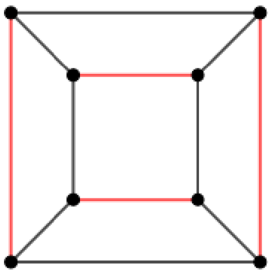
Definicija 2.17. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Avtomorfizem grafa Γ je tedaj vsaka bijekcija $\varphi : V \to V$, ki ohranja sosednost. Za poljuben par vozlišč torej mora veljati

$$u \sim v \iff \varphi(u) \sim \varphi(v).$$

Množico avtomorfizmov grafa Γ označimo z $Aut(\Gamma)$ in ji rečemo grupa avtomorfizmov grafa Γ, kar je, glede na sledečo trditev, upravičeno poimenovanje.

Trditev 2.4. *Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Tedaj je množica $Aut(\Gamma)$ za običajno komponiranje preslikav grupa.*

Definicija 2.18. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Podmnožica povezav $M \subseteq E$ je prirejanje v grafu Γ, če so te povezave paroma neincidenčne. V tem primeru za $v \in V$ rečemo, da je z M nasičeno, če je krajišče kakšne povezave iz M. Če je M takšno prirejanje v grafu Γ, da so z M nasičena vsa vozlišča v grafu, je M popolno prirejanje.



Slika 2.3: Primer popolnega prirejanja v grafu.

Nekatere družine grafov

Spoznajmo nekaj osnovnih družin grafov, ki jih omenjamo v tem magistrskem delu.

Definicija 2.19 (Polni grafi K_n in prazni grafi N_n)**.** Naj bo $n \geq 1$ naravno število. Tedaj je polni graf reda n graf z množico vozlišč $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, v katerem med poljubnima dvema vozliščema obstaja povezava. Označimo ga s K_n. Komplementu polnega grafa, torej ${K_n}^c$, pravimo prazen graf. To je graf brez povezav, običajno pa ga označimo z N_n.

Slika 2.4: Polna grafa K_3 in K_4.

Definicija 2.20 (Pot P_n)**.** Naj bo $n \geq 1$ naravno število. Tedaj je pot dolžine $n-1$, ki jo označimo s P_n, graf z množico vozlišč $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in množico povezav $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n\}$.

Slika 2.5: Poti P_3 in P_4.

Definicija 2.21 (Cikli C_n)**.** Naj bo $n \geq 3$ naravno število. Tedaj je cikel dolžine n, ki ga označimo s C_n, graf reda n z množico vozlišč $\mathbb{Z}_n$, edine povezave pa so oblike $\{i, i+1\}$, za vse $i \in \mathbb{Z}_n$. Če je n sodo število, je C_n sodi cikel, oziroma cikel sode dolžine, če pa je n liho število, je C_n lihi cikel, oziroma cikel lihe dolžine.

Slika 2.6: Cikla C_3 in C_4.

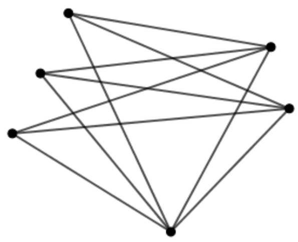
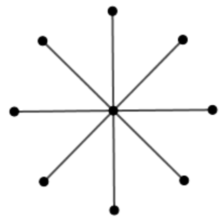
Očitno je grupa avtomorfizmov cikla C_n izomorfna diedrski grupi D_n. Rotacijsko simetrijo običajno označimo z ρ, s čimer imamo v mislih avtomorfizem, ki vozlišče i preslika v vozlišče $i+1$. Avtomorfizem, ki graf za sodi n zrcali preko osi, ki poteka skozi vozišče i in njemu nasprotno vozlišče $i + \frac{n}{2}$, za lihi n pa preko osi, ki poteka skozi vozlišče i in razpolovišče njemu nasprotne povezave $\{i + \frac{n-1}{2}, i + \frac{n+1}{2}\}$, pa označimo s τ.

Opomba. Bralec lahko iz slik 2.4 in 2.6 razbere, da je cikel C_3 izomorfen polnemu grafu K_3.

Definicija 2.22 (Polni večdelni grafi $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$)**.** Naj bodo $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$ poljubna naravna števila. Polni večdelni graf $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ je graf reda $n_1+n_2+\cdots+n_k$, ki ima n_1 vozlišč "tipa 1", n_2 vozlišč "tipa 2", itd., do n_k vozlišč "tipa k". Poljubni dve vozlišči sta sosednji natanko tedaj, ko nista istega tipa.

Definicija 2.23 (Zvezde S_n)**.** Polni dvodelni grafi $K_{1,n}$, s posebno oznako S_n, so grafi, imenovani zvezde.

Definicija 2.24 (Hammingovi grafi $H(n,q)$)**.** Naj bosta n in q poljubni števili. Hammingov graf $H(n,q)$ je tedaj graf, katerega množica vozlišč sestoji iz vseh n-teric elementov iz $\mathbb{Z}_q$. Dve n-terici (dve vozlišči) sta sosednji natanko tedaj, ko se razlikujeta v eni komponenti.

Slika 2.7: Polni večdelni graf $K_{1,2,3}$ in zvezda S_8.

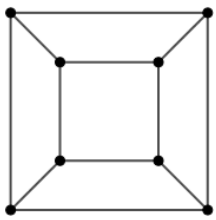
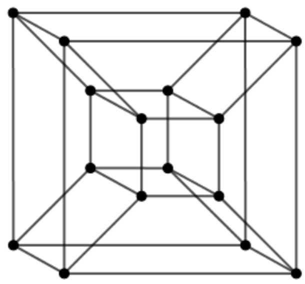
Definicija 2.25 (Hiperkocke $Q(n)$)**.** Hammingovim grafom $H(n, 2)$ rečemo hiperkocke. Ti grafi imajo oznako $Q(n)$.

Izrek 2.5. *Hiperkocka Q_n je graf reda 2^n, množica povezav pa je moči $n \cdot 2^{n-1}$.*

Dokaz. Očitno gre za graf reda 2^n, saj so vozlišča sestavljena iz vseh n-teric iz $\mathbb{Z}_2$. Da pa ima graf Q_n res $n \cdot 2^{n-1}$ povezav, pokažemo s pomočjo leme o rokovanju (lema 2.1). Graf premore 2^n vozlišč in je, ker sta poljubni dve vozlišči povezani natanko tedaj, ko se razlikujeta v natanko eni komponenti, n-regularen. Po lemi je torej $|E(Q_n)| = \frac{n \cdot 2^n}{2}$, kar pa je ravno $n \cdot 2^{n-1}$.

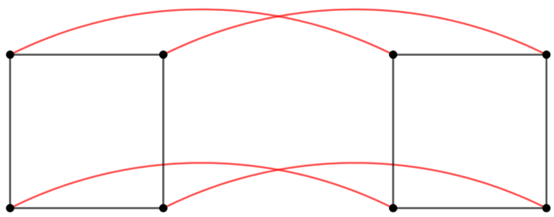
$\square$

Opomba. V naslednjih poglavjih nas bodo od Hammingovih grafov zanimale samo hiperkocke.

Slika 2.8: Hiperkocki $Q(3)$ in $Q(4)$.

Naj na tem mestu predstavimo še enega izmed možnih načinov konstrukcije grafov imenovanih hiperkocke. Poljuben graf Q_n konstruiramo tako, da združimo dva grafa Q_{n-1} na način, da med seboj povežemo korespondenčna vozlišča. Primer takšne konstrukcije grafa Q_3, ki je "sestavljen" iz dveh grafov Q_2 (in povezav med korespondenčnimi vozlišči), lahko vidimo na sliki 2.9. Povezave parov korespondenčnih vozlišč so obarvane z rdečo barvo. Ta predstavitev konstrukcije grafa Q_n, za $n \geq 2$, jasno pokaže, da ima vsak tak graf popolno prirejanje. To dejstvo bomo uporabili v dokazu izreka 3.8.



Slika 2.9: Konstrukcija grafa Q_3.

Za nas najpomembnejša družina je družina posplošenih Petersenovih grafov. Največ pozornosti ji namenimo v Poglavju 5, zato na tem mestu definicijo opuščamo.

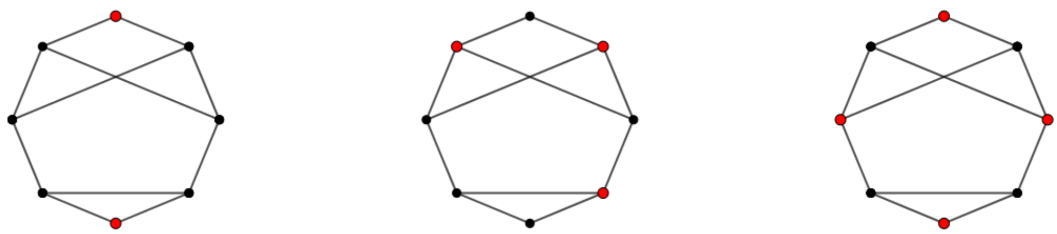
Poglavje 3

Neodvisnostno število grafa

V tem poglavju obravnavamo pojem neodvisnostnega števila grafa. Bralcu predstavimo, kaj sploh neodvisnostno število je, ga ilustriramo z nekaj zgledi in pokažemo, kako se to povezuje z nekaterimi drugimi karakteristikami grafa. Za nekatere dobro znane družine, ki smo jih spoznali v prejšnjem poglavju, ga tudi teoretično določimo. Tudi na tem mestu izpuščamo družino posplošenih Petersenovih grafov, ki se ji bolj posvetimo v Poglavju 5. Dotaknemo se tudi vprašanja, kako težko je določiti, oziroma izračunati neodvisnostno število poljubnega grafa, kar bolj natančno obdelamo v naslednjem poglavju (Poglavje 4). Opiramo se na literaturo [2], [6], [16] in [20].

Definicija 3.1. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Podmnožica $S \subseteq V$ je neodvisnostna množica grafa Γ, če za poljubni dve vozlišči $u, v \in S$ velja $uv \notin E$.

Graf Γ ima lahko več različnih neodvisnostnih množic. Slika 3.1 prikazuje tri različne neodvisnostne množice v istem grafu. Vozlišča neodvisnostne množice so v posameznem primeru obarvana z rdečo barvo.



Slika 3.1: Različne neodvisnostne množice v istem grafu.

Definicija 3.2. Naj bo S neodvisnostna množica v grafu Γ. Množica S je največja neodvisnostna množica grafa Γ, če v Γ ne obstaja neodvisnostna množica $S' \subseteq V$, za katero je $|S'| > |S|$. Množica S je maksimalna neodvisnostna množica grafa Γ, če v Γ ne obstaja neodvisnostna množica $S' \subseteq V$, da je $S \subsetneq S'$.

Bralec lahko na sliki 3.1 opazi, da prva neodvisnostna množica prikazanega grafa ni niti maksimalna niti največja. V poljubnem grafu Γ je vsaka največja neodvisnostna množica tudi maksimalna, ni pa vsaka maksimalna neodvisnostna množica tudi največja. Maksimalne neodvisnostne množice ne moremo povečati tako, da bi ji dodali še eno vozlišče (če bi, bi dve vozlišči v njej predstavljali povezavo). Kadar pa govorimo o največji neodvisnostni množici, pa s tem mislimo, da v obravnavanem grafu ne obstaja nobena druga neodvisnostna množica, ki bi bila večja od te. Druga neodvisnostna množica na sliki 3.1 je maksimalna, v kar se ni težko prepričati, saj vanjo ne moremo dodati nobenega vozlišča več (če bi, bi dve vozlišči v njej predstavljali povezavo). Tretja neodvisnostna množica je največja, kar bomo pokazali v razdelku 3.2. Ker smo spoznali pojem neodvisnostne množice, lahko vpeljemo pojem neodvisnostnega števila.

Definicija 3.3 (Neodvisnostno število grafa)**.** Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf in naj bo S poljubna največja neodvisnostna množica grafa Γ. Kardinalnosti množice S pravimo neodvisnostno število grafa Γ in ga označimo z $\alpha(\Gamma)$.

Opomba. Vozliščem, ki so vsebovana v dani neodvisnostni množici, pravimo tudi med seboj neodvisna vozlišča. Poudarimo, da se namesto izrazov neodvisnostna množica in neodvisnostno število uporabljata tudi termina neodvisna množica in neodvisno število. Odločili smo se za uporabo izrazov neodvisnostna množica in neodvisnostno število.

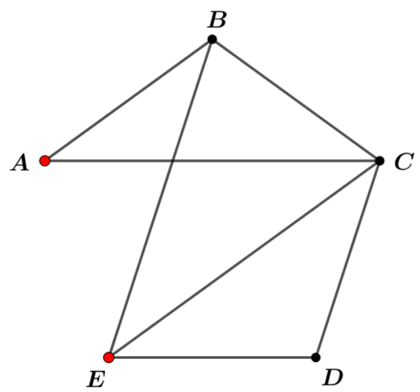
Oglejmo si precej enostaven primer konkretne situacije, povezane z neodvisnostnim številom pripadajočega grafa.

Zgled. Srednja šola organizira športno tekmovanje za dijake zaključnih letnikov. Iz vsakega izmed štirih zaključnih letnikov se lahko prijavita po dva dijaka (uporabljamo generični moški spol). Dijaki se na tekmovanje prijavijo tako, da se odločijo, v katerih dveh izmed petih disciplin (plavanje, tek, skok v daljino, met žogice in met na koš) bodo tekmovali. Njihovo odločitev predstavlja tabela 3.1. Šola želi dijakom omogočiti udeležbo v vseh disciplinah, za katere so se prijavili, vendar ima stisko s časom. Želi si, da bi bilo v prvem dnevu tekmovanja izvedenih čim več različnih disciplin, ob tem pa predpostavimo, da lahko dijak v enem dnevu tekmuje samo v eni disciplini. Odgovoriti želimo na vprašanji, koliko in katere discipline naj se odvijajo v prvem dnevu tekmovanja. Izbor aktivnosti dijakov prikazuje spodnja tabela. Imenom disciplin dodelimo naslednje okrajšave: A = plavanje, B = tek, C = skok v daljino, D = met žogice in E = met na koš.

Na vprašanje lahko odgovorimo s pomočjo teorije grafov. Tabelo izborov pretvorimo v graf, kjer vsaka disciplina predstavlja svoje vozlišče. Dve vozlišči sta med seboj povezani, če je (vsaj) en dijak prijavljen na obe pripadajoči disciplini. Iskanje optimalnega izbora možnih aktivnosti v prvem dnevu ustreza iskanju največje neodvisnostne množice v tem grafu. Elementi takšne neodvisnostne množice so aktivnosti (oziroma vozlišča, ki pripadajo tem aktivnostim), ki se bodo izvajale v prvem dnevu, neodvisnostno število grafa, torej moč te množice, pa nam pove največje število aktivnosti, ki jih lahko izvedemo na ta dan. Slika 3.2 prikazuje eno možno rešitev. Ni težko videti, da je neodvisnostno število tega grafa res 2. Prvi dan se torej lahko izvajata dve disciplini, na primer plavanje in met na koš.

Dijaki \ Disciplina	A	B	C	D	E
1	x	x			
2			x	x	
3				x	x
4	x		x		
5		x			x
6			x		x
7		x	x		
8				x	x

Tabela 3.1: Izbor aktivnosti osmih dijakov na šolskem tekmovanju.



Slika 3.2: Ena možna rešitev zgleda o sestavljanju urnika za šolsko tekmovanje.

Zgornji zgled prikazuje realno situacijo, pri kateri se ob ustreznem modeliranju v jeziku teorije grafov pojavi koncept neodvisnostnega števila. Glede na to, da je šola časovno omejena in želi tekmovanje zaključiti v najkrajšem možnem času, nas lahko zanima tudi, najmanj koliko dni šola potrebuje, da zaključi celotno tekmovanje. Preden se posvetimo temu vprašanju, spoznajmo še nekaj dodatnih definicij in izrekov.

Definicija 3.4. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Preslikava $c : V(\Gamma) \to \mathbb{N}$ je dobro barvanje vozlišč grafa Γ, če za poljubni sosednji vozlišči $u \sim v$ velja $c(u) \neq c(v)$. Če je $\ell \in \mathbb{N}$ najmanjše takšno število, da obstaja $v \in V$, za katerega je $c(v) = \ell$, je c ℓ-barvanje vozlišč grafa Γ.

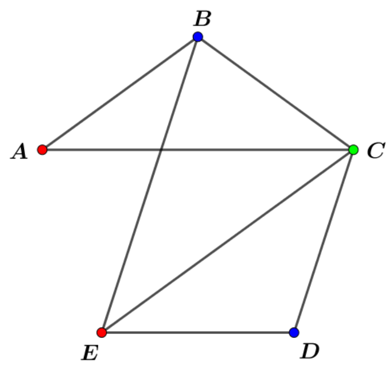
Opomba. Ko študiramo grafe manjših redov, naravna števila pogosto nadomestimo z barvami.

Lema 3.1. *Za vsak končen graf $\Gamma = (V, E)$ obstaja $l \in \mathbb{N}$, tako da obstaja dobro l-barvanje njegovih vozlišč.*

Dokaz leme je precej očiten, saj je v najslabšem primeru $l = |V(\Gamma)|$, kar pomeni, da vsako vozlišče obarvamo s svojo barvo.

Definicija 3.5. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. Najmanjše število k, da obstaja kakšno dobro k-barvanje vozlišč grafa Γ, je njegovo kromatično število. Označimo ga z $\chi(\Gamma)$.

Rešitev nadaljevanja zgleda o poteku šolskega športnega tekmovanja je sedaj precej enostavna. Bralec lahko opazi, da v tem primeru iščemo kromatično število grafa iz slike 3.2. Vsak barvni razred (vozlišča obarvana z isto barvo) vsebuje tista vozlišča, ki jim pripadajo aktivnosti, ki se lahko izvajajo v istem dnevu. Ni težko videti, da je kromatično število pripadajočega grafa enako 3, torej šola potrebuje 3 dni, da izpelje šolsko tekmovanje. Drugi dan se (glede na naš prvi izbor) lahko izvajata tek in met žogice, tretji dan pa skok v daljino. Primer ustreznega barvanja vozlišč s tremi barvami prikazuje slika 3.3.



Slika 3.3: Ustrezno barvanje vozlišč grafa iz slike 3.2.

Očitno je kromatično število povezano s pojmom neodvisnostne množice, saj je vsak barvni razred v resnici neodvisnostna množica. Ni nujno, da je le-ta največja, je pa zagotovo neodvisnostna. Predstavimo še zadnji izrek, ki povezuje neodvisnostno in kromatično število grafa in pravzaprav temelji na zgornjem razmisleku.

Izrek 3.2. *Naj bo $\Gamma = (V, E)$ končen graf. Tedaj je $\chi(\Gamma) \geq \frac{|V(\Gamma|}{\alpha(\Gamma)}$.*

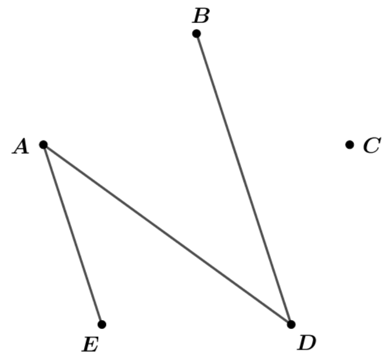
Dokaz. Vseh vozlišč je $|V(\Gamma)|$, vsak barvni razred pri poljubnem dobrem barvanju vozlišč grafa Γ pa je velikosti največ $\alpha(\Gamma)$. Od tod torej sledi, da je $|V(G)| \leq \chi(\Gamma)\alpha(\Gamma)$, od koder dobimo zgornjo neenakost.

□

Ko študiramo neodvisnostno število grafa, skupaj z njim zelo pogosto obravnavamo tudi klično število grafa.

Definicija 3.6. Naj bo Γ graf. Polnemu podgrafu grafa Γ pravimo klika, velikosti največjega polnega podgrafa v Γ pa njegovo klično število. Označimo ga z $\omega(\Gamma)$.

Bralec lahko opazi, da je iskanje največje neodvisnostne množice v grafu Γ povsem ekvivalentno iskanju največje klike v komplementu Γ^c. Neodvisnostni množici vozlišč zato rečemo tudi antiklika. Naloge s sestavljanjem urnika za šolsko športno tekmovanje bi se tako lahko lotili tudi na drugačen način. Iskali bi največjo kliko v komplementu grafa iz slike 3.2. Ta pristop nam torej prav tako pove, največ koliko aktivnosti se lahko izvede prvi dan. Komplemet Γ^c je prikazan na sliki 3.4, njegov največji polni podgraf pa je K_2, kot je bilo tudi pričakovano, saj smo že pokazali, da se lahko prvi dan izvajata največ dve aktivnosti.



Slika 3.4: Komplement grafa iz slike 3.2.

Pokazali smo, da se neodvisnostno število povezuje s kar nekaj drugimi karakteristikami grafa, povezava s kličnim številom pa je tako močna, da skoraj lahko rečemo, da govorimo o isti stvari. Nekaj besed o tej povezavi dodamo še v Poglavju 4.

3.1 Neodvisnostno število nekaterih znanih družin grafov

V prejšnjem poglavju smo spoznali nekatere družine grafov, v tem razdelku pa bomo za vsako izmed teh družin teoretično določili njihovo neodvisnostno število.

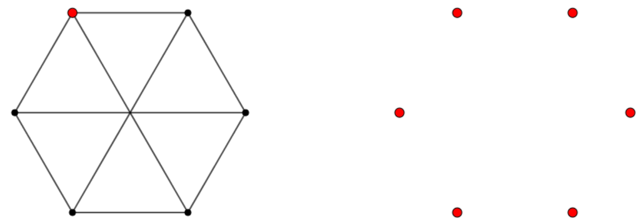
Izrek 3.3. *Naj bo n naravno število. Tedaj je $\alpha(K_n) = 1$ in $\alpha(N_n) = n$.*

Dokaz. Dokaz tega izreka je precej preprost. Ker so v polnem grafu K_n vsa vozlišča med seboj povezana, je lahko v neodvisnostni množici natanko eno vozlišče. V praznem grafu N_n nimamo povezav, zato je neodvisnostno število kar enako redu tega grafa - torej n.

□

Izrek 3.4. *Naj bo $n \geq 3 \in \mathbb{N}$. Tedaj je* $\alpha(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{, } n \text{ je sodo število,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{, } n \text{ je liho število.} \end{cases}$

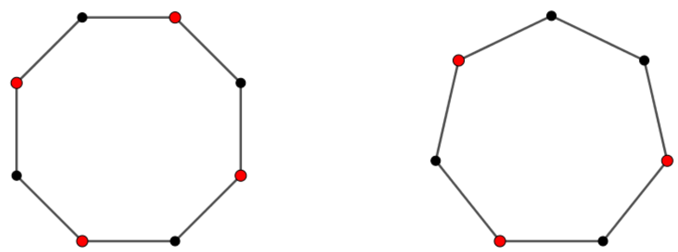
Dokaz. Naj bo S poljubna največja neodvisnostna množica grafa C_n. Očitno je $|S \cap \{i, i+1\}| \leq 1$ za vsak $i \in \mathbb{Z}_n$. Tedaj je torej $2|S| = \sum_{i=0}^{n-1} |S \cap \{i, i+1\}| \leq n$, saj smo v tej vsoti vsako vozlišče šteli natanko dvakrat. To pa pomeni, da je $|S| \leq \frac{n}{2}$ oziroma ker je $|S| \in \mathbb{N}$, kar $|S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Za sodi n je torej $\alpha(C_n) \leq \frac{n}{2}$, za lihi



Slika 3.5: Primer največje neodvisnostne množice grafa K_6 in njegovega komplementa $(K_6)^c = N_6$.

n pa $\alpha(C_n) \leq \frac{n-1}{2}$. Naj bo n sodo število. Množica vozlišč $\{0, 2, \ldots, n-2\}$ je neodvisnostna, saj vsebuje samo soda vozlišča, vsa soda pa so povezana le z lihimi vozlišči. Vseh sodih vozlišč je natanko $\frac{n}{2}$, zato za sodi n velja kar $\alpha(C_n) = \frac{n}{2}$. Naj bo n liho število. Množica vozlišč $\{0, 2, \ldots, n-3\}$ je (zaradi podobnega razloga kot tista prej) neodvisnostna množica moči $\frac{n-1}{2}$, zato je to tudi spodnja meja za neodvisnostno število teh predstavnikov in lahko zapišemo $\alpha(C_n) = \frac{n-1}{2}$.

□



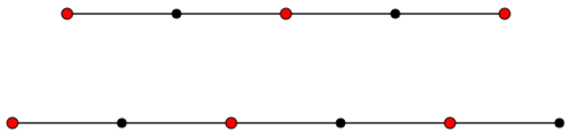
Slika 3.6: Primer največje neodvisnostne množice v grafih C_8 in C_7.

Izrek 3.5. *Naj bo n naravno število. Tedaj je* $\alpha(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & , n \text{ je sodo število,} \\ \frac{n+1}{2} & , n \text{ je liho število.} \end{cases}$

Dokaz. Naj bo n sodo število. Iz vsakega para vozlišč $\{v_i, v_{i+1}\}$, kjer je i liho število in je $i+1 \leq n$, lahko v neodvisnostno množico S vzamemo največ eno vozlišče - ker je n sodo število imamo ravno $\frac{n}{2}$ takšnih parov. Ker s tem upoštevamo vsa vozlišča grafa P_n, je $\alpha(P_n) \leq \frac{n}{2}$. Množica $\{v_1, v_3, v_5, \ldots, v_{n-1}\}$ je neodvisnostna, saj vsebuje samo vozlišča lihega indeksa, ta pa so povezana samo s tistimi sodega. Ker premore vsa "liha" vozlišča, je moči $\frac{n}{2}$. S tem je za sodi n določena tudi spodnja meja za neodvisnostno število, zato je $\alpha(P_n) = \frac{n}{2}$.

Naj bo n liho število. Podobno lahko tudi na tem mestu iz vsakega para vozlišč $\{v_i, v_{i+1}\}$, kjer je i liho število in je $i+1 < n$, v neodvisnostno množico S vzamemo največ eno vozlišče. Ker je n liho število, je takih parov $\frac{n-1}{2}$, vendar pa s tem ne upoštevamo vseh vozlišč. Ostane nam še vozlišče v_n. To pomeni, da je $\alpha(P_n) \leq \frac{n-1}{2} + 1$ oziroma $\alpha(P_n) \leq \frac{n+1}{2}$. Množica $\{v_1, v_3, v_5, \ldots, v_n\}$ premore samo vozlišča lihega indeksa in ker je poljubno tako povezano samo s tistimi sodega indeksa, je ta množica neodvisnostna. Ker premore vsa "liha" vozlišča, je moči $\frac{n+1}{2}$. S tem je postavljena spodnja meja tudi za grafe P_n z lihim indeksom n. Velja torej $\alpha(P_n) = \frac{n+1}{2}$.

□



Slika 3.7: Primer največje neodvisnostne množice v grafih P_5 in P_6.

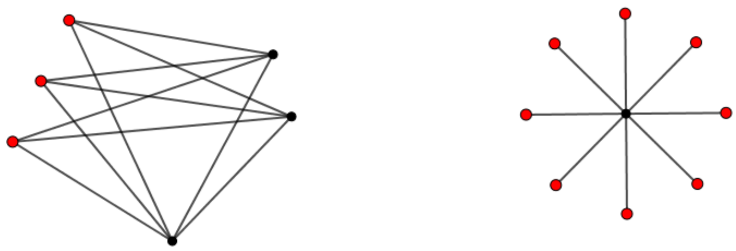
Izrek 3.6. *Naj bodo $n_1, n_2, \ldots, n_k$ taka naravna števila, da je $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$. Tedaj je $\alpha(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = max(\{n_1, n_2, \ldots, n_k\})$.*

Dokaz. To dejstvo sledi neposredno iz definicije grafa $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ (definicija 2.22). Ker ima ta graf n_1 vozlišč "tipa 1", n_2 vozlišč "tipa 2" ... do n_k vozlišč "tipa k" in sta poljubni dve vozlišči sosednji natanko tedaj, ko nista istega tipa, so pari nesosednjih vozlišč ravno pari vozlišč istega tipa. Z drugimi besedami lahko rečemo, da je poljubno vozlišče posameznega tipa povezano z vsemi vozlišči, razen s tistimi, ki so istega tipa. Vsak tip vozlišč torej tvori neodvisnostno množico. Poljubna neodvisnostna množica grafa $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ sestoji izključno iz vozlišč posameznega tipa, zato je $\alpha(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = max(\{n_1, n_2, \ldots, n_k\})$.

□

Posledica 3.7. *Naj bo n naravno število. Tedaj je $\alpha(S_n) = n$.*

Dokaz. Grafi zvezde S_n so v resnici polni večdelni grafi $K_{1,n}$ (oziroma polni dvodelni grafi $K_{1,n}$), zato ta posledica sledi neposredno iz izreka 3.6. □



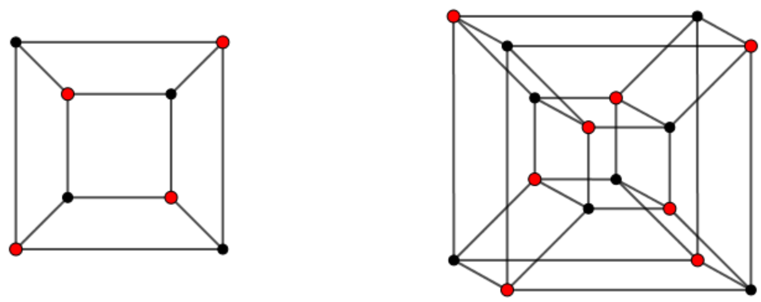
Slika 3.8: Največja neodvisnostna množica grafa $K_{3,2,1}$ in S_8.

Izrek 3.8. *Naj bo n naravno število. Tedaj je $\alpha(Q_n) = 2^{n-1}$.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da je graf Q_n dvodelen z razbitjem množice vozlišč na dva enako velika dela. Razbitje označimo z $A \cup B$. Spomnimo se, da je graf dvodelen natanko tedaj, ko lahko njegova vozlišča obarvamo z dvema barvama tako, da sta poljubni dve sosednji vozlišči obarvani z različno barvo. Vozlišča grafa predstavljajo n-terice, kjer je na vsaki komponenti le-te 0 ali 1. Če vse komponente n-terice seštejemo po modulu 2, lahko vsakemu vozlišču priredimo število 0 ali 1. Vozliščem, pri katerih na ta način dobimo vrednost 1, priredimo rdečo barvo, vozliščem, pri katerih na ta način dobimo vrednost 0 pa modro. Trdimo, da je to dobro 2-barvanje vozlišč grafa Q_n. Dve vozlišči grafa sta povezani, ko se razlikujeta v natanko eni komponenti, torej se vsota njunih komponent razlikuje (za 1). To pomeni, da je zgoraj definirano barvanje vozlišč res dobro 2-barvanje. Graf Q_n ima natanko pol vozlišč, ki imajo vsoto komponent po modulu 2 enako 1 (druga polovica vozlišč pa jo ima 0), zato je res tudi to, da je graf Q_n dvodelen z razbitjem množice vozlišč na dva enako velika dela.

S tem smo pokazali, da je $\alpha(Q_n) \geq 2^{n-1}$, saj lahko za neodvisnostno množico vzamemo kar eno od množic A in B. Pokazati moramo še, da je to tudi zgornja meja za $\alpha(Q_n)$. Velja $|Q_n| = 2^n$. Spomnimo se, da lahko poljuben graf Q_n konstruiramo tako, da dve "kopiji" grafa Q_{n-1} "združimo" na način, da med seboj povežemo korespondenčna vozlišča. Očitno je množica povezav, ki "združijo" korespondenčna vozlišča dveh (ločenih) kopij grafa Q_{n-1}, ravno popolno prirejanje grafa Q_n in da je le-to velikosti 2^{n-1} (kolikor je red grafa Q_{n-1}). Ker lahko v neodvisnostno množico grafa Q_n očitno od vsake povezave tega popolnega prirejanja vzamemo po največ eno vozlišče, tako sledi $\alpha(Q_n) \leq 2^{n-1}$. Ker je zgornja meja za neodvisnostno število grafa Q_n enaka spodnji, je s tem izrek dokazan.

□



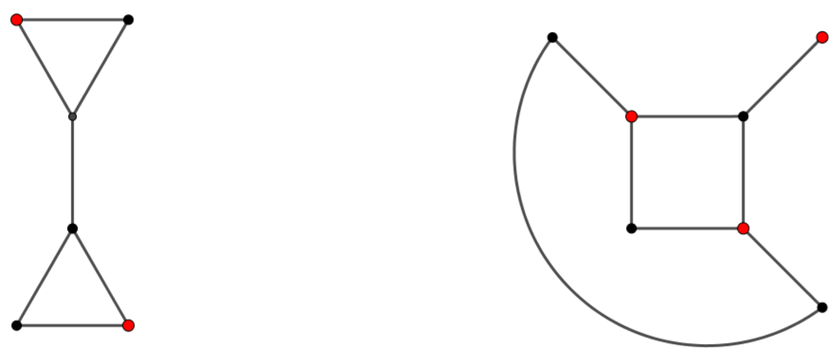
Slika 3.9: Primer največje neodvisnostne množice v grafih Q_3 in Q_4.

3.2 Neodvisnostno število poljubnega grafa

Če je graf vsebovan v eni izmed družin, za katero smo neodvisnostno število že teoretično izpeljali, je določitev neodvisnostnega števila tega grafa seveda trivialna naloga. Na tem mestu nas zanima težavnost te naloge v primeru, ko nek dani graf ni vsebovan v kateri izmed znanih (oziroma zgoraj predstavljenih) družin. Za začetek si oglejmo grafa na sliki 3.10. Trdimo, da je neodvisnostno število levega grafa 2, desnega pa 3. Primer ene možne največje neodvisnostne množice za oba grafa predstavlja omenjena slika. Dejstvo, da gre res za največji neodvisnostni množici, utemeljimo s pomočjo naslednjega razmisleka.

Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf, S njegova poljubna največja neodvisnostna množica in naj bo $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$ ne nujno disjunktna unija, sestavljena iz podmnožic množice vozlišč grafa Γ. Poljubno največjo neodvisnostno množico podgrafa, induciranega na V_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, označimo s S_i. Zaradi dejstva da je $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$, očitno velja $S = (V_1 \cap S) \cup (V_2 \cap S) \cup ... \cup (V_n \cap S)$ in tako $|S| \leq |V_1 \cap S| + |V_2 \cap S| + ... + |V_n \cap S|$. Ker pa je S neodvisnostna množica za cel Γ, je $V_i \cap S$ neodvisnostna množica za podgraf, induciran na V_i in zato $|V_i \cap S| \leq |S_i|$. To pa pomeni, da je $|S| \leq |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_n|$. Seveda predstavljena zgornja meja v splošnem ni zelo natančna, saj na S vpliva celotna množica povezav E, mi pa na tem mestu upoštevamo samo tiste, ki so vsebovane v podgrafih, induciranih na vozliščih V_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Kljub temu se zgoraj opaženo dejstvo v nadaljevanju (in tudi v naslednjih poglavjih) izkaže za koristno.

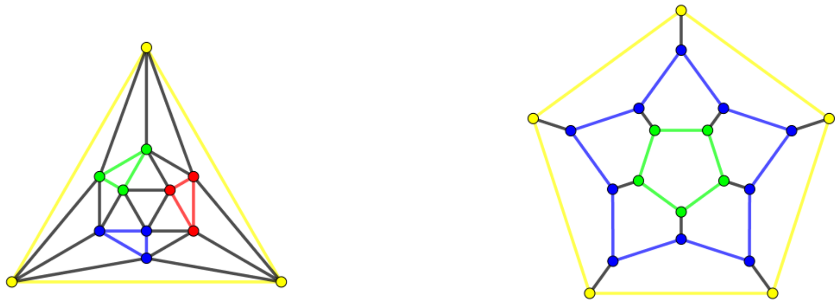
Še enkrat si oglejmo sliko 3.10. Naj bo levi graf Γ_1 in desni graf Γ_2. Γ_1 je sestavljen iz dveh 3-ciklov, ki ju povezuje ena povezava. Ker vemo, da je $\alpha(C_3) = 1$, lahko glede na zgornji razmislek z gotovostjo trdimo $\alpha(\Gamma_1) \leq 2$. Ker pa smo po drugi strani našli neodvisnostno množico take velikosti, je $\alpha(\Gamma_1) = 2$. S pomočjo istega razmisleka lahko določimo tudi neodvisnostno število grafa Γ_2. Ker je $\alpha(C_5) = 2$ in $\alpha(K_2) = 1$, je $\alpha(\Gamma_2) \leq 3$. Neodvisnostno množico take velikosti smo prav tako našli, zato je $\alpha(\Gamma_2) = 3$.



Slika 3.10: Dva grafa in primera njunih največjih neodvisnostnih množic.

Spomnimo se tudi grafa iz slike 2.1 oziroma 3.1. Bralec lahko opazi, da ta graf, recimo mu kar Γ_3, premore hamiltonski cikel (ki je dolžine 8), zato lahko trdimo, da je $\alpha(\Gamma_3) \leq 4$. Ker smo zanj našli neodvisnostno množico moči 4, je $\alpha(\Gamma_3) = 4$.

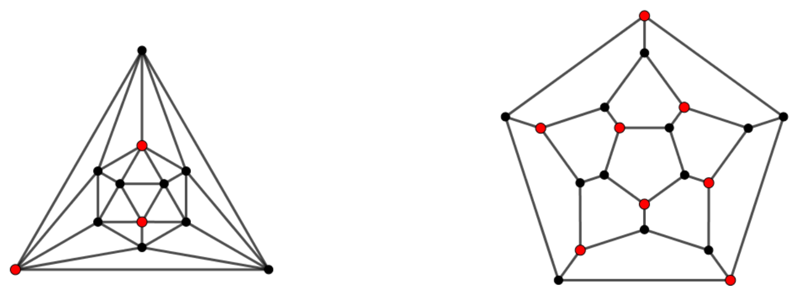
Pri vseh treh zgornjih grafih je za to, da smo določili neodvisnostno število grafa, zadoščal zgornji razmislek. Oglejmo si še grafa na sliki 3.11. To sta skeletna grafa ikozaedra in dodekaedra, dveh izmed petih dobro znanih platonskih teles. Poskusimo določiti še njuni neodvisnostni števili. Naj bo graf ikozaedra Γ_4 (levi graf na sliki 3.11), graf dodekaedra pa Γ_5 (desni graf na sliki 3.11).



Slika 3.11: Grafa ikozaedra in dodekaedra.

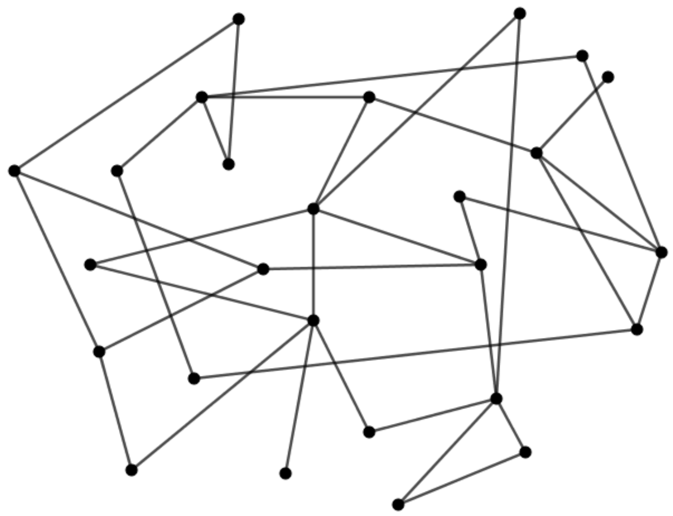
Začnimo z grafom ikozaedra. Vozlišča in povezave vsake izmed prikazanih štirih barv (rumene, rdeče, modre in zelene) predstavljajo induciran podgraf C_3. Bralec lahko opazi, da smo na ta način obarvali vsa vozlišča grafa, ne pa tudi vseh povezav. Ker smo uporabili štiri barve, zagotovo velja $\alpha(\Gamma_4) \leq 4$. Zgornjo mejo smo postavili, v nadaljevanju pa jo bomo skušali doseči. Da bi jo dosegli, mora biti v (največji) neodvisnostni množici, recimo ji S, natanko eno vozlišče vsake posamezne barve. Predpostavimo torej, da je to res (S premore vozlišče vsake posamezne barve). Ker Γ_4 premore rotacijsko simetrijo reda 3, ki ciklično rotira rumena vozlišča, lahko brez škode za splošnost vanjo damo poljubno rumeno vozlišče, recimo levo spodnje. V naslednjem koraku nam, glede na povezanost grafa, na izbiro ostane eno modro vozlišče, dve zeleni in tri rdeča, zato je edino modro vozlišče v S natanko določeno. V zadnjem koraku imamo na izbiro samo še po eno zeleno in rdeče vozlišče, ker pa med njima obstaja povezava, pridemo do protislovja, ki pokaže, da velja celo $\alpha(\Gamma_4) \leq 3$. Da v resnici tu velja enakost, se prepričamo tako, da poiščemo konkreten primer neodvisnostne množice velikosti 3. Ena možna rešitev je prikazana na sliki 3.12. Postavljena zgornja meja po našem razmisleku s prejšnje strani tokrat ni bila natančna, saj pri tem razmisleku nismo upoštevali vseh povezav, ampak samo obarvane.

Oglejmo si še graf Γ_5. Rumena vozlišča in povezave predstavljajo induciran podgraf C_5, modra induciran podgraf C_{10}, zelena pa prav tako induciran podgraf C_5. Bralec lahko opazi, da tudi pri tem grafu ne obarvamo vseh povezav. Glede na razmislek, ki smo ga uporabili pri grafu Γ_4, lahko zapišemo $\alpha(\Gamma_5) \leq 9$. Če želimo, da je ta meja dosežena, mora največja neodvisnostna množica - ponovno jo označimo s S - vsebovati dve rumeni, dve zeleni in pet modrih vozlišč. Bralec lahko opazi da, če želimo v S dodati 5 modrih vozlišč, s tem izločimo ali vsa rumena, ali pa vsa zelena vozlišča. To pa pomeni, da postavljena zgornja meja nikoli ne bo dosežena, s čimer dobimo boljšo mejo, in sicer $\alpha(\Gamma_5) \leq 8$. Neodvisnostno množico s tako močjo zlahka najdemo, zato je $\alpha(\Gamma_5) = 8$. Ena možna rešitev je prikazana na sliki 3.12.



Slika 3.12: Grafa ikozaedra in dodekaedra ter primera njunih največjih neodvisnostnih množic.

V splošnem je neodvisnostno število težko določiti. Če graf premore veliko vozlišč, lahko iskanje postane precej zapleteno. Za grafe Γ_1, Γ_2 in Γ_3 je bila zgornja meja, predstavljena v začetku razdelka, dovolj, pri grafih Γ_4 in Γ_5 pa je bil potreben še dodaten razmislek. Kako je z grafi, ki imajo še več vozlišč in povezav? In s tistimi, ki ne premorejo očitnih simetrij? Takšen je recimo graf na sliki 3.13. Bralec se bo najbrž hitro prepričal, da je določitev neodvisnostnega števila za ta graf precej zahtevna naloga.



Slika 3.13: Poljuben graf.

Zapišimo še, da smo za namen tega magistrskega dela napisali preprost računalniški program, ki preverja ali (dani) graf Γ premore neodvisnostno množico velikosti k. Vhodna podatka sta torej dva, graf Γ in parameter k. Program smo napisali v programu *Python*, ta pa deluje kar po principu "brute-force", kar pomeni, da preverja ustreznost vseh možnih k-elementnih podmnožic množice vozlišč. Program najprej generira množico povezav in množico vozlišč grafa. V drugem koraku iz množice vozlišč generira vse možne podmnožice velikosti k, za njih kreira vse možne povezave med vozlišči in preverja, ali se katera izmed njih nahaja v množici povezav grafa. Če se, množica torej ni neodvisnostna. Za grafe Γ_1, Γ_2, Γ_3 in Γ_4 iz tega poglavja smo z našim programom dobili isti rezultat, kot smo ga teoretično dokazali, program pa je rešitev vrnil takoj. Zelo hitro smo dobili rešitev tudi za graf Γ_5 (graf dodekaedra). Program smo najprej zagnali za vrednost parametra $k = 9$. Zagnali smo ga večkrat, za odgovor, da takih neodvisnostnih množic v grafu ni, je potreboval $6 - 8$ sekund. Da je vrnil primere neodvisnostnih množic velikosti 8, je potreboval $4 - 6$ sekund. Za graf, prikazan na sliki 3.13, je program potreboval malce več časa. Program smo za vsak parameter k zagnali samo enkrat. Da je potrdil, da graf ne premore neodvisnostne množice moči 15, je potreboval približno 12 minut, da pa je poiskal neodvisnostne množice moči 14, pa približno 5 minut. Bralec se najverjetneje strinja, da bolj kot je graf zapleten (v smislu velikosti množice vozlišč in povezav), več časa bo naš program potreboval, da vrne rešitev. Na tem mestu se je torej smiselno vprašati, kako zahteven je problem določitve neodvisnostnega števila za poljuben graf Γ. Odgovoru na to vprašanje namenimo celotno naslednje poglavje.

Poglavje 4

NP-polnost problema določitve neodvisnostnega števila grafa

Kot napovedano, se v tem poglavju ukvarjamo z vprašanjem, kako zahteven je problem določitve neodvisnostnega števila (poljubnega) grafa. V tem poglavju zato problem obravnavamo z algoritmičnega vidika. Če precej poenostavimo, lahko zapišemo, da probleme razvrščamo v različne razrede glede na (doslej) znane algoritme, ki probleme rešijo in glede na učinkovitost teh algoritmov. V tem poglavju bomo predstavili pojem algoritem in kaj razumemo pod terminom zahtevnost algoritma. Glavni cilj je pokazati, da je problem določanja neodvisnostnega števila (oziroma kot bomo kasneje rekli, problem določanja neodvisnostne množice) NP-poln problem. Teorija, ki proučuje algoritme in njihovo zahtevnost, je precej kompleksna in obsežna. Zato bomo pri naši obravnavi nekoliko površni - izpustili bomo nekatere formalne definicije oziroma bomo določene koncepte predstavili zgolj na intuitivni ravni. Naš glavni cilj je, da bralcu to tematiko zgolj približamo, v kolikor bi želel o njej izvedeti kaj več in spoznati tudi formalne definicije in izreke, ki jih tematika pokriva, ga vabimo k branju literature [5] in [6]. Poleg že omenjenih virov se v tem poglavju opiramo še na vire [12], [15], [16], [18] in [21].

