

CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO DEL CONTENIDO EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES DE MATEMÁTICA

Jennifer L. Fonseca Castro

Escuela de Matemática

Universidad Nacional

jfonsec@una.ac.cr

Resumen

Los cursos pedagógicos y matemáticos incluidos en la formación inicial de docentes de matemática, así como las experiencias a las que éstos son expuestos, carecen de elementos integradores que permitan al futuro docente la construcción, revisión y modificación de sus ideas y conceptos como parte de su proceso de enseñanza-aprendizaje. La construcción de conocimiento pedagógico del contenido como complemento a la construcción de conocimientos pedagógicos, surge como posible respuesta a estas carencias. Este artículo tiene como propósito, dar a conocer y destacar aquellos aspectos teóricos y prácticos que han brindado, de una u otra manera, un aporte significativo al desarrollo de conocimientos y experiencias en la formación de docentes de matemática.

Palabras clave

Conocimiento matemático, conocimiento pedagógico, conocimiento pedagógico del contenido, formación docente, formación de docentes de matemáticas.

Abstract

Mathematical and pedagogical courses and the experiences included in the initial formation of teachers of mathematics lack of integrated elements that allow these future teachers to develop, review, and modify their ideas and concepts as part of their learning process. The development of pedagogical content knowledge as a complement of the mathematical and pedagogical knowledge arises as possible solution to this lack. This article has as objective to highlight those theoretical and practical aspects in teacher preparation that have contributed significantly, in one or another way, to the development of knowledge and experiences of teachers of mathematics.

Key words

Mathematical knowledge, pedagogical knowledge, pedagogical content knowledge, teacher preparation, initial formation of teachers of mathematics.

1. Introducción

Una de las principales fuentes en donde futuros docentes de matemática tienen la oportunidad de construir, revisar y modificar muchos de sus conocimientos y creencias acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, es a través de la educación institucional (pre-escolar, primaria, secundaria y universitaria). Las instituciones educativas tienen la misión y responsabilidad de usar su experiencia y conocimiento, así como su tradición y capacidad de innovación, en la formación de profesionales capaces de responder a las constantes demandas y cambios del mercado laboral y de la sociedad misma (Gonzalez & Wagenaar, 2003). Lamentablemente, éste no es siempre el caso.

La formación inicial y permanente de docentes de matemática carece de elementos y experiencias integradoras de conocimientos matemáticos y pedagógicos, que permitan a los futuros docentes construir, revisar y modificar sus sistemas conceptuales, aptitudes y habilidades como parte de su proceso de aprendizaje (Ball, 1991; Rico, 2004). Los contenidos y estrategias didácticas incluidos en dicha formación poco se amoldan a las necesidades actuales de los futuros docentes y educandos.

Investigaciones en el tema resaltan constantemente la importancia del conocimiento matemático y pedagógico en la formación de docentes de matemática (Ball, 1991; Hill, Rowan, & Ball, 2005). Sin embargo, estos elementos siempre han carecido de una integración entre sí y de conexión de éstos con la realidad en las aulas y el ambiente profesional. No obstante, en las últimas décadas se ha reconocido como parte importante y fundamental para estos dos tipos de conocimientos, el conocimiento pedagógico del contenido, cuyo objetivo es precisamente el intersecar y complementar a estos dos (Ball, Lubienski, & Mewborn, 2001).

Este artículo tiene como objetivo, dar a conocer y resaltar los aspectos teóricos más significativos en la formación de docentes de matemática y en la construcción de conocimientos pedagógicos, matemáticos y pedagógicos del contenido de

los mismos. Se espera que los insumos acá resumidos produzcan reflexiones en la comunidad educativa de formación docente; y ayuden a orientar la re-estructuración de contenidos y metodologías empleadas en los programas de estudio de carreras relacionadas con la enseñanza de las Matemáticas.

2. Conocimiento matemático y pedagógico en la formación de docentes de matemática: aspectos generales

La formación inicial y continua de docentes ha sido un tema de investigación y discusión entre muchos investigadores y políticos en el campo de la enseñanza de la matemática. El debate por definir los tipos de conocimientos y experiencias que todo educador debe desarrollar para asegurar un buen proceso de enseñanza-aprendizaje en las aulas ha sido, y sigue siendo, un tema de gran controversia en el área.

Hasta hace unas décadas atrás, los principales ejes de discusión y estudio entre los investigadores en esta área se centraban en uno de los tipos de conocimiento—matemático o pedagógico. En la década de los setentas, por ejemplo, los conocimientos pedagógicos eran totalmente ignorados en la formación de docentes de matemática (Shulman, 1986). Sin embargo, para la década de los ochentas fueron los conocimientos propios de la disciplina los que estuvieron ausentes en los programas (Shulman, 1986). En la actualidad, aunque no están ausentes del todo en los programas de estudios de docentes de matemática, sigue existiendo un desequilibrio en la cantidad de créditos y capacitación que reciben los docentes en su formación inicial y continua en estos temas (Hill, Rowan, & Ball, 2005; Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible, 2008).

Existen numerosas investigaciones que muestran que el desarrollo de un conocimiento amplio, completo y flexible de contenidos matemáticos en la formación inicial y continua de docentes de matemática, provee a éstos con herramientas necesarias para asegurar un proceso de enseñanza efectivo en el aula (e.g., Ball, 1991; Ball, Lubienski, & Mewborn, 2001; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Grossman, 1990; Grossman, Wilson, & Shulman, 1989; Hill, Rowan, & Ball, 2005; Shulman, 1986, 2004). El conocimiento matemático debe incluir, además de los conocimientos de contenidos matemáticos—“puros” y “específicos”—conocimientos relacionados a la estructura sustantiva y sintáctica de la disciplina, así como conocimientos sobre el papel de ésta en la cultura y sociedad (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Grossman, 1990; Grossman, Wilson, & Shulman, 1989; Shulman, 1986).

Existen diferencias fundamentales entre los contenidos matemáticos para y en la enseñanza de las matemáticas, y los contenidos matemáticos para y en otras disciplinas (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Grossman, Wilson, & Shulman, 1989). Según estos autores, el tipo de conocimientos matemáticos que un docente necesita desarrollar como parte de su formación inicial y continua, debe ser una combinación entre los conocimientos comunes de los contenidos matemáticos y los conocimientos especializados de los mismos. El conocimiento común de los contenidos matemáticos son aquellos conocimientos y habilidades que son utilizados en situaciones tanto dentro como fuera del campo de la enseñanza de las matemáticas (Ball, Thames, & Phelps, 2008). Por ejemplo, saber un algoritmo para realizar la resta de 300 menos 169. Por otro lado, el conocimiento especializado de los contenidos matemáticos se refiere a aquellos conocimientos y habilidades propios de la enseñanza; por ejemplo, identificar tipos de razonamientos matemáticos en las respuestas de los estudiantes, así como extender y formalizar conocimientos intuitivos de los mismos, o seleccionar un ejercicio matemático para ilustrar un determinado tema (Ball, Thames, & Phelps, 2008). En estas últimas actividades, se requiere utilizar un tipo de conocimiento matemático distinto y propio del campo de la enseñanza que otras disciplinas no requieren.

Por estructura sustantiva de los contenidos matemáticos se entiende, desarrollar en el docente no solo conocimientos de contenidos matemático (comunes y especializados), pero además conocimientos sobre el significado de éstos y sus conexiones y relaciones con otras disciplinas y situaciones (Grossman, Wilson, & Shulman, 1989; Shulman, 1986, 2004). Los docentes deben ser capaces no solo de hacer matemática, pero de saber los significados y justificaciones detrás de los conceptos y procedimientos empleados en ese hacer. La estructura sintáctica de las matemáticas incluye un entendimiento de los estándares de evidencia y prueba en la disciplina, así como un entendimiento de lo que cuenta como aserto correcto e incorrecto en la misma (Grossman, 1990). Estos conocimientos le permiten al docente ir más allá de saber el qué, para saber el por qué y el cuándo de su utilidad. Típicamente, estudiantes experimentan matemáticas como una serie de reglas memorizables que sirven para resolver problemas que tienen una única solución. Los docentes necesitan considerar qué cuenta como “respuesta” en matemática. En la búsqueda de soluciones a problemas o situaciones matemáticas, las discusiones generadas, justificaciones y razonamientos, son tan o más importantes que la respuesta final. Es necesario, además de lo ya mencionado, que estos conocimientos incluyan saberes sobre la importancia y papel de las matemáticas en la cultura y sociedad, y de su evolución y uso en las mismas, para que los docentes puedan así entender la utilidad de ésta en una variedad de situaciones y ambientes, incluyendo la recreación, lo intelectual y lo práctico (Shulman, 1986). Tal conocimiento ayuda al docente a conectar lo que los estudiantes aprenden y cómo lo aprenden con el desarrollo histórico de las matemáticas, de tal manera

que los estudiantes puedan ver a las matemáticas y su aprendizaje como un constante proceso de crecimiento, invención y revisión (Ball, 1991).

Sin un conocimiento matemático que contemple lo sustantivo y sintáctico de las matemáticas, donde se integren los conocimientos comunes y especializados de la misma y donde se entienda la naturaleza e importancia de éstas en la cultura y sociedad, los docentes carecerán de recursos para usar, modificar, crear y escoger entre los materiales curriculares y didácticos; así como para interpretar y responder al trabajo e inquietudes de sus alumnos (Ball, Lubienski, & Mewborn, 2001; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Grossman, 1990; Hill, Rowan, & Ball, 2005).

Desde otra perspectiva paralela a la anterior, algunos investigadores han hecho hincapié al desarrollo de conocimientos pedagógicos como componente fundamental en la formación de docentes de matemática. Estos conocimientos incluyen: conocimientos y creencias sobre aprendizaje y aprendices; conocimientos de los principales principios de instrucción tales como el trabajo en grupo y tiempo de aprendizaje; conocimientos relacionado al manejo y organización de clase; y conocimientos y creencias sobre los objetivos y propósitos de la educación en general (Grossman, 1990; Shulman, 1986). Shulman (2004) sintetiza estos conocimientos como de comprensión, transformación (preparación, representación, selección y adaptación), enseñanza, evaluación, reflexión y nuevas maneras de comprender. Según Shulman, el conocimiento pedagógico debe equipar al docente con herramientas que le permitan comprender tanto los objetivos (generales y específicos) y estructuras de la materia; así como las ideas dentro y fuera de la disciplina. Además, equipa al docente con herramientas para la interpretación y análisis crítico de libros de texto y curricula; para el uso y selección de representaciones (analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones, entre otros), de recursos didácticos y herramientas de manejo y ordenamiento; así como con herramientas que le permitan identificar conceptos, idiomas, cultura, capacidades e intereses de sus alumnos. El conocimiento pedagógico incluye aspectos generales de enseñanza tales como el manejo de aula, presentaciones, interacciones, trabajo grupal y aspectos generales de evaluación, reflexión y adaptación.

Históricamente, ha existido un desequilibrio entre la cantidad y calidad de los conocimientos matemáticos y pedagógicos incluidos en la formación inicial y continua de docentes de matemática. Esta brecha ha fragmentado la educación de docentes, fragmentando así su enseñanza (Ball & Bass, 2000). Aún así, en otra peculiar fragmentación de este aprendizaje, equidad y diversidad han sido incorporados a los planes de formación inicial y continua de docentes como conocimientos separados de los matemáticos y pedagógicos, ayudando a ampliar más la brecha entre estos conocimientos.

Aunque es claro que los conocimientos matemáticos y pedagógicos son indispen-

sables en la formación de docentes de matemáticas, la capacidad para enseñar éstos en primaria o secundaria no reside solamente en poseer estos conocimientos, pero en el cómo éstos son utilizados en clase (Hill, Rowan, & Ball, 2005).

3. Conocimiento pedagógico del contenido en la formación de docentes de matemática: el “qué” y “cómo”

Reconociendo la importancia de los conocimientos pedagógicos y matemáticos en la formación de docentes de matemática, pero reconociendo aún más la intersección entre estos dos, investigadores han inclinado su atención al desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido como un componente más o igual de importante que los otros dos (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Borko & Putnam, 1995; Grossman, 1990; Grouws & Schultz, 1996; Schwartz & Lederman, 2002; Schulman, 1986).

El término como tal es algo reciente en la formación de docentes; sin embargo la necesidad y la búsqueda por definir y desarrollar dicho conocimiento, tiene sus inicios desde muy atrás. A principios del siglo XX, John Dewey (1904-1964) hizo explícito en sus trabajos la necesidad de establecer una relación entre los conocimientos matemáticos y las metodologías de enseñanza-aprendizaje de los mismos. Para Dewey un “buen profesor” es aquel capaz de reconocer y crear “actividades intelectuales” en y para sus estudiantes, conectando las metodologías y actividades con la disciplina (Ball & Bass, 2000).

En una línea de trabajo similar a la de Dewey, McEwan (1987) utiliza el término “interpretaciones pedagógicas” para ilustrar las interpretaciones de contenidos específicos que hacen o deberían de hacer los docentes, basados en sus conocimientos sobre los intereses y conocimientos previos de sus alumnos.

Para finales del siglo XX, Lee Shulman, Suzanne Wilson, Pamela Grossman y Anna Richert introducen el término conocimiento pedagógico del contenido a la terminología del área de formación docente (Shulman, 1986). Para Shulman y colegas, el conocimiento pedagógico del contenido representa la intersección entre los conocimientos matemáticos y pedagógicos que permiten al docente una comprensión más amplia del cómo organizar, representar y adaptar distintos temas a los diversos intereses y capacidades de sus alumnos.

Según Shulman, el conocimiento pedagógico del contenido debe desarrollar en el docente la capacidad de representar y formular los contenidos de su materia; utilizando apropiadas ilustraciones, ejemplos, explicaciones, demostraciones, etc., de

tal manera que estos contenidos sean comprensibles y accesibles para sus alumnos. Éste a su vez debe incluir conocimientos amplios, por parte de los docentes, de aquellos aspectos que hacen de determinado tema matemático un tópico fácil o difícil de aprender; además de conocimientos amplios sobre las concepciones y preconcepciones (erróneas o no) que traen consigo los estudiantes al aprendizaje de las matemáticas (Carpenter & Fennema, 1992; Carpenter, Fennema, & Franke, 1996). El conocimiento pedagógico del contenido va más allá del conocimiento matemático y pedagógico per se, para contemplar el conocimiento de conceptos e ideas matemáticas para y en la enseñanza de la matemática. Además de equipar al docente con conocimientos que lo ayuden a la representación, selección y evaluación de contenidos y recursos didácticos (libros de texto, materiales didácticos, actividades); el conocimiento pedagógico del contenido debe equipar al docente con herramientas conceptuales para anticipar situaciones en el aprendizaje de temas específicos y poder así diseñar modelos alternativos o explicaciones que le permitan mediar con dichas situaciones (Broome, 1994).

A lo anterior definen Ball, Thames y Phelps (2008) como el conocimiento del contenido y el estudiante, y el conocimiento del contenido y la enseñanza. Donde el primero, combina saberes de matemática y saberes sobre los estudiantes; y el segundo incluye conocimientos matemáticos y de la enseñanza de esos conocimientos. Mientras que reconocer una respuesta equivocada requiere de conocimiento común del contenido; entender la naturaleza de tal error puede involucrar conocimientos especializados del contenido o conocimientos del contenido y del alumno, dependiendo de si se utiliza conocimientos matemáticos y habilidad para llevar a cabo ese tipo de análisis matemático, o si se utiliza la familiaridad con este tipo de errores de los estudiantes.

Recientemente, investigadores han agregado a la definición de conocimiento pedagógico del contenido, el componente tecnológico ausente en las primeras definiciones (Mishra & Koehler, in press; Niess, 2005, 2006; Pierson, 2001; Zhao, 2003). Niess (2005) define el conocimiento tecnológico-pedagógico del contenido como los saberes que le permiten al docente pensar en un determinado concepto matemático y considerar a su vez cómo los instrumentos tecnológicos pueden ayudar en la enseñanza y aprendizaje de este tema. Para estos autores es clara la necesidad de desarrollar en el docente de matemática, un amplio conocimiento del contenido con respecto a la tecnología y lo que significa enseñar con ésta (Niess, 2005). Así mismo, señalan la importancia de desarrollar en el docente conocimientos sobre las diferentes estrategias, representaciones, y material didáctico que integren tecnología con la enseñanza de un determinado tema matemático; así como conocimientos sobre la forma de pensar y aprender de los estudiantes con tecnología en ese tema.

¿Cómo se construye el conocimiento pedagógico del contenido? Los docentes cuentan con una variedad de fuentes de donde pueden construir, revisar y modificar sus conocimientos pedagógicos del contenido, tanto en su formación inicial como continua. Grossman (1990) menciona algunas de estas fuentes, por ejemplo: en sus experiencias como alumnos en su formación inicial, en los cursos propios de la disciplina, en los cursos profesionales o cursos de métodos matemáticos, y en la práctica. Los futuros docentes traen consigo a su preparación inicial memorias, lenguajes, dinamisismos y conceptos propios de la disciplina desarrollados en secundaria. En el proceso de aprender a enseñar, ellos deben re-pensar sus presunciones, a la vez que re-consideran los objetivos y propósitos de la disciplina en secundaria (Grossman, 1990). Durante sus experiencias como alumnos en su formación inicial, los docentes recopilan estrategias y actividades usadas con ellos, para utilizarlas con sus propios alumnos en secundaria; y utilizan las memorias de ellos como estudiantes para definir sus expectativas hacia los estudiantes—un fenómeno conocido y definido por Lortie (1975) como “conservatismo de la enseñanza,” donde los docentes enseñan de la forma que aprendieron y hacen uso de metodologías y materiales didácticos que hayan sido útiles en su propio aprendizaje.

En cursos propios de la disciplina, los docentes construyen conocimientos matemáticos que les deberían ayudar en la selección de curricula y en la evaluación de materiales didácticos. Por otro lado, los cursos profesionales o de métodos cubren temas tales como la estructura de la disciplina; rudimentos alternativos para la enseñanza de un tema en particular; etapas y procesos de aprendizaje en los estudiantes; innovaciones en enseñanza de determinado tema y técnicas específicas de enseñanza. Es este tipo de cursos en los que se espera que los docentes desarrollen la mayoría de sus conocimientos pedagógicos del contenido. Otra fuente mencionada por Grossman, es la experiencia en clase. Tras compartir con los estudiantes día con día, los docentes aprenden sobre las concepciones erróneas y conocimientos previos que traen sus alumnos al aprendizaje de los contenidos matemáticos; así como del currículo, las estrategias, metáforas y representaciones más efectivas para usar con sus alumnos (Grossman & Richert, 1988). Es durante la experiencia en clase que los docentes ponen a prueba muchos de sus conocimientos conceptuales y pedagógicos, clasificando éstos como útiles o inútiles según las experiencias vividas con sus alumnos.

Por otro lado, investigaciones han mostrado que otra muy buena fuente para el desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido en los docentes, es estudiar al alumno, específicamente investigar su forma de pensar y de hacer uso de las herramientas cognitivas y experiencia en la interpretación de situaciones matemáticas (Carpenter & Fennema, 1992; Carpenter, Fennema, & Franke, 1996; Schifter, 1998; Steffe & Thompson, 2000). Respuestas erróneas por parte de estudiantes no son siempre producto de despreocupación, desconocimiento o falta de

entendimiento por su parte. Muchas de estas respuestas tienen sus bases en teorías firmes que profesores novatos no saben anticipar (Graeber, 1999). Cuando darles las “respuestas correctas” a los estudiantes no ha mostrado ser una estrategia eficiente para la construcción y revisión de conocimientos, indagar y profundizar en las ideas--erroneas o no--ya existentes de los estudiantes, ha mostrado ser una estrategia que los ayuda para enmendar y aprender de sus errores (Graeber, 1999). Desde esta perspectiva, el docente se ve forzado a confrontar sus propios conocimientos al tratar de entender las estrategias de sus estudiantes; y a examinar y cuestionar su conocimiento pedagógico mientras piensa sobre cómo integrar sus conocimientos emergentes sobre la forma de pensar de sus estudiantes, con los conocimientos existentes de éstos (Carpenter, Fennema, & Franke, 1996).

Los resultados del estudio experimental Cognitively Guided Instruction (CGI) conducido con 40 profesores de primaria de los Estados Unidos a finales de los años ochenta y principios de los noventa, muestran que es posible el desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido a partir de la interpretación del trabajo de estudiantes. CGI fue diseñado para ayudar a los docentes participantes a entender e interpretar las formas de pensar de sus estudiantes, y hacer uso de este conocimiento en el planeamiento y dinámica de su clase. La dinámica del estudio consistió en cuatro semanas de talleres intensivos con los docentes que incluían, entre otras actividades, trabajo de campo, investigativo y teórico. Entre los objetivos del programa estaban: (a) proporcionar a los docentes datos empíricos sobre las formas de pensamiento de los alumnos, tales como, el uso y significado que le dan los estudiantes a materiales concretos para representar un problema; (b) desarrollar en los docentes herramientas cognitivas que les permitieran identificar las dificultades y facilidades en el aprendizaje de un tema determinado y en la interpretación de los conceptos e ideas de sus estudiantes a través de sus respuestas y comentarios; y (c) investigar el uso que hacen los docentes de las herramientas y conocimientos antes mencionados en la práctica y la influencia que tiene este uso en el aprendizaje de los alumnos (Carpenter, Fennema, Peterson, & Carey, 1988; Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang, & Loef, 1989; Peterson, Carpenter, & Fennema, 1989; Peterson, Fennema, Carpenter, & Loef, 1989). El programa proporcionó a los docentes, bases teóricas—modelos existentes sobre la forma de pensar de estudiantes—que les permitieran a éstos construir, interpretar, transformar y evaluar sus conocimientos espontáneos o informales sobre el pensamiento matemático de sus alumnos. Como resultado, los docentes mostraron un mejor dominio en la selección y adaptación de problemas y actividades, tomando como base los conocimientos informales e intuitivos de sus estudiantes. Este grupo de docentes mostró un mejor entendimiento en la interpretación de respuestas de sus alumnos, en la organización y construcción de discusiones matemática en clase y en la elaboración de preguntas que permitieran la reflexión y articulación de ideas por parte de sus alumnos (Carpenter & Fennema, 1992). Carpenter y co-

legas reportan que los estudiantes de dichos docentes, excedieron a los alumnos del grupo control en el conocimiento y dominio de procedimientos y estrategias en la resolución problemas; los primeros reportaron mayor confianza en sus habilidades durante la resolución de problemas. La capacitación recibida por los docentes no solo influyó en forma positiva en su práctica, creencias y conocimientos sobre la enseñanza y sus alumnos sino, también, en el aprendizaje y creencias de sus estudiantes (Carpenter & Fennema, 1992).

Otro ejemplo es el proyecto de formación continua Teaching to the Big Idea (TBI) patrocinado por The National Science Foundation, The Education Development Center (EDC) y SummerMath for Teachers, conducido con 36 profesores de matemática de los Estados Unidos por alrededor de cuatro años. Este proyecto al igual que el CGI, tenía como uno de sus objetivos ayudar a los docentes en la interpretación de formas matemáticas de pensar de sus estudiantes y a usar estas interpretaciones como herramientas para profundizar y hacer visibles importantes conceptualizaciones e ideas matemáticas. La dinámica del seminario consistió en el diseño, por parte de los docentes participantes, de modelos que ilustraran el trabajo y formas matemáticas de pensar de los alumnos, esto apoyados en talleres, trabajos de campo y análisis de entrevistas clínicas a estudiantes y discusiones de clase de otros docentes y alumnos. Estos análisis eran complementados con lecturas de investigaciones empíricas en el tema y observaciones presenciales a estudiantes (Schifter, 1998). Resultados de la investigación muestran que, al igual que los docentes del proyecto CGI, entender la forma de pensar de sus alumnos influyó en forma positiva en las metas que los docentes se proponían para el aprendizaje de sus alumnos y en los métodos que éstos utilizaban para alcanzar dichas metas (Schifter, 1998). Este conocimiento permitió a los docentes participantes reconocer mejor la complejidad de las matemáticas a las que sus estudiantes están expuestos y a organizar sus clases alrededor de una comunidad investigativa de ideas matemáticas en donde el papel del docente, al igual que el del alumno, oscila entre investigador, aprendiz y expositor de conocimientos e ideas. Al retar los conocimientos matemáticos de docentes y alumnos con nuevas ideas matemáticas que surgían de las discusiones de clase, los docentes y alumnos experimentaron las matemáticas como una actividad de construcción, en lugar de una actividad de reproducción o aceptación de respuestas (Schifter, 1998).

Además de estas fuentes ya mencionadas, hay que agregar el papel tan importante que juega las comunidades de práctica en la construcción y revisión del conocimiento pedagógico del contenido en la formación inicial y continua de docentes de matemática (Nickerson & Moriarty, 2005). Las comunidades de práctica podrían contribuir significativamente en la re-formulación de objetivos y valores por parte de los docentes, así como sustentar sus teorías con la práctica. Estas comunidades brindan al docente espacios y contextos que incitan el desarrollo y uso de investigaciones en acción. Miembros de estas comunidades comparten más

que conocimientos y estrategias, comparten propósitos y responsabilidades en la toma de decisiones; coordinan esfuerzos para mejorar el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes y el aprendizaje profesional de todos los miembros de la comunidad (Adajian, 1995; Bloom, 1998; Secada y Adajian, 1997). Son numerosas las ventajas que traen estas comunidades a los docentes, por ejemplo, mejoran las relaciones de éstos con otros docentes y alumnos, el respeto y accesibilidad a las ideas de otros y la familiaridad con la cultura y lenguaje de los alumnos (Nickerson & Moriarty, 2005). Docentes miembros de estas comunidades manifiestan que su participaciones en estos grupos les han permitido reforzar sus conocimientos matemáticos de tal manera que se sienten y muestran un mejor dominio y confortabilidad con el contenido que enseñan (Nickerson & Moriarty, 2005).

Un ejemplo de estas comunidades de práctica son los estudios de lecciones (“Lesson Study”), los cuales han sido usados para el desarrollo profesional de docentes en Japón y ganan popularidad en la formación de docentes en países desarrollados. En los estudios de lecciones, los docentes trabajan en grupos diseñando y planeando lecciones, las cuales serán utilizadas con estudiantes por los mismos docentes que las prepararon con algunos miembros del grupo como espectadores para, finalmente, hacer un análisis en grupo (con la comunidad) del diseño e implementación de estas. Los docentes utilizan estos ciclos de planeamiento-implementación-revisión para revisar y mejorar sus lecciones, sus conocimientos sobre el tema, su pedagogía y creencias. El estudio de lecciones permite a los docentes explorar sobre las formas de pensar de sus estudiantes y modelar estas interpretaciones desde diferentes perspectivas—docente, observador, investigador (Lewis, 2000).

En complemento a estas fuentes, están las actividades reflexivas. Investigaciones han mostrado que actividades reflexivas en la formación de docentes los ayuda a construir, revisar y modificar no solo su conocimiento matemático sino, también, sus estrategias didácticas y creencias acerca de la disciplina y sus estudiantes (Jaworski, 1994; Kemmis, 1985; Schön, 1983). Von Glasersfeld (1991) define reflexión como la habilidad de “salirse del curso directo de la experiencia para representar una porción de ésta, y mirar a esta porción como si fuera una experiencia directa mientras sigue consciente del hecho de que no lo es” (p. 47). Cooney (1999), por su parte, define reflexión como el “vehículo” que utiliza todo individuo para adaptarse a los diferentes contextos de la vida. Según Artzt, (1999), estas actividades impulsan a los docentes a revelar sus motivaciones y disposiciones, así como a organizar sus creencias en relación con su práctica. Artzt afirma que cuando se les pide a los docentes que piensen y escriban sobre sus objetivos y metas, sus conocimientos, creencias, motivación y disposición se hacen evidentes. Investigaciones sugieren que para que estas actividades reflexivas tengan los efectos antes mencionados, es necesario realizarlas antes, durante y después de

cada experiencia de enseñanza (Clark & Elmore, 1981; Fogarty, Wang y Creek; 1983; Ross, 1989). Durante el planeamiento e implementación de una lección, es importante hacer explícito en los docentes, los conocimientos, creencias y objetivos que dirigieron el diseño e implementación de la lección. Igualmente es importante que después de la lección se evalúe y revise la misma y su implementación. Reflexiones por escrito, retro y auto alimentaciones en presentaciones o conferencias, son algunas actividades reflexivas que promueven en los docentes no solo una revisión de ideas, conceptos y creencias, sino también la construcción de éstas. Es importante que los docentes no solo hagan explícito sus pensamientos a través de estas actividades reflexivas, pero que usen dichas reflexiones en la construcción y revisión de sus ideas y conocimientos. Es necesario que el docente encuentre en estas actividades una herramienta útil para el mejoramiento de sus lecciones y didáctica, para que éste continúe su uso en la práctica.

Si bien es cierto que muchas han sido las fortalezas que se le han encontrado al desarrollo pedagógico del contenido en la formación de docentes de matemática, hay quienes no comparten esta perspectiva. Calsen (2001), por ejemplo, apunta a que una de las debilidades del conocimiento pedagógico de contenido es que éste representa una visión fija del conocimiento y externo al docente, que ignora los contextos en los que éste se pone en práctica. Otros afirman que “el contenido y la pedagogía ya están relacionados y que en la enseñanza eficiente son el resultado de reconocer esa relación” (Segall, 2004, p.489). Gess-Newsome (2001) resalta la dificultad que enfrentan los investigadores en esta área para identificar instancias y componentes específicos de la misma, por ejemplo, la falta de precisión y poder heurístico. Finalmente, hay quienes creen que este conocimiento está fundado en una visión restringida del aprendizaje, donde el docente debe buscar la mejor forma de transmitir los conocimientos a sus alumnos (Gómez, 2007).

Es claro que el conocimiento pedagógico del contenido equipa al docente con herramientas que lo pueden ayudar a anticipar situaciones difíciles en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Broome, 1994). Sin embargo, no importa cuán extenso sea el repertorio que tengan sobre este conocimiento los docentes, es imposible anticipar con exactitud todas esas situaciones que se vayan a presentar durante el proceso. No obstante, tener en cuenta que estas “indeterminadas trayectorias” en la enseñanza existen, no imposibilitan al docente a estar preparado para aprender y adaptarse a éstas (Ball & Bass, 2000). Aunque se espera que el conocimiento matemático y pedagógico sea integral en la formación de docentes o que sean ellos mismos quienes busquen dicha integración, no se puede dejar a la espera de que esto ocurra. Es responsabilidad de los formadores universitarios hacer este conocimiento explícito a los futuros docentes para fomentar así su continuidad en la práctica. La enseñanza de la matemática debe tomar en cuenta las regularidades e irregularidades de la práctica y se debe equipar a los docentes para aprender en el contexto de los problemas reales de sus aulas.

4. Conclusiones

Los futuros docentes de matemática vienen a las universidades con algunas nociones sobre lo que constituye enseñar. Sus visiones de enseñanza de las matemáticas son consistentes, en su gran mayoría, con el tipo de experiencias vividas en primaria y secundaria, las cuales no son siempre (o nunca) las óptimas. Si creemos en la premisa que uno enseña como aprendió, es necesario construir en estos futuros docentes no solo conocimientos matemáticos, pedagógicos o pedagógicos del contenido; pero experiencias que les permita explorar las matemáticas de una forma diferente.

Han sido muchos los esfuerzos por definir los tipos de conocimientos y experiencias que docentes de matemática deberían de desarrollar para facilitar el aprendizaje significativo de ideas matemáticas en los estudiantes. Es claro que, un amplio conocimiento matemático y pedagógico es esencial en el alcance de este objetivo. Sin embargo, numerosas investigaciones han mostrado que no basta con estos dos componentes para asegurar un aprendizaje significativo en los alumnos. Enseñar matemáticas requiere más que conocimientos sobre procedimientos y algoritmos matemáticos o de manejo de clase; esto demanda entre otros aspectos ya resumidos en este trabajo, entender la organización y estructura de los conceptos e ideas matemáticas, así como de entender las reglas establecidas en el campo y el papel que juegan éstas en la historia y sociedad. En complemento a esto, es esencial que el docente de matemática desarrolle herramientas cognitivas que le permitan presentar y formular ideas matemáticas de forma que sean comprensibles por otros. Para esto es necesario construir en ellos conocimientos sobre lo que hace del aprendizaje y enseñanza de un tema determinado una tarea fácil o difícil para sus alumnos; y conocimientos sobre las diferentes concepciones que los estudiantes traen consigo al aula.

La experiencia como alumnos en su formación inicial, los cursos de la disciplina y de métodos matemáticos y la práctica misma, así como investigaciones sobre las formas de pensar de sus alumnos, el trabajo en comunidades de práctica y las actividades reflexivas son algunas de las fuentes de donde los docentes pueden construir, revisar y modificar sus conocimientos matemáticos, pedagógicos y pedagógicos del contenido durante su formación inicial y continua.

A pesar de los múltiples esfuerzos por definir y concretizar en los tipos de conocimientos y experiencias que todo docente de matemática debería de desarrollar, se ha dejado de lado un poco la investigación de los tipos de conocimientos específicos y los niveles de comprensión que se deberían implementar en los programas de formación de docentes de matemática. Así mismo, se ha dejado de lado la identificación de cualidades, destrezas, capacidades, rasgos y sensibilidades

que transforman a una “persona común” en un profesor competente y cómo éstos deben ser cultivados durante su formación.

Se espera que los insumos acá presentados sirvan de motivación para futuras investigaciones que generen resultados que enriquezcan nuestros conocimientos y práctica en el área.

Referencias y bibliografía

Adajian, L. B. (1995). Teachers' professional community and the teaching of mathematics. Tesis doctoral. University of Wisconsin-Madison.

Artzt, A. F. (1999). A structure to enable preservice teachers of mathematics to reflect on their teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 143-166.

Ball, D. L. (1991). Teaching mathematics for understanding: What do teachers need to know about subject matter? En M. Kennedy (Ed.), *Teaching academic subjects to diverse learners* (pp. 63-83). New York: Teacher College Press.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Bloom, J. (1998). *Creating a classroom community of young scientists: A desktop companion*. Toronto, ON: Irwin.

Borko, H., & Putnam, R. (1995). Expanding a teachers' knowledge base: A cognitive psychological perspective on professional development. En T. Guskey & M. Huberman (Eds.), *Professional development in education: New paradigms and practices* (pp. 35-65). New York: Teachers College Press.

Broome, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. StraBer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Calsen, W. (2001). Domains of teachers knowledge. En J. Gess-Newsome & N.G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge. The construct and its implications for science education* (pp. 133-144).

- Carpenter, T., & Fennema, E. (1992). Cognitively guided instruction: Building on the knowledge of students and teachers [Special issue]. *International Journal of Educational Research*, 457-470.
- Carpenter, T., Fennema, E., & Franke, M. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *The Elementary School Journal*, 97(1), 3-20.
- Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P. L., & Carey, D. A. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 385-401.
- Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P. L., & Chiang, C. P., & Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal*, 26, 499-531.
- Clark, C. M. & Elmore, J. L. (1981). *Transforming curriculum in mathematics, science and writing: A case study of teacher yearly planning* (Research Series 99). East Lansing, MI: Michigan State University, Institute for Research on Teaching.
- Cooney, T. J. (1999). *Conceptualizing teachers' ways of knowing*. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 163-187.
- Dewey, J. (1983). The child and the curriculum. En J.A. Boydston (Ed.), *Jonh Dewey: The middle works, 1899-1924* (pp. 273-291).
- Fogarty, J., Wang, M., & Creek, R. (1983). A descriptive study of experienced and novice teachers' interactive instructional thoughts and actions. *Journal of Educational Research*, 77, 22-32.
- Gess-Newsome, J. (2001). Pedagogical content knowledge: An introduction and orientation. En J. Gess-Newsome & N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its implications for Science Education* (pp. 3-17). Dordrecht: Kluwer.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del contenido didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemática de secundaria*. Tesis de doctorado, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.
- Gonzalez, J. L., & Wagenaar, R. (2003). *Tuning Educational Structures in Europe*. Informe final. fase uno. Bilbao: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen.
- Graeber, A. O. (1999). Forms of knowing mathematics: What preservice teachers should learn. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1-3), 189-208.
- Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.
- Grossman, P. L. & Rickert, A. E. (1988). Unacknowledged knowledge growth: A reexamination of the effects of teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 4(1), 53-62.
- Grossman, P. L., Wilson, S. M., & Shulman, L. S. (1989). Teachers of substance: subject matter knowledge for teaching. En M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge Base for the beginning Teacher* (pp. 23-36). Oxford: Pergamon Press.
- Grouws, D. A., & Schultz, K. A. (1996). Mathematics teacher education. En J. Sikula, T., J. Buttery, & E. Guyton (Eds.), *Handbook of research on teacher education* (2nd ed, pp. 442-458). New York: Macmillan.

- Hill, H., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371.
- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A Constructivist enquiry*. London: Falmer Press.
- Kemmis, S. (1985). Action research and the politics of reflection. En D. Bound, R. Keogh, & D. Walker (Eds.), *Reflection: Turning experience into learning*. London: Kogan Page.
- Lewis, C. (2002). What are the Essential Elements of Lesson Study? *The California Science Project Connection*. Volume 2, No. 6.
- Lortie, D. (1975). *Schoolteacher*. Chicago: University of Chicago Press.
- McEwan, H. (1987). Interpreting the subject domains for students: Towards a rhetorical theory of teaching. Unpublished doctoral dissertation. University of Washington, Seattle.
- Mishra, P., & Koehler, M. (en prensa). Designing learning from day one: A first day activity to foster design thinking about educational technology. *Teacher's College Record*.
- Nickerson, S. D., & Moriarty, G. (2005). Professional communities in the context of teachers' professional lives: A case of mathematics specialists. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 113-140.
- Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. *Teaching and Teacher Education*, 21, 509-523.
- Peterson, P. L., Carpenter, T., & Fennema, E. (1989). Teachers' knowledge of students' knowledge in mathematics problem solving: Correlational and case analysis. *Journal of Educational Psychology*, 81, 558-569.
- Peterson, P. L., Fennema, E., Carpenter, T., & Loef, M. (1989). Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction*, 6, 1-40.
- Pierson, M. E. (2001). Technology integration practice as a function of pedagogical expertise. *Journal of Research on Computing in Education*, 33(4), 413-429.
- Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible. (2008). *Segundo Estado de la Educación*. San José, Costa Rica: Consejo Nacional de Rectores.
- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Profesorado. *Revista de Curriculum y Formación de Profesorado*, 8(001).
- Ross, D. D. (1989). First steps in developing a reflective approach. *Journal of Teacher Education*, 40(2), 22-30.
- Schifter, D. (1998). Learning mathematics for teaching: From a teachers' seminar to the classroom. *Journal of Mathematics Teacher education*, 1, 55-87.
- Schön, D. S. (1983). *The reflective practitioner*. London: Temple Smith.
- Schwartz, R. S., & Lederman, N. G. (2002). "It's the nature of the beast:" The influence of knowledge and intentions on learning and teaching nature of science. *Journal of Research in Science Teaching*, 39, 205-236

Secada, W.G., & Adajian, L. (1997). Mathematics teachers' change in the context of their professional communities. En E. Fennema and B.S. Nelson (Eds.), *Teachers in transition: Mathematics and reform* (pp.193-219). Mahwash, NJ: Lawrence Erlbaum.

Segall, A. (2004). Revisiting pedagogical content knowledge: The pedagogy of content/the content of pedagogy. *Teaching and Teacher Education*, 20(5), 489-504.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L. S. (2004). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. En L. S. Shulman (Ed.), *The wisdom of practice: Essays on teaching, learning, and learning to teach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelley & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Von Glasersfeld, E. (1991). Abstraction, re-presentation, and reflection: An interpretation of experience and Piaget's approach. In L. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 45-67). New York: Springer-Verlag.

Zhao, Y. (Ed.)(2003). *What teachers should now about technology: Perspectives and practices*. Greenwich, Ct: Information Age Publishing.