

Aplicación de lógica difusa en la evaluación de vulnerabilidad de contaminación del agua subterránea

Héctor Massone^{1,3}, Gustavo Meschino^{1,2}, M. Lourdes Lima^{1,3,4}, Daniel Albornoz¹, Agustina Barilari¹, Fernanda Damiano¹

¹ Fac. de Ingeniería, Universidad FASTA, Gascón 3145, 7600 Mar del Plata, Argentina

² Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata

³ Instituto de Geología de Costas y del Cuaternario, Universidad Nacional de Mar del Plata

⁴ CONICET. Av. Rivadavia 1917 (C1033AAJ) Ciudad Autónoma de Buenos Aires

Mail de contacto: dalbornoz@ufasta.edu.ar, gmeschin@fi.mdp.edu.ar, hmassone@mdp.edu.ar

RESUMEN

El objetivo del trabajo es analizar la potencialidad de la lógica difusa para evaluar la vulnerabilidad del agua subterránea a la contaminación. Se propone el uso de lógica difusa que representa el conocimiento como un predicado difuso principal compuesto por operaciones lógicas entre predicados simples, cuyo valor de verdad puede ser determinado objetivamente. Los predicados se formalizaron a partir de variables: profundidad de la capa freática, pendiente del terreno y textura del suelo. Se diseñó un software en entorno MATLAB para realizar el procesamiento difuso. Juntamente se realizó una encuesta entre profesionales vinculados a la gestión ambiental del Partido de Gral. Pueyrredón a fin de indagar acerca de la modalidad de presentación del mapa final de vulnerabilidad. El resultado final se comparó con el mapa de vulnerabilidad obtenido mediante la metodología tradicional (método DRASTIC-P), mostrando un buen ajuste espacial habiendo utilizado menos variables. El resultado de la encuesta mostró la preferencia por etiquetas con categorización cualitativa tradicional.

Palabras clave: Lógica difusa, contaminación, agua subterránea

ABSTRACT

The aim of this work is to analyze the potentiality of Fuzzy Logic to assess the groundwater pollution vulnerability. Fuzzy Logic Predicates are proposed as a natural extension of a Boolean Predicates Logic, where knowledge is represented as a Main Fuzzy Predicate that can be evaluated using numerical variables to determine a degree of groundwater pollution vulnerability. Those variables are: depth water table, land slope and soil texture. Software has been developed using MATLAB® to illustrate the fuzzy processing. The final result was compared with a vulnerability map that has been obtained with traditional methodology (DRASTIC-P Method). It was showed a good spatial adjustment having used less variables. In order to inquire about the best caption of the final vulnerability map, it was conducted a survey among professionals involved in Environmental Management at Partido General Pueyrredón. The preferred result was the traditional qualitative categorization labels.

Keywords: Fuzzy logic, contamination, groundwater.

Introducción

En la actualidad, la evaluación de la vulnerabilidad del agua subterránea se utiliza en la planificación del uso de la tierra para la protección de los acuíferos de las actividades contaminantes. En los 60's, Margat introdujo el concepto de la vulnerabilidad a la contaminación del acuífero, basado en el hecho de que la zona no saturada del acuífero normalmente protege

el agua subterránea de contaminantes ya sea de origen natural o impacto humano (Margat 1968). La vulnerabilidad a la contaminación del agua subterránea se determina mediante la evaluación de los factores naturales favorables o desfavorables para el transporte de productos químicos a las aguas subterráneas, es decir, el entorno hidrogeológico (profundidad del agua subterránea, la presencia o ausencia de las

capas de confinamiento o capas de arcilla, y otros).

Existen varios enfoques metodológicos para el desarrollo de la evaluación de la vulnerabilidad, uno de los más usados es DRASTIC (Aller et al. 1987), que es un método de sumas ponderadas y generación de un índice. Este modelo evalúa la vulnerabilidad a la contaminación de las aguas subterráneas al reunir a siete factores clave que influyen en el transporte de solutos. La teoría de la lógica difusa basada en conjuntos difusos fue propuesta por Zadeh (1965), y establece que un sistema complejo estará mejor representado por la variable descriptiva de los tipos lingüísticos y no por la representación tradicional de las ecuaciones diferenciales (Cox, 1994). La investigación ha demostrado que los modelos basados en reglas difusas son capaces de producir resultados comparables utilizando cerca del 40% menos de variables (Bardossy y Disse, 1993). La estrategia de aproximación basada en reglas difusas se ha utilizado en estudios de transporte de solutos (Dou et al. 1999) y para evaluar el potencial de un acuífero a la contaminación (Dixon et al. 2002; Gemtzi et al. 2006). A pesar de que los principales aspectos de esta teoría y sus resultados son notables en el área de Control, han ido surgiendo algunos planteos desde el punto de vista teórico. El uso de reglas simples es una de las principales ventajas de los sistemas de inferencia difusa. Sin embargo, la necesidad de la definición de las operaciones de agregación y *defuzzificación* aleja a estos modelos de la generalización de los paradigmas de la lógica booleana. La *defuzzificación* actúa como un grado de libertad en un modelo basado en la combinación pragmática de operadores, pero sin un enlace axiomático armónico que justifique la denominación de "Lógica" (Passino y Yorkovich 1998; Zimmerman 1996).

En este trabajo no se aborda este problema con un sistema de reglas difusas. Proponemos aquí el uso de la lógica de predicados difusos, que es una extensión natural de la lógica de predicados de Boole. El conocimiento se representa como un predicado difuso principal que puede ser evaluado con el uso de variables numéricas, para determinar el grado de vulnerabilidad del agua subterránea a la contaminación. El objetivo de este trabajo es utilizar la lógica de predicados difusos para evaluar la vulnerabilidad de un acuífero en una zona de llanura y comparar los resultados con los obtenidos a partir del uso de DRASTIC-P.

Materiales y métodos

Área de estudio

La cuenca del Arroyo El Dulce (1000 km²) está situada en el sureste de la provincia de Buenos Aires, Argentina, entre las ciudades de Mar del Plata y Balcarce. Desemboca en la laguna Mar Chiquita (Fig. 1) y constituye una parte del territorio de la llanura pampeana húmeda.

El área de estudio se eligió de acuerdo a criterios que incluyen el alto nivel de las actividades agrícolas y de los amplios datos disponibles sobre la geología del acuífero. Desde el punto de vista hidrogeológico esta área implica un acuífero freático con una extracción local significativa del recurso para bebida y para riego.

La zona es de clima "moderado-húmedo" (en la clasificación de Köppen). En los últimos 20 años, las precipitaciones medias anuales en la región han oscilado entre 960 a 1170 mm, mientras que la temperatura media en verano es de 20^o y 10^o C en invierno.

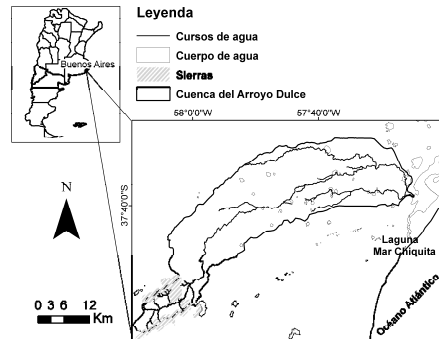


Figura 1. Mapa de Ubicación del área de estudio.

El método DRASTIC-P para evaluar vulnerabilidad

"DRASTIC-P" (Aller et al. 1987) es uno de los métodos más comúnmente utilizados para evaluar la vulnerabilidad del agua subterránea. Este método se basa en una suma ponderada de los parámetros que definen los principales factores geológicos e hidrogeológicos que controlan la circulación del agua tanto en el subsuelo como en la superficie. El resultado de este método es un mapa que muestra las diferentes categorías de vulnerabilidad del acuífero, con clases normalmente cualitativas que van desde muy baja hasta muy alta vulnerabilidad. El Modelo DRASTIC-P considera

los siguientes siete parámetros: profundidad del agua subterránea (D), la recarga neta (R), la litología del acuífero (A), la textura del suelo (S), topografía (T), el impacto de la zona no saturada (I), y la conductividad hidráulica (C). El índice de vulnerabilidad final (Di) es una suma ponderada de los siete parámetros y se puede calcular mediante la fórmula:

$$D_i = D_r D_w + R_r R_w + A_r A_w + S_r S_w + T_r T_w + I_r I_w + C_r C_w \quad (1)$$

donde D_i es el índice DRASTIC para una unidad de mapeo, w es el factor de ponderación para cada parámetro (varía entre 1 y 5) y r es la valoración de cada uno de ellos (varía entre 1 y 10). Cuanto mayor sea el D_i , mayor es la vulnerabilidad de las aguas subterráneas a la contaminación. El índice DRASTIC-P fue calibrado en la región de estudio por Massone et al. (2010), y se aplicó en la Cuenca del Arroyo Dulce (Lima et al. 2011); se utiliza como modelo de referencia para este trabajo (Fig. 5).

Evaluación de vulnerabilidad mediante predicados difusos

En este apartado, se dan algunas definiciones básicas sobre la lógica de predicados difusos.

Definición 1. Un predicado p difuso es una expresión lingüística (una proposición), con grado de verdad $u(p)$ en el intervalo $[0, 1]$. Se aplica el "principio de gradualidad", que establece que una proposición puede ser a la vez verdadera y falsa, que tiene un cierto grado de verdad (o falsedad) asignado.

Definición 2. Un predicado difuso simple, sp , es una sentencia cuyo grado de verdad $u(sp)$ se puede obtener por algunas de las alternativas siguientes:

- La aplicación a una variable cuantitativa de una función de pertenencia asociada con un término difuso,
- La asociación de valores discretos en el intervalo $[0, 1]$ para etiquetas lingüísticas (generalmente adjetivos) de una variable.
- Determinación del valor real en el intervalo $[0, 1]$ por parte de un experto.

Definición 3. Un predicado compuesto, cp , es un predicado difuso obtenido por la combinación de predicados difusos simples u otros predicados difusos compuestos, vinculados por

conectores lógicos y operadores (y, o, no, implicación, doble implicación).

Definición 4. Los Predicados compuestos se pueden representar como una estructura de árbol, que tiene sus nodos asociados por conectivas lógicas y sus ramas sucesivas relacionadas con los predicados de menor nivel jerárquico (simples o compuestos).

Es necesario definir una lógica (un sistema de operaciones entre valores de verdad) donde las operaciones de conjunción, disyunción y la negación sean funciones definidas sobre un conjunto de valores de verdad para predicados, en el intervalo real $[0, 1]$, tal que cuando los valores de verdad se limitan a $\{0, 1\}$, estas operaciones se convierten en predicados booleanos clásicos (Bouchet et al. 2011). Para este trabajo, sobre la base de anteriores resultados exitosos (Espín 2006; Espín 2007), se han elegido los operadores de la lógica compensatoria basados en la media geométrica (GMBCL). Estos operadores han demostrado ser adecuados para la implementación de modelos lingüísticos basados en predicados difusos provenientes de diferentes campos de investigación (Meschino et al. 2011; Passoni 2011; González et al. 2011; D'Onofrio et al. 2011).

El operador de conjunción entre grados de verdad de N predicados difusos $\mu_i, i = 1, 2, \dots, N$ en este sistema, se define como:

$$C(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)^{\frac{1}{N}} \quad (2)$$

La característica fundamental que hace los sistemas compensatorios es la sensibilidad del resultado al valor de todos los operandos, lo que no ocurre con otras operaciones de conjunción más utilizados, como el operador "mínimo". De esta manera, el valor de la relación puede ser influenciado por, y por lo tanto "compensada" por el valor de cualquiera de los grados de verdad considerados.

Metodológicamente el trabajo que se presenta consta de 4 etapas:

Etapas:

1.a. *Conformación del grupo de trabajo*, elaboración de un "conocimiento base" para los integrantes en lo relativo a vulnerabilidad de acuíferos y contaminación, por una parte y en los principios básicos de lógica difusa por otra.

1.b. *Selección de las variables a utilizar.*

La selección de variables se realizó en base a 2 aspectos: el conocimiento hidrogeológico previo del área de estudio y la información disponible actualmente. Se decidió utilizar las variables más directamente relacionadas con la vulnerabilidad a la contaminación, es decir:

- La profundidad en que se encuentra el nivel freático (límite superior del acuífero);
- la facilidad de la zona no saturada (el área que se encuentra entre el nivel del agua subterránea y la superficie) favorece la infiltración de posibles contaminantes.

La última variable está compuesta por el porcentaje de materia orgánica en el suelo, el porcentaje de arcilla en el suelo y la pendiente topográfica del terreno. Estas variables fueron consideradas en los predicados lingüísticos siguientes:

A) El agua subterránea es vulnerable cuando el acuífero es superficial o la zona no saturada permite la infiltración de contaminantes.

B) La zona no saturada permite la infiltración de contaminantes cuando la pendiente es baja y no contiene arcilla o materia orgánica.

Etapa 2:

Construcción del árbol de predicados. Basándose en el conocimiento de la etapa anterior, se desarrolla el árbol de predicados difusos.

Formalmente:

$V(x)$ = "El agua subterránea x es vulnerable cuando el acuífero es somero o la zona no saturada permite la infiltración de contaminantes."

$$V(x) = S(x) \text{ o } P(x) \quad (3)$$

Donde

$S(x)$ = "El acuífero es somero."
 $P(x)$ = "La zona no saturada permite la infiltración de contaminantes."

Podemos desglosar el predicado $P(x)$ en tres predicados simples, como:

$$P(x) = L(x) \text{ y } C(x) \text{ y } M(x) \quad (4)$$

donde:

$L(x)$ = "La pendiente es baja." $C(x)$ = "La zona no saturada no contiene arcilla." $M(x)$ =

"La zona no saturada no contiene materia orgánica."

La estructura predicados difusa se puede representar como un árbol, como se ve en la Fig. 2

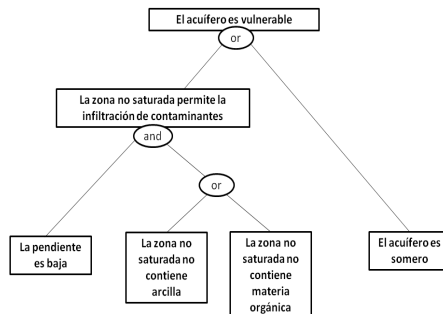


Figura 2. Árbol de predicados a analizar. Se comienza evaluando el valor de verdad de las hojas y se opera hasta obtener el valor de verdad del predicado principal raíz.

Etapa 3:

SIG ligado al diseño del modelo.

Se ha desarrollado un software (llamado STF, "software temático fuzzy") que opera en entorno MATLAB y que evalúa el píxel a píxel el conjunto de predicados difusos, devolviendo finalmente un valor de verdad de vulnerabilidad. Además interactúa con el SIG utilizado en este trabajo (ArcGIS 9.2). Por último, el grado de verdad del predicado principal (lo que indica la vulnerabilidad de contaminación del agua subterránea relativa) se representa mediante una escala de colores en un mapa.

Etapa 4:

Consulta referida al mapa final de vulnerabilidad en relación con la manera de expresar el resultado. En esta etapa se prepararon 3 leyendas para el mapa final de vulnerabilidad del agua subterránea: la primera con el resultado en términos de "grado de pertenencia" a la afirmación "el acuífero es vulnerable"; es decir una presentación en términos estrictamente difusos. La segunda y la tercera surgen de una clasificación por intervalos iguales del resultado difuso; la segunda fue expresada con etiquetas clásicas de vulnerabilidad (muy baja, baja, moderada, alta) y la última en términos de pautas de acción previa a la toma de decisiones. Se solicitó a todos los técnicos pertenecientes a la Dirección de Gestión Ambiental del Municipio de Gral.

Pueyrredón y a los docentes de la Carrera de Ingeniería Ambiental (UFASTA) ligados a temáticas de gestión que señalaran la opción de leyenda que consideraran más apropiada desde la perspectiva de la toma de decisiones. Se obtuvieron 15 resultados.

Resultados

Para cada una de las variables seleccionadas se obtuvo un mapa temático en formato raster con celdas de 100x100 m², en la plataforma SIG. El análisis de estas variables se realizó mediante el conocimiento experto aplicando información hidrogeológica existente en el área de estudio y la información entregada por la Carta de Suelos de INTA (1989).

Se establecieron las siguientes condiciones para cada predicado:

"El acuífero es somero". Se consideró que la profundidad del acuífero de 0 a 2 metros muestra la peor condición, porque cualquier descarga de contaminantes en la superficie alcanza rápidamente el agua subterránea. Entre 2 y 5 metros la potencialidad negativa disminuye rápidamente, mientras que entre los 5 y los 15 metros va perdiendo importancia, ya que la mayor profundidad da tiempo para la existencia de procesos de retardo de los contaminantes. Profundidades de más de 18 metros se considera la mejor condición.

"La zona no saturada no contiene materia orgánica". La peor situación se consideró para valores inferiores a 2% (Gao et al.1998). A partir de ese valor hasta un 7% los procesos de retardo pueden manifestarse progresivamente. Los valores de materia orgánica de más de 7% se consideran la situación menos peligrosa. Si bien es claro que la influencia de la materia orgánica en los procesos de retardo dependerá de qué tipo de contaminante se trate, en principio la aplicada es una aproximación general que resulta representativa de los suelos de la región.

"La zona no saturada no contiene arcilla". Valores entre 0 y 10% se consideran como la peor situación (Gao et al. 1998). Desde 10% es probable que aparezcan fenómenos de retardo, incrementándose hasta valores de 30% de arcilla. La presencia de más de 30% se considera la situación menos peligrosa. De la misma manera que en el caso de la materia orgánica, la relación de la arcilla con los procesos de retardo dependen del contaminante que se trate; los porcentajes utilizados son una buena aproximación general.

"La pendiente es baja". La peor situación es cuando la pendiente es inferior al 2%. A medida que ésta aumenta gradualmente, la escorrentía va siendo superior a la infiltración. Los valores de pendiente superior al 18% se consideran como la situación menos peligrosa. Con el software desarrollado para este trabajo (STF) se realizó la especificación y la evaluación numérica de los predicados difusos. Las variables de entrada son matrices equidimensionales procedentes de los mapas en formato raster. La respuesta de salida es una matriz con el mismo formato. Por otra parte, la matriz de salida se puede vincular mediante una interfaz de archivo de texto para el intercambio de información con herramientas SIG. Mediante este mismo software, para cada predicado fueron seleccionadas las siguientes funciones de pertenencia para la cuantificación de su valor de verdad (Fig. 3):

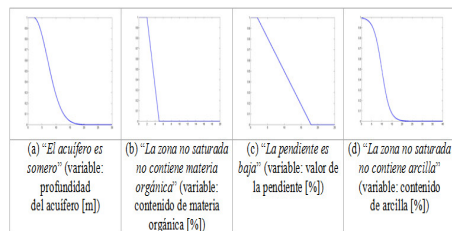
"El acuífero es somero": Gaussiana doble (combinación de dos funciones Gaussianas con intervalo constante de valor 1).

"La zona no saturada no contiene materia orgánica": función trapezoidal.

"La zona no saturada no contiene arcilla": función sigmoidea.

"La pendiente es baja": función trapezoidal.

Figura 3. Funciones de pertenencia



seleccionadas para cada variable.

En el entorno de STF el predicado principal se evalúa y se obtuvo el mapa final de vulnerabilidad (Fig. 4), que se exportó al SIG, a fin de comparar con el mapa de vulnerabilidad original obtenido mediante el método DRASTIC-P (Fig . 5, Lima et al. 2011). Los resultados muestran que, en términos generales, la concordancia es buena; en ambos casos hay coincidencia espacial en las vulnerabilidades más altas, localizadas en el extremo WSW, en la zona central de la cuenca y hacia el extremo NE. De todas maneras, la existencia de discrepancias entre estos dos mapas es

esperable, ya que las variables de entrada son diferentes en cada uno de ellos. En términos generales, puede observarse que el

mapa obtenido a partir de lógica difusa es algo más permisivo que el obtenido mediante DRASTIC-P.

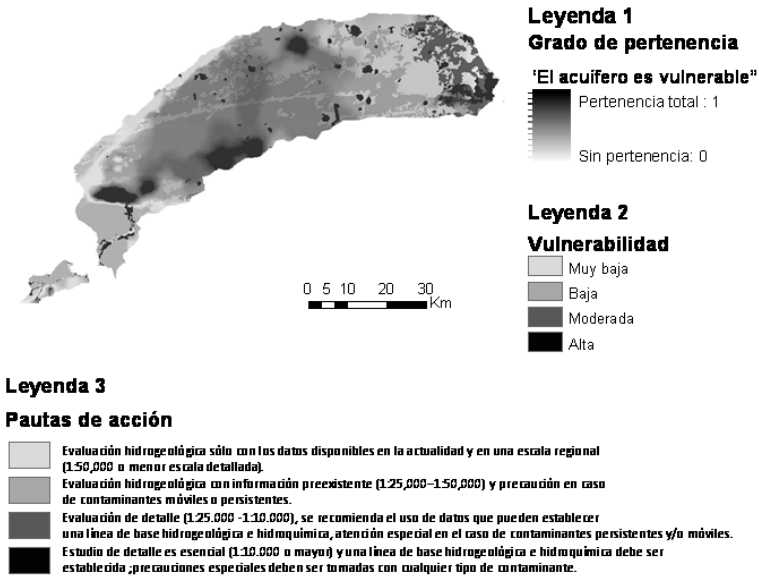


Figura 4. Mapa final de vulnerabilidad y leyendas asociadas.

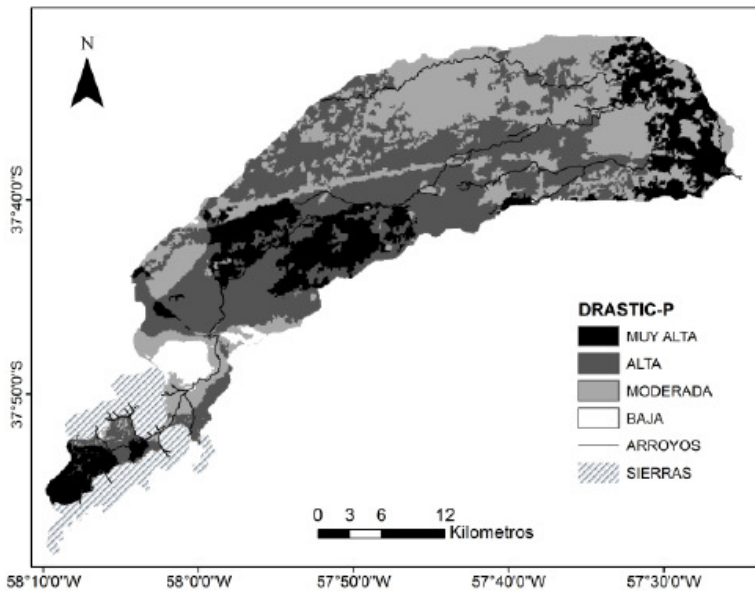


Figura 5. Mapa de vulnerabilidad DRASTIC-P (Lima et. al. 2011).

Los resultados de la encuesta (Fig. 6) muestran una amplia preferencia (42%) por la leyenda de etiquetas cualitativas; en segundo lugar (20%) se aceptó la leyenda por grado de pertenencia y en tercero la relacionada con pautas de acción (13%). Algunos encuestados dieron soluciones mixtas, fundamentalmente combinación de las leyendas 2 y 3.

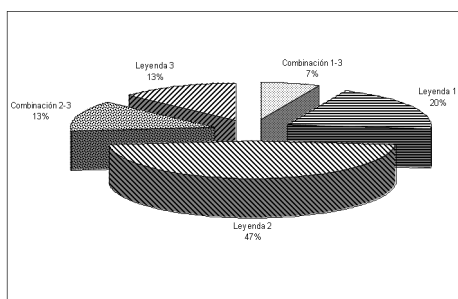


Figura 6. Resultados de la encuesta.

Conclusiones

El trabajo permite confirmar que la aplicación de otro tipo de razonamiento lógico es aplicable a la problemática en estudio; particularmente, el uso de GMBCL ha sido eficaz para representar la vulnerabilidad del agua subterránea a la contaminación, utilizando menor cantidad de variables. Si bien los resultados expresados como pertenencia han permitido independizarse de las clásicas etiquetas cualitativas de vulnerabilidad, de la encuesta se desprende su relativa pobre aceptación. Se estima que esto puede estar condicionado por la novedad que implica presentar resultados de esta forma y porque en principio parecería más sencillo tomar decisiones a partir de una clasificación clásica. Se seguirá trabajando en otras posibles combinaciones de predicados con el fin de comparar los resultados y optimizar el mapa final de vulnerabilidad. De la misma manera, será necesario avanzar en el análisis conjunto entre investigadores y decisores sobre las ventajas y desventajas de los tres tipos de leyenda presentados.

Referencias

Aller, L., Bennett, T., Lehr, J., Petty, R. 1987. DRASTIC: A Standardized System for

- Evaluating Ground Water Pollution. Doc. EPA/600/2-85/018, pp. 157.
- Bardossy, A., Disse, M. 1993. Fuzzy rule-based models for infiltration. *Water Resources Research*, 29(2), 373–382.
- Bouchet, A., Pastore, J.I., Espín Andrade, R., Brun, M., Ballarin, V.L. 2011. Arithmetic Mean Based Compensatory Fuzzy Logic. *International Journal of Computational Intelligence and Applications*, Vol. 10, No. 2 1–13, DOI: 10.1142/S1469026811003070.
- Cox, E. 1994. The fuzzy systems handbook. London: Academic Press.
- Dixon, B., Scott H.D., Dixon J.C., Steele K.F. 2002. Prediction of Aquifer Vulnerability to Pesticides Using Fuzzy Rule-Based Models at the Regional Scale. *Physical Geography* 23:130 – 152.
- D'Onofrio, M.V., Gonzalez, M.A., Meschino, G.J., Ballarin, V.L. 2011. Quantification of international competitiveness of argentine fishing industry. *Chinese Business Review*. 10, 481-6.
- Dou, C., Wolt, W., Bogardi, I. 1999. Fuzzy rule-based approach to describe solute transport in the unsaturated zone. *Journal of Hydrology*, 220(1-2), 74–85.
- Espín Andrade, R., Téllez, G.M., González, E.F., Marx-Gómez, J., Lecich, M.I. 2006. Compensatory logic: A fuzzy normative model for decision making. *Investigación Operativa*, vol. 27, pp. 188-197.
- Espín Andrade, R., Téllez, G.M. 2007. Consideraciones sobre el carácter normativo de la lógica difusa compensatoria. *Infraestructuras de Datos Espaciales en Iberoamérica y el Caribe*, Cuba.
- Gao JP, Maguhn J, Spitzauer P, Kettrup A. 1998. Sorption of pesticides in the sediment of the Teufelsewiher Pond (Southern Germany). I: Equilibrium assessments, effect of organic carbon content and pH. *Wat. Res.* Vol. 32. No. 5, pp. 1662-1672.
- Gemitzi, A., Petalas, C., Tsihrintzis, V.A., Pisinaras, V. 2006. Assessment of groundwater vulnerability to pollution: a combination of GIS, fuzzy logic and decision making techniques. *Environ. Geol.*, 49, 653-673.
- González, M.A., Meschino, G.J., Espin Andrade, R.A., Ballarin, V.L. 2011. Classification of over-segmented regions result of the watershed transform through Compensatory Logic. In: (eds.) Editorial Shaker Verlag, Universidad de Oldenburgo, pp. 161-8. Editorial Shaker Verlag, Universidad de Oldenburgo, Oldenburgo, Alemania.

- INTA (Instituto Nacional de Tecnología Agropecuaria) 1989. Carta de Suelos de la República Argentina (1:50.000). Proyecto PNUD ARG 85/019. Secretaría de Agricultura, Ganadería y Pesca-INTA.
- Lima, M.L., Zelaya, K., Massone, H. 2011. Groundwater vulnerability assessment combining the DRASTIC and Dyna-CLUE model in Argentine Pampas. *Environmental Management*. Volume 47, Nº 5, pp.828-839.
- Margat J 1968. Groundwater vulnerability to contamination. BRGM, 68 sgl 198, HYD, Orleans, France.
- Meschino, G.J., Ballarin, V.L., Espin Andrade, R.A. 2011. Image segmentation with predicates analysis and Compensatory Fuzzy Logic. In: (eds.) Editorial Shaker Verlag, Universidad de Oldenburgo, pp. 210-25. Editorial Shaker Verlag, Universidad de Oldenburgo, Oldenburgo, Alemania.
- Massone, H., Quiroz Londoño, M., Martínez D. 2010. Enhanced groundwater vulnerability assessment in geological homogeneous areas: a case study from the Argentine Pampas. *Hydrogeology Journal* vol. 18, (2), 371-379.
- Passino, K., Yorkovich, S. 1998. Fuzzy Control. Addison Wesley. New York.
- Passoni, L.I., Meschino, G.J., Gesualdo, S., Monjeau, A. 2011. Fuzzy Tree Studio: una herramienta para el diseño del tablero de mando para la gestión de áreas protegidas. *III Taller Internacional de Descubrimiento de Conocimiento, Gestión del Conocimiento y Toma de Decisiones*, Santander, Cantabria, España.
- Zadeh, L. 1965. "Fuzzy sets", *Information and Control*, 8: 338-353.
- Zimmermann, H.J. 1996. Fuzzy Set Theory and its applications, Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London.