4.1 Časovna zahtevnost algoritma v povezavi z razredoma P in NP

Vsak problem zahteva določeno strategijo reševanja. Eno izmed njih smo že spoznali v prejšnjem poglavju, ko smo določali neodvisnostno število poljubnega grafa. Ta nas je pri treh grafih pripeljala do končne rešitve problema, pri dveh pa smo jo morali še nekoliko nadgraditi. Če strategijo reševanja malce razširimo in opišemo bolj podrobno, smo že bližje opisu algoritma. Algoritem je namreč natančno določen postopek za reševanje danega problema, ki se izvaja korak za korakom in (praviloma, če gre za eksakten algoritem) vodi do rešitve. Če algoritem za vsak možen konkreten primer obravnavanega problema vrne (želeno) rešitev, pravimo, da algoritem reši dani problem. Za nek dani problem običajno obstaja več različnih algoritmov, vedno pa se je smiselno vprašati, kateri je za nas najbolj optimalen, oziroma najbolj učinkovit. Poglejmo na to vprašanje bolj z računalniškega vidika. Kaj imamo v mislih, ko zapišemo, da je algoritem učinkovit? Ko analiziramo algoritme, lahko govorimo na primer o njihovi prostorski ali pa časovni zahtevnosti. V tem magistrskem delu nas bo zanimala samo časovna zahtevnost.

Časovna zahtevnost (tudi kompleksnost) nekega algoritma je funkcija, ki v odvisnosti od "velikosti" vhodnih podatkov izraža, največ koliko operacij se bo izvedlo, da bo algoritem vrnil rešitev. Pri tem želimo, da je ta funkcija optimalna (v smislu, da kakšna funkcija, ki raste počasneje, ne bi bila več dobra). Kadar obravnavamo probleme, ki jih pokriva teorija grafov, "velikost" vhodnih podatkov običajno predstavlja število vozlišč ali pa število povezav v grafu (lahko tudi vsoto obeh omenjenih števil). Časovno zahtevnost običajno predstavimo z O (angleško *big* O *notation*), s čimer želimo povedati, da je število potrebnih operacij za izvedbo algoritma v okviru nekega vnaprej določenega konstantnega faktorja funkcije, ki se nahaja znotraj notacije O. Učinkovitost algoritma se kaže s hitrostjo naraščanje njegove časovne zahtevnosti, glede na "velikost" vhodnih podatkov. Hitreje (bolj strmo) kot narašča, manj je algoritem učinkovit. Najbolj trivialen primer časovne zahtevnosti je konstantna časovna zahtevnost $O(1)$. Gre za konstantno funkcijo, kar pomeni, da obstaja neka konstanta c, da algoritem ne glede na "velikost" vhodnih podatkov n za svojo izvedbo porabi največ c korakov. Za nas takšni algoritmi ne bodo zanimivi (ker imajo takšno časovno zahtevnost le povsem preprosti problemi), nekaj več pozornosti pa namenimo tistim s polinomsko (in eksponentno) časovno zahtevnostjo. Algoritmu s časovno zahtevnostjo $O(p(n))$, kjer je $p(n)$ neka polinomska funkcija glede na velikost vhodnih podatkov n, pravimo polinomski časovni algoritem. Ti algoritmi so izvedljivi v polinomskem času. Analogno algoritmom z eksponentno časovno zahtevnostjo pravimo eksponentni časovni algoritmi.

Velik del teorije, ki proučuje algoritme, se ukvarja (samo) s tako imenovanimi odločitvenimi problemi. Problem je odločitveni, če nas za vsak konkreten primer tega problema zanima, ali ima določeno lastnost ali ne (na primer, ali je dani graf povezan ali ne, ali je dano število praštevilo ali ne itd.). Odločitveni problemi so torej tisti problemi, ki jih lahko rešimo izključno z odgovorom DA ali NE. V tem magistrskem delu se ukvarjamo z neodvisnostnim številom. Problem določanja letega seveda ni odločitveni problem, saj za odgovor pričakujemo neko konkretno vrednost. Da ga vanj preoblikujemo, nas mora zanimati ali dani graf $\Gamma = (V, E)$ premore neodvisnostno množico moči k. Zato je na tem mestu primernejši izraz problem neodvisnostne množice in ne neodvisnostnega števila.

Razred P je razred odločitvenih problemov, za katere obstajajo algoritmi polinomske časovne zahtevnosti. Gre torej za odločitvene probleme, za katere obstaja algoritem s časovno zahtevnostjo oblike $O(n^k)$, kjer je k neka konstanta, n pa velikost vhodnih podatkov. Razred NP je razred tistih odločitvenih problemov, za katere obstajajo algoritmi (prav tako) polinomske časovne zahtevnosti, ki zmorejo za vsak konkreten primer, ki daje pritrdilni odgovor na zastavljeno vprašanje, dejansko preveriti oz. potrditi, da je temu res tako. Razred P in NP nista strogo ločena, saj za vsak problem iz razreda P očitno obstaja algoritem polinomske časovne zahtevnosti, ki samo preverja ustreznost rešitve. Očitno torej velja $P \subseteq NP$. Vprašanje, ali je razred NP dejansko večji od razreda P (in torej obstajajo problemi, ki so v $NP \setminus P$), je eno od najbolj aktualnih vprašanj na področju teorije kompleksnosti algoritmov in je še danes odprto. Naj povemo še to, da imajo dosedaj znani algoritmi, ki rešijo tiste probleme iz razreda NP, za katere (zaenkrat) ne znamo presoditi, če so tudi v P (oziroma pokazati da niso), eksponentno časovno zahtevnost.

4.2 NP-polni problemi in neodvisnostno število grafa

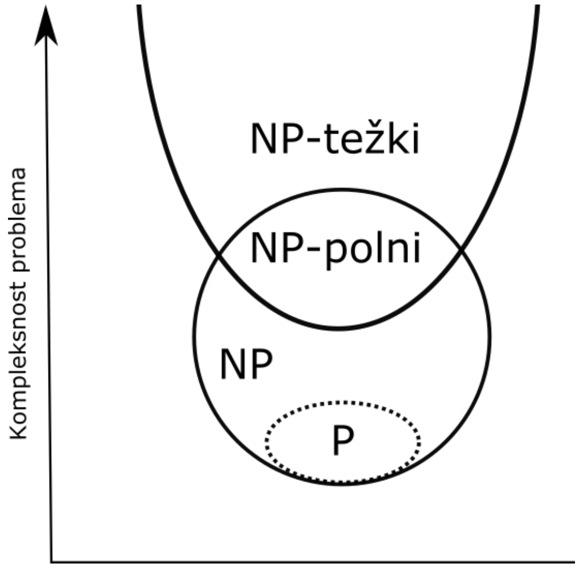
Preden spoznamo razred NP-polnih problemov, poglejmo kaj pomeni (polinomska) prevedba enega problema na drug problem.

Naj bosta X in Y odločitvena problema. Pravimo, da problem X polinomsko prevedemo na problem Y, če obstaja funkcija f, ki je izvedljiva v polinomskem času (glede na velikost vhodnega problema) in kateri koli primer problema X prevede (oziroma preslika) v primer problema Y na način, da je x_1 primer problema X, na katerega odgovorimo z DA natanko tedaj, ko je $f(x_1)$ primer problema Y, na katerega odgovorimo z DA.

Spomnimo so zgleda sestavljanja šolskega tekmovanja iz prejšnjega poglavja. Problem smo rešili na dva načina. Najprej smo v grafu Γ iskali največjo neodvisnostno množico, potem pa v njegovem komplementu Γ^c še kliko največje velikosti. V obeh primerih je bil naš odgovor 2. Problem neodvisnostnega števila smo že predstavili kot odločitveni problem, to pa lahko naredimo tudi s problemom iskanja največje klike (v nekem grafu Γ). Zanima nas, ali dani graf Γ premore kliko velikosti k. Če bi že v prejšnjem poglavju problem neodvisnostnega števila "obravnavali" kot odločitveni problem, bi nas zanimalo, ali obravnavani graf Γ premore neodvisnostno množico velikosti 2 in odgovor bi bil, jasno, DA. Odgovor bi bil enak, če bi se vprašali, ali njegov komplement Γ^c premore kliko velikosti 2. Ker lahko z algoritmom polinomske časovne zahtevnosti graf "preoblikujemo" v njegov komplement, se problem iskanja neodvisnostne množice lahko v polinomskem času prevede v problem največje klike. Naj povemo še to, da nam dejstvo, da lahko problem X v polinomskem času prevedemo na problem Y pove, da je Y (v algoritmičnem smislu) vsaj tako zahteven kot problem X (lahko pa tudi bolj).

Če je X problem, na katerega lahko v polinomskem času prevedemo vsak problem iz razreda NP, zanj rečemo, da je NP-težek, če pa dodatno velja še $X \in NP$, pa da je NP-poln.

Slika 4.1 lepo prikazuje vse razrede problemov, ki jih omenjamo v tem magistrskem delu. Bralca opozorimo, da je slika korektna le ob predpostavki $P \neq NP$. Za poljuben NP-poln problem velja, da se vanj polinomsko prevedejo vsi problemi iz NP. To pomeni, da je za dokaz enakosti $P = NP$ dovolj, da poiščemo algoritem polinomske časovne zahtevnosti, ki vrne iskano rešitev za samo en problem razreda NP-polnih problemov. Ker do danes takega algoritma še niso našli, velja splošno



Slika 4.1: Razredi problemov ob predpostavki $P \neq NP$.

prepričanje, da ta ne obstaja. A kot rečeno, tudi to (še) ni dokazano.

Kot smo že zapisali, želimo v tem poglavju bralcu pokazati, da je problem neodvisnostne množice res NP-poln. Da bi to naredili, moramo pokazati, da je problem vsebovan v razredu NP, hkrati pa mora biti vsebovan tudi v razredu NP-težkih problemov. Da pokažemo, da je naš problem NP-težek, je zaradi lepih lastnosti NP-polnih problemov dovolj najti en sam konkreten primer NP-polnega problema, ki se polinomsko prevede nanj. V ta namen bomo navedli enega najbolj znanih rezultatov v svetu teoretičnega računalništva, to je *Izrek Cook-Levin* (izrek 4.1). Dokaza v tem magistrskem delu ne navajamo, bralec pa si ga lahko ogleda v [5]. Še prej pa moramo predstaviti najbolj znan NP-poln problem, to je problem SAT, ki ga izrek 4.1 omenja, in še nekaj dodatne teorije, ki je potrebna za razumevanje problema SAT.

Spremenljivkam, ki zasedajo samo vrednost 0 ali 1, pravimo Booleove spremenljivke. Najbolj standardni operatorji, ki računajo s temi spremenljivkami, so negacija, $\wedge$ (operator IN oziroma konjunkcija) in $\vee$ (operator ALI oziroma disjunkcija). Predstavljeni so v takem vrstnem redu, kakršno imajo prednost pri računanju. Kako le-ti računajo (oziroma delujejo na spremenljivke), prikazujeta tabeli 4.1 in 4.2. Izrazu, sestavljenemu iz samih Booleovih spremenljivk, pravimo izjavni izraz. Če na spremenljivke (in/ali njihove negacije) izjavnega izraza deluje izključno operator $\vee$, temu izrazu pravimo osnovna disjunkcija. Osnovna disjunkcija je torej disjunkcija Booleovih spremenljivk (in/ali njihovih negacij). Če je izjavni izraz zapisan kot konjunkcija osnovnih disjunkcij, kar pomeni, da so členi "ločeni" z operatorjem $\wedge$, vsak člen pa je osnovna disjunkcija, pravimo, da je zapisan v normalni konjunktivni obliki. Primer takšnega izraza je na primer $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_3)$.

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Tabela 4.1: Delovanje logičnega operatorja negacija.

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Tabela 4.2: Delovanje logičnih operatorjev konjunkcija in disjunkcija.

Problem SAT

Problem izpolnljivosti izjavnih izrazov (angl. boolean satisfiability problem - krajše SAT), je naslednji odločitveni problem. Naj bo dan nek izjavni izraz v normalni konjunktivni obliki. Vprašanje se glasi, ali lahko nastavimo vrednosti vsake posamezne spremenljivke x_i, ki nastopa v tem izjavnem izrazu (oziroma v njem nastopa njena negacija $\bar{x}_i$), tako, da izjavni izraz, za ta nabor vrednosti teh spremenljivk, zavzame vrednost 1. Oglejmo si konkreten zgled.

Za dane vhodne podatke nas zanima, ali lahko nastavimo vrednost spremenljivk na 0 in 1 tako, da bo imel izjavni izraz vrednost 1?
Vhodni podatek: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_3)$.
Izhodni podatek: DA.
V tabeli 4.3 je razvidno, za katere vrednosti spremenljivk x_1, x_2, x_3 in x_4 to velja.

Izrek 4.1 (Izrek Cook-Levin)**.** *SAT je NP-poln problem.*

Dokaz tega dejstva je omogočil velik preboj v svetu teoretičnega računalništva. Problem SAT je prvi za katerega je bilo dokazano, da je NP-poln. Brez izreka 4.1 bi bilo NP-polnost ostalih problemov bistveno težje utemeljiti, saj nebi imeli nobenega NP-polnega problema, ki bi ga lahko prevedli na trenutno obravnavani problem in s tem dokazali, da je NP-poln. Spoznajmo še poenostavljeno različico problema SAT, to je problem 3-SAT.

Problem 3-SAT

Naj bo dan izjavni izraz v normalni konjunktivni obliki, kjer v vsaki osnovni disjunkciji nastopajo največ 3 spremenljivke (in/ali njihove negacije). Sprašujemo se isto kot pri problemu SAT, torej ali lahko nastavimo vrednosti vsake posamezne spremenljivke x_i (ali njene negacije $\bar{x}_i$) tako, da izjavni izraz za ta nabor vrednosti teh spremenljivk zavzame vrednost 1. Izjavni izraz za 3-SAT je tako na primer $(x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{x}_8) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_6 \vee x_7) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_8 \vee \bar{x}_3)$. Bralec naj se sam prepriča,

x_1	x_2	x_3	x_4	$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_3)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Tabela 4.3: Vrednost izjavnega izraza $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_3)$ za različne vrednosti spremenljivk x_1, x_2, x_3 in x_4.

da ima izraz res vrednost 1, če vrednosti spremenljivk nastavimo (na primer) takole: $x_1 \sim 1$, $x_2 \sim 0$, $x_3 \sim 1$, $x_4 \sim 1$, $x_5 \sim 1$, $x_6 \sim 1$, $x_7 \sim 1$ in $x_8 \sim 1$.

Izrek 4.2. *3-SAT je NP-poln problem.*

Dokaza izreka 4.2 v tem magistrskem delu prav tako ne navajamo, bralec pa si ga lahko ogleda v [5]. S tem preidemo do glavnega dela tega poglavja - pokazati, da je problem neodvisnostne množice NP-poln. To dejstvo zapišemo v naslednjem izreku (izrek 4.3). Še enkrat poudarimo, da problem neodvisnostne množice sprašuje po tem, ali dan graf premore neodvisnostno množico moči k. Dokaz izreka poteka v dveh delih. Najprej pokažemo, da je ta problem vsebovan v razredu NP, potem pa še, da je NP-težek.

Pred navedbo izreka dodajmo še naslednji komentar. Vhodni podatek za problem 3-SAT je izjavni izraz, zapisan v normalni konjunktivni obliki, kjer v vsakem členu nastopajo največ 3 spremenljivke (in/ali njihove negacije). Osnovna disjunkcija je torej lahko sestavljena tudi z manj kot tremi spremenljivkami. V dokazu privzamemo, da ima vsaka osnovna disjunkcija natanko tri spremenljivke, zato moramo pokazati, kako lahko osnovno disjunkcijo z manj kot tremi spremenljivkami preoblikujemo v njej ekvivalentno z natanko tremi spremenljivkami. Spomnimo se, kako deluje operator $\vee$ (tabela 4.2) in si oglejmo tabelo 4.4.

Če osnovna disjunkcija vsebuje manj kot tri spremenljivke (osnovne ali negirane), ji lahko dodamo isto spremenljivko, ki v njej že nastopa in s tem čisto nič ne spremenimo "vrednosti" posamezne osnovne disjunkcije (in s tem tudi ne vrednosti izraza

x	$\bar{x}$	$x \vee x$	$\bar{x} \vee \bar{x}$
0	1	0	1
1	0	1	0

Tabela 4.4: Delovanje logičnega operatorja $\vee$ na isto spremenljivko.

v katerem osnovna disjunkcija nastopa). Če na primer v izjavnem izrazu nastopa osnovna disjunkcija $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$ jo lahko preoblikujemo v $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1)$ ali $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2)$.

Izrek 4.3. *Problem neodvisnostne množice je NP-poln problem.*

Dokaz. Pokažimo najprej, da je problem neodvisnostne množice vsebovan v razredu NP. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf in $S \subseteq V$ podmnožica množice vozlišč V velikosti k, za katero želimo preveriti, ali je neodvisnostna. Algoritem, ki preverja, ali je S neodvisnostna množica, mora za vsak par vozlišč iz S preveriti, ali med njima obstaja povezava (oziroma za vsako vozlišče $v \in S$ preveriti, ali je povezano s katerim drugim vozliščem iz S). Algoritem je torej polinomske časovne zahtevnosti $O(k^2)$, saj je $|S| = k$.

Sedaj pokažimo, da je problem neodvisnostne množice NP-težek. To dosežemo tako, da problem 3-SAT s polinomsko prevedbo prevedemo na obravnavani problem. Naj bo $X = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k$ izjavni izraz, kjer je vsak člen C_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, sestavljen kot disjunkcija natanko treh spremenljivk x_i (ali njihovih negacij $\bar{x}_i$). Izjavnemu izrazu X priredimo pripadajoči graf Γ po naslednjem postopku:

1. Za vsak $i \in \{1, 2, ..., k\}$ vsaki spremenljivki, ki nastopa v C_i, priredimo svoje vozlišče in ga poimenujemo po tej spremenljivki. Bralca opozorimo, da se torej lahko zgodi, da ima več vozlišč isto ime (ker predstavljajo isto spremenljivko), vendar to ne pomeni, da gre za ista vozlišča, saj ista spremenljivka lahko pripada večim različnim členom izjavnega izraza. Iz opisanega sledi, da ima graf $3 \cdot k$ vozlišč.

2. Vsa vozlišča, ki pripadajo istemu členu izjavnega izraza X, povežemo med seboj. Dobimo k polnih grafov reda 3.

3. Med seboj povežemo še vsa naslednja vozlišča - za vsak i vsako pojavitev vozlišča x_i povežemo z vsako pojavitvijo vozlišča $\bar{x}_i$ (vendar le v primeru, če povezava med poljubnima takima vozliščema še ne obstaja - graf nima dvojnih povezav).

Trdimo naslednje:
Izjavni izraz X lahko zavzame vrednost 1 natanko tedaj, ko pripadajoči graf Γ, pridobljen po zgoraj opisanem postopku, premore neodvisnostno množico velikosti k.

$\Rightarrow$ Najprej predpostavimo, da izjavni izraz X za nek nabor vrednosti spremenljivk $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (in s tem njihovih negacij), zavzame vrednost 1. Za ta nabor vrednosti ima vsak člen C_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ zagotovo vrednost 1, kar pomeni, da ima tako vrednost tudi vsaj ena spremenljivka tega člena (x_i ali $\bar{x}_i$). Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf, pridobljen po zgoraj opisanem postopku. V podmnožico vozlišč $S \subseteq V$ poljubno izberemo po natanko eno vozlišče vsakega člena C_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, katerega pripadajoča spremenljivka ima pri omenjenem naboru vrednost 1 (x_i ali $\bar{x}_i$). Glede na prejšnji premislek to lahko naredimo. Velja $|S| = k$. Ko smo grafu dodajali povezave, smo to naredili v dveh korakih. Najprej smo med seboj povezali vsa vozlišča, ki ustrezajo spremenljivkam istega člena - dobili smo k grafov K_3. Na tem mestu ni težav, da bi bilo katerokoli vozlišče iz S povezano s katerim drugim vozliščem iz S, saj smo za vsak člen izbrali natanko eno vozlišče. V naslednjem koraku smo za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ med seboj povezali še vsako pojavitev vozlišča z imenom x_i z vsako pojavitvijo vozlišča z imenom $\bar{x}_i$ (razen, če je ta povezava v grafu že obstajala). Če je $x_i \sim 1$, ne more biti tudi $\bar{x}_i \sim 1$, saj negirana vrednost spremenljivke tej dodeli obratno vrednost (glej tabelo 4.1). Prav tako velja obratno. Ker pa v S dodajamo samo (nekatera) vozlišča, ki ustrezajo spremenljivkam z vrednostjo 1, tudi na tem mestu ni težav, da bi bili kateri dve vozlišči iz S med seboj povezani. Množica S je torej neodvisnostna množica grafa Γ in je velikosti k.

$\Leftarrow$ Sedaj predpostavimo, da Γ premore neodvisnostno množico moči k. Označimo jo s S. Slednja lahko - glede na konstrukcijo grafa Γ - vsebuje po največ eno vozlišče vsakega podgrafa K_3, ki pripadajo posameznim osnovnim disjunkcijam C_i. Še več, ker je $|S| = k$, mora vsebovati po natanko eno vozlišče vsakega od teh podgrafov K_3. Ker je S neodvisnostna množica, prav tako v nekem podgrafu K_3 ne sme vsebovati vozlišča x_i, obenem pa v nekem drugem podgrafu K_3 še negacijo $\bar{x}_i$, saj so ta vozlišča v grafu povezana. Spremenljivkam izjavnega izraza X lahko tako dodelimo vrednosti kot sledi. Za vsak $i \in \{1, 2, ..., n\}$ vrednost spremenljivke x_i določimo takole:

(*i*) *če je vsaj ena pojavitev vozlišča x_i v S, je $x_i \sim 1$,*

(*i*) *če je vsaj ena pojavitev vozlišča $\bar{x}_i$ v S, je $x_i \sim 0$,*

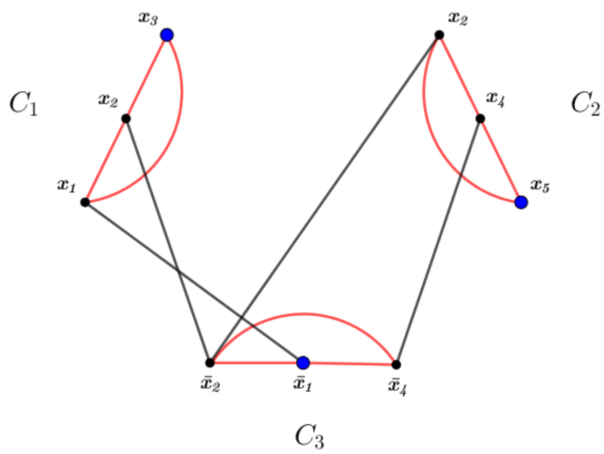
(*iii*) *če v S ni nobene pojavitve vozlišča x_i ali $\bar{x}_i$, vrednost x_i izberemo poljubno.*

X je zapisan v normalni konjunktivni obliki, kar pomeni, da mora imeti vsaj ena spremenljivka vsake osnovne disjunkcije vrednost 1. To smo dosegli s prvim in drugim pogojem, zato je popolnoma vseeno, kakšne vrednosti dodelimo spremenljivkam, ki niso vsebovane v S. Izjavni izraz X bo zasedel vrednost 1 ne glede na te vrednosti.

Pokazati je treba še, da je prevedba res izvedljiva v polinomskem času. Poljuben vhodni podatek za 3-SAT je torej izjavni izraz $X = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k$, kjer je vsak člen C_i sestavljen iz natanko treh spremenljivk x_i (in/ali njenih negacij $\bar{x}_i$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$). V vsakem takem izrazu skupno nastopa torej $3k$ spremenljivk. Pripadajoči graf, lahko ga poimenujemo $\Gamma(X)$, ima natanko $3k$ vozlišč. Na tem mestu torej ni težav, da prevedba ne bi bila polinomske časovne zahtevnosti. V $\Gamma(X)$ je poljubno vozlišče lahko povezano z največ $3(k-1)+2 = 3k-1$ vozlišči. Ker vsakemu od $3k$ vozlišč dodelimo največ $3k-1$ povezav, je prevedba polinomske časovne zahtevnosti.

$\square$

Za konec si oglejmo še konkreten zgled konstrukcije grafa. Naj bo $X = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$ izjavni izraz. Pripadajoči graf je prikazan na sliki 4.2. Bralec lahko sam preveri, da ima X vrednost 1 za $x_3 \sim 1$, $x_5 \sim 1$ in $\bar{x}_1 \sim 1$ (oziroma $x_1 \sim 0$), pri čemer sta vrednosti x_2 in x_4 poljubni. Vozlišča, ki v tem grafu ustrezajo izbranim spremenljivkam, predstavljajo neodvisnostno množico.



Slika 4.2: Prevedba izjavnega izraza na graf z neodvisnostno množico.

Poglavje 5

Družina posplošenih Petersenovih grafov in njeno neodvisnostno število

To poglavje je poleg prejšnjega najpomembnejše poglavje tega magistrskega dela. Namenjeno je teoretični izpeljavi neodvisnostnega števila za nekatere predstavnike družine posplošenih Petersenovih grafov. Najprej podamo definicijo grafov te družine in navedemo nekaj rezultatov, ki zanje veljajo. Pri tem izhajamo iz [11] in [16]. V drugem delu poglavja za nekatere predstavnike te družine teoretično določimo njihovo neodvisnostno število. V tretjem poglavju, natančneje v razdelku 3.1, smo se že srečali s teoretično izpeljavo neodvisnostnega števila nekaterih znanih družin, vendar je bila le-ta za te družine relativno lahka naloga. V tem poglavju se bralec lahko prepriča, da kljub temu, da je sama konstrukcija posplošenih Petersenovih grafov precej enostavna, določitev neodvisnostnega števila za te grafe ni preprosta naloga. Pravzaprav zaenkrat neodvisnostno število poljubnega posplošenega Petersenovega grafa sploh še ni znano. Znano je le za določene poddružine, ki se jim bomo posvetili tudi mi. Ločeno obravnavamo pet različnih skupin te družine in sicer $GP(n,k)$ za $k \in \{1,2,3,4,5\}$ pri poljubnem n. Pri tem izhajamo iz literature [1], [4], [16] in [22].

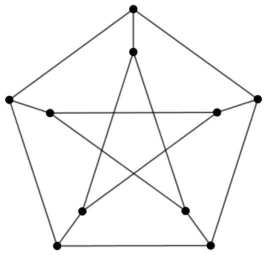
5.1 Družina posplošenih Petersenovih grafov

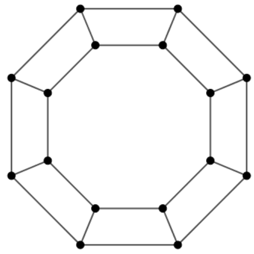
Definicija 5.1 (Posplošeni Petersenovi grafi $GP(n,k)$)**.** Naj bo $n \geq 3$ naravno število in naj bo $1 \leq k \leq n-1$. Posplošeni Petersenov graf $GP(n,k)$ je tedaj graf reda $2n$ z množico vozlišč

$$V = \{u_i \ : \ i \in \mathbb{Z}_n\} \ \cup \ \{v_i \ : \ i \in \mathbb{Z}_n\}$$

in sosednostmi naslednjih oblik: $u_i \sim v_i$, $u_i \sim u_{i\pm1}$, $v_i \sim v_{i\pm k}$ za $\forall i \in \mathbb{Z}_n$.

Opomba. Kot zanimivost omenimo, da je družina posplošenih Petersenovih grafov ime dobila po slavnem Petersenovem grafu $GP(5,2)$, ki ga je preučeval danski matematik Julius Petersen.





Slika 5.1: Petersenov graf $GP(5,2)$ in posplošen Petersenov graf $GP(8,1)$.

Dogovor. Dogovorimo se, da bomo vozlišča tipa u_i poimenovali zunanja vozlišča, vozlišča tipa v_i pa notranja (zakaj takšno poimenovanje, je razvidno iz konkretnih upodobitev grafov GP(5,2) in GP(8,1) na sliki 5.1). Podmnožico vozlišč grafa $GP(n,k)$, ki vsebuje samo vsa zunanja vozlišča, bomo označili z V_u, tisto, ki pa vsebuje samo vsa notranja, pa z V_v. Podobno povezavam tipa $u_i u_{i\pm 1}$ pravimo zunanje, povezavam tipa $v_i v_{i\pm k}$ pa notranje povezave. Povezavam tipa $u_i v_i$ pravimo prečke. Cikel, ki ga tvorijo vse zunanje povezave, bomo poimenovali zunanji cikel, vse tiste, ki jih tvorijo izključno notranje povezave, pa notranji cikli. Na zunanjih vozliščih induciran podgraf bomo poimenovali zunanji podgraf, na notranjih vozliščih induciran podgraf pa notranji podgraf.

Trditev 5.1. *Za poljubno naravno število $n \geq 3$ in poljuben $1 \leq k \leq n-1$ velja $GP(n,k) = GP(n,n-k)$.*

Dokaz. Vsako vozlišče v_i je povezano z v_{i+k} in v_{i-k}, v grupi $\mathbb{Z}_n$ pa je $n-k$ obrat elementa k, torej $n-k=-k$. Vsak v_i je potemtakem povezan z $v_{i+(n-k)} = v_{i-k}$ in $v_{i-(n-k)} = v_{i-(-k)} = v_{i+k}$, kar pomeni, da imata grafa $GP(n,k)$ in $GP(n,n-k)$ natanko iste povezave.

□

Opomba. Zaradi te trditve je pri sami definiciji posplošenih Petersenovih grafov smiselno privzeti $k \leq \frac{n}{2}$, oziroma kar $k < \frac{n}{2}$. V primeru, ko je n sodo število, je namreč $\frac{n}{2}$ sam sebi obrat, torej je v primeru, ko je $k = \frac{n}{2}$, vsako vozlišče v_i povezano samo z dvema drugima vozliščema (u_i in v_{i+k}) in tak graf ni več regularen. Ker nas pri študiju posplošenih Petersenovih grafov običajno zanimajo le regularni (torej kubični) grafi, privzamemo, da je $k < \frac{n}{2}$.

Zlahka opazimo dva očitna avtomorfizma grafa $GP(n,k)$, namreč:

$$\rho : u_i \mapsto u_{i+1} \ , \ v_i \mapsto v_{i+1} \ ; \ i \in \mathbb{Z}_n$$

$$\tau : u_i \mapsto u_{-i} \ , \ v_i \mapsto v_{-i} \ ; \ i \in \mathbb{Z}_n$$

Lahko si predstavljamo, da avtomorfizem ρ graf vrti, τ pa zrcali čez izbrano os.

5.2 Neodvisnostno število nekaterih predstavnikov družine GP(n,k)

Preden se lotimo ločene obravnave posameznih poddružin, ki smo jih navedli v uvodnem delu tega poglavja, podajmo zgornjo mejo za neodvisnostno število poljubnega predstavnika družine posplošenih Petersenovih grafov.

Lema 5.2. *Naj bo $n \geq 3$ naravno število in $1 \leq k < \frac{n}{2}$. Tedaj velja*

$$\alpha(GP(n,k)) \leq \begin{cases} n & \text{, če je } n \text{ sodo,} \\ n-1 & \text{, če je } n \text{ liho.} \end{cases}$$

Dokaz. Dokaz sledi neposredno iz konstrukcije družine. Naj bo S poljubna največja neodvisnostna množica grafa $GP(n,k)$. Ker je zunanji podgraf cikel dolžine n, glede na izrek 3.4 lahko trdimo, da je $|S \cap V_u| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Dolžino notranjih ciklov (oziroma notranjega cikla) določa red elementa k v grupi $\mathbb{Z}_n$ (kar smo v drugem poglavju označili kot $r(k)$). Če je $D(n,k) = 1$, imamo torej en sam cikel dolžine n in očitno velja isti razmislek kot za zunanji podgraf ($|S \cap V_v| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). Če pa je $D(n,k) \neq 1$, je notranji podgraf sestavljen iz $D(n,k)$ ločenih ciklov dolžine $r(k) = \frac{n}{D(n,k)}$. V tem primeru vsak izmed njih vsebuje največ $\lfloor \frac{\frac{n}{D(n,k)}}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2D(n,k)} \rfloor$ vozlišč množice S, torej S zagotovo ne bo vsebovala več kot $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ notranjih vozlišč. Zato lahko rečemo, da za poljubnega predstavnika posplošenih Petersenovih grafov velja $|S \cap V_v| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Neodvisnostno število je enako moči poljubne največje neodvisnostne množice vozlišč. Ker je S poljubna taka množica, je $\alpha(GP(n,k)) \leq |S \cap V_u| + |S \cap V_v|$, oziroma $\alpha(GP(n,k)) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Če je n sodo število, torej dobimo neenakost $\alpha(GP(n,k)) \leq n$, če je n liho, pa $\alpha(GP(n,k)) \leq n-1$.

□

Izrek 5.3. *Naj bo $n \geq 3$ naravno število in $k \leq \frac{n}{2}$. Graf $GP(n,k)$ je dvodelen natanko tedaj, ko je n sodo in k liho število.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Predpostavimo najprej, da je $GP(n,k)$ dvodelen graf. Po izreku 2.3 ne premore lihih ciklov. Zunanja vozlišča tvorijo n-cikel, torej mora biti n sodo število. Isti izrek (2.3) pravi tudi, da lahko vozlišča dvodelnega grafa obarvamo z dvema barvama tako, da nobeni dve vozlišči iste barve nista sosednji. Ker je zunanji podgraf cikel sode dolžine, lahko na primer zunanja vozlišča sodega indeksa, $u_{2i}, i \in \mathbb{Z}_n$, obarvamo z belo barvo, zunanja vozlišča lihega indeksa, $u_{2i+1}, i \in \mathbb{Z}_n$, pa s črno. To pomeni, da so notranja vozlišča $v_{2i}, i \in \mathbb{Z}_n$, nujno črna, notranja vozlišča $u_{2i+1}, i \in \mathbb{Z}_n$, pa bela. Torej je v notranjem podgrafu grafa $GP(n,k)$ poljubno vozlišče sodega indeksa povezano z vozliščema lihega indeksa (in poljubno vozlišče lihega indeksa z vozliščema sodega). Za vsak sodi indeks $2i$ je torej indeks $2i+k$ lih, za vsak lihi indeks $2i+1$ pa je indeks $(2i+1)+k$ sod. Iz tega sledi, da je k liho število.

($\Leftarrow$) Predpostavimo sedaj, da je n sodo in k liho število. Če premore ustrezno 2-barvanje vozlišč, je $GP(n,k)$ po izreku 2.3 dvodelen graf. Ker je n sodo število, lahko zunanja vozlišča sodega indeksa obarvamo na primer s črno, tista lihega indeksa pa z belo barvo. Z notranjimi vozlišči naredimo ravno obratno, torej so vozlišča lihega indeksa črna, sodega indeksa pa bela. Tako barvanje je ustrezno zaradi dejstva, da je k liho število, saj je zato poljubno notranje vozlišče lihega indeksa, torej črno vozlišče, "na obeh straneh" povezano z vozlišči sodega indeksa, ki smo jih obarvali z belo. S tem je izrek dokazan.

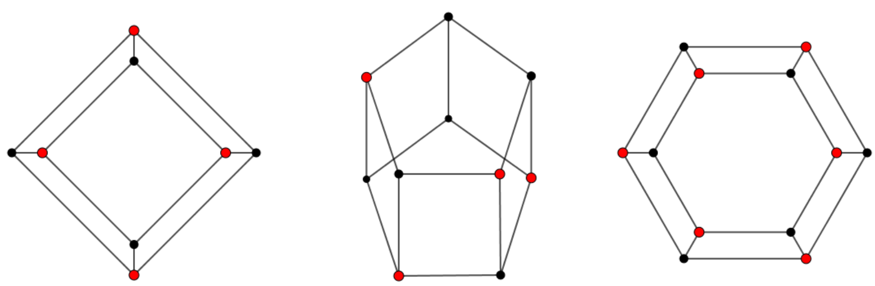
□

Opomba. Lema 5.2 nam pove, da je moč največje neodvisnostne množice za grafe $GP(n,k)$, kjer je n sodo število, največ n, izrek 5.3 pa, da je graf $GP(n,k)$ za sodi n in lihi k vedno dvodelen. Pri dvodelnem razbitju množice vozlišč gre v tem primeru za razbitje na dva enako velika dela $(n+n)$, kar pomeni, da ima tak graf neodvisnostno množico velikosti n (vzamemo kar en cel del dvodelnega razbitja). S tem smo dokazali naslednjo trditev.

Trditev 5.4. *Za vsako sodo naravno število $n \geq 4$ in vsako liho število $1 \leq k < \frac{n}{2}$ je $\alpha(GP(n,k)) = n$.*

5.2.1 GP(n,1)

Prva in tudi najbolj trivialna skupina, ki jo obravnavamo, so grafi $GP(n,1)$. Predstavnike te skupine imenujemo prizme, kar glede na njihovo konstrukcijo ni presenetljivo. Nekaj primerov (in njihove največje neodvisnostne množice) si bralec lahko ogleda na sliki 5.2. Da so to res njihove največje neodvisnostne množice, potrjuje izrek 5.5.



Slika 5.2: Primeri največjih neodvisnostnih množic v grafih $GP(4,1)$, $GP(5,1)$ in $GP(6,1)$.

Zgornjo mejo neodvisnostnega števila za poljubnega predstavnika posplošenih Petersenovih grafov, torej tudi za grafe $GP(n,1)$, nam podaja lema 5.2. Da je za grafe, obravnavane v tem razdelku, to kar prava vrednost neodvisnostnega števila, je precej očitno, a kljub temu podajmo naslednji izrek in njegov dokaz.

Izrek 5.5. *Naj bo $n \geq 3$ naravno število. Tedaj velja*

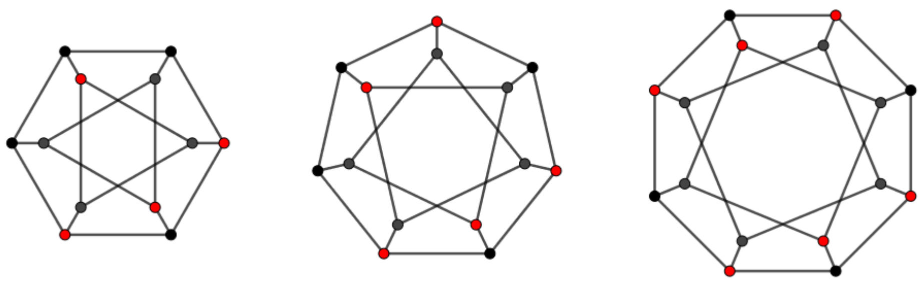
$$\alpha(GP(n,1)) = \begin{cases} n & \text{, če je } n \text{ sodo,} \\ n-1 & \text{, če je } n \text{ liho.} \end{cases}$$

Dokaz. Če je n sodo število, lahko uporabimo kar trditev 5.4. V nadaljevanju dokaza torej privzemimo, da je n liho število. Graf $GP(n, 1)$ je v tem primeru sestavljen iz dveh lihih ciklov, ki ju povezujejo prečke. Naj bo $A = \{u_{2i} : 0 \leq i < \frac{n-1}{2}\}$ množica moči $\frac{n-1}{2}$ na zunanjih vozliščih in $B = \{v_{2i+1} : 0 \leq i < \frac{n-1}{2}\}$ množica iste moči na notranjih vozliščih. Očitno je $A \cap B = \emptyset$. Ker pa A premore vozlišča sodega indeksa, B pa lihega, lahko trdimo tudi to, da je $A \cup B$ neodvisnostna množica. Ker je $|A| + |B| = n - 1$, torej velja $\alpha(GP(n, 1)) \geq n - 1$. Glede na lemo 5.2 je $\alpha(GP(n, 1)) \leq n - 1$, zato je $\alpha(GP(n, 1)) = n - 1$.

□

5.2.2 GP(n,2)

Druga obravnavana skupina posplošenih Petersenovih grafov je $GP(n, 2)$. Za začetek si na sliki 5.3 oglejmo nekaj predstavnikov in primere njihovih največjih neodvisnostnih množic (to dokazuje izrek 5.10). V tej skupini je seveda tudi Petersenov graf $GP(5, 2)$, ki smo ga predstavili že na sliki 5.1.



Slika 5.3: Primeri največjih neodvisnostnih množic v grafih $GP(6, 2)$, $GP(7, 2)$ in $GP(8, 2)$.

Lema 5.6. *Naj bo $n \geq 3$ naravno število in naj bo S poljubna največja neodvisnostna množica vozlišč grafa $GP(n, 2)$. Tedaj za vsako podmnožico vozlišč*

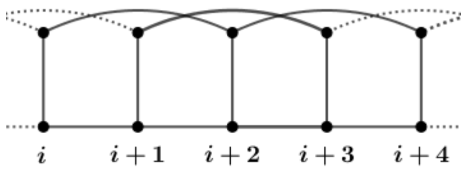
$$V_i = \{u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_{i+4}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}\},$$

$i \in \mathbb{Z}_n$, velja $|S \cap V_i| \leq 4$.

Poljubna podmnožica vozlišč V_i, $i \in \mathbb{Z}_n$, definirana kot v lemi 5.6, predstavlja blok desetih vozlišč, ki ga lahko vidimo na sliki 5.4.

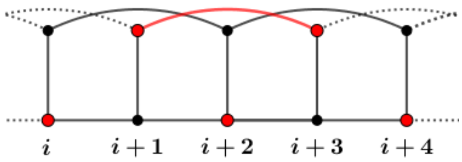
Lema 5.6 nam pove, da poljubna največja neodvisnostna množica S iz vsakega takega bloka vozlišč vzame največ 4 vozlišča (ki so seveda med seboj neodvisna).

Dokaz. Naj bo $S_i = S \cap V_i$, $i \in \mathbb{Z}_n$, kjer je V_i blok vozlišč, definiran kot zgoraj. Ker S za noben i ne vsebuje vozlišča u_i in vozlišča v_i hkrati ($\{u_i v_i\}$ so ravno povezave, imenovane prečke), poljuben par vozlišč $\{u_j, v_j\}$, $i \leq j < i + 5$, ni v celoti vsebovan niti v S_i. Izrek dokažemo s protislovjem. Predpostavimo, da za nek blok V_i velja $|S_i| \geq 5$. Po zgornjem premisleku sledi, da je v tem primeru $|S_i| = 5$ in da za vsak



Slika 5.4: Blok desetih vozlišč.

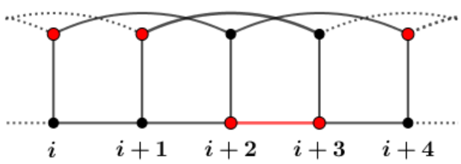
par vozlišč $u_j, v_j \in V_i$, $i \leq j < i+5$, velja, da je v S_i vsebovano natanko eno od teh dveh vozlišč. Glede na konstrukcijo grafa $GP(n,2)$ (in podmnožice vozlišč V_i) S_i vsebuje največ 3 zunanja in največ 3 notranja vozlišča. Za izbor treh med seboj neodvisnih zunanjih vozlišč imamo samo eno možnost. Prikazuje jo slika 5.5, gre pa za vozlišča $\{u_i, u_{i+2}, u_{i+4}\}$.



Slika 5.5: Izbor treh zunanjih vozlišč.

Zaradi zgoraj omenjenega dejstva, da S_i ne premore vozlišči v_j in u_j hkrati, $i \leq j < i+5$, bi morala množica S_i potem vsebovati ravno še vozlišči v_{i+1} in v_{i+3}, ki pa sta povezani. S tem pridemo do protislovja, saj smo na začetku privzeli, da je množica S neodvisnostna.

Obravnavajmo še možnost, ko S_i vsebuje tri notranja vozlišča. Za to imamo dva možna izbora vozlišč in sicer $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+4}\}$ ali pa $\{v_i, v_{i+3}, v_{i+4}\}$. Slika 5.6 prikazuje prvi omenjen izbor.



Slika 5.6: En možen izbor treh notranjih vozlišč.

Pri obeh izborih moramo v S_i dodati še dve vozlišči, da bo moči 5. Za prvi izbor sta to vozlišči u_{i+2} in u_{i+3}, ki sta v $GP(n,2)$ (v resnici v poljubnem grafu $GP(n,k)$) povezani vozlišči, kar je razvidno tudi na sliki 5.6. Za drugi izbor moramo dodati vozlišči u_{i+1} in u_{i+2}, ki sta prav tako (v poljubnem grafu $GP(n,k)$) povezani vozlišči. S tem pridemo do protislovja in lema je dokazana.

$\square$

Poljubna največja neodvisnostna množica grafa $GP(n,2)$, ki smo jo označili s S, torej na vsakem bloku desetih vozlišč V_i, $i \in \mathbb{Z}_n$, res vzame največ 4 vozlišča, to je $|S \cap V_i| \leq 4$. Kaj nam to pove o neodvisnostnem številu grafa $GP(n,2)$? Postavlja nam (novo) zgornjo mejo za predstavnike te skupine. Oglejmo si spodnjo lemo.

Lema 5.7. *Naj bo $n \geq 5$ naravno število. Tedaj velja $\alpha(GP(n,2)) \leq \lfloor \frac{4n}{5} \rfloor$.*

Dokaz. Naj bo S poljubna največja neodvisnostna množica grafa $GP(n,2)$. Lema 5.6 pravi, da je za poljuben $i \in \mathbb{Z}_n$ $|S \cap V_i| \leq 4$, kjer je množica V_i definirana kot v lemi 5.6. Zato lahko zapišemo $5|S| = \sum_{i=0}^{n-1} |S \cap V_i| \leq 4n$, saj smo v tej vsoti vsako vozlišče šteli natanko petkrat. Velikost množice S je torej največ $\frac{4n}{5}$, to je $|S| \leq \frac{4n}{5}$. Zaradi dejstva, da je $|S|$ naravno število, sledi $|S| \leq \lfloor \frac{4n}{5} \rfloor$, oziroma $\alpha(GP(n,2)) \leq \lfloor \frac{4n}{5} \rfloor$.

□

Bralec lahko opazi, da s pogojem $n \geq 5$ ne izpuščamo nobenega predstavnika te skupine, saj so, glede na naš dogovor, da je $k < \frac{n}{2}$, posplošeni Petersenovi grafi $GP(n,2)$ definirani le za $n \geq 5$. Z lemo 5.7 smo postavili novo zgornjo mejo za njihovo neodvisnostno število, sedaj pa preverimo, kako dobra je.

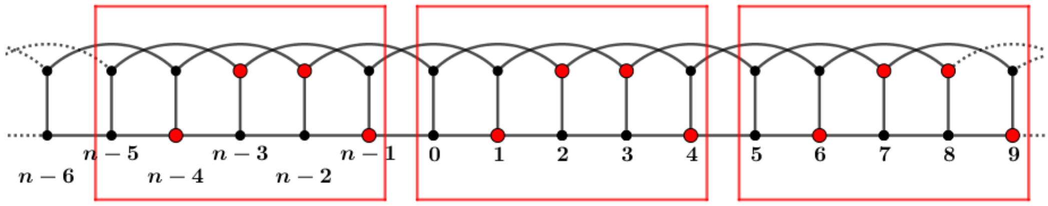
Lema 5.8. *Naj bo $n \geq 5$ naravno število. Zapišimo ga v obliki $n = 5 \cdot q + r$, $q \in \mathbb{N}$ in $r \in \{0,1,2,3,4\}$. Tedaj je*

$$S = \begin{cases} \{u_{i+1}, u_{i+4}, v_{i+2}, v_{i+3} : i \in \{0,5,\ldots,5(q-1)\}\}; & r = 0,1 \\ \{u_{i+1}, u_{i+4}, v_{i+2}, v_{i+3} : i \in \{0,5,\ldots,5(q-1)\}\} \cup \{u_{n-1}\}; & r = 2 \\ \{u_{i+1}, u_{i+4}, v_{i+2}, v_{i+3} : i \in \{0,5,\ldots,5(q-1)\}\} \cup \{u_{n-1}, v_{n-2}\}; & r = 3 \\ \{u_{i+1}, u_{i+4}, v_{i+2}, v_{i+3} : i \in \{0,5,\ldots,5(q-1)\}\} \cup \{u_{n-1}, u_{n-3}, v_{n-2}\}; & r = 4 \end{cases}$$

neodvisnostna množica grafa $GP(n,2)$.

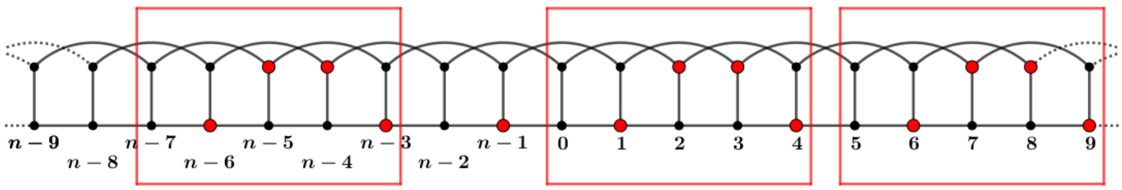
Preden lemo dokažemo, si oglejmo, kako je sploh sestavljena (neodvisnostna) množica S. Vozlišča grafa $GP(n,2)$ razdelimo na $q = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ blokov V_i, $i \in \{0,5,\ldots,5(q-1)\}$, po 10 vozlišč, v odvisnosti od ostanka r pa nam tako ostane še 0, 2, 4, 6 ali 8 vozlišč. Ta del bomo poimenovali ostanek grafa. Ostanek grafa torej predstavljajo tista vozlišča, ki ne pripadajo nobenemu izmed zgoraj izbranih blokov V_i. Če je na primer $r = 1$, sta v ostanku grafa ravno vozlišči u_{n-1} in v_{n-1}. V naslednjem koraku množici S dodelimo vozlišča $\{u_{i+1}, u_{i+4}, v_{i+2}, v_{i+3}\}$ iz vsakega bloka. Da so to, gledano izključno na vsak blok, res med seboj neodvisna vozlišča, je očitno. Na sliki 5.7 je shematično predstavljen graf oblike $GP(n,2)$, kjer je $r = 0$. Vozlišča, obarvana z rdečo, so vozlišča, ki so vsebovana v množici S, rdeči pravokotniki pa predstavljajo zgoraj izbrane bloke desetih vozlišč V_i. Za vse primere, kjer je $r > 1$, poleg vseh že omenjenih vozlišč, v S dodamo še dodatna vozlišča, ki so zapisana v lemi. Ta vozlišča izberemo iz ostanka grafa. Kar moramo preveriti je, ali je unija množice izbranih vozlišč vseh blokov, torej množica $\{u_{i+1}, u_{i+4}, v_{i+2}, v_{i+3} : i \in \{0,5,\ldots,5(q-1)\}\}$, skupaj z morebitnimi dodatnimi vozlišči v odvisnosti od ostanka r, še vedno neodvisnostna množica.

Dokaz. Obravnavamo različne primere glede na ostanek r. Naj bo $r = 0$. Za ta ostanek je množica S res neodvisnostna, kar je razvidno iz že omenjene slike 5.7, saj med vozlišči $\{u_{i+1}, u_{i+4}, v_{i+2}, v_{i+3}\}$ poljubnih dveh blokov desetih vozlišč V_i in $V_{i\pm5}$, $i \in \{0, 5, \ldots, 5(q-1)\}$, definiranih kot v lemi 5.6, ni povezave. Množica vozlišč $\{u_{i+1}, u_{i+4}, v_{i+2}, v_{i+3} : i \in \{0, 5, \ldots, 5(q-1)\}\}$ je torej neodvisnostna množica. V primeru, ko je $r = 1$, v množico $\{u_{i+1}, u_{i+4}, v_{i+2}, v_{i+3} : i \in \{0, 5, \ldots, 5(q-1)\}\}$ ne dodamo nobenega dodatnega vozlišča, le-ta pa še vedno ostaja neodvisnostna, saj prvo notranje vozlišče prvega bloka (torej vozlišče v_2) in zadnje notranje vozlišče zadnjega bloka $v_{5(q-1)+3} = v_{n-2}$ nista povezani. To pomeni, da je S neodvisnostna tudi za ostanek $r = 1$.



Slika 5.7: Neodvisnostna množica grafa $GP(n, 2)$, za r=0.

Naj bo $r = 2$. V tem primeru množici $\{u_{i+1}, u_{i+4}, v_{i+2}, v_{i+3} : i \in \{0, 5, \ldots, 5(q-1)\}\}$ dodamo le vozlišče u_{n-1}. Graf $GP(n, 2)$ za $r = 2$ shematično prikazuje slika 5.8, kjer rdeča vozlišča predstavljajo vozlišča v množici S. V ostanku imamo 4 vozlišča, v S pa izmed njih dodamo samo u_{n-1}. Ker to vozlišče ni povezano z nobenim vozliščem iz $\{u_{i+1}, u_{i+4}, v_{i+2}, v_{i+3} : i \in \{0, 5, \ldots, 5(q-1)\}\}$, med njimi pa tudi v tem primeru povezava ne obstaja, je S tudi za ostanek $r = 2$ neodvisnostna.

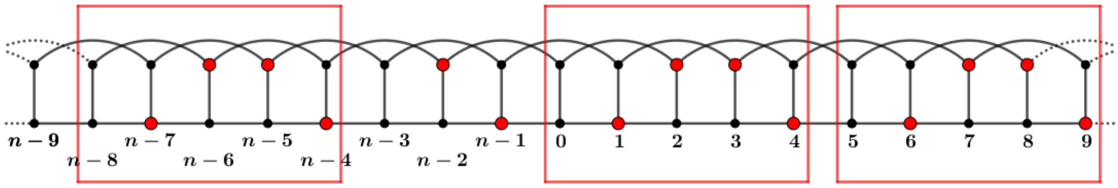


Slika 5.8: Neodvisnostna množica grafa $GP(n, 2)$, za r=2.

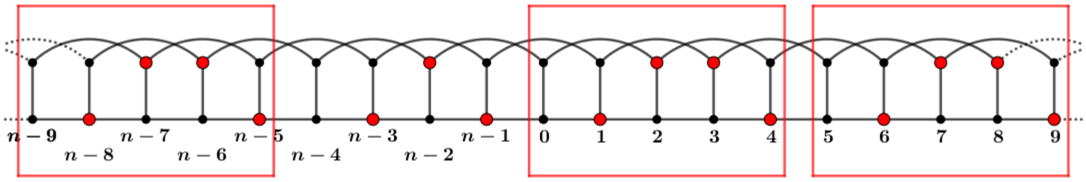
V resnici tudi za ostanka $r = 3$ in $r = 4$ ni težko videti, da je S res neodvisnostna množica. To prikazujeta sliki 5.9 in 5.10, podrobnosti pa prepuščamo bralcu. Ker je S res neodvisnostna za vsak ostanek r, je s tem lema dokazana.

□

Lema 5.9. *Naj bo $n \geq 5$ naravno število. Zapišimo ga v obliki $n = 5 \cdot q + r$, $q \in \mathbb{N}$ in $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Tedaj je neodvisnostna množica S grafa $GP(n, 2)$, definirana kot v lemi 5.8, velikosti $\lfloor \frac{4n}{5} \rfloor$.*



Slika 5.9: Neodvisnostna množica grafa $GP(n, 2)$, za r=3.



Slika 5.10: Neodvisnostna množica grafa $GP(n, 2)$, za r=4.

Dokaz. Iz konstrukcije množice S iz leme 5.8 je jasno, da je $|S| = 4q$, ko je r enak 0, sicer pa je $|S| = 4q + (r-1)$. Pokazati je torej treba, da je $4q + (r-1) = \lfloor \frac{4n}{5} \rfloor$ za vse štiri možnosti, ko je $r > 0$ (da tudi v primeru, ko je $r = 0$, velja $|S| = \lfloor \frac{4n}{5} \rfloor$, je očitno). Velja $\lfloor \frac{4n}{5} \rfloor = \lfloor \frac{4(5q+r)}{5} \rfloor = 4q + \lfloor \frac{4r}{5} \rfloor$. Očitno je $\lfloor \frac{4r}{5} \rfloor = 0$, v primeru, ko je r enak 1. Bralec pa se lahko prav tako direktno prepriča, da je $\lfloor \frac{4r}{5} \rfloor = r - 1$, za ostale vrednosti parametra r (torej $2 \leq r \leq 4$).

□

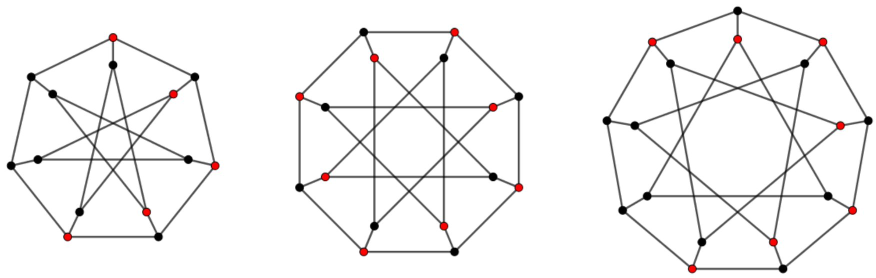
Izrek 5.10. *Naj bo $n \geq 5$ naravno število. Tedaj velja $\alpha(GP(n, 2)) = \lfloor \frac{4n}{5} \rfloor$.*

Dokaz. Dokaz sledi neposredno iz lem 5.7, 5.8 in 5.9. Lema 5.7 nam poda zgornjo mejo za moč neodvisnostne množice v grafu $GP(n, 2)$, ki je $\lfloor \frac{4n}{5} \rfloor$, lema 5.8 pa konstruira neodvisnostno množico S, za katero smo z lemo 5.9 pokazali, da je res velikosti $\lfloor \frac{4n}{5} \rfloor$. Zato lahko zapišemo $\lfloor \frac{4n}{5} \rfloor \leq \alpha(GP(n, 2)) \leq \lfloor \frac{4n}{5} \rfloor$, oziroma $\alpha(GP(n, 2)) = \lfloor \frac{4n}{5} \rfloor$.

□

5.2.3 GP(n,3)

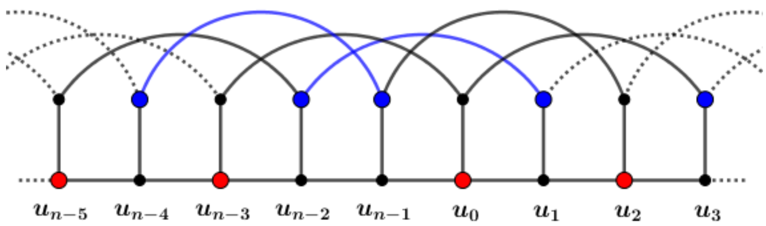
Tretja skupina posplošenih Petersenovih grafov, ki jo obravnavamo, je $GP(n, 3)$. Za začetek si na sliki 5.11 oglejmo nekaj predstavnikov te skupine. Rdeča vozlišča predstavljajo primer največje neodvisnostne množice. Da so navedene neodvisnostne množice res največje možne velikosti, potrjuje izrek 5.13. Bralca spomnimo, da lahko v primeru, ko je n sodo število, za določitev neodvisnostnega števila za grafe $GP(n, 3)$ uporabimo kar trditev 5.4. Zato se bomo v nadaljevanju posvetiti le primerom z lihim parametrom n.



Slika 5.11: Primeri največjih neodvisnostnih množic v grafih $GP(7,3)$, $GP(8,3)$ in $GP(9,3)$.

Lema 5.11. *Naj bo $n \geq 7$ liho število. Tedaj velja $\alpha(GP(n,3)) \leq n-2$.*

Dokaz. Naj bo S poljubna največja neodvisnostna množica grafa $GP(n,3)$. Lemo dokažemo s protislovjem in predpostavimo, da je $|S| = n-1$. Iz razmisleka iz dokaza leme 5.2 sledi, da mora v tem primeru (da je res $|S| = n-1$) veljati $|S \cap V_v| = \frac{n-1}{2}$ in $|S \cap V_u| = \frac{n-1}{2}$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $S \cap V_u = \{u_{2i} : 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\}$. Ta vozlišča so na sliki 5.12 obarvana z rdečo barvo. Potemtakem mora biti $S \cap V_v \subseteq \{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\} \cup \{v_{n-1}\}$. Ta vozlišča so na isti sliki obarvana z modro.



Slika 5.12: Zgornja meja neodvisnostnega števila v $GP(n,3)$.

Opazimo, da je $|\{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\} \cup \{v_{n-1}\}| = \frac{n-1}{2} + 1$, kar pomeni, da od teh $\frac{n+1}{2}$ vozlišč natanko eno ni vsebovano v S. Iz slike 5.12 je razvidno, da v grafu obstajata povezavi $v_{n-2}v_1$ in $v_{n-4}v_{n-1}$, zato je $|S \cap V_v| \leq \frac{n-1}{2} + 1 - 2$, oziroma $|S \cap V_v| \leq \frac{n-1}{2} - 1$, kar je v protislovju z $|S \cap V_v| = \frac{n-1}{2}$. S tem je lema dokazana. □

Za grafe $GP(n,3)$, kjer je n liho število, smo torej postavili novo zgornjo mejo neodvisnostnega števila. Če za njih obstaja neodvisnostna množica velikosti $n-2$, je s tem določena kar natančna vrednost neodvisnostnega števila. Oglejmo si naslednjo lemo.

Lema 5.12. *Naj bo $n \geq 7$ liho število. Tedaj je množica $S = \{u_{2i} : 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\} \cup \{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-5}{2}\}$ neodvisnostna množica grafa $GP(n,3)$.*

Dokaz. Na sliki 5.13 vidimo množico $S = \{u_{2i} : 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\} \cup \{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-5}{2}\}$, katere vozlišča so obarvana z rdečo barvo. Da med zunanjimi vozlišči in vozlišči tipa u_i in v_i ni povezav, je očitno. Vsa notranja vozlišča, ki jih premore množica S, so lihega indeksa, največji izmed njih pa je $n-4$. Velja $k = 3$, zato je za poljuben $j \in \mathbb{Z}_n$, kjer je $v_j \in S$, indeks $j+3$ manjši od n, to pa pomeni, da pri preverjanju, ali sta slučajno dve notranji vozlišči iz S sosednji, indeksov $(j+3)$ nikoli ni treba računati po modulu n. Ker je k liho število in je vsota dveh lihih števil vedno sodo število, so vsa notranja vozlišča $\{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-5}{2}\}$ zagotovo med seboj neodvisna. To pa pomeni, da je S neodvisnostna množica grafa $GP(n,3)$.

□

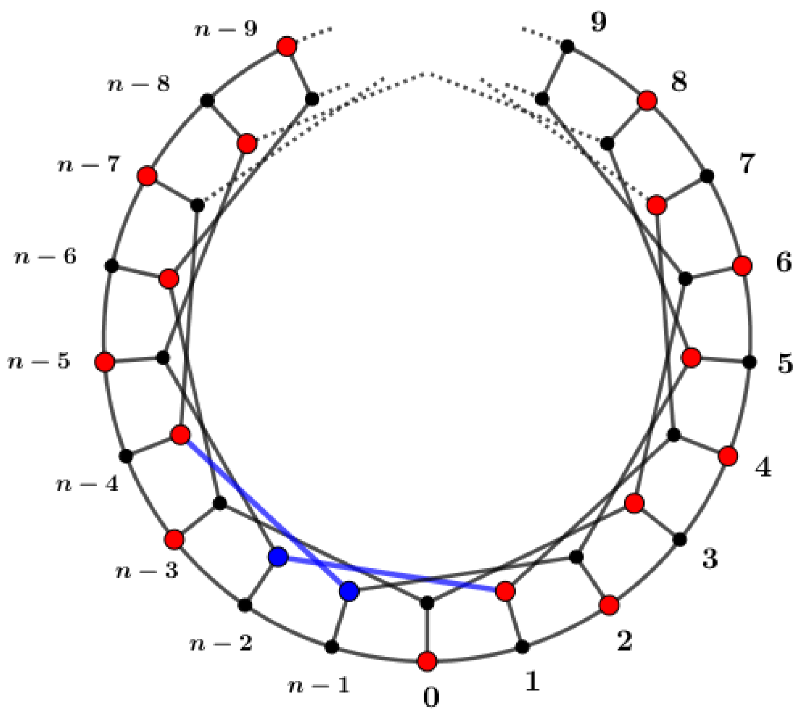
Ni težko videti, da je neodvisnostna množica S, predstavljena v lemi 5.12, velikosti $n-2$, saj vsebuje $\frac{n-1}{2}$ zunanjih in $\frac{n-3}{2}$ notranjih vozlišč. Dokaz naslednjega izreka se tako izpelje s pomočjo leme 5.11 in 5.12.

Izrek 5.13. *Naj bo $n \geq 7$ naravno število. Tedaj velja*

$$\alpha(GP(n,3)) = \begin{cases} n & \text{, če je } n \text{ sodo,} \\ n-2 & \text{, če je } n \text{ liho.} \end{cases}$$

Dokaz. Da za soda števila n res velja $\alpha(GP(n,3)) = n$, sledi neposredno iz trditve 5.4. Naj bo torej n liho število. Glede na lemo 5.11 velja $\alpha(GP(n,3)) \leq n-2$, glede na lemo 5.12 pa $\alpha(GP(n,3)) \geq n-2$. Torej je $\alpha(GP(n,3)) = n-2$.

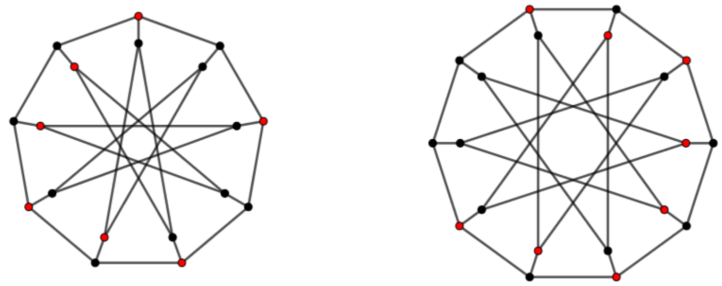
□



Slika 5.13: Neodvisnostna množica S v grafu $GP(n,3)$.

5.2.4 GP(n,4)

Četrta skupina posplošenih Petersenovih grafov, ki jo obravnavamo, je $GP(n,4)$. Na sliki 5.14 sta prikazana dva predstavnika te skupine, to sta grafa $GP(9,4)$ in $GP(10,4)$. V tem razdelku za poljuben graf te poddružine določimo zgornjo mejo za njegovo neodvisnostno število. Kot bomo videli v nadaljevanju, bomo uspeli pokazati, da je to tudi prava vrednost neodvisnostnega števila samo za nekatere predstavnike te poddružine, in sicer za grafe za katere je $n \not\equiv 4,6,7 \ (mod\ 8)$. Natančna vrednost neodvisnostnega števila za poljubnega predstavnika grafov $GP(n,4)$ namreč (še) ni določena, oziroma nismo našli literature, ki bi dokazovala nasprotno.



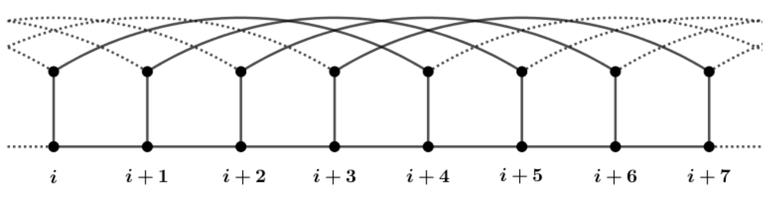
Slika 5.14: Primera največjih neodvisnostnih množic v grafih $GP(9,4)$ in $GP(10,4)$.

Lema 5.14. *Naj bo $n \geq 9$ naravno število in naj bo S poljubna največja neodvisnostna množica vozlišč grafa $GP(n,4)$. Tedaj za vsako podmnožico vozlišč $V_i = \{u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_{i+7}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{i+7}\}$, $i \in \mathbb{Z}_n$, velja $|S \cap V_i| \leq 8$.*

Spomnimo se, da smo v razdelku 5.2.2 v grafih $GP(n,2)$ obravnavali bloke V_i desetih vozlišč. V tem razdelku v grafih $GP(n,4)$ obravnavamo bloke V_i šestnajstih vozlišč. Poljuben blok V_i, definiran kot v lemi 5.14, lahko bralec vidi na sliki 5.15.

Dokaz. Podgraf grafa $GP(n,4)$, induciran na množici vozlišč V_i, premore popolno prirejanje $\{u_iv_i, u_{i+1}v_{i+1}, \ldots, u_{i+7}, v_{i+7}\}$. Torej je res $|S \cap V_i| \leq 8$.

□



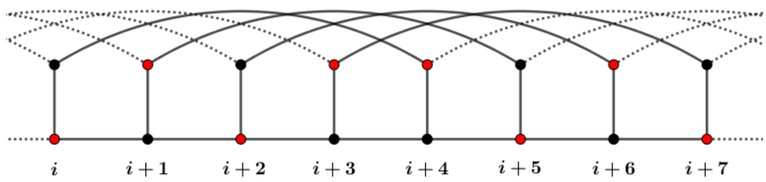
Slika 5.15: Blok šestnajstih vozlišč.

Opomba. Spomnimo se definicije 2.11. V nadaljevanju bomo podgraf grafa $GP(n,4)$, induciran na množici vozlišč V_i, definirani kot v lemi 5.14, označevali z $GP(n,4)[V_i]$, oziroma kar z $\Gamma[V_i]$, če bo graf $GP(n,4)$ označen z Γ.

Dogovor. Kadar v nadaljevanju govorimo o množici oziroma bloku vozlišč V_i, vedno privzamemo, da gre za blok vozlišč, definiran kot v lemi 5.14.

Naj bo torej $\Gamma = GP(n, 4)$. Na sliki 5.16 lahko vidimo, da podgraf $\Gamma[V_i]$ premore (največjo) neodvisnostno množico moči 8 (vozlišča obarvana z rdečo). Velja torej $\alpha(\Gamma[V_i]) = 8$, kar izrazimo v naslednji lemi.

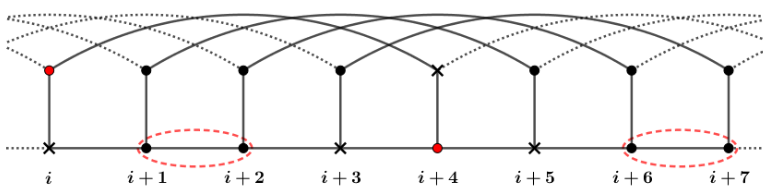
Lema 5.15. *Naj bo $n \geq 9$ naravno število in naj bo $\Gamma = GP(n, 4)$. Tedaj za poljuben podgraf $\Gamma[V_i]$ velja $\alpha(\Gamma[V_i]) = 8$.*



Slika 5.16: Neodvisnostna množica podgrafa $\Gamma[V_i]$.

Lema 5.16. *Naj bo $n \geq 9$ naravno število in naj bo $\Gamma = GP(n, 4)$. Največja neodvisnostna množica podgrafa $\Gamma[V_i]$ je enolično določena.*

Dokaz. Naj bo S največja neodvisnostna množica podgrafa $\Gamma[V_i]$, $i \in \mathbb{Z}_n$. Glede na lemo 5.15 velja $|S| = 8$. Podgraf, induciran na zunanjih vozliščih, predstavlja pot P_8, torej S (glede na izrek 3.5) na zunanjih vozliščih vzame največ 4 vozlišča. Podgraf, induciran na notranjih vozliščih, predstavlja štiri (ločene) komponente grafa K_2, torej S (glede na izrek 3.3) tudi na notranjih vozliščih lahko vzame največ 4 vozlišča. Ker je $|S| = 8$, ti dve dejstvi, skupaj s tem, da $\Gamma[V_i]$ premore tudi popolno prirejanje $\{u_i v_i, u_{i+1} v_{i+1}, \ldots, u_{i+7}, v_{i+7}\}$, pokažeta, da poljubna največja neodvisnostna množica S, vsebuje po natanko eno vozlišče vsake povezave $u_j v_j$, kjer je $i \leq j \leq i+7$, hkrati pa natanko štiri vozlišča oblike u_j in natanko štiri vozlišča oblike v_j. Predpostavimo najprej, da je $v_i \in S$ (slika 5.17). S tem iz množice S takoj "izpadeta" vozlišči u_i in v_{i+4}. Množica S v tem primeru torej nujno vzame vozlišče u_{i+4}, kar pomeni, da vozlišči u_{i+3} in u_{i+5} v njej zagotovo nista vsebovani. Ker so po zgornjem v S štiri vozlišča oblike u_j, od tod sledi, da bi morala množica S iz ene od množic $\{u_{i+1}, u_{i+2}\}$ in $\{u_{i+6}, u_{i+7}\}$ vzeti obe vozlišči, kar pa seveda ni mogoče.



Slika 5.17: Vsebovanost vozlišča v_i v neodvisnostni množici grafa $\Gamma[V_i]$.

Predpostavimo sedaj, da je $u_i \in S$. Na tem mestu naj si bralec ponovno ogleda sliko 5.16. V tem primeru iz množice S takoj "izpadeta" vozlišči v_i in u_{i+1}, kar pomeni, da S nujno vzame vozlišči v_{i+4} in v_{i+1}. Posledično ne vzame vozlišča v_{i+5}, zato mora vzeti u_{i+5}. Sledi, da ne vsebuje vozlišča u_{i+6}, torej vsebuje v_{i+6} in potem še u_{i+2} (ker ne vsebuje v_{i+2}). Zdaj je jasno, da sta preostali dve vozlišči množice S vozlišči v_{i+3} in u_{i+7}. Največja neodvisnostna množica S je torej res enolično določena, prikazana pa je, kot rečeno, na sliki 5.16.

□

Množico vseh (različnih) največjih neodvisnostnih množic grafa $GP(n, 4)$ bomo v nadaljevanju označevali s črko $\mathcal{S}$. Za vsak element $S \in \mathcal{S}$, bo oznaka $f(S)$ predstavljala število blokov V_i, za katere velja $|S \cap V_i| = 8$. Tiste (neodvisnostne) množice S iz $\mathcal{S}$, za katere obstaja najmanj blokov (lahko se zgodi tudi, da nobeden), za katere velja $|S \cap V_i| = 8$, sestavljajo podmnožico $\mathcal{S}_{min}$. Velja torej $\mathcal{S}_{min} = \{S \in \mathcal{S} | \forall S' \in \mathcal{S}, f(S) \leq f(S')\}$. Ker poljuben graf $GP(n, 4)$ premore vsaj eno največjo neodvisnostno množico, množica $\mathcal{S}_{min}$ zagotovo ni prazna. Očitno velja naslednja trditev.

Trditev 5.17. *Naj bo $S_0 \in \mathcal{S}_{min}$. Množica $S \in \mathcal{S}$ je vsebovana v $\mathcal{S}_{min}$ natanko tedaj, ko velja $f(S) = f(S_0)$.*

Definicija 5.2. Naj bo S poljubna največja neodvisnostna množica grafa $GP(n, 4)$, kjer je $n \geq 9$ naravno število. Pravimo, da je blok V_i tipa A glede na množico S, če zanj velja $|S \cap V_i| = 8$. Če zanj velja $|S \cap V_i| = 7$, pravimo, da je tipa B glede na S, če pa je $|S \cap V_i| \leq 6$, pa pravimo, da je tipa C glede na S.

Množico blokov V_i, ki so istega tipa, bomo označevali s $T_x(S)$, kjer je x torej A, B ali C. Množico blokov V_i tipa B, za katere velja $u_i \notin S$, hkrati pa je množica $\{u_i\} \cup (V_i \cap S)$ neodvisnostna množica podgrafa $\Gamma[V_i]$, kjer je $\Gamma = GP(n, 4)$, označimo s $T_{B*}(S)$. Ker smo že pokazali, da je $\alpha(\Gamma[V_i]) = 8$ (lema 5.15), je torej vsak blok V_i v grafu $GP(n, 4)$ tipa A, B ali C glede na S. Opazimo lahko, da je $f(S) = |T_A(S)|$.

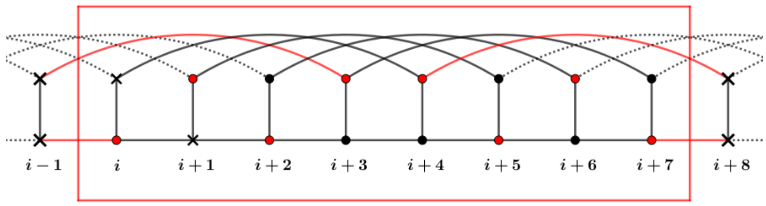
Glede na lemo 5.16 je poljuben blok $V_i \in T_A(S)$ enolično določen, prikazuje pa ga slika 5.16. Očitno velja tudi naslednje.

Lema 5.18. *Naj bo $n \geq 9$ naravno število, S največja neodvisnostna množica grafa $GP(n, 4)$ in $V_i \in T_{B*}(S)$, kjer je $i \in \mathbb{Z}_n$. Tedaj je presek $S \cap V_i$ enolično določen.*

Lema 5.19. *Naj bo $n \geq 9$ naravno število in naj bo S poljubna največja neodvisnostna množica grafa $GP(n, 4)$. Če je $V_i \in T_A(S)$, potem S ne premore nobenega izmed vozlišč u_{i+8}, v_{i+8}, u_{i-1} in v_{i-1}. Če je $V_i \in T_{B*}(S)$, potem S ne premore nobenega izmed vozlišč u_{i+8}, v_{i+8}, in v_{i-1}.*

Dokaz. Za poljuben blok vozlišč $V_i \in T_A(S)$ je (glede na lemo 5.16) presek $V_i \cap S$ enolično določen, množica $S \cap V_i$ pa premore vozlišča u_{i+7}, v_{i+4}, u_i in v_{i+3}. Ta vozlišča torej vsebuje tudi S. Glede na povezave v grafu $GP(n, 4)$ vozlišča u_{i+8}, v_{i+8}, u_{i-1} in v_{i-1} ne morejo biti v S, saj je S njegova (največja) neodvisnostna množica (slika 5.18). Na podoben način se prepričamo, da velja tudi drugi del leme.

□



Slika 5.18: Vozlišča množice S in blok V_i tipa A glede na S.

Posledica 5.20. *Naj bo $n \geq 9$ naravno število in naj bo S poljubna največja neodvisnostna množica grafa $\Gamma = GP(n, 4)$. Če je $V_i \in T_A(S) \cup T_{B*}(S)$, potem velja $V_{i+1}, V_{i+2}, \ldots, V_{i+8} \notin T_A(S)$.*

Dokaz. Za poljuben blok vozlišč $V_i \in T_A(S)$ velja, da je v množici $S \cap V_i$ vsebovano natanko eno vozlišče vsake povezave $u_j v_j$, kjer je $i \leq j \leq i+7$. Ker je povezava $u_{i+8}v_{i+8} \in E(\Gamma[V_{i+j}])$ za vsak $j \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, hkrati pa glede na lemo 5.19 nobeno od vozlišč u_{i+8} in v_{i+8} ni v S, bloki vozlišč $V_{i+1}, V_{i+2}, \ldots, V_{i+8}$ ne morejo biti tipa A, glede na S. Na podoben način se prepričamo, da to velja tudi za bloke vozlišč $T_{B*}(S)$.

□

Naslednji izrek postavlja zgornjo mejo za neodvisnostno število, za vse grafe $GP(n, 4)$. Kot bomo videli v nadaljevanju, jo dosežejo samo nekateri predstavniki te skupine.

Izrek 5.21. *Naj bo $n \geq 9$ naravno število. Tedaj velja $\alpha(GP(n, 4)) \leq \lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$.*

Dokaz bo potekal v dveh delih. Najprej bomo pokazali, da zaključek iz izreka velja, če obstaja največja neodvisnostna množica grafa $GP(n, 4)$, ki jo označimo z oznako S_0, ki ne premore bloka vozlišč V_i, za katerega bi veljalo $|S_0 \cap V_i| = 8$. V drugem delu obravnavamo še največje neodvisnostne množice S_0, ki tak blok premorejo. Ideja dokaza je v tem primeru pokazati, da se za vsakim blokom vozlišč V_i tipa A (glede na S_0) pred naslednjo pojavitvijo bloka tipa A (glede na S_0) pojavi (vsaj) en blok V_j tipa C (glede na S_0). S tem pokažemo, da je vrednost neodvisnostnega števila največ toliko, kot če S_0 ne premore nobenega bloka vozlišč V_i, za katerega bi veljalo $|S_0 \cap V_i| = 8$.

Dokaz. Naj bo S_0 največja neodvisnostna množica grafa $GP(n, 4)$, vsebovana v $\mathcal{S}_{min}$. Najprej obravnavajmo možnost, ko velja $f(S_0) = 0$. Množica S_0 torej ne premore bloka vozlišč V_i, za katerega bi veljalo $|S_0 \cap V_i| = 8$. To pomeni, da za vsak V_i velja $|S_0 \cap V_i| \leq 7$. Torej je $8|S_0| = \sum_{i=0}^{n-1} |S_0 \cap V_i| \leq 7n$, saj smo v tej vsoti vsako vozlišče šteli natanko osemkrat. Velikost množice S_0 je zato največ $\frac{7n}{8}$, to je $|S_0| \leq \frac{7n}{8}$. Zaradi dejstva, da je $|S_0|$ naravno število, sledi $|S_0| \leq \lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$ oziroma $\alpha(GP(n, 4)) \leq \lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$.

Obravnavajmo še drugo možnost, ko je torej $f(S_0) > 0$. V tem primeru obstaja (vsaj) en blok vozlišč V_i tipa A glede na S_0. Predpostavimo, da graf $GP(n, 4)$ premore tak blok $V_i \in T_A(S_0)$, za katerega velja, da se v zaporedju blokov $V_{i+1}, V_{i+2}, \ldots,$

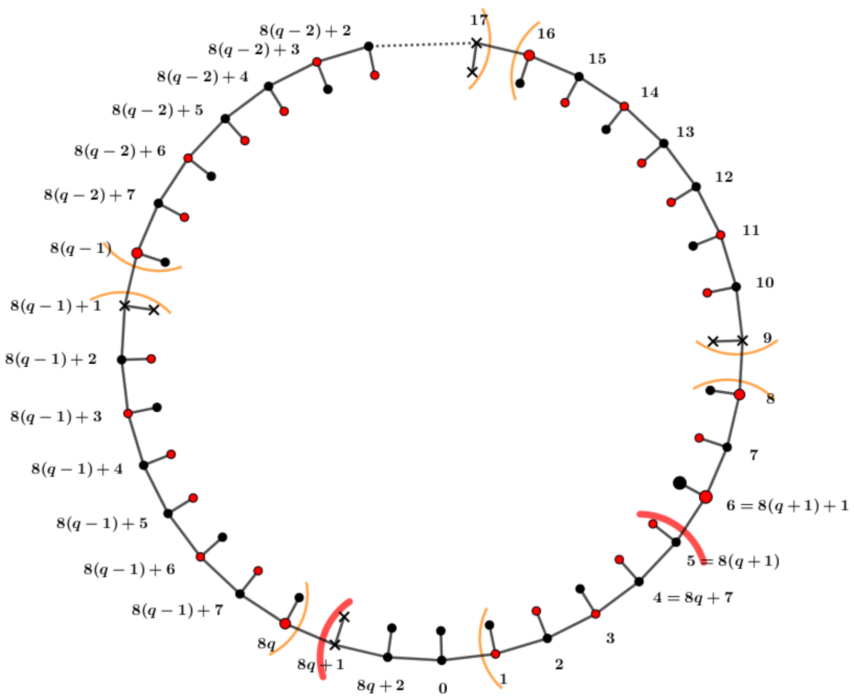
$V_{i+(n-1)}$, pred naslednjim blokom tipa A glede na S_0, nikoli ne pojavi blok tipa C glede na S_0. Brez škode za splošnost je to lahko V_1. Med drugim torej velja $V_1 \in T_A(S_0)$. Glede na lemo 5.16 je presek $V_1 \cap S_0$ enolično določen (slika 5.16). Glede na posledico 5.20 velja $V_2, V_3, \ldots, V_9 \notin T_A(S_0)$. Ti bloki vozlišč morajo biti - glede na našo predpostavko - tipa B glede na S_0. Ker je torej V_9 tipa B (glede na S_0), po lemi 5.19 pa S_0 ne vsebuje nobenega od vozlišč u_9, v_9, mora S_0 vsebovati natanko eno vozlišče vsake povezave u_jv_j, $10 \leq j \leq 16$. V nasprotnem primeru namreč ne bi veljalo $V_9 \in T_B(S_0)$. Vozlišče $v_7 \in S_0$ je povezano z vozliščem v_{11}, zato v_{11} zagotovo ni v S_0, kar pomeni, da je nujno u_{11}. Ker vozlišče u_{10} potemtakem prav tako ni vsebovano v S_0, lahko definiramo naslednjo neodvisnostno množico grafa $GP(n, 4)$, in sicer $S_1 = S_0 \backslash \{u_8\} \cup \{u_9\}$. Očitno je $|S_1| = |S_0|$, torej je $S_1 \in \mathcal{S}$. Ker smo predpostavili, da je $S_0 \in \mathcal{S}_{min}$, mora veljati $f(S_0) \leq f(S_1)$. Ker je $V_1 \in T_A(S_0)$ in $V_1 \notin T_A(S_1)$, mora obstajati vsaj en blok V_j, $j \neq 1$, za katerega velja $V_j \notin T_A(S_0)$ in $V_j \in T_A(S_1)$. Ker se S_0 in S_1 ujemata v vseh vozliščih, razen v u_8 in u_9, je edina možnost za to $j = 9$. Velja torej $V_9 \in T_A(S_1)$ in $V_9 \notin T_A(S_0)$. Zaradi dejstva, da je $V_1 \in T_A(S_0)$ in $V_1 \notin T_A(S_1)$, sledi $f(S_0) = f(S_1)$. Glede na trditev 5.17 je $S_1 \in \mathcal{S}_{min}$. Ker se S_0 in S_1 ujemata v vseh vozliščih, razen v u_8 in u_9, je poljuben blok vozlišč $V_{10}, V_{11}, \ldots, V_{n-1}, V_0$ istega tipa (A, B ali C), tako glede na množico S_0, kot tudi na množico S_1. Blok vozlišč V_9 je torej tipa A glede na S_1. Glede na našo predpostavko za S_0 in pravkar ugotovljenega za S_1, se v zaporedju blokov $V_{10}, V_{11}, \ldots, V_{n-1}, V_0$ najprej pojavi blok tipa A glede na S_1 in šele nato blok tipa C glede na S_1. Zaradi istega razloga kot prej - ker je $V_9 \in T_A(S_1)$, po posledici 5.20 velja $V_{10}, V_{11}, \ldots, V_{17} \notin T_A(S_1)$, hkrati pa, glede na našo predpostavko, velja $V_{10}, V_{11}, \ldots, V_{17} \in T_B(S_1)$. Če torej, podobno kot smo definirali množico S_1, definiramo sedaj množico $S_2 = S_1 \backslash \{u_{16}\} \cup \{u_{17}\}$, lahko trdimo, da je S_2 vsebovana v $\mathcal{S}_{min}$. To pomeni, da lahko (glede na začetno množico S_0) zaporedoma "gradimo" neodvisnostne množice $S_1, S_2, \ldots, S_q$, kjer je $q = \lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ in je $S_i = S_{i-1} \backslash \{u_{8i}\} \cup \{u_{8i+1}\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$. Poljubna množica S_i je torej vsebovana v $\mathcal{S}_{min}$, za blok vozlišč V_{8i+1} pa velja, da je tipa A glede na S_i. Primerjajmo množici S_i in S_0. Za $i = 1$ se S_0 in S_1 ujemata v vseh vozliščih, razen v u_8 in u_9. Vozlišče u_8 je vsebovano v S_0 in ni v S_1, medtem kot za u_9 velja ravno obratno. Za $i = 2$ se množici S_0 in S_2, poleg v vozliščih u_8 in u_9, ne ujemata še v vozliščih u_{16} in u_{17}. V ostalih torej se. Za vozlišči u_8 in u_{16} velja, da sta vsebovani v S_0 in nista vsebovani v S_2, za vozlišči u_9 in u_{17} pa velja ravno obratno, torej sta vsebovani v S_2 in nista vsebovani v S_0. V primeru, ko je $i = q$, se množici S_0 in S_q torej ne ujemata v vozliščih $u_8, u_9, u_{16}, u_{17}, \ldots, u_{8q}, u_{8q+1}$. Vozlišča $u_8, u_{16}, \ldots, u_{8(q-1)}, u_{8q}$ so vsebovana v S_0 in niso v S_q, medtem ko vozlišča $u_9, u_{17}, \ldots, u_{8(q-1)+1}, u_{8q+1}$ niso vsebovana v S_0, so pa vsebovana v S_q (sliki 5.19 in 5.20). To pomeni, da bloki vozlišč $V_2, V_3, \ldots, V_{8i}, V_{8i+1}$, kjer je $i \in \{0, 1, \ldots, q\}$, zagotovo niso tipa A glede na S_0 (množica S_0 prav tako ne vsebuje vozlišč $v_9, v_{17}, \ldots, v_{8(q-1)+1}, v_{8q+1}$). Ker pa se za vsak $i \in \{1, \ldots, q\}$ množici S_i in S_0 ujemata na vseh vozliščih od V_{8i+2} do V_{n-1} in še V_0 in je blok vozlišč V_{8i+1} tipa A glede na S_i, je potemtakem V_{8i+1} vsebovan v $T_{B*}(S_0)$. Če je torej V_1 tipa A glede na S_0 in se naslednji blok tipa A glede na S_0 pojavi pred blokom tipa C glede na S_0, so vsi bloki vozlišč $V_9, V_{17}, \ldots, V_{8(q-1)+1}, V_{8q+1} \in T_{B*}(S_0)$. Obravnavamo dve možnosti in sicer:

1. $8q \equiv 0 \ (mod\ n)$
   Ker je $V_{8q+1} \in T_{B*}(S_0)$, to pomeni, da $u_{8q+1} \notin S_0$. Ker pa je u_{8q+1} v tem primeru kar u_1, za katerega smo na začetku predpostavili, da je vsebovan v S_0, pridemo do protislovja.

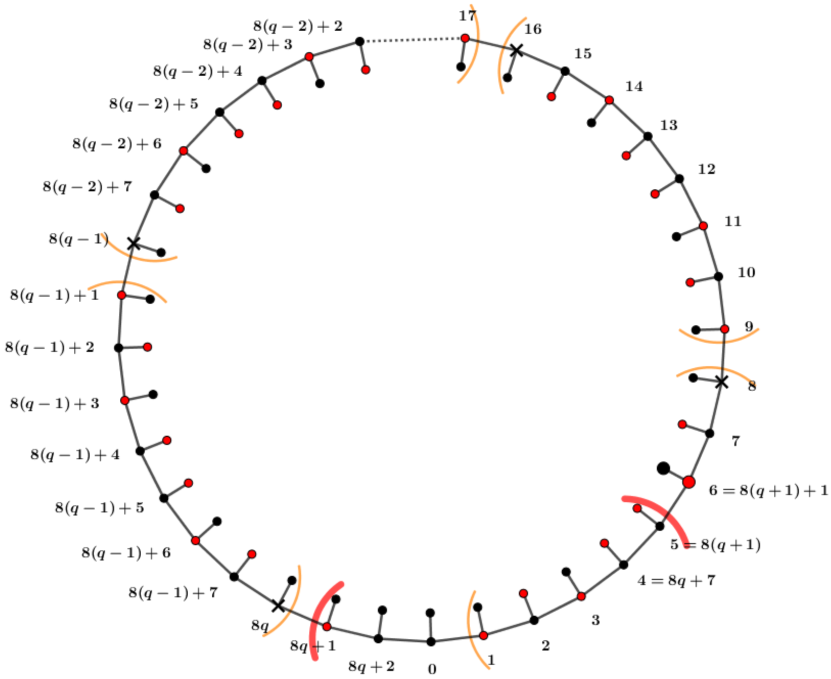
2. $8q \not\equiv 0 \ (mod\ n)$
   Ker je $V_{8q+1} \in T_{B*}(S_0)$, množica S_0 po lemi 5.19 ne premore nobenega izmed vozlišč u_{8q+1+8} in v_{8q+1+8}, kar sta ravno vozlišči $u_{8(q+1)+1}$ in $v_{8(q+1)+1}$. Ker pa je $8(q+1)+1$ po modulu n enako enemu izmed števil $2, 3, \ldots, 8$, pridemo do protislovja, saj smo predpostavili, da je V_1 tipa A glede na S_0, torej vsebuje natanko eno vozlišče vsake povezave $u_j v_j$, za $1 \leq j \leq 8$.

Ker v obeh primerih pridemo do protislovja, to pomeni, da se bo za poljubnim blokom V_i tipa A glede na S_0 pred naslednjim blokom tipa A zagotovo pojavil vsaj en blok V_j tipa C glede na S_0. Kaj to pove o velikosti množice S_0? Če za nek blok V_i velja $|S_0 \cap V_i| = 8$ in se pred naslednjim blokom, za katerega bi veljalo isto, pojavi (vsaj) en, za katerega velja $|S_0 \cap V_i| \leq 6$, je to, gledano na velikost množice S_0, popolnoma enako kot, če bi za vsak blok V_i veljalo $|S_0 \cap V_i| \leq 7$. Ravno zato lahko, podobno kot v prvem delu dokaza, zapišemo $8|S_0| = \sum_{i=0}^{n-1} |S_0 \cap V_i| \leq 7n$, oziroma po istem premisleku kot zgoraj kar $|S_0| \leq \lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$. S tem je izrek dokazan.

$\square$



Slika 5.19: Množica S_0 glede na S_q.



Slika 5.20: S_q.

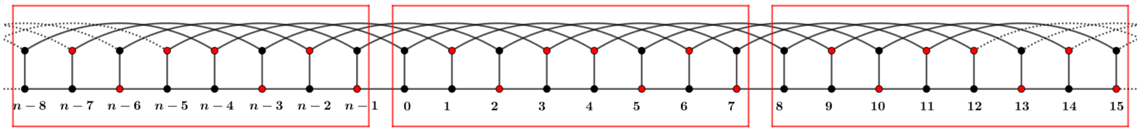
Največja neodvisnostna množica grafa $GP(n,4)$ je torej velikosti največ $\lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$. Pokažimo, da obstaja neskončno predstavnikov te družine, ki to mejo dejansko dosežejo.

Lema 5.22. *Naj bo $n \geq 9$ naravno število. Zapišimo ga v obliki $n = 8 \cdot q + r$, $q \in \mathbb{N}$ in $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$. Naj bo $A = \cup_{i=0}^{q-1}\{u_{i+2}, u_{i+5}, u_{i+7}, v_{i+1}, v_{i+3}, v_{i+4}, v_{i+6}\}$. Tedaj je*

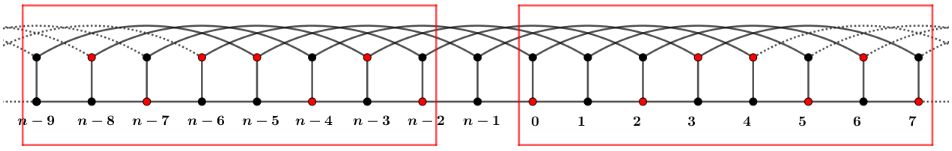
$$S = \begin{cases} A & r = 0 \\ A \backslash \{v_1\} \cup \{u_0\} & r = 1 \\ A \cup \{u_{n-1}\} & r = 2 \\ A \cup \{u_{n-1}, v_{n-2}\} & r = 3 \\ A \cup \{u_{n-1}, u_{n-3}\} & r = 4 \\ A \cup \{u_{n-1}, v_{n-2}, u_{n-3}, v_{n-4}\} & r = 5 \\ A \cup \{u_{n-1}, v_{n-2}, u_{n-3}, v_{n-5}\} & r = 6 \\ A \cup \{u_{n-1}, v_{n-2}, u_{n-3}, v_{n-4}, u_{n-5}\} & r = 7 \end{cases}$$

neodvisnostna množica grafa $GP(n,4)$.

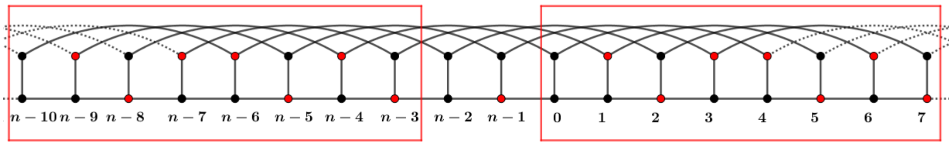
Graf $GP(n,4)$ je za ostanke $0 \leq r \leq 7$ shematično prikazan na slikah 5.21 - 5.28, vozlišča množice S pa so na vseh obarvana z rdečo. Ni težko videti, da je S za poljuben r res neodvisnostna množica. Podrobnosti prepuščamo bralcu.



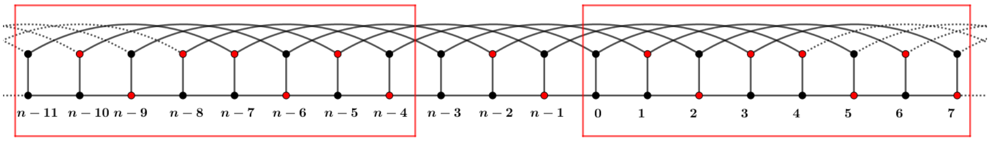
Slika 5.21: Neodvisnostna množica grafa $GP(n, 4)$, za r=0.



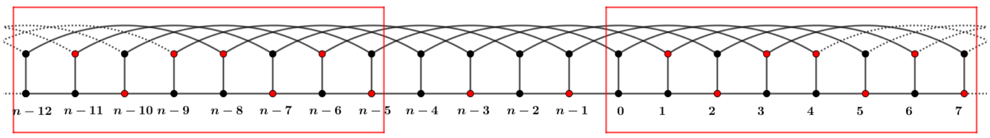
Slika 5.22: Neodvisnostna množica grafa $GP(n, 4)$, za r=1.



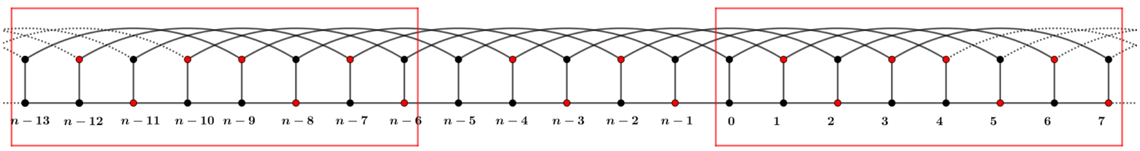
Slika 5.23: Neodvisnostna množica grafa $GP(n, 4)$, za r=2.



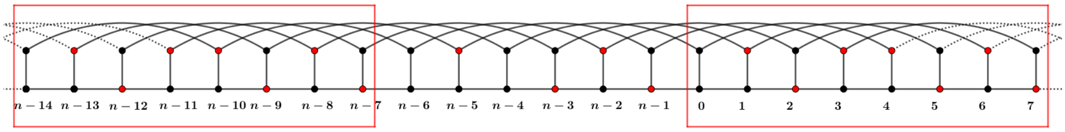
Slika 5.24: Neodvisnostna množica grafa $GP(n, 4)$, za r=3.



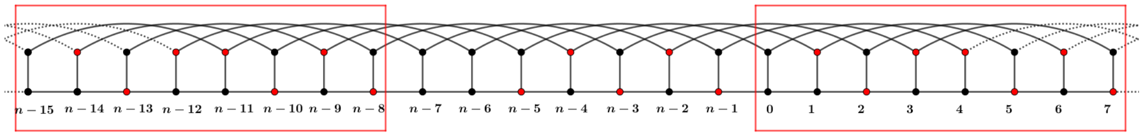
Slika 5.25: Neodvisnostna množica grafa $GP(n, 4)$, za r=4.



Slika 5.26: Neodvisnostna množica grafa $GP(n, 4)$, za r=5.



Slika 5.27: Neodvisnostna množica grafa $GP(n, 4)$, za r=6.



Slika 5.28: Neodvisnostna množica grafa $GP(n, 4)$, za r=7.

Lema 5.23. *Naj bo $n \geq 9$ naravno število. Zapišimo ga v obliki $n = 8 \cdot q + r$, $q \in \mathbb{N}$ in $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$. Tedaj je neodvisnostna množica S grafa $GP(n, 4)$, definirana kot v lemi 5.22, velikosti $\lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$, če je $n \not\equiv 4, 6, 7 \pmod 8$. Sicer je velikosti $\lfloor \frac{7n}{8} \rfloor - 1$.*

Dokaz. Iz konstrukcije množice S iz leme 5.22 je jasno, da je $|S| = 7q$, ko je $r = 0$. Za ostanek $r \in \{1, 2, 3, 5\}$ je $|S| = 7q + (r - 1)$, za ostanek $r \in \{4, 6, 7\}$ pa je $|S| = 7q + (r - 1) - 1$. Zatrjevana enakost, torej $|S| = \lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$, očitno velja, če je $r = 0$, za vse ostale primere, kjer je $r > 0$, pa je v resnici dovolj pokazati le, da je $7q + (r - 1) = \lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$. Velja $\lfloor \frac{7n}{8} \rfloor = \lfloor \frac{7(8q+r)}{8} \rfloor = 7q + \lfloor \frac{7r}{8} \rfloor$. Bralec se lahko direktno prepriča, da je $\lfloor \frac{7r}{8} \rfloor = r - 1$, za vsak $r > 0$. Potem ni težko videti, da je (neodvisnostna) množica S res velikosti $\lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$, če je $n \not\equiv 4, 6, 7 \pmod 8$, sicer je velikosti $\lfloor \frac{7n}{8} \rfloor - 1$.

□

Izrek 5.24. *Naj bo $n \geq 9$ naravno število, za katerega velja $n \not\equiv 4, 6, 7 \pmod 8$. Tedaj je $\alpha(GP(n, 4)) = \lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$.*

Dokaz. Dokaz sledi neposredno iz izreka 5.21 ter lem 5.22 in 5.23. Izrek 5.21 nam poda zgornjo mejo za moč neodvisnostne množice v grafu $GP(n, 4)$, ki je $\lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$. Lema 5.22 za predstavnike grafov $GP(n, 4)$, za katere velja $n \not\equiv 4, 6, 7 \pmod 8$, konstruira neodvisnostno množico S take velikosti, v kar nas prepriča lema 5.23. Za te predstavnike torej lahko zapišemo $\lfloor \frac{7n}{8} \rfloor \leq \alpha(GP(n, 4)) \leq \lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$, oziroma $\alpha(GP(n, 4)) = \lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$.

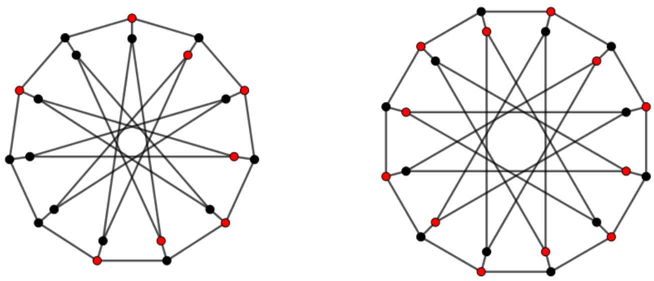
□

Čeprav smo neodvisnostno število določili samo za tiste predstavnike $GP(n, 4)$, za katere velja $n \not\equiv 4, 6, 7 \pmod 8$, velja opozoriti, da se za ostale predstavnike, torej za tiste, za katere velja $n \equiv 4, 6, 7 \pmod 8$, predstavljena spodnja in zgornja meja za neodvisnostno število, razlikujeta samo za 1. V [1] trdijo, da so računalniško izračunali vrednost neodvisnostnega števila za vse predstavnike $GP(n, 4)$, za $n < 700$. Pravijo, da je za tiste, za katere je $n \equiv 4, 6, 7 \pmod 8$, neodvisnostno število enako spodnji meji, torej $\lfloor \frac{7n}{8} \rfloor - 1$. Na podlagi njihovega izračuna ta razdelek zaključimo z naslednjo domnevo.

Domneva 5.1. *Naj bo $n \geq 9$ naravno število za katerega velja $n \equiv 4, 6, 7 \pmod 8$. Tedaj je $\alpha(GP(n, 4)) = \lfloor \frac{7n}{8} \rfloor - 1$.*

5.2.5 GP(n,5)

Zadnja skupina grafov, ki jo obravnavamo, je skupina grafov oblike $GP(n,5)$. Na sliki 5.29 vidimo dva predstavnika, to sta $GP(11,5)$ in $GP(12,5)$. Vozlišča obarvana z rdečo predstavljajo primer največje neodvisnostne množice obeh grafov, v kar bralca lahko prepriča izrek 5.27. Na tem mestu se (ponovno) spomnimo trditve 5.4, ki pravi, da je $\alpha(GP(n,k)) = n$ v primeru, ko je n sodo in k liho število. Torej v nadaljevanju pri obravnavi grafov $GP(n,5)$, vedno privzamemo, da je n liho število.



Slika 5.29: Primeri največjih neodvisnostnih množic v grafih $GP(11,5)$ in $GP(12,5)$.

Trditev 5.25. *Naj bo $n \geq 15$ liho število. Tedaj velja $\alpha(GP(n,5)) \leq n-3$.*

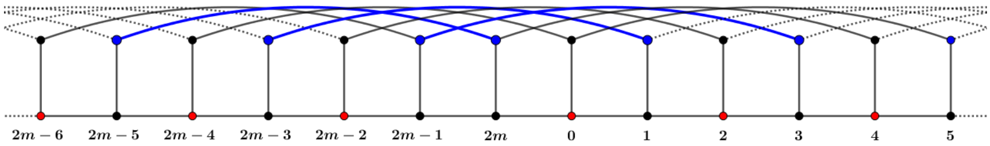
Bralec je najbrž opazil, da v zgornji trditvi izpuščamo predstavnika $GP(11,5)$ in $GP(13,5)$. Vrednost neodvisnostnega števila za oba predstavnika smo izračunali s pomočjo našega programa in dobili rezultata $\alpha(GP(11,5)) = 8$ in $\alpha(GP(13,5)) = 10$, kar lahko vidimo v Prilogah. Da je to res neodvisnostno število obeh predstavnikov, priča tudi litertura [1].

Dokaz. Naj bo S poljubna največja neodvisnostna množica grafa $GP(n,5)$. Ker je n liho število, lahko zapišemo $n = 2m+1$, kjer je $m \geq 7$ naravno število. Glede na razmislek v dokazu leme 5.2, lahko S na zunanjih vozliščih grafa $GP(n,5)$ vzame največ m vozlišč. V nadaljevanju ločimo tri glavne primere, glede na to ali je $|S \cap V_u|$ enako m (Primer 1), $m-1$ (Primer 3) ali največ $m-2$ (Primer 2).

Primer 1: $|S \cap V_u| = m$
Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $S \cap V_u = \{u_{2i} : 0 \leq i \leq m-1\}$. Ta vozlišča so na sliki 5.30 obarvana z rdečo barvo. Potemtakem mora biti $S \cap V_v \subseteq \{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq m-1\} \cup \{v_{2m}\}$. Ta vozlišča so na isti sliki obarvana z modro. Torej je $|S \cap V_v| \leq m+1$.

Ker so povezave $v_{2m-5}v_{2m}$, $v_{2m-3}v_1$ in $v_{2m-1}v_3$ vsebovane v $E(GP(n,5))$, v resnici velja $|S \cap V_v| \leq (m+1)-3$ oziroma $|S \cap V_v| \leq m-2$. Ker je $|S| = |S \cap V_u| + |S \cap V_v|$, v primeru, ko je $|S \cap V_u| = m$, velja $|S| \leq m+m-2$, oziroma $|S| \leq n-3$.

Primer 2: $|S \cap V_u| \leq m-2$
V tem primeru lahko, glede na povezanost grafa $GP(n,5)$, z gotovostjo trdimo, da je $|S \cap V_v| \leq m$. To pa pomeni, da je $|S \cap V_u| + |S \cap V_v| \leq 2m-2$, oziroma

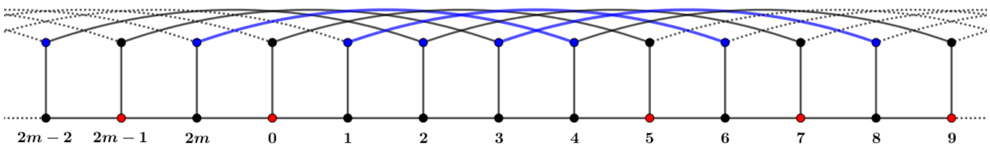


Slika 5.30: Zgornja meja neodvisnostnega števila v $GP(n, 5)$ - primer 1.

$|S \cap V_u| + |S \cap V_v| \leq n - 3$.

Primer 3: $|S \cap V_u| = m - 1$
Naj bo $\Gamma' = GP(n, 5)[V_u \backslash S]$ podgraf grafa $GP(n, 5)$, induciran na vozliščih $V_u \backslash S$. Ni težko videti, da je v tem primeru vsaka povezana komponenta podgrafa Γ' (graf) pot dolžine največ 3. Naj oznaka X_i označuje število komponent grafa Γ' dolžine i, kjer je $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Očitno je število vseh komponent podgrafa Γ' enako številu vozlišč, ki jih S vzame na zunanjem podgrafu, torej lahko pišemo $X_0 + X_1 + X_2 + X_3 = m - 1$. Skupno število vozlišč v Γ' je $(2m + 1) - (m - 1) = m + 2$, zato lahko pišemo tudi $1 \cdot X_0 + 2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 = m + 2$. Iz teh dveh enačb izpeljemo še tretjo, to je $X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 = 3$. To enačbo lahko rešimo samo na tri različne načine. Prva rešitev je $X_3 = 1$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, druga rešitev je $X_3 = 0$, $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ in tretja rešitev je $X_3 = 0$, $X_1 = 3$, $X_2 = 0$. V nadaljevanju obravnavamo vsako možno rešitev posebej.

Podprimer 3.1 (prva rešitev): $X_3 = 1$, $X_1 = 0$ in $X_2 = 0$
V tem primeru je $X_0 = m - 2$. Podgraf Γ' je sestavljen iz ene komponente P_4 in $m - 2$ komponent P_1. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $S \cap V_u = \{u_0\} \cup \{u_{2i+1} : 2 \leq i \leq m - 1\}$. Na sliki 5.31 so ta vozlišča obarvana z rdečo barvo. To pomeni, da je $S \cap V_v \subseteq \{v_{2i} : 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_1, v_3\}$. Ta vozlišča so na sliki 5.31 obarvana z modro. Torej je $|S \cap V_v| \leq m + 2$.



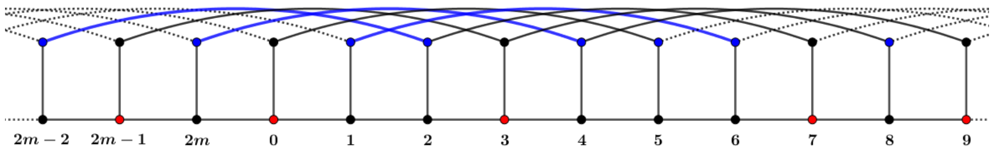
Slika 5.31: Zgornja meja neodvisnostnega števila v $GP(n, 5)$ - Primer 3 (prva rešitev).

Ker so povezave $v_{2m}v_4$, v_1v_6 in v_3v_8 vsebovane v množici povezav $E(GP(n, 5))$, je v resnici $|S \cap V_v| \leq (m + 2) - 3$ oziroma $|S \cap V_v| \leq m - 1$. Predpostavili smo, da je $|S \cap V_u| = m - 1$, torej je $|S \cap V_u| + |S \cap V_v| \leq (m - 1) + (m - 1)$ oziroma $|S \cap V_u| + |S \cap V_v| \leq n - 3$. Množica S je torej velikosti največ $n - 3$.

Podprimer 3.2 (druga rešitev): $X_3 = 0$, $X_1 = 1$ in $X_2 = 1$
V tem primeru je $X_0 = m - 3$. Podgraf Γ' je torej sestavljen iz ene komponente P_2,

ene komponente P_3 in $m-3$ komponent P_1. Komponento P_2 v podgrafu Γ' označimo z Γ_1, komponento P_3 (prav tako v Γ') pa z Γ_2. Spomnimo se, kaj sta odprta in zaprta okolica vozlišča oziroma (pod)množice vozlišč (definicija 2.8). Obravnavati moramo dve možnosti, in sicer ko je $N[V(\Gamma_1)] \cap N[V(\Gamma_2)] \neq 0$ in ko je $N[V(\Gamma_1)] \cap N[(\Gamma_2)] = 0$.

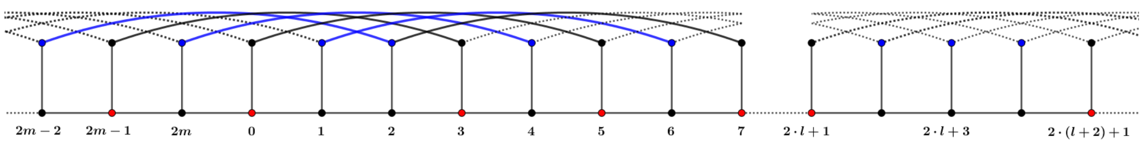
Obravnavajmo najprej prvo možnost. V preseku je torej neko vozlišče iz množice S. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $S \cap V_u = \{u_0, u_3\} \cup \{u_{2i+1} : 3 \leq i \leq m-1\}$. Na sliki 5.32 so ta vozlišča obarvana z rdečo barvo. To pomeni, da je $S \cap V_v \subseteq \{v_{2i} : 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_1, v_5\}$ (modra vozlišča na sliki 5.32). Velja $|S \cap V_v| \leq m+2$.



Slika 5.32: Zgornja meja neodvisnostnega števila v $GP(n, 5)$ - Primer 3 (druga rešitev - prva možnost).

Ker so povezave $v_{2m-2}v_4$, $v_{2m}v_4$ in v_1v_6 vsebovane v množici povezav $E(GP(n, 5))$, je $|S \cap V_v| \leq (m+2) - 3$, oziroma $|S \cap V_v| \leq m-1$. Ker je $|S \cap V_u| = m-1$, je torej $|S \cap V_u| + |S \cap V_v| \leq (m-1) + (m-1)$, oziroma $|S \cap V_u| + |S \cap V_v| \leq n-3$. Množica S je torej velikosti največ $n-3$.

Naj sedaj velja $N[V(\Gamma_1)] \cap N[(\Gamma_2)] = 0$. Brez škode za splošnost lahko rečemo, da je $S \cap V_u = \{u_{2m-1}, u_0, u_3, u_5\} \cup \{u_{2i+1} : 3 \leq i \leq l\} \cup \{u_{2i+1} : l+2 \leq i \leq m-2\}$, kjer je $2 \leq l \leq m-3$ (rdeča vozlišča na sliki 5.33). Opazimo, da v primeru, ko je $l = 2$, množica vozlišč $S \cap V_u$ ne premore dela $\{u_{2i+1} : 3 \leq i \leq l\}$, ko pa je $l = m-1$, pa dela $\{u_{2i+1} : l+2 \leq i \leq m-2\}$. Glede na $S \cap V_u$, je $S \cap V_v \subseteq \{v_{2i} : 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_1, v_{2l+3}\}$ (modra vozlišča na sliki 5.33). Velja $|S \cap V_v| \leq m+2$.



Slika 5.33: Zgornja meja neodvisnostnega števila v $GP(n, 5)$ - Primer 3 (druga rešitev - druga možnost).

Ker so povezave $v_{2m-2}v_2$, $v_{2m}v_4$ in v_1v_6 vsebovane v množici povezav $E(GP(n, 5))$, je $|S \cap V_v| \leq (m+2) - 3$, oziroma $|S \cap V_v| \leq m-1$. Ker je $|S \cap V_u| = m-1$, je torej $|S \cap V_u| + |S \cap V_v| \leq (m-1) + (m-1)$, oziroma $|S \cap V_u| + |S \cap V_v| \leq m-1+m-1 \leq n-3$. Tudi v tem primeru je množica S velikosti največ $n-3$.

