«Pentagoneando» la circunferencia

por

Carlos Matute Gómez y Jorge Ortigas Galindo

(IES La Muela; IES Pablo Serrano, Zaragoza, Dpto. Matemática Aplicada Universidad de Zaragoza)

En este artículo se estudiará el tercer problema de la final de la XXVIII Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO. En él se mostrarán las resoluciones más interesantes propuestas por los alumnos. Así mismo, se analizarán y valorarán los resultados globales obtenidos.

Introducción

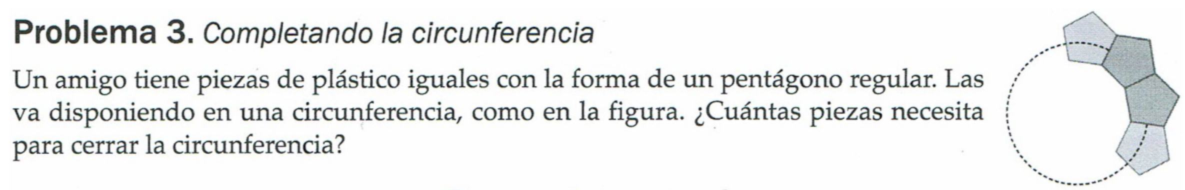
La final de la XXVIII Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO fue celebrada el 11 de mayo de 2019 en el aula magna de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza. La prueba consistió en la realización de seis ejercicios repartidos en dos bloques separados por un descanso de media hora. Para la realización de cada bloque los alumnos disponían de una hora. En ella participaron un total de 105 alumnos (clasificados previamente de entre los 1 361 estudiantes que asistieron a la semifinal). Los autores de este artículo formamos parte del equipo de profesores correctores y, en particular, nos encargamos de calificar los problemas tres y cuatro.

En estas líneas se estudiará el tercer problema de dicha prueba. Se mostrarán algunas de las resoluciones correctas más interesantes propuestas por los alumnos, así como diferentes respuestas, no tan correctas, pero también ingeniosas que ellos aportaron. Finalizaremos analizando y valorando los distintos resultados globables obtenidos. Nos parece de especial interés estudiar este ejercicio tres de la final porque trata de geometría, una rama de estudio de las matemáticas *maltratada* en ocasiones en las enseñanzas medias. Estamos de acuerdo con las siguientes palabras del reconocido divulgador y especialista en educación matemática (entre otros campos) Claudi Alsina (1997), en las que afirma: «la educación geométrica va empeorando a medida que se avanza en los niveles educativos, planteándose la paradoja de ser más sobresaliente, en términos relativos, el nivel geométrico en la educación infantil que en la universitaria». Por todo ello, consideramos muy provechoso el análisis de los procedimientos que los alumnos han ido realizando para resolver el problema que se tratará a continuación.

El problema

Enunciado

Veamos el enunciado del problema:


Problema 3. *Completando la circunferencia*

Un amigo tiene piezas de plástico iguales con la forma de un pentágono regular. Las va disponiendo en una circunferencia, como en la figura. ¿Cuántas piezas necesita para cerrar la circunferencia?

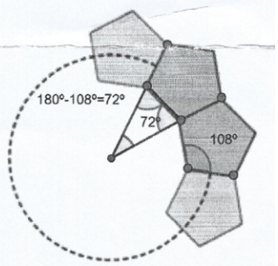
Figura 1. Enunciado del problema 3

Dos soluciones y primeras impresiones

Desde la organización se facilitaron dos soluciones *estándar* (ver figuras 2 y 3), que reproducimos a continuación:

1ª forma de resolución:

Prolongamos los lados de los pentágonos que se cortan en el centro de la circunferencia y obtenemos un triángulo isósceles. Los ángulos iguales son los suplementarios de 108º y miden 72º.



Se deduce que el ángulo central es:

$$180º - 2 \cdot 72º = 36º$$

Cada pentágono recorre 36º de la circunferencia por lo que la circunferencia completa será:

$$\frac{360º}{36º} = 10$$

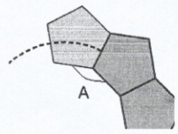
Se necesitan 10 pentágonos.

Figura 2. Primera forma de resolución estándar aportada por la organización

2ª forma de resolución:

Consideramos el ángulo $\hat{A}$ formado por dos lados de los pentágonos contiguos.

El ángulo A de la figura es igual a$360 - 2 \cdot 108 = 144º$ y dicho ángulo se va repitiendo hasta completar la circunferencia. Por tanto, si n es el número de pentágonos que necesitamos para completarla podemos expresar la siguiente ecuación:



$$144 = \frac{180 \cdot (n - 2)}{n}$$

Despejando nos queda que:

$$144n = 180n - 360$$

$$360 = 180n - 144n$$

$$360 = 36n$$

$$n = 10$$

Por lo que necesitamos 10 pentágonos.

Figura 3. Segunda forma de resolución estándar aportada por la organización

Tras reflexionar sobre el problema en general y estas dos soluciones en particular, nuestras primeras conclusiones fueron un tanto pesimistas. Aventuramos que muy pocos alumnos explicarían el problema debidamente, y si llegaban hasta el final en su razonamiento, sería por un proceso parecido al de la primera forma de resolución estándar. Creímos que ninguno daría con la segunda resolución estándar y, además, que la mayoría de los participantes responderían un número de forma aleatoria, sin ningún tipo de explicación ni razonamiento.

Criterios de calificación

A la hora de corregir el problema establecimos los criterios que se observan a continuación. La calificación numérica debía ser un número natural comprendido entre 0 y 9.

— Por escribir la solución correcta: 1 punto.
— Por el razonamiento, según el tipo:
  - Pobre: 1 o 2 puntos.
  - Intermedio: entre 3 y 6 puntos.
  - Válido: 8 puntos.

Respuestas de los alumnos

Al iniciar la corrección nos quedamos gratamente sorprendidos. Hemos de reconocer que nuestro pesimismo inicial se desvaneció. Poca gente dejaba en blanco el ejercicio o respondía solamente el valor de la solución. La primera forma de resolución estándar la siguieron varios alumnos, como se puede observar en la resolución de uno de ellos en la figura 4.

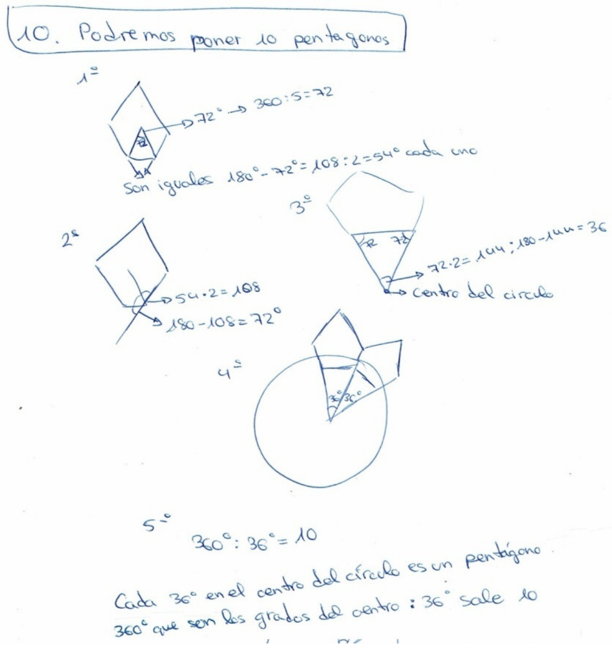


Figura 4. Solución de un participante
en la línea de la primera resolución estándar

Pero también hubo varios aspