

# LO QUE LA INVESTIGACIÓN SABE ACERCA DEL USO DE MANIPULATIVOS VIRTUALES EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

---

**Claudia Matus**

*Centro Comenius*

Universidad de Santiago de Chile

[cmatus@comenius.usach.cl](mailto:cmatus@comenius.usach.cl)

**Hernán Miranda**

*Centro Comenius*

Universidad de Santiago de Chile

[hmiranda@comenius.usach.cl](mailto:hmiranda@comenius.usach.cl)

## Resumen

La tecnología ha revolucionado muchos aspectos de nuestra vida. En particular, las tecnologías de información y comunicación han prometido transformar la educación, permitiendo a los estudiantes acceso a nuevos ambientes de aprendizaje, enriqueciendo así sus experiencias escolares. En años recientes las tecnologías basadas en Internet han dado paso y hecho posible una nueva generación de programas interactivos que emulan recursos manipulativos didácticos que existen en la realidad. Estos nuevos manipulativos, llamados manipulativos virtuales (MV), corresponden a aplicaciones basadas en web, multiplataforma y muy flexibles para ser usadas en distintas situaciones de enseñanza y aprendizaje. Este artículo presenta el concepto de manipulativo virtual y, basado en una revisión de investigaciones recientes, resume los hallazgos reportados respecto de su uso en diferentes situaciones de aprendizaje y las razones de por qué son importantes para la enseñanza actual de la matemática.

## Palabras clave

Manipulativos virtuales, Educación Matemática, Tecnología, Enseñanza, Aprendizaje.

## Abstract

Technology has revolutionized many aspects of life. Information and communication technologies, in particular, have also promised to transform education, enabling students' access to new learning environments and enriching their school experiences. In recent years, on-

line technologies have allowed and made possible to emerge a new generation of manipulatives, called virtual manipulatives (VM). These VM are very flexible web-based applications to be used as important tools for teaching and learning mathematics more effectively. This article presents virtual manipulatives describing their features, advantages, and restrictions as they have been encountered in different recent field studies. In addition, the article discusses some of the reasons why virtual manipulatives are important resources for current teaching and learning mathematics.

### **Keywords**

Virtual Manipulatives, Mathematics Education, Technology, Teaching, Learning.

## **1. Introducción**

---

Durante la última década, las tecnologías de la información y comunicación han comenzado a ser usadas extensiva y masivamente en diferentes ambientes escolares. A modo de ilustración, Barron, Kemker, Harmes, and Kalaydjian (2003) muestran que, en el caso de los Estados Unidos, “los gastos para equipar escuelas con computadores y tecnologías relacionadas se han incrementado persistentemente a nivel nacional, estatal y local” (p. 489). Como resultado, tanto la tasa de computadores por estudiante como la conexión a Internet de las escuelas se ha mejorado considerablemente (Kleiner & Ferris, 2002; U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics, 2006). Este nuevo escenario altamente tecnologizado impone nuevos desafíos a la vez que genera nuevas oportunidades para la educación matemática.

En este mismo sentido, es fácil ver cómo la tecnología ha revolucionado muchos aspectos de nuestra vida. El uso de los computadores ha prometido también, en particular, transformar la educación, ofreciendo nuevos ambientes de aprendizaje y oportunidades más significativas para aprender (USDE, 2004). Una prueba de esto es el reciente desarrollo de los llamados “manipulativos virtuales”, pequeños programas visualizados gratuitamente en Internet, diseñados específicamente para favorecer el aprendizaje de las matemáticas escolares. Esta y otras ayudas tecnológicas son señaladas en la literatura como herramientas importantes para la enseñanza más efectiva de tópicos matemáticos y resolución de problemas (NCTM, 2000).

Sin embargo, siendo los manipulativos virtuales un desarrollo bastante reciente, no presentan mucha evidencia empírica acerca de sus resultados educativos cuando son usados en ambientes de sala de clases. Este trabajo reporta los principales hallazgos encontrados en la literatura acerca de los manipulativos virtuales. El foco escogido fue identificar contenidos y habilidades matemáticas que demostraron ser favorecidas con el uso de estas nuevas herramientas, en investigaciones de campo. Finalmente, se plantea la necesidad de más y diversa investigación sobre el uso de los manipulativos virtuales, especialmente, en diferentes contenidos, habilidades, grados escolares y condiciones socioculturales de los estudiantes.

## 2. ¿Qué son los manipulativos virtuales?

---

Quizá la definición que más representa la naturaleza de los *manipulativos* virtuales sea la expresada por Moyer, Bolyard y Spikell (2002, p. 373), para quienes un manipulativo virtual (MV) es “una representación visual de un objeto dinámico e interactivo, basado en la Web, que presenta oportunidades para la construcción del aprendizaje matemático”. Se insiste en considerarlos manipulativos porque los “objetos pueden ser tocados y movidos por los estudiantes para introducir o reforzar una idea o concepto matemático” (Hartshorn & Boren, 1990, p.1). Así mismo, son denominados *virtuales*, en el sentido que fueron creados y son simulados por un computador para dar la sensación de su existencia real (RAE, 2001). Sin embargo, técnicamente hablando, los MV son pequeños programas, escritos usualmente en lenguaje Java, integrados en páginas HTML o páginas Web.

Las principales características de los manipulativos virtuales son:

- Tienen a ser más que la réplica exacta de los manipulativos “concretos” o “físicos” (Geoplano, Bloques de Cuisenaire, Tangramas, Bloques lógicos).
- En general, incluyen opciones adicionales propias de un ambiente digital (copiar y colorear piezas, seleccionar y mover múltiples objetos).
- La mayoría ofrece simulaciones de conceptos y operaciones que no pueden ser fácilmente representadas por los manipulativos tradicionales (Suma de fracciones no equivalentes).
- Algunos combinan representaciones icónicas y simbólicas de conceptos y operaciones en un mismo ambiente (Ecuaciones con balanzas).
- Son flexibles, independientes y dinámicos; pueden ser controlados enteramente por el maestro/a y los estudiantes, además, ser usados en diferentes lecciones, niveles y edades.
- Algunos ofrecen registrar las acciones o resultados para proveer de feedback al estudiante.

- Están disponibles sin límite, en cualquier lugar, las 24 horas del día vía Internet. Profesores, padres y niños pueden acceder a ellos gratis.

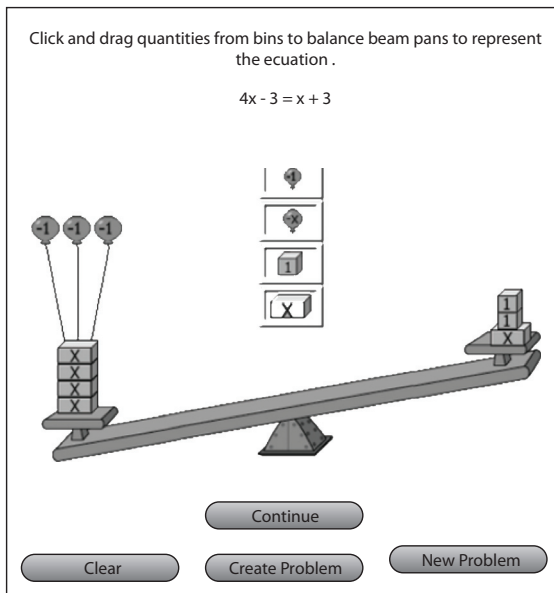
Hoy en día existen varios sitios que ofrecen abiertamente herramientas y recursos para el aprendizaje de la matemática escolar para profesores, padres y estudiantes en forma de MV. Sin duda, el más importante repositorio de MV se encuentra en Utah State University. Allí existe la Biblioteca Nacional de Manipulativos Virtuales (<http://nlMV.usu.edu/es/nav/vlibrary.html>), una gran colección de manipulativos, juegos y actividades -recientemente traducida al español-, que está organizada por temas y niveles educativos (Cannon, Dorward, Heal, & Edwards, 1999).

Otro lugar importante de visitar es el proyecto “Interactive Project” de la fundación Shodor, <http://www.shodor.org/interactivate/>. Este proyecto contiene también una variada gama de recursos y lecciones de clase relacionadas. Actualmente, el proyecto Eduteka de Colombia, <http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/> está traduciendo algunos de sus interactivos. También el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos, NCTM, ha puesto a disposición una serie de manipulativos bajo el proyecto llamado “Illuminations - Marcopolo”, <http://illuminations.nctm.org/ActivitySearch.aspx>. Allí los profesores pueden relacionar los estándares de enseñanza de ese país con recursos y lecciones disponibles en el sitio.

Pero cuando se habla de MV, no se puede dejar de mencionar el proyecto WisWeb del Freudenthal Institute (<http://www.fi.uu.nl/wisweb>) en Holanda. Este fue una de las primeras iniciativas en ofrecer manipulativos para la enseñanza de álgebra en secundaria. Finalmente, otras iniciativas personales como “Arcytech” de Jacobo Bulaevski en <http://arcytech.org/java/>, “Manipula Math with Java” de Ies Inc. en <http://www.ies.co.jp/math/java/index.html> y “Dr. Super” de George Manson University <http://www.galaxy.gmu.edu/~drsUPER/>, han colaborado también con recursos.

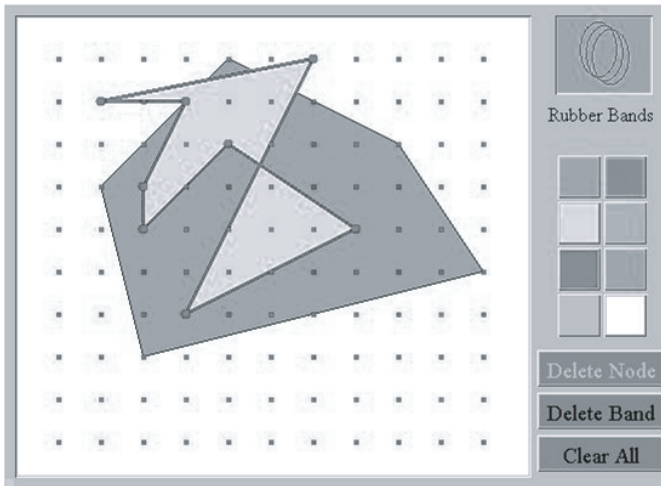
Un buen ejemplo de lo que los MV pueden ofrecer a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática es éste que permite estudiar la ecuación de primer grado (ver figura 1). Este MV ilustra las ecuaciones lineales usando la metáfora de la balanza que debe permanecer en equilibrio. Considera, incluso, la alternativa de representar aquellos casos de ecuaciones más complicadas que tienen números y variables negativas. A través de este modelo, un profesor puede ilustrar, paso a paso y de muchas maneras diferentes, las ideas algebraicas básicas que subyacen en la resolución de ecuaciones lineales. Hasta ahora, si bien existían recursos didácticos basados en esta misma noción, no había una forma de representar estas ideas de una manera razonable y flexible, y que a la vez capturara los detalles y sutilezas de las ideas matemáticas involucradas.

**Figura 1. MV para representar ecuaciones lineales**



Fuente: [http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames\\_asid\\_324\\_g\\_4\\_t\\_2.html?open=instructions&from=category\\_g\\_4\\_t\\_2.html](http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_324_g_4_t_2.html?open=instructions&from=category_g_4_t_2.html)

Otro buen ejemplo de MV es el geoplano virtual (virtual geoboard). La invención del geoplano se le atribuye al profesor egipcio Caleb Gattegno en 1950. Consiste de una superficie plana, usualmente de madera, de forma cuadrada y que cuenta de pequeños clavos o cabezales dispuestos en intervalos regulares. Los niños y niñas deben colocar elásticos alrededor de los clavos para hacer formas, modelar diferentes conceptos geométricos o resolver puzzles matemáticos. Este manipulativo a menudo es usado para explorar conceptos básicos de geometría plana tales como el perímetro y área. Aquí (ver figura 2) se muestra una versión virtual del geoplano de diez unidades cuadradas que permite colorear áreas para realizar diferentes diseños. Además, los usuarios pueden fácilmente borrar elásticos o sacarlos de los clavos para hacer nuevas figuras.

**Figura 2. Geoplano Virtual (Virtual Geoboard)**

Fuente: <http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap4/4.2/part2.htm#applet>

### **3. Investigaciones realizadas en torno a los manipulativos virtuales**

---

Pese a que la lista de MV se extiende en el tiempo y el interés de profesores también se acrecienta, lo cierto es que sólo algunos estudios han reportado el uso de MV en ambientes escolares; la mayoría de ellos han sido realizados en los Estados Unidos. Un primer foco de investigación sobre los MV ha sido el compararlos con su contraparte, los manipulativos concretos o tradicionales. Después, algunos estudios se han focalizado en las ventajas que ofrecen los MV para la enseñanza y el aprendizaje de ciertos tópicos de la matemática escolar tales como fracciones, geometría y álgebra, principalmente en tercer, cuarto y quinto año. Estos últimos estudios ofrecen una visión más detallada de las posibilidades y restricciones que los MV pueden acarrear en la sala de clase.

Suh, Moyer y Heo (2005) realizaron su estudio en 5to año y recolectaron información de observaciones, entrevistas y videos durante 3 días. La investigación reveló que el uso de los MV ayudaron a los estudiantes a conectar las representaciones simbólicas y pictóricas de las fracciones, así como a descubrir los patrones detrás de las operaciones matemáticas por medio de la experimentación y la prueba de hipótesis con el computador. Los autores sugieren que los applets ayudarían, particularmente, a aquellos estudiantes que requieren de aprendizaje visual y los estudiantes de bajo logro.

En otro estudio más extenso en 3er grado, Reimer y Moyer (2005) recolectaron datos de un pre y post-test sobre conceptos y procedimientos con fracciones, se hizo entrevistas y una encuesta sobre actitudes a los estudiantes. Los resultados mostraron estadísticamente mejoramientos en el puntaje del post-test de conceptos y una positiva relación entre éste y el post-test de procedimientos. Las entrevistas y la encuesta revelaron que los MV ayudaron a los estudiantes a aprender más por medio del inmediato feedback, la práctica con fracciones se hizo más rápida y fácil con el computador que con lápiz, y ésta fue más entretenida. Los resultados parecen indicar que en la enseñanza y aprendizaje de fracciones, MV aparecen como una gran ayuda.

Moyer, Niezgoda y Stanley (2005), también han observado y registrado las diferentes interacciones de 16 niños del kindergarten usando MV, bloques de madera, y lápiz y papel para el aprendizaje de patrones. Se estableció que los niños crean más y más complejas series de patrones en el computador, inclusive usando teselaciones, más que usando papel y lápiz. Los participantes despliegan más creatividad creando patrones en el computador, que reflejan la complejidad de su pensamiento. Sin embargo, Steen, Brooks y Lyon (2006) examinaron el impacto de los MV de bloques lógicos en la formación de conceptos geométricos en una unidad de 1er. año con un grupo más extenso de 31 estudiantes. Pese a que el grupo experimental superó en los dos post-test al grupo control, no hubo diferencia estadísticamente significativa entre ambos grupos. Las observaciones recolectadas sugieren de todas formas que los MV incrementan la motivación y concentración en la tarea, además de proveer feedback al estudiante.

En otro estudio con 4to y 5to año, se comparó el uso de tangramas virtuales y tangramas concretos con 93 estudiantes (Olkun, 2003). Usando tres grupos, un control y dos experimentales (4to año y 5to año), se aplicaron un pre y un post-test. Los resultados mostraron que ambos grupos experimentales mejoraron significativamente sus rendimientos en el post-test. El mejoramiento más destacable en general fue en las habilidades de razonamiento espacial. Sin embargo, el grupo de 5to año así como los varones tuvieron mejor rendimiento. Los resultados sugieren que los MV podrían servir de ayuda en el mejoramiento del rendimiento, la motivación por el aprendizaje, y el desarrollo de importantes habilidades en geometría en diferentes niveles educativos.

Finalmente, también se ha investigado el uso de MV en la enseñanza del concepto de valor posicional con estudiantes de 2do año escolar (Moyer, Niezgoda & Stanley, 2005). Esta vez, se registraron sus interacciones y discusiones en el computador, y se analizaron sus hojas de trabajo. Se concluyó que la manipulación de los objetos en la pantalla ayudó a los niños a comprender el significado y el proceso de la adición. Así mismo, les permitió a escribir y verbalizar ideas matemáticas de mejor manera. Sin embargo, en álgebra los resultados no fueron tan alentadores.

La más reciente investigación de Suh y Moyer (2007) revisó el impacto del uso de MV para enseñar ecuaciones de primer grado en 3er año. El estudio comparó además el uso de un manipulativo físico con el virtual, a través de pre y post tests, observaciones y videos. Los resultados mostraron que ambos materiales fueron efectivos en el logro de los estudiantes, pero en forma diferente. El MV resultó más apropiado para relacionar los símbolos con las figuras, guiar paso a paso en el método y proveer de feedback, no así para inventar nuevas estrategias.

#### 4. Conclusiones

---

En resumen, los principales resultados destacan recientes investigaciones, a nivel primario, donde los MV demostraron ser muy apropiados en conceptos como valor posicional y fracciones, propiedades de figuras geométricas y búsqueda de patrones. Se subraya que, a través de la manipulación de objetos en la pantalla, estudiantes y profesores pueden tener una base para comunicar ideas matemáticas y resolver problemas. Además, los MV demostraron ser útiles promoviendo el aprendizaje independiente, la creatividad y la exploración, proveyendo de *feedback* inmediato. No menos relevante es el hecho que los estudiantes mencionaran que disfrutaron usando los MV y resolviendo problemas, más que con lápiz y papel. Respecto a sus contrapartes, i.e. manipulativos concretos, los MV demostraron ser tanto o más efectivos en el aprendizaje de conceptos de geometría. Es importante señalar, eso sí, que en otras áreas como ecuaciones de primer grado los MV no cumplieron con las expectativas esperadas.

Aún cuando los resultados recopilados pueden ser insuficientes y no generalizables, los estudios muestran evidencia empírica significativa para apoyar una relación positiva entre el uso de los MV y el mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, la necesidad de más y diversa investigación es evidente, especialmente, en diferentes contenidos, habilidades, grados y condiciones socioculturales de los estudiantes. Dada la tendencia a incrementar las inversiones en computadores y conexión a Internet en las escuelas, es imperativo dar a conocer en más detalle los usos y ventajas de los MV, así como, las limitaciones de estas herramientas en la enseñanza de las matemáticas. Se espera que el conocimiento reportado en estas investigaciones de campo pueda, además, incentivar y guiar el desarrollo de MV en español, que apoyen directamente las necesidades educativas de nuestra comunidad hispana, poniéndolas abiertamente a disposición de profesores, estudiantes y padres.



## Referencias y bibliografía

---

- Barron, A., Kemker, K., Harmes, C., & Kalaydjian, K. (2003). Large-scale research study on technology in K-12 schools: Technology integration as it relates to the National Technology Standards. *Journal of Research on Technology Education*, 35 (1), 489-507.
- Cannon, L., Dorward, J., Heal, R., & Edwards, L. (1999). *National Library of Virtual Manipulatives for interactive mathematics*. Project Information. <http://nlMV.usu.edu/en/nav/projinfo.html>
- Gartliwait, A. & Weller, H. G. (2005). A year in the life: Two seventh grade teachers implement one-to-one computing. *Journal Research in Technology Education*, 37 (4), 361-377. Retrieved February 26, 2006, from the Wilson Web database.
- Hartshorn, R. & Boren, S. (1990). Experiencial Learning of Mathematics: Using manipulatives. ERIC Digest. Retrieved December 10, 2006 from <http://www.ericdigest.org/pre-9217/math.htm>
- Moyer, P. S.; Bolyard, J.J.; Spikell, M.A. (2002). What Are Virtual Manipulatives? *Teaching Children Mathematics Journal*, 8 (6), 372-77.
- Moyer, P., Niezgodá, D. & Stanley, J. (2005). Young children's use of virtual manipulatives and other forms of mathematical representations. In W. J. Masalski & P. C. Elliott (2005, Eds.). *Technology-Supported Mathematics Learning Environments* (17-34). Reston, VA: NCTM.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Reimer, K., Moyer, P. (2005). Third-Graders Learn about Fractions Using Virtual Manipulatives: A Classroom Study. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24 (1), 5-25.
- Real Academia Española (2001). 22ª edición del diccionario [versión electrónica]. <http://www.rae.es/>.
- Steen, K., Brooks, D., Lyon, T. (2006). The Impact of Virtual Manipulatives on First Grade Geometry Instruction and Learning. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 25 (4), 373-391.
- Suh, J. & Moyer, P. (2007). Developing Students' Representational Fluency Using Virtual and Physical Algebra Balances. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 26 (2), 155-173.
- U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics. (2006). *Internet access in U.S. Public Schools and Classrooms: 1994-2005*. Washington, DC: U.S. Department of Education, Institute of Education Sciences.
- U.S. Department of Education, Office of Educational Technology (2004). *Toward a new golden age in American education: How the Internet, the law, and today's students are revolutionizing expectations*. Washington, DC: EDPubs.