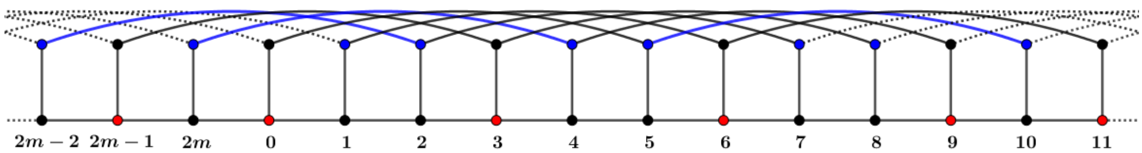
Podprimer 3.3 (tretja rešitev): $X_3 = 0$, $X_1 = 3$, $X_2 = 0$
V tem primeru je $X_0 = m - 4$. Podgraf Γ' je sestavljen iz treh komponent P_2 in $m-4$ komponent P_1. Komponente, ki so poti dolžine 1, označimo z oznakami P_2^1, P_2^2 in P_2^3. Obravnavati moramo tri možnosti, in sicer ko velja:

(i) $N[V(P_2^1)] \cap N[V(P_2^2)] \neq 0$ in $N[V(P_2^2)] \cap N[V(P_2^3)] \neq 0$,

(ii) $N[V(P_2^1)] \cap N[V(P_2^2)] = 0$, $N[V(P_2^1)] \cap N[V(P_2^3)] = 0$ in $N[V(P_2^2)] \cap N[V(P_2^3)] \neq 0$,

(iii) $N[V(P_2^1)] \cap N[V(P_2^2)] = 0$, $N[V(P_2^1)] \cap N[V(P_2^3)] = 0$ in $N[V(P_2^2)] \cap N[V(P_2^3)] = 0$.

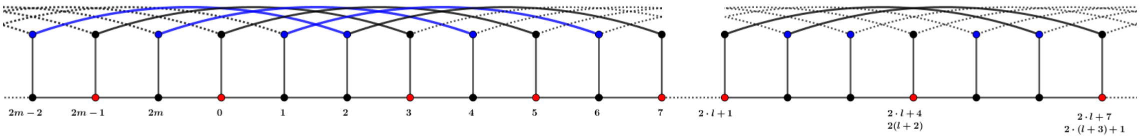
Najprej obravnavajmo možnost, ko velja $N[V(P_2^1)] \cap N[V(P_2^2)] \neq 0$ in $N[V(P_2^2)] \cap N[V(P_2^3)] \neq 0$. V obeh presekih je torej natanko eno vozlišče iz množice S. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $S \cap V_u = \{u_0, u_3, u_6, u_9\} \cup \{u_{2i+1} : 5 \leq i \leq m-1\}$. Na sliki 5.34 so ta vozlišča obarvana z rdečo barvo. To pomeni, da je $S \cap V_v \subseteq \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8\} \cup \{v_{2i} : 5 \leq i \leq m\}$ (modra vozlišča na sliki 5.34). Velja $|S \cap V_v| \leq m + 2$.



Slika 5.34: Zgornja meja neodvisnostnega števila v $GP(n, 5)$ - Primer 3 (tretja rešitev - prva možnost).

Ker so povezave $v_{2m-2}v_2$, $v_{2m}v_4$ in v_5v_{10} vsebovane v množici povezav $E(GP(n, 5))$, je $|S \cap V_v| \leq (m+2) - 3$ oziroma $|S \cap V_v| \leq m - 1$. Ker je $|S \cap V_u| = m - 1$, je torej $|S \cap V_u| + |S \cap V_v| \leq (m-1) + (m-1)$ oziroma $|S \cap V_u| + |S \cap V_v| \leq n - 3$. Množica S je torej velikosti največ $n - 3$.

Sedaj obravnavajmo možnost, ko velja $N[V(P_2^1)] \cap N[V(P_2^2)] = 0$, $N[V(P_2^1)] \cap N[V(P_2^3)] = 0$ in $N[V(P_2^2)] \cap N[V(P_2^3)] \neq 0$. V tem primeru lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $S \cap V_u = \{u_{2m-1}, u_0, u_3, u_5\} \cup \{u_{2i+1} : 3 \leq i \leq l\} \cup \{u_{2(l+2)}, u_{2(l+3)+1}\} \cup \{u_{2i+1} : l+4 \leq i \leq m-2\}$, kjer je $2 \leq l \leq m-5$. Na sliki 5.35 so to rdeča vozlišča. Opazimo, da v primeru, ko je $l = 2$ množica vozlišč $S \cap V_u$ ne premore dela $\{u_{2i+1} : 3 \leq i \leq l\}$, ko pa je $l = m - 5$, pa dela $\{u_{2i+1} : l+4 \leq i \leq m-2\}$. Ker gre v primeru, ko je $l = 2$, oziroma $l = m - 4$, glede na rotacijsko simetrijo posplošenih Petersenovih grafov, v resnici za "isti" nabor zunanjih vozlišč, so meje za parameter l dobro postavljene. To pomeni, da je $S \cap V_v \subseteq \{v_{2i} : 1 \leq i \leq 2l+2\} \cup \{v_{2i} : l+3 \leq i \leq m\} \cup \{v_1, v_{2(l+1)+1}, v_{2(l+2)+1}\}$ (modra vozlišča na sliki 5.35). Velja $|S \cap V_v| \leq m + 2$.



Slika 5.35: Zgornja meja neodvisnostnega števila v $GP(n,5)$ - Primer 3 (tretja rešitev - druga možnost).

Ker so povezave $v_{2m-2}v_2$, $v_{2m}v_4$ in v_5v_{10} vsebovane v množici povezav $E(GP(n,5))$, je $|S\cap V_v| \leq (m+2)-3$ oziroma $|S\cap V_v| \leq m-1$. Ker je $|S\cap V_u| = m-1$, je torej $|S\cap V_u| + |S\cap V_v| \leq (m-1)+(m-1)$ oziroma $|S\cap V_u| + |S\cap V_v| \leq n-3$. S je torej velikosti največ $n-3$.

Na sliki 5.35 je v resnici razvidno tudi to, da je S moči največ $n-3$, tudi v primeru, ko velja $N[V(P_2^1)] \cap N[V(P_2^2)] = 0$, $N[V(P_2^1)] \cap N[V(P_2^3)] = 0$ in $N[V(P_2^2)] \cap N[V(P_2^3)] = 0$. Podrobnosti prepuščamo bralcu.

Obravnavali smo vse možnosti, za katere lahko S na zunanjih vozliščih vzame $m-1$ vozlišč. Če je $|S\cap V_u| = m-1$, vedno velja $|S\cap V_v| \leq m-1$ in s tem tudi $|S\cap V_u| + |S\cap V_v| \leq n-3$. S tem je izrek dokazan.

□

Z izrekom 5.25, smo postavili novo zgornjo mejo neodvisnostnega števila, tudi za grafe $GP(n,5)$, kjer je n liho število. Če za njih obstaja neodvisnostna množica velikosti $n-3$, je s tem (tudi za njih) določena kar natančna vrednost neodvisnostnega števila. Oglejmo si naslednjo lemo.

Lema 5.26. *Naj bo $n \geq 11$ liho število. Tedaj je*

$$S = \{u_{2i} : 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\} \cup \{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-7}{2}\}$$

neodvisnostna množica grafa $GP(n,5)$.

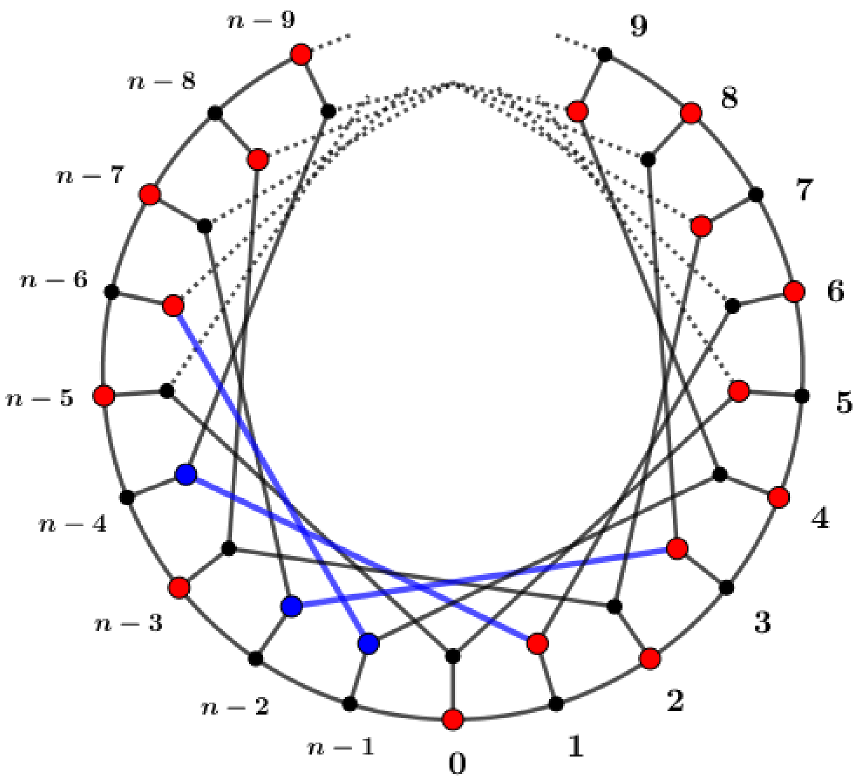
Dokaz. Na sliki 5.36 vidimo množico $S = \{u_{2i} : 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\} \cup \{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-7}{2}\}$, katere vozlišča so obarvana z rdečo barvo. Da med izbranimi zunanjimi vozlišči in vozlišči tipa u_i in v_i ni povezav, je očitno. Vsa notranja vozlišča, ki jih premore množica S, so lihega indeksa, največji izmed njih pa je $n-6$. Velja $k=5$, zato je za poljuben $j \in \mathbb{Z}_n$, kjer je $v_j \in S$, indeks $j+5$ manjši od n, to pa pomeni, da pri preverjanju, ali sta slučajno dve notranji vozlišči iz S sosednji, indeksov $(j+5)$ nikoli ni treba računati po modulu n. Ker je k liho število in je vsota dveh lihih števil vedno sodo število, so vsa notranja vozlišča $\{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-7}{2}\}$ zagotovo med seboj neodvisna. To pa pomeni, da je S neodvisnostna množica grafa $GP(n,5)$.

□

Ni težko videti, da je neodvisnostna množica S, predstavljena v lemi 5.26, velikosti $n-3$, kar smo v resnici pokazali že v dokazu trditve 5.25. S to trditvijo in lemo 5.26 (ter z izračunanima vrednostma $\alpha(GP(11,5)) = 8$ in $\alpha(GP(13,5)) = 10$) smo dokazali naslednji izrek.

Izrek 5.27. *Naj bo $n \geq 11$ naravno število. Tedaj velja*

$$\alpha(GP(n,5)) = \begin{cases} n & , \text{če je } n \text{ sodo}, \\ n-3 & , \text{če je } n \text{ liho}. \end{cases}$$



Slika 5.36: Neodvisnostna množica S v $GP(n,5)$.

Poglavje 6

Zaključek

V magistrskem delu smo se ukvarjali s pojmom neodvisnostnega števila grafa, ki smo ga natančno predstavili v Poglavju 3. V njem smo neodvisnostno število teoretično določili za kar nekaj dobro znanih družin grafov, prav tako pa smo teoretično izpeljavo neodvisnostnega števila prikazali tudi za nekaj grafov, ki niso vsebovani v obravnavanih družinah. Prav to nas je popeljalo v Poglavje 4, kjer smo problem določanja neodvisnostnega števila tematizirali v okvirjih teorije kompleksnosti. Na tem mestu smo problem določitve neodvisnostnega števila nekoliko predrugačili, da smo pripadajoči spremenjeni problem lahko izrazili kot odločljiv problem in pokazali, da je vsebovan v tako imenovanem razredu NP-polnih problemov. Za tem je sledilo najobsežnejše poglavje tega magistrskega dela.

V Poglavju 5 smo se osredotočili na dobro znano družino posplošenih Petersenovih grafov $GP(n, k)$. Neodvisnostno število za poljubnega predstavnika te družine (do danes) še ni znano, mi pa smo se posvetili ločeni obravnavi poddružin $GP(n, k)$, za katere je $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, parameter n pa je poljuben. Neodvisnostno število smo teoretično določili za vse obravnavane poddružine, razen za $GP(n, 4)$. Pokazali smo, da za vse predstavnike te poddružine velja $\alpha(GP(n, 4) \leq \lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$, zgornjo mejo pa, glede na naše rezultate, povzete po obravnavani literaturi, dosežejo vsaj vsi tisti, za katere je $n \not\equiv 4, 6, 7$ $(mod\ 8)$. Čeprav za ostale predstavnike, torej tiste, za katere je $n \equiv 4, 6, 7$ $(mod\ 8)$, nismo uspeli povsem natančno določiti njihovega neodvisnostnega števila, predstavljeni rezultati niso slabi. Spodnja meja za njihovo neodvisnostno število se namreč od zgornje razlikuje samo za ena, torej z gotovostjo lahko trdimo, da neodvisnostno število $\alpha(GP(n, 4))$, za $n \equiv 4, 6, 7$ $(mod\ 8)$, zavzame ali vrednost $\lfloor \frac{7n}{8} \rfloor$ ali vrednost $\lfloor \frac{7n}{8} \rfloor - 1$. Razdelek o grafih $GP(n, 4)$ smo zaključili z domnevo 5.1, ki temelji na podlagi izračunanih vrednosti neodvisnostnega števila, ki so jih prikazali v [1]. Slednja pravi, da za vse $n \equiv 4, 6, 7$ $(mod\ 8)$, velja $\alpha(GP(n, 4)) = \lfloor \frac{7n}{8} \rfloor - 1$. Ker to vprašanje še vedno ostaja odprto, to magistrsko delo zagotovo lahko služi kot podlaga za nadaljnje raziskovanje.

Bralcu za nadaljnjo raziskavo priporočamo tudi slednje; v magistrskem delu smo pokazali, da za lihi n velja $\alpha(GP(n, 1)) = n - 1$, $\alpha(GP(n, 3)) = n - 2$ in $\alpha(GP(n, 5)) = n - 3$. Na prvi pogled se torej zdi, da za liha indeksa n in k velja, da je $\alpha(GP(n, k)) = n - \frac{k+1}{2}$. Glede na izračunane vrednosti iz [1] pa to zagotovo ni res. Do razlik med izračunano in predvidevano vrednostjo neodvisnostnega števila namreč prihaja že pri grafih $GP(n, 7)$. Zdi se, da bi za liha indeksa n in k lahko pokazali, da velja vsaj $\alpha(GP(n, k)) \geq n - \frac{k+1}{2}$. Ker kar nekaj predstavnikov (posebej, ko večamo parameter k) to mejo preseže, tega v sklopu magistrskega dela nismo obravnavali.

Literatura

[1] Besharati N., Ebrahimi J.B., Azadi A. (2011). *Independence number of generalized Petersen graphs.* arXiv:1008.2583v2.

[2] Butenko, S. (2003). *Maximum independent set and related problems, with applications* (Doktorska disertacija, University of Florida). Pridobljeno s http://etd.fcla.edu/UF/UFE0001011/butenko_s.pdf

[3] Curless, B. (2008). *Data Structures NP Completeness.* [PowerPoint]. Pridobljeno s https://courses.cs.washington.edu/courses/cse326/08sp/lectures/markup/23-NP-completeness-markup.pdf.

[4] Fox J., Gera R., Stănică P. (2012). *The Independence Number for the Generalized Petersen Graphs.* Ars Combinatoria, 103, 439-451.

[5] Garey, M.R., Johnson, D.S. (1979). *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness.* A Series of Books in the Mathematical Sciences. New York: W. H. Freeman and Company.

[6] Intro to Theoretical Computer Science. Pridobljeno 27.7.2019 s strani: https://classroom.udacity.com/courses/cs313

[7] Malnič, A. (2013). *Zapiski pri predmetu algebrske strukture.* Ljubljana: Pedagoška fakulteta.

[8] Mertük, V. (1999). *Neodvisnostno število grafa in uporaba v teoriji informacije.* Diplomsko delo, Maribor: Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta.

[9] Podrzavnik, P. (2012). *Neodvisnostno število v kartezičnem produktu grafov.* Diplomska seminarska naloga, Maribor: Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta.

[10] Stephen Cook. (b.d.) Pridobljeno 24.8.2018 s strani: http://www.cs.toronto.edu/∼ sacook/

[11] Šere, N. (2017). *Povezavno 3-obarvljivi grafi.* Diplomsko delo, Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.

[12] Škrekovski, R. (2010). *Diskretne strukture I, zapiski predavanj.* Ljubljana: Fakulteta za matematiko in fiziko. Pridobljeno 16.5.2020 s https://www.fmf.uni-lj.si/ skreko/Gradiva/DS1-skripta.pdf.

[13] Šparl, P. (2013). *Zapiski pri predmetu logika in množice.* Ljubljana: Pedagoška fakulteta.

[14] Šparl, P. (2014). *Zapiski pri predmetu abstraktna algebra.* Ljubljana: Pedagoška fakulteta.

[15] Šparl, P. (2016). *Zapiski pri predmetu kombinatorična optimizacija.* Ljubljana: Pedagoška fakulteta.

[16] Šparl, P. (2017). *Zapiski pri predmetu teorija grafov.* Ljubljana: Pedagoška fakulteta.

[17] Problem Königsbergških mostov. Pridobljeno 18.8.2019 s strani: http://wiki.fmf.uni-lj.si/wiki/Problem_Koenigsber%C5%A1kih_mostov

[18] Proving a Problem is NP-Complete. Pridobljeno 15.8.2019 s strani: http://www.cs.cornell.edu/courses/cs482/2005su/handouts/NPComplete.pdf

[19] Seven Bridges of Königsberg. Pridobljeno 20.8.2019 s strani: https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg

[20] Van Dooren, P. (2009). *Graph Theory and Applications.* [Powerpoint]. Pridobljeno s http://www.hamilton.ie/ollie/Downloads/Graph.pdf.

[21] Viswanathan K. I. *NP-Completeness of Independent Set.* National Institute of Technology Tiruchirappalli.

[22] Xu L.- C., Yang Y.- S., Xia Z.- Q., Tian J.-X. (2009). *On the Independence Number of the Generalized Petersen Graph P(n,k).* Zhangjiajie, 20-22.

Poglavje 7

Priloge

Funkcije, uporabljene v programu, ki išče neodvisnostno množico velikosti k

Funkcija *mnozica_vozlisc(graph)* vrača, kot pove že ime samo, množico v kateri so vozlišča grafa, funkcija *mnozica_povezav(graph)* pa množico, v kateri so povezave grafa. Funkcija *podmnozice_vozisc(S,m)* vrne vse podmnožice množice S, ki so velikosti m.

```
def mnozica_vozlisc(graf):
    vozlisca = set()
    for vozlisce in graph:
        vozlisca.add(vozlisce)
    return vozlisca

def podmnozice_vozisc(S,m):
    return list(set(itertools.combinations(S, m)))

def mnozica_povezav(graf):
    povezave= set()
    for vozlisce in graf:
        for sosed in graf[vozlisce]:
            povezave.add((sosed, vozlisce))
    return povezave
```

Program za iskanje neodvisnostne množice velikosti k

Funkcija *iskanje_neodvisnostne_mnozice(graf, k)* za vhodni podatek sprejme poljuben graf in parameter k. Ali dan graf premore neodvisnostno množico velikosti k preveri tako, da za vsako možno podmnožico vozlišč velikosti k preveri ali je le-ta neodvisnotna ali ne.

```
def iskanje_neodvisnostne_mnozice(graf,k):
    povezave_grafa= mnozica_povezav(graf)
    vozisca_grafa = mnozica_vozlisc(graf)
    ustrezne_mnozice=[]
    podmnozice=podmnozice_vozisc(vozisca_grafa,k)
    for mnozica_izbranih_vozlisc in podmnozice:
        comb=itertools.combinations(mnozica_izbranih_vozlisc, 2)
        povezave_med_izbranimi_vozlisci=list(set(comb))
        stevec=0
        for x in povezave_med_izbranimi_vozlisci:
            if x in povezave_grafa:
                stevec+=1
        if stevec==0:
            ustrezne_mnozice.append(mnozica_izbranih_vozlisc)

    if len(ustrezne_mnozice)==0:
        return "Nima neodvisnostne mnozice moci ", k
    else:
        return ustrezne_mnozice
```

Preverjanje vrednosti neodvisnostnega števila

1. Graf $GP(11,5)$

```
GP_11_5 = { 0: [1,10,12], 1: [0,2,13], 2: [1,3,14], 3: [2,15,4],
            4: [5,3,16], 5: [4,6,17], 6: [5,7,18], 7: [6,8,19],
            8: [7,9,20], 9: [10,8,21], 10: [9, 11, 0],
            11: [10, 17, 16], 12: [0, 17, 18], 13: [1, 18, 19],
            14: [2, 19, 20], 15: [3, 20, 21], 16: [4, 11, 21],
            17: [5, 11, 12], 18: [6, 13, 12], 19: [7, 14, 13],
            20: [8,15,14], 21: [9,16,15] }
```

```
print(iskanje_neodvisnostne_mnozice(GP_11_5,9))
print(iskanje_neodvisnostne_mnozice(GP_11_5,8))
```

```
>>> ('Nima neodvisnostne mnozice moci ', 9)
```

Ena možna rešitev je na primer množica vozlišč (1, 3, 8, 10, 14, 17, 18, 21).

2. Graf $GP(13,5)$

```
GP_13_5 = { 0: [1,14,12], 1: [0,2,15], 2: [1,3,16], 3: [2,17,4],
            4: [5,3,18], 5: [4,6,19], 6: [5,7,20], 7: [6,8,21],
            8: [7,9,22], 9: [10,8,23], 10: [9, 11, 24],
            11: [10, 12, 25], 12: [0, 11, 13], 13: [1, 18, 21],
            14: [0, 19, 22], 15: [1, 20, 23], 16: [2, 24, 21],
            17: [3, 22, 25], 18: [4, 13, 23], 19: [5, 14, 24],
            20: [6,15,25], 21: [7,16,13], 22: [8,17,14],
            23: [9,18,15], 24: [10,19,16], 25: [11,20,17] }
```

```
print(iskanje_neodvisnostne_mnozice(GP_13_5,11))
print(iskanje_neodvisnostne_mnozice(GP_13_5,10))
```

```
>>> ('Nima neodvisnostne mnozice moci ', 11)
```

Ena možna rešitev je na primer množica vozlišč (0, 2, 4, 6, 9, 15, 19, 21, 22, 25).

Izjava o avtorstvu magistrskega dela

Spodaj podpisana Nina Šere, z vpisno številko 01170653, izjavljam, da je magistrsko delo z naslovom

NEODVISNOSTNO ŠTEVILO GRAFA,

ki sem ga napisala pod mentorstvom izr. prof. dr. Primoža Šparla, avtorsko delo in da so uporabljeni viri in literatura korektno navedeni.

Ljubljana, avgust 2020 Podpis avtorice: