

Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental¹

Michèle Artigue²

Université Paris Diderot - Paris 7, Laboratoire de Didactique André Revuz
Francia
artigue@math.jussieu.fr

Resumen

¿Qué esperamos ahora de la enseñanza de las matemáticas? ¿Qué consideramos como un progreso, una regresión, o un fracaso? Estas interrogantes perfilan cuestiones fundamentales de la educación matemática. Está claro que hoy no sabríamos dar respuesta a tales preguntas sin tomar en cuenta el factor tecnológico. Lo anterior en parte motivó la elección de este tema para mi contribución en esta conferencia. La otra razón que motivó la elección de este tema, son mis más de veinte años interesada en estas preguntas, sea como profesora o como investigadora y desearía compartir con ustedes las reflexiones que me inspira esta experiencia.

Palabras clave

Enseñanza de la matemática, Tecnología, Aproximación instrumental, ICMI.

Abstract³

What do we consider now from the teaching of mathematics? What we consider as progress, regression or a failure? These questions are key issues in Mathematics Education. We cannot answer these questions without taking into account the technological factor. This in part prompted the choice of topic for my contribution to this conference. The other reason is that I have been working in that area for more than twenty years dealing with these questions, whether as a teacher or as a researcher and I would like to share with you the thoughts that inspired me this experience.

¹ Trabajo presentado como conferencia en la *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, celebrada en Querétaro, México, en julio de 2007.

² La autora es expresidente de la *International Commission on Mathematical Instruction ICMI*.

³ El abstract y las key words fueron agregados por los editores.

Key words

Mathematics Instruction, Technology, Instrumental approach.

1. Introducción

Hace más de veinte años, el primer estudio propuesto por la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI) tenía por tema: la influencia de los ordenadores sobre las matemáticas y su enseñanza. La conferencia asociada a dicho estudio tuvo lugar en 1985 en Estrasburgo y la obra que resultó fue re-editada, bajo el auspicio de la UNESCO en 1992 (Cornu & Ralston, 1992). El estudio trataba la cuestión de esta influencia considerando tres dimensiones: la influencia sobre las prácticas matemáticas, sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sobre los planes de estudio y la formación de profesores. Se señalaba que la influencia sobre las matemáticas y las prácticas matemáticas no necesitaba probarse más pero que la situación era mucho menos clara para la enseñanza. La obra, anunciaba el prefacio, presentaba numerosas proposiciones de mejoras curriculares apuntando a sacar provecho de estas nuevas maneras de hacer matemáticas; se daban numerosos ejemplos de experimentaciones exitosas pero, según los autores, faltaba reconocer que,

... todas estas sugerencias permanecían fundamentalmente especulativas en lo que se refiere a su puesta en escena a gran escala, es decir en su conversión en un plan de estudio bien desarrollado y probado, y concebido para profesores y alumnos ordinarios (Cornu & Ralston, 1992, p.3) [Traducción de la autora].

Los autores agregaban que, para superar este estado, era necesario desarrollar la investigación y las experimentaciones, particularmente en contextos realistas.

En el pasado mes de diciembre, en Hanoi, se tuvo la conferencia asociada al segundo estudio ICMI dedicado a este tema y con la encomienda de revisar el primer estudio. En 25 años nuestros conocimientos han seguramente progresado de manera significativa, pero, en lo que se refiere al éxito de proyectos a gran escala, es necesario admitir que la situación no ha evolucionado considerablemente. Herramientas como las calculadoras, los programas computacionales de geometría dinámica, las hojas de cálculo plantean siempre problemas a nuestros sistemas educativos, aún cuando la evolución tecnológica ofrece perspectivas radicalmente nuevas, en particular nuevas formas de interacciones sociales y didácticas, además de la cosificación de objetos matemáticos en

formas directamente manipulables, de la visualización y simulación de fenómenos.

Sin embargo, se observan evoluciones innegables que no se limitan a los países que se dicen desarrollados como lo mostró bien el “Diversity Panel” en la conferencia de Hanoi. Además, se plantean cuestiones que estaban ausentes en el primer estudio, por ejemplo el del control que pueden tener las instituciones sobre las evoluciones o el carácter benéfico de las influencias observadas. A través de estas interrogaciones, se perfilan unas cuestiones fundamentales: ¿Qué esperamos ahora de la enseñanza de las matemáticas? ¿Qué consideramos como un progreso, una regresión, un fracaso? Está claro que hoy no sabríamos dar respuesta a tales preguntas sin tomar en cuenta el hecho tecnológico. Es lo que, al menos en parte, motivó la elección de este tema para mi contribución en este congreso. Otra razón es que desde hace más de veinte años, me he interesado en estas preguntas, tanto como profesora, que como investigadora y desearía compartir con ustedes las reflexiones que me inspira esta experiencia. Para ubicarme mejor, evocaré en primer lugar unos episodios de esta experiencia personal. Más allá de ser sólo una experiencia personal, me parece reflejar la evolución de los trabajos en este dominio, marcados al mismo tiempo por la evolución tecnológica, la evolución de los contextos y la evolución de la investigación en matemática educativa en un sentido amplio. Me centraré después sobre lo que hoy se conoce como la aproximación instrumental de las cuestiones de integración tecnológica, aproximación que contribuí a desarrollar.

2. De la programación a los recursos en línea: trayectoria de una investigadora

Al inicio de los años 80's comencé a trabajar en este dominio como joven universitaria utilizando la informática, principalmente a través de actividades de programación, en una sección experimental físico-matemática de primer año de universidad. En esa época, las posibilidades gráficas ofrecidas por la tecnología eran muy limitadas. Pero, afortunadamente, la situación evolucionó rápidamente, y percibí en estos avances el medio de hacer accesible para los estudiantes principiantes una aproximación cualitativa de las ecuaciones diferenciales, reservada en aquella época a los estudiantes de maestría (Artigue & Rogalski, 1990). Este primer proyecto de investigación fue un éxito, pero rápidamente entendí que su generalización no iba a ser evidente. Su éxito exigía en efecto un cambio importante en el estatus dado al registro gráfico (Artigue, 1992). Incluso en el contexto ecológicamente protegido de nuestra investigación, habíamos podido medir la fuerza de la resistencia cultural a este cambio.

Por razones evidentes de coherencia, este cambio de estatus no podía estar limitado solo al tema de las ecuaciones diferenciales. Nos había sido necesario usar toda nuestra legitimidad de matemáticos expertos en el ámbito, para lograr convencer a nuestros colegas en la experimentación realizada.

Poco tiempo después, como miembro del IREM París 7, me involucré en un segundo proyecto, esta vez con alumnos de nivel medio (13, 14 años) de bajo rendimiento. En este nuevo proyecto, el programa computacional Euclides, derivado de Logo y ofreciendo macro-construcciones geométricas, era utilizado para reconciliar a estos alumnos con las matemáticas. Una vez más este proyecto fue un éxito, pero el programa computacional presentaba límites evidentes comparado con los programas computacionales de geometría dinámica como Cabri-geometra, que aparecían en el mercado y muy rápido se volvió obsoleto. Dicha investigación también llamó mi atención sobre los cambios que una utilización eficaz de tales herramientas requería en las prácticas de profesores, y a poner seriamente en duda la pertinencia de las estrategias de formación continua de los profesores en este dominio. De forma evidente, subestimaban la complejidad del trabajo del profesor en entornos informáticos y no sostenían el desarrollo de nuevas competencias técnico-matemáticas y de manejo de clase requeridas por los profesores (Artigue, 1991, 1998).

A principios de los años 90's, se inició un tercer episodio cuando la Dirección de la Tecnología del Ministerio de la Educación Nacional me solicitó colaborar, en tanto que especialista en la disciplina de la Matemática Educativa, en los trabajos de un grupo de profesores, expertos en la utilización de calculadoras y programas computacionales. Dicho grupo trabajaba para identificar el potencial ofrecido por los programas computacionales de cálculo formal o CAS para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la enseñanza secundaria, y debía preparar las evoluciones curriculares que la introducción de tales herramientas a nivel bachillerato (grados del 10 al 12) pudiera necesitar. Era un nuevo tipo de tecnología para la enseñanza, mucho más perturbador de sus normas y valores que las calculadoras gráficas, entonces obligatorias en el bachillerato o incluso que los programas computacionales de geometría dinámica. Era también una tecnología mucho más compleja. El contraste entre el discurso idealista de los expertos del grupo, totalmente coherente con la literatura de la época sobre los CAS y lo que mostraban las observaciones llevadas a cabo en sus clases, se volvió una pregunta de investigación (Artigue, 1997). Y esto fue el comienzo de la aproximación instrumental la cual retomaré en la segunda parte de este texto.

En estos últimos años, mi relación con la tecnología ha tomado nuevas vías. En efecto, he tenido la responsabilidad de dirigir un proyecto regional con un alcance de más de 5000 estudiantes y de 100 profesores, concerniente al uso de

recursos en línea. Es necesario saber, que en Francia las regiones tienen la responsabilidad de los “liceos” (enseñanza media superior). Estas pagan por los edificios, los libros, las computadoras. Hace tres años la región Ile de Francia, la más grande del país, decidió poner en marcha un nuevo proyecto, pagando el acceso a recursos en línea en matemáticas a alumnos de primer año de bachillerato viviendo en zonas socialmente desfavorecidas. Por medio de dicho proyecto, se trataba de compensar el acceso limitado que estos alumnos tenían a los diversos sistemas de acompañamiento escolar que existen en Francia, por razones financieras evidentes. La región decidió también que este proyecto debía ser seguido y evaluado por un equipo universitario y así nuestro IREM fue contactado. Este proyecto era un desafío al menos por dos razones: su tamaño y la tecnología utilizada. Hasta entonces sólo habíamos participado en estudios que consideraban un número limitado de clases. Dichos estudios también consideraban programas computacionales abiertos, micro-mundos, muy distantes de los recursos en línea utilizados en esta experimentación. Experimenté un sentimiento de regresión dramática, debido a la baja calidad de la interacción con el saber matemático que estos recursos *a priori* permitían. No obstante, aceptamos este desafío porque nos parecía necesario interesarnos en estos productos cada vez más presentes en el universo escolar y extra escolar. Dentro de algunos años podrían tener mayor influencia sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que los micro-mundos habían alcanzado tener en más de veinte años. Este proyecto nos confrontó a cambios importantes en la economía y la ecología de los procesos de aprendizaje, y a cambios diferentes de éstos hasta entonces observados y estudiados. Asimismo, nos obligó a trabajar nuevamente la aproximación instrumental para adaptarla a este nuevo contexto tecnológico.

La última experiencia que mencionaré es también muy reciente, puesto que ha comenzado en el 2004, con la creación de la red de excelencia Europea Kaleidoscope y del equipo de investigación europeo TELMA (Technology Enhanced Learning in Mathematics) que es uno de sus componentes. Una de las ambiciones de Kaleidoscope es el desarrollo de herramientas, permitiendo la mejora de los intercambios y el desarrollo de proyectos cooperativos en el dominio del aprendizaje con tecnologías digitales. El equipo de investigación TELMA reagrupa seis equipos de cuatro países, y se centra en las matemáticas. Una de las hipótesis hechas por sus miembros es que la multiplicidad y el carácter fragmentado de los marcos teóricos utilizados en el dominio del “technology enhanced mathematics learning” es un obstáculo para la comunicación y la capitalización de los conocimientos. En consecuencia, buscamos conectar los marcos teóricos y las aproximaciones que utilizábamos respectivamente a través del desarrollo de una metodología y de herramientas conceptuales específicas. No entraré en los detalles de este trabajo ni del proyecto ReMath que

le sucedió, sólo diré que es un trabajo fascinante que influencia profundamente mi visión de las necesidades teóricas en la Matemática Educativa y de la manera en la que pueden satisfacerse (Ver páginas web de TELMA y ReMath: <http://telma.noe-kaleidoscope.org> y www.remath.cti.gr).

Este itinerario, si bien es particular, no es extraordinario, y entre los participantes de este congreso, otros sin duda comparten historias parecidas, donde los proyectos de investigación se encadenan llevados por la evolución tecnológica, las demandas institucionales así como por la sensibilidad del investigador, combinando trabajo teórico y experimental. A continuación voy a presentar un ejemplo de tal combinación: el desarrollo de la aproximación instrumental.

3. La aproximación instrumental: nacimiento y desarrollo

Como he mencionado anteriormente, fui parte de un grupo de expertos que trabajaban sobre la integración de CAS en la enseñanza media superior. Rápidamente, un proyecto de investigación fue puesto en marcha, financiado por el Ministerio. Dicho proyecto puso en evidencia la diferencia entre el discurso de los expertos sobre el potencial de los CAS para el aprendizaje de las matemáticas y la realidad en las aulas. Asimismo nos permitió identificar posibles causas de esta diferencia y tres de entre éstas llamaron particularmente nuestra atención (Artigue, 1997):

- la oposición entre técnico y conceptual que aparecía en la literatura existente y se reflejaba en el discurso de los expertos,
- la poca atención dada a los cambios en la economía de las prácticas matemáticas inducidos por la utilización de CAS,
- la subestimación de las cuestiones instrumentales.

Un segundo proyecto sucedió al primero, esta vez implicando varios equipos, en el momento en que la calculadora simbólica TI-92 era comercializada (Guin & Trouche, 2001). Dicho proyecto nos permitió poner a prueba nuestras conjeturas y profundizar nuestra reflexión. Para conducir de la mejor manera este trabajo, consideramos necesario tomar distancia del discurso usual sobre los CAS y de los marcos teóricos cognitivos y constructivistas que lo sostenían. Necesitábamos un discurso que permitiera considerar conceptos y técnicas en sus relaciones dialécticas, un discurso menos centrado en el alumno y que tratara las cuestiones de integración en su dimensión sistémica. De la misma manera, debía permitírnos considerar la dimensión instrumental de los procesos de aprendizaje.

Estoy perfectamente consciente que estas necesidades podrían haber sido satisfechas de diferentes maneras. Siendo nosotros investigadores franceses, familiarizados con la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD en adelante) desarrollada por Chevallard (Chevallard, 1992, 1999, 2002), (Gascón, 1998), habituados a colaborar con investigadores en Ergonomía Cognitiva (Rabardel, 1995), (Vérillon & Rabardel, 1996), naturalmente se impuso la idea que una concatenación apropiada entre la TAD y las perspectivas desarrolladas por Rabardel y Vérillon en la Ergonomía Cognitiva pudiera darnos el marco de pensamiento buscado. Es así como nació la aproximación instrumental.

4. Los inicios de la aproximación instrumental

Más precisamente, para el desarrollo de esta aproximación, la TAD nos dio un marco macro-teórico:

- centrado en la noción de institución, sensible a las normas y valores institucionales y a la manera en la que éstas influyen los procesos de enseñanza y aprendizaje,
- concibiendo los saberes matemáticos en tanto que objetos relativos, emergentes de prácticas matemáticas institucionalmente situadas, y sensible a la influencia de las herramientas de las prácticas sobre los saberes que emergen de éstas,
- y, lo no menos importante, desarrollando una visión positiva de las técnicas y reconociendo, a través de la noción fundamental de praxeología, el rol clave que las técnicas juegan en las construcciones conceptuales y teóricas.

La TAD analiza, en efecto, las prácticas matemáticas en términos de praxeologías. En su nivel más fino, el de las praxeologías puntuales, una práctica matemática remite necesariamente a un tipo de tareas que dicha práctica permite realizar por medio de una técnica, que es una manera de hacer y no necesariamente algorítmica, ni siquiera algoritmizable. La dupla (tipo de tarea, técnica) constituyen la parte práctica de la praxeología, la praxis. Pero lo que postula la TAD, es que, casi siempre, esta praxis está acompañada de un discurso que permite comunicarla, explicarla en vistas de una justificación y que especialmente es el caso de las praxeologías que viven en las instituciones escolares. Este es el discurso que Chevallard llama la tecnología, remitiéndose al sentido etimológico del término, y designa por teoría el discurso más o menos elaborado que estructura y justifica en su turno a la tecnología. Tecnología y teoría constituyen el elemento teórico de la práctica y una praxeología es de hecho una

cuádrupla (tipo de tarea, técnica, tecnología, teoría). Es una combinación de praxis y logos. En otros términos, técnico y conceptual son dimensiones constitutivas y en cierto sentido indisociable. Estas praxeologías puntuales, más o menos completas en la realidad institucional, se organizan así mismas en praxeologías locales unificadas en torno a una misma tecnología, posteriormente en regionales unificadas en torno a una misma teoría. Se entiende entonces que la TAD nos haya parecido un marco conceptual capaz de hacer frente a las necesidades teóricas que experimentábamos, las de un análisis sistémico amplio que sobrepasara al sujeto que aprende, sensible al rol que juegan la técnicas en las prácticas humanas, al desarrollo conceptual que emerge de éstas y a las herramientas de estas prácticas.

Por su parte, la Ergonomía Cognitiva, nos dio distinciones y herramientas particularmente bien apropiadas para estudiar el rol que las tecnologías digitales juegan en los procesos de aprendizaje:

- la distinción fundamental entre el objeto tecnológico, el artefacto, y el instrumento en que va a transformarse para un individuo, un colectivo o una institución,
- la atención dada a la complejidad de las génesis instrumentales que aseguran esta transformación del artefacto en instrumento, la distinción hecha entre las dos dimensiones estrechamente interrelacionadas de estas génesis: la instrumentalización dirigida hacia el artefacto, la instrumentación dirigida hacia el sujeto, y los esquemas de uso y acción instrumental cuyo desarrollo acompaña estas génesis,
- la importancia dada al hecho de que las herramientas de la actividad matemática, sean las que sean, modelan los procesos de aprendizaje, sus formas, pero también los conocimientos y saberes que ellas producen,
- el reconocimiento que dichas herramientas tienen una función pragmática, porque ellas permiten actuar sobre el mundo y transformarlo, pero también una función epistémica, participando en nuestra comprensión del mundo, y una heurística, influenciando la manera en la cual nos organizamos y controlamos nuestras acciones.

La TAD, como la gran mayoría de las teorías didácticas, aún siendo sensible a las herramientas y a los diversos utensilios que sostienen las prácticas, ha sido desarrollada en una cultura, que es la cultura de las herramientas tradicionales de la actividad matemática. Dicha teoría nos parecía, y todavía aún nos parece, menos desarrollada sobre las cuestiones instrumentales que la Ergonomía Cognitiva que, trabajando sobre los aprendizajes en el mundo del trabajo, no puede subestimar los efectos de la evolución tecnológica sobre las prácticas

profesionales. Por su parte, la Ergonomía Cognitiva no nos parecía ser mucho sensible a los problemas de la legitimidad existentes en los sistemas educativos, y al hecho de que la legitimidad científica y social no es suficiente para asegurar la legitimidad didáctica. Por esta razón, la concatenación de estas dos aproximaciones nos pareció potencialmente productiva.

Personalmente trabajé y desarrollé esta aproximación, primero analizando las génesis instrumentales de la TI-92 en las clases de Iro. S (grado 11), en colaboración con B. Defouad (Defouad, 2000). Más específicamente estudiamos el tema de variación de funciones, el cual es emblemático en Francia de la enseñanza del análisis en el bachillerato. No entraré en los detalles de estos trabajos pero quisiera mostrar cómo esta aproximación ha modificado mi visión de las cuestiones de integración tecnológica, dándome la impresión de comprender mejor las causas de los efectos limitados de los esfuerzos institucionales realizados y cómo pudieran provocarse cambios significativos en el futuro.

Para mostrar lo anterior, utilizaré la distinción entre el valor epistémico y el valor pragmático de las técnicas que introducimos en la aproximación instrumental, inspirados por distinciones similares hechas para los esquemas de acción instrumentada por Vérillon y Rabardel. Las técnicas tienen un valor pragmático en el sentido de que éstas producen resultados que transforman el mundo, pero también poseen un valor epistémico en el sentido de que nos ayudan a comprender los objetos matemáticos que movilizan. Esta distinción fue para mí un catalizador y, una vez que lo tuve integrado, no pude ver las cuestiones de integración tecnológica de la misma manera, ver tampoco de la misma manera las resistencias de los profesores, los debates recurrentes sobre la utilización de calculadoras en la educación básica y el lugar que se le debe dar a la maestría de técnicas operatorias como ésta de la división. Todo esto podía ser replanteado en términos de perturbación de los equilibrios tradicionales entre el valor epistémico y pragmático de las técnicas y así surgía una nueva visión de la integración (Artigue, 2002).

Esta perturbación se puede analizar de la siguiente manera: las tecnologías informáticas trastornan los equilibrios tradicionales entre el valor epistémico y pragmático de las técnicas, equilibrios que se han establecido progresivamente al filo de la historia, en una cultura de lápiz y papel, aunque los cálculos han estado durante todo el tiempo instrumentados por diversas herramientas: ábacos, tablas numéricas, herramientas gráficas, etc. Los sistemas educativos encuentran dificultades evidentes para reaccionar de manera apropiada a estos trastornos. Pero estas dificultades no son independientes de la manera en las que, generalmente, estos sistemas tiende a adaptarse a las evoluciones tecnológicas, sólo viendo a la tecnología como un coadyuvante pedagógico o didáctico. Burdamente expresado, lo que se le pide a la tecnología, es permitir

aprender más rápido y mejor, más o menos, las mismas matemáticas. Esta posición misma está implícitamente sustentada por una visión de las matemáticas como el campo de conocimiento universal, por excelencia, tanto en el tiempo como en el espacio. Estas visiones sostenidas por la cultura, inducen, como bien lo muestran las investigaciones didácticas, un uso educativo de las tecnologías jugando sobre el potencial pragmático en detrimento de su potencial epistémico. Pero lo que da la legitimidad educativa a una técnica, no es sólo su valor pragmático, sino también su valor epistémico. Y en esto reside una diferencia esencial e irreductible entre el mundo de la escuela y el mundo exterior. Convertir una tecnología en legítima y matemáticamente útil desde un punto de vista educativo, sea cual sea la tecnología en cuestión, supone, si excluimos el caso de las formaciones más profesionales, modos de integración que permiten un equilibrio satisfactorio entre el valor epistémico y el pragmático de las técnicas instrumentadas asociadas. Y esto, como también lo muestra la investigación, si se examinan sus resultados con esta perspectiva, necesita que las tareas propuestas en los planes de estudio, no sean simples adaptaciones de lo que se hace con lápiz y papel. Desgraciadamente, tales tareas no son creadas tan fácilmente cuando se entra en el mundo de la tecnología con una cultura de lápiz y papel. De este punto de vista, la investigación que ha sido llevada a cabo en Grenoble con Cabri-geometra, estudiando durante varios años la evolución de escenarios construidos por profesores, que tenían diversas relaciones con las tecnologías informáticas y participaban en un mismo grupo de trabajo, es particularmente instructiva (Laborde, 2001).

La aproximación instrumental nos hizo particularmente sensibles a estas cuestiones y por eso a los límites de la ayuda que los documentos curriculares, como la literatura de investigación existente, aportaban a los profesores para permitirles poner en marcha de manera razonada y eficaz la integración tecnológica deseada por la institución. Los primeros trabajos que hemos efectuado sobre los CAS han mostrado, por ejemplo, una vida particular, de las técnicas instrumentadas dentro de las clases experimentales. Dichas técnicas eran legítimas pero no trabajadas oficialmente; no eran parte de los procesos de entrenamiento y de rutinización, como lo eran las técnicas en lápiz y papel. Tampoco eran objeto de una institucionalización. El discurso tecnológico en el sentido de la TAD que las enmarcaba era limitado y esencialmente descriptivo. Aparentemente, éstas no estaban concernidas por las evoluciones del contrato didáctico que daba pauta al avance del conocimiento en la clase. Se quedaban en un estado artesanal y no llegaban a adquirir, convenientemente seleccionadas y trabajadas, un estatus de técnicas expertas. Estas características condujeron a B. Defouad a llamarlas técnicas semi-oficiales. Pero tales características son incompatibles con una integración eficaz de los CAS, porque son incompatibles con el alcance de un equilibrio satisfactorio entre lo pragmático

y lo epistémico. Cuando finalmente lo comprendimos, también comprendimos cómo podíamos ayudar a los profesores implicados en esta investigación, ayudándolos a organizar una génesis instrumental institucional que sustentaría las génesis individuales esperadas, a organizar el trabajo de selección y de mejoramiento de las técnicas instrumentadas, a desarrollar un discurso tecnológico combinando saberes matemáticos y saberes artefactuales que no existía en ninguna parte para sustentar su institucionalización, a organizar la evolución de la relación de estas técnicas a lo largo del avance de los conocimientos al interior de la clase. En las clases experimentales concernidas, los efectos de este trabajo fueron evidentes. Pero esta investigación también nos mostró que las necesidades matemáticas de una instrumentación apropiada de los CAS no eran necesidades fáciles de satisfacer en el contexto curricular existente y que la generalización de esto, que habíamos logrado hacer vivir y hacer matemáticamente productivo, en el contexto ecológicamente protegido de nuestras experimentaciones, no podía ser extendido fácilmente a todo el sistema.

5. Aproximación instrumental: más allá de los CAS

En los últimos diez años, la sensibilidad a las cuestiones instrumentales en la comunidad didáctica han aumentado considerablemente, favorecida por el desarrollo de aproximaciones socio-culturales y el acento que dichas aproximaciones ponían en el rol de las mediaciones semióticas en los procesos de aprendizaje. La aproximación instrumental que habíamos desarrollado ha sido cada vez más utilizada por investigadores que trabajaban en el dominio de los CAS. Dan cuenta de ello los recientes coloquios del Grupo Internacional Computer Algebra in Mathematics Education (CAME) y diversas publicaciones como por ejemplo, los diversos artículos publicados en la revista *International Journal of Computers for Mathematical Learning* por L. Trouche, J.B. Lagrange y J. Monaghan, en los años recientes. También ha sido utilizada esta aproximación por investigadores que trabajaban con otras tecnologías: programas computacionales de geometría dinámica (Laborde et al., 2006) y hojas de cálculo (Haspekian, 2005b). Paralelamente, otras construcciones se desarrollaron combinando las ideas ofrecidas por las investigaciones de P. Rabardel y de P. Vérillon cada vez más conocidas en el escenario internacional con las de las teorías de la actividad que les son subyacentes y ya compartidas por muchos investigadores en matemática educativa. Es el caso, por ejemplo, de los trabajos de investigadores italianos con los cuales colaboro al interior de los proyectos europeos TELMA y ReMath citados anteriormente. En lo que prosigue, me centraré en dos extensiones de esta aproximación en las cuales estuve particularmente involucrada: la primera tiene que ver con la hoja de cálculo y

ha sido llevada a cabo por M. Haspekian en el marco de su tesis (Haspekian, 2005a), la segunda concierne a los recursos en línea y al proyecto regional ya citado.

La hoja de cálculo es un artefacto informático en el cual los usos son *a priori* múltiples. Inicialmente fue concebida para automatizar los cálculos contables y permitir las simulaciones en este dominio. Actualmente ha migrado de manera significativa fuera de este hábitat. En la enseñanza, se observa un movimiento similar. Los primeros usos escolares de la hoja de cálculo han sido contables pero se han ido extendiendo progresivamente. Por ejemplo, en Francia, la hoja de cálculo es ahora asociada a la enseñanza de las matemáticas desde los primeros años de secundaria (grado 7) y su uso es preconizado en aritmética, cálculo, estadística y probabilidad a lo largo de la escolaridad media. El programa de la sección Humanidades en primero (grado 11) le otorga una importancia particular y las competencias adquiridas son evaluadas en la prueba del baccalauréat para esta sección. En su tesis, M. Haspekian se centró en la enseñanza obligatoria y en un dominio particular: el álgebra. Existía una razón simple para esta elección: el hecho de que las investigaciones didácticas más conocidas concernientes a la hoja de cálculo estaban inscritas en este dominio y tendían a presentar la hoja de cálculo como un artefacto que ayudaba a superar las dificultades, bien conocidas, de la transición entre la aritmética y el álgebra (Bednarz, Kieran & Lee, 1996), (Kieran & Yerushalmy, 2004).

M. Haspekian realizó su investigación combinando diferentes perspectivas. Después de haber analizado la hoja de cálculo con las herramientas de la aproximación instrumental, procedió a un estudio de la literatura existente, adoptando como filtro esta misma aproximación. Posteriormente, y teniendo como base dicho estudio, desarrolló una ingeniería didáctica (Brousseau, 1997), con el objetivo de abordar simultáneamente una introducción a la hoja de cálculo y una inicialización al álgebra con alumnos de segundo año de secundaria (grado 7). Decidió realizarlo en condiciones compatibles con el plan de estudio en vigor en Francia (es decir con un número limitado de clases). Por otra parte, también realizó un estudio sistemático de los recursos de la hoja de cálculo propuestos a los profesores de la enseñanza obligatoria, por el sitio web del Ministerio de Educación Nacional. Finalmente, vía cuestionarios y entrevistas, intentó comparar los usos de la hoja de cálculo de futuros profesores en el Instituto Universitario de Formación de Maestros (IUFM) y de formadores a cargo de la tecnología en estos IUFM.

¿Qué se destaca de esta investigación? El estudio instrumental mostró que objetos matemáticos como éstos de variable y fórmula son asociados en la hoja de cálculo con una pluralidad de objetos, ninguno de éstos coincidiendo exactamente con su correspondiente matemático. Como se escribe en (Haspekian & Artigue, 2007) partiendo del ejemplo siguiente:

	A	B
1		
2	5	$= A2^2$

↗

A2 es la celda argumento

Figura 1: Celda argumento

Existe, aún ahí, una variable escrita con la ayuda de símbolos (propios del lenguaje de la hoja de cálculo) y que se refiere, como en lápiz/papel, a un conjunto de valores posibles. Pero aquí, este conjunto referente pasa por un intermediario importante, la celda-argumento, que es al mismo tiempo:

- referencia abstracta, general: representa la variable (es a ésta que se refiere la fórmula haciéndole jugar el rol de variable),
- referencia concreta particular: aquí es un número (cuando no hemos editado nada, ciertas hojas de cálculo atribuyen el valor 0) pero esto puede ser también otra fórmula,
- referencia espacial/geográfica (es una dirección espacial en la hoja de cálculo,
- referencia material (es una casilla de la hoja de cálculo, ciertos alumnos la ven como una caja).

Así, la variable “letra” es transpuesta en la hoja de cálculo en una celda argumento embarcando con ella, además de la representación abstracta, general, otras tres representaciones sin equivalentes en el contexto del papel. Para hacer visible esta diferencia, hemos introducido la denominación “variable-celda” (véase la figura 2).

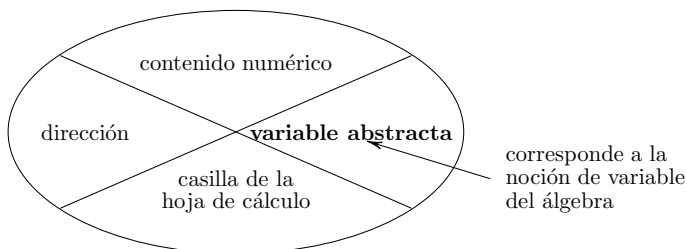


Figura 2: La “variable-celda”.

Además, siguiendo las funcionalidades utilizadas en la hoja de cálculo, van a emerger otras nociones de variable ‘variable-columna’, ‘variable-línea’, ‘variable-nombre’, cada una dotada de características propias.

Análisis similares fueron realizados en la tesis, sobre la noción de fórmula, tomando en cuenta la instrucción de re-copiar, sobre la distinción existente entre referencia absoluta y relativa, distinción puesta en relación con la diferencia entre variable y parámetro en matemáticas. Esta diversidad de objetos y las diferencias que presentan con los objetos matemáticos existentes, pueden ser eficazmente utilizadas para hacer evolucionar la relación a las nociones de variable y de fórmula en los estudiantes (Willson, Ainly & Bills, 2005), pero la aproximación instrumental conduce a pensar que una tal utilización no va, necesariamente, a ser fácil y requiere que la institución se haga cargo de las génesis instrumentales asociadas, combinando su gestión con la progresión de los conocimientos algebraicos propuesta por los planes de estudio. El estudio que realizó M. Haspékian de la literatura de investigación muestra que, hasta estos últimos años, dicha literatura ha quedado relativamente poco sensible a estas cuestiones. En las publicaciones, las variables matemáticas de las tareas propuestas a los estudiantes son cuidadosamente descritas, pero lo que se refiere a las génesis instrumentales y a su gestión por parte del profesor, queda implícito. Por ejemplo, la manera en la que es introducida la instrucción de re-copiar y es acompañada su instrumentación con alumnos principiantes en álgebra no se precisa, y el lector no tiene los medios para comprender cómo se organizan las relaciones entre esta instrucción y la noción de fórmula.

- ¿Es un conocimiento previamente construido en otro ambiente sobre la noción de fórmula, el que ayuda a los estudiantes a darle sentido a la acción de re-copiar y a reconocer el invariante que existe detrás de una expresión formal, que cambia de una línea a la otra?
- ¿Es la acción de re-copiar que, en sentido inverso, es utilizada para construir este invariante y una noción de fórmula que sobrepasa el contexto de la hoja de cálculo?

Los vínculos, en la práctica, son sin duda de naturaleza dialéctica pero generalmente son considerados transparentes, establecidos de manera natural. No es el caso, en lo absoluto, y el profesor tiene que jugar un rol muy importante para organizar y dirigir la mediación instrumental.

El análisis de los recursos destinados a los profesores de secundaria, puestos en línea en los sitios académicos y accesibles vía el sitio Educnet del Ministerio, muestran implícitos aún más fuertes. Más de la tercera parte de los recursos

(35 %) son hojas de actividades en bruto sin documentos guías y únicamente el 19 % de los recursos precisan conocimientos de pré-requisito concernientes a la hoja de cálculo. Sin embargo, un análisis sucinto muestra que para la gran mayoría de dichos recursos tales pre-requisitos son necesarios. De hecho, como se señala en la tesis, la naturaleza misma de los recursos contribuye a este fenómeno. Más del 90 % de las proposiciones de tareas o de sesiones de clase están aisladas y no se inscriben en una progresión matemática y/o de la hoja de cálculo. Entonces, parece difícil que dichas proposiciones consideren de una manera o de otra las cuestiones de instrumentación. Por otra parte, en oposición con esto que mostraba la literatura de la investigación, el álgebra no es el dominio privilegiado. Sólo el 14 % de los recursos están directamente ligados al aprendizaje del álgebra y, de hecho, es la estadística el dominio que domina. Las entrevistas llevadas a cabo con formadores de Tecnología de la Información y de la Comunicación para la Enseñanza (TICE) en los IUFM quienes son, de manera privilegiada, los diseñadores de los recursos para los profesores, muestra que esta característica se refleja en sus prácticas. Consideran la hoja de cálculo mucho más eficaz para reforzar la enseñanza de la estadística descriptiva en el programa de secundaria o para el estudio de problemas funcionales, una vez instaladas las bases del lenguaje algebraico. Encuentran mucho más delicado utilizar la hoja de cálculo para fortalecer la introducción al mundo algebraico. Es efectivamente, en este tipo de uso que las cuestiones de génesis instrumental se plantean con una mayor importancia, lo que confirma la ingeniería didáctica exploratoria puesta en marcha con alumnos del séptimo grado en la tesis.

Estos análisis condujeron a M. Haspekian a introducir la noción de distancia instrumental. Se puede conjeturar que una tecnología es interesante para la enseñanza de las matemáticas porque crea una distancia en relación a los ambientes de trabajo previamente existentes, abriendo así nuevas potencialidades. Sin embargo, es necesario que esta distancia se mantenga institucionalmente aceptable para que la tecnología pueda ser eficazmente utilizada. ¿Cómo calificar y cuantificar esta distancia instrumental? ¿Cómo lograr distinguir sus elementos productores de sus elementos problemáticos? En (Haspekian & Artigue, 2007), nos propusimos estructurar el análisis en torno a dos polos: por un lado la transposición informática (Balacheff, 1994) y por el otro la legitimidad institucional. La transposición informática es en efecto una fuente esencial de distancia instrumental por las transformaciones de los objetos matemáticos, de sus representaciones ostensivas y de los medios de acción sobre ellos que necesariamente produce. Sin embargo, hay que notar que la consideración de las normas y valores de la cultura de referencia es necesaria para comprender cuáles pueden ser los efectos didácticos, positivos y negativos, de estas transformaciones.

Si consideramos este primer polo, es claro que, para el universo intermediario entre aritmética y álgebra que crea la hoja de cálculo (pues es aritmética en sus estrategias de resolución de problemas, pero algebraica en su organización simbólica), la hoja de cálculo crea una distancia instrumental a priori productiva si se compara con la cultura algebraica lápiz-papel que tiende a oponer estos dos mundos. Pero esta productividad depende de la capacidad de la institución y de los profesores para gestionar una distancia instrumental en términos de objetos y lenguajes que puede ser una posible fuente de dificultades cuando debuta la enseñanza del álgebra. Si nos situamos más adelante en la escolaridad, estas dificultades pueden debilitarse y se comprende que la hoja de cálculo puede ser vista como una herramienta adecuada para permitir a personas, por ejemplo estudiantes en el área de humanidades o adultos en situación profesional, resolver problemas tradicionales del álgebra con una cultura algebraica muy limitada.

Si consideramos el polo de la legitimidad, es interesante comparar los CAS y las hojas de cálculo, pues las segundas se pueden asociar a una cultura algebraica mínima y los primeros a una cultura algebraica bastante elaborada. Por eso se podría pensar que plantean problemas de legitimidad diferentes, y que los CAS se vuelven más fácilmente legítimos. Como se explica en el texto citado, las cosas son menos sencillas:

La cultura CAS es mucho más cercana de la cultura algebraica usual que la cultura de la hoja de cálculo puesto que los CAS manipulan formalmente ecuaciones e inecuaciones. Pero dicha cercanía no les da por ende, ni obligatoria, ni fácilmente, la legitimidad, porque lo que ambiciona la enseñanza no es una práctica instrumentada eficaz; las prácticas instrumentadas deben ayudar a un aprendizaje cuyos valores son definidos esencialmente sin consideración instrumental. Proporcionando herramientas particularmente eficaces para resolver las tareas emblemáticas de la parte introductoria del álgebra, los CAS pueden hacerse cargo del trabajo tradicionalmente devuelto al alumno para permitirle aprender el álgebra. Se plantea entonces la pregunta didáctica delicada de la construcción de una génesis instrumental que sirva a los aprendizajes matemáticos deseados. De este punto de vista, la hoja de cálculo que no permite el cálculo formal puede ser menos perturbadora y por ende menos problemática. Pero se plantean las cuestiones siguientes: ¿Perciben los profesores esta herramienta como pertinente para los aprendizajes algebraicos que ellos quieren desarrollar? ¿O por el contrario, consideran que permitir al estudiante vivir en un mundo intermediario entre la aritmética y el

álgebra, puede ser un obstáculo para los cambios de modos de funcionamiento matemático deseados? ¿Es ésta una de las razones, por las cuales encontramos en Francia tan pocos recursos para la introducción al álgebra, una de las razones por las cuales prefieren los autores valorar y legitimar la hoja de cálculo en este dominio descendiendo a niveles inferiores problemas de optimización y de funciones típicos del álgebra a nivel bachillerato? ¿Y si encontramos gran cantidad de recursos sobre la estadística, no es porque el dominio de la estadística está particularmente bien adaptado a la hoja de cálculo, la cual ha sido inicialmente concebida para gestionar las tablas de números y efectuar simulaciones numéricas, y también porque las prácticas que ésta favorece son coherentes con una enseñanza de la estadística que quiere ser experimental y exploratoria? (Haspekian & Artigue, 2007).

No puedo, en el espacio de esta conferencia, entrar en los detalles del análisis pero espero haber mostrado cómo la aproximación instrumental, por la manera en la que orienta el cuestionamiento didáctico, por las herramientas conceptuales que otorga para sostenerlo, ayuda a abordar la dimensión tecnológica de la enseñanza de las matemáticas, de una manera nueva y a problematizarla, a expresar los aspectos importantes de la integración tecnológica, considerados por mucho tiempo como transparentes. Los desarrollos más recientes de esta aproximación se interesan en nuevos objetos tecnológicos y, para terminar esta presentación de la aproximación instrumental, desearía hacerles entrever las nuevas cuestiones que dichos objetos suscitan.

6. La aproximación instrumental: de los CAS y las hojas de cálculo a los recursos en línea

La aproximación instrumental se interesó primero en las tecnologías que hoy podemos calificar de clásicas: CAS, hojas de cálculo, programas computacionales de geometría dinámica, calculadoras gráficas y simbólicas. No es sino recientemente que dicha aproximación se ha interesado en una nueva categoría de artefactos, cada vez más presentes en entornos educativos: los recursos en línea o tutoriales. En mi equipo de investigación, DIDIREM, este trabajo ha sido particularmente desarrollado en el marco del proyecto regional evocado al principio de este texto. Este cambio tecnológico plantea las preguntas de instrumentalización de manera renovada:

¿Qué significa para un estudiante transformar tales recursos tutoriales en un instrumento de aprendizaje y qué tipos de instrumentos se obtienen?

¿Qué significa para un profesor transformar tales recursos tutoriales en un instrumento profesional y qué resulta?

¿Qué tienen en común estas génesis instrumentales con éstas que hemos estudiado desde hace ya más de una década? ¿En qué se diferencian? ¿Y por qué? ¿Qué nuevos fenómenos didácticos resultan de estas diferencias? ¿Cómo gestionarlos?

Los resultados que hemos obtenido hasta ahora son todavía muy fragmentarios, pero algunas regularidades comienzan a emerger, y las diferencias con lo que ya conocíamos, son evidentes. La aproximación instrumental, hasta aquí, había centrado su atención en los objetos matemáticos y en las representaciones ostensivas asociadas, buscando comprender las dimensiones productivas y problemáticas de la transposición informática. Cuando se consideran tutoriales y se busca interpretar en términos de génesis instrumental las observaciones realizadas con alumnos, no son estos efectos de la transposición informática que parecen los más importantes, sino aprendizajes instrumentales del tipo táctico o relativo al contrato didáctico. Esto tendería a confirmar que se produce, como lo conjetura L. Souhard (Souhard, 2006), aún si se queda implícito, un desdoblamiento institucional y qué lo más visible en las génesis instrumentales, es la adaptación de los alumnos a este desdoblamiento. Del punto de vista del profesor, la génesis experimental supone en este caso por lo menos una reorganización de las praxeologías didácticas. ¿En qué momento(s) del estudio va a elegir por ejemplo utilizar tal herramienta, cómo va a organizar y a guiar el trabajo de los alumnos en clase o fuera de clase, cuáles reglas va a instaurar en relación a los usos? ¿Qué estatus institucional va a darse a estos usos? En el proyecto regional, todo esto ha sido dejado a la elección de los profesores sin que se dispongan de referentes para anticipar los posibles efectos de sus decisiones. Además de esto, y no de manera independiente, se plantea la cuestión de las praxeologías matemáticas implementadas en el artefacto y de su relación con éstas sostenidas por la institución escolar, de las diferencias eventuales y de su gestión.

Lo anterior constituye un nuevo espacio de estudio y de preguntas que se abre a la aproximación instrumental, obligándonos a diferenciar de mejor manera las génesis instrumentales del profesor y del alumno, a hacer intervenir en su análisis nuevas dimensiones ligadas al hecho de que estas tecnologías implementan no sólo interacciones matemáticas sino también interacciones didácticas. Así, el análisis de las distancias instrumentales y de sus efectos potenciales también se encuentra renovado (Artigue et al., 2006).

7. Conclusión

En esta conferencia en la cual me interrogué sobre las tecnologías informáticas y la enseñanza de las matemáticas, pretendía mostrar lo que la aproximación instrumental que se ha desarrollado en la última década podía aportar a la reflexión didáctica. Haciendo tal elección, necesariamente he mostrado una visión muy parcial de los avances de la investigación en este dominio de la tecnología, si se considera la evolución de las problemáticas, de los marcos teóricos, del desarrollo tecnológico o de las prácticas efectivas. La conferencia de Hanoi, asociada al estudio ICMI en curso, ha dado una visión mucho más amplia y espero que la obra que resultará de este estudio y debería ser publicada en 2008 ⁴, permitirá a un gran público, más allá del reducido público de los investigadores en Matemática Educativa, construirse una visión clara de los conocimientos y del saber-hacer con que disponemos hoy, para abordar estas cuestiones tecnológicas complejas y siempre renovadas.

Agradecimiento: Agradezco mucho a Avenilde Romo Vazquez quien se encargó de la traducción de este texto.

Referencias

- Artigue M & Rogalski M. (1990). Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG. In Commission interIREM Université (ed), *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année* (pp. 113–128). Lyon: LIRDIS.
- Artigue M. (1991). Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique. *Petit*, X(26), 5–27.
- Artigue M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. In, E. Dubinski & G. Harel (eds), *The concept of function - aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 109–132). MAA Notes n° 25. Mathematical Association of America.
- Artigue M. (1997). Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 133–169.
- Artigue M. (1998). Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies. In D.Tinsley & D.C.Johnson (eds), *Information and Communication Technologies in School Mathematics* (pp. 121–130), Chapman & Hall, London.
- Artigue M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7, 245–274.

⁴ Este estudio ya fue publicado: C. Hoyles, J.B. Lagrange (Eds.) (2010)

- M. Artigue (ed.) (2009). Connecting approaches about technology enhanced learning in mathematics: the TELMA experience. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14.3.
- Artigue M. y Grupo TICE IREM Paris 7 (à paraître). L'utilisation de ressources en ligne pour l'enseignement des mathématiques au lycée : du suivi d'une expérimentation régionale à un objet de recherche. In N. Bednarz & al. (Eds.), *Actes du Colloque EMF 2006*, Université de Sherbrooke.
- Balacheff N. (1994). Didactique et Intelligence Artificielle, *Recherches en didactique des mathématiques*, 1994, p. 9-42, La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.
- Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds) (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching; 1996*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Brousseau G. (1997). *Theory of Didactical Situations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 77-111.
- Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en anthropologie du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19/2, 221-265.
- Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude. In J.L. Dorier y al. (Eds), *Actes de la Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, pp. 3-22 & 41-56. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Cornu B., Ralston A. (eds) (1992). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Science and Technology Education. Document Series 44. Paris: UNESCO.
- Defouad B. (2000). *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première S*. Tesis de Doctorado. Université Paris 7.
- Gascón J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1, 7-37.
- D. Guin, L. Trouche (Eds) (2002). *L'instrumentation de calculatrices symboliques: un problème didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage (versión inglesa publicada por Kluwer en 2004).
- Haspekian, M. (2005a). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Etude du cas des tableurs*. Tesis de doctorado, Université Denis Diderot, Paris 7.
- Haspekian, M. (2005b). An "instrumental approach" to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol 10, n°2, 2005, p.109-141.
- Haspekian M., Artigue M. (2007). L'intégration d'artefacts informatiques professionnels à l'enseignement dans une perspective instrumentale: le cas des tableurs. In, M. Baron, D. Guin, L. Trouche (Eds), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage*, pp.37-63. Paris: Editions Hermès.
- C. Hoyles, J.B. Lagrange (Eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology ? Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*. Springer.
- Kieran C., Yerushalmy M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. In, K. Stacey, H. Chick and M. Kendal (eds), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. The 12th ICMI Study, pp. 95-152. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Laborde C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabry-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6/3, 283-317.
- Laborde, C., Kynigos C., Hollebrands K., Strässer R. (2006) Teaching and Learning Geometry with Technology, in A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, p. 275-304. Rotterdam: Sense Publishers.
- Rabardel P. (1995). *L'homme et les outils contemporains*. Paris: A. Colin.
- Souchard L. (à paraître). L'analyse de logiciels tutoriels pour l'enseignement des mathématiques. In N. Bednarz & al. (Eds.), *Actes du Colloque EMF 2006*, Université de Sherbrooke.
- Vérillon P., Rabardel P. (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education* vol.X(1), 1995, p.77-101.
- Wilson K., Ainley J., Bills L. (2005). Spreadsheets, pedagogic strategies and the evolution of meaning for variable. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.) *Proceedings of the twenty-ninth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 2005, p. 321-328. Melbourne, Australia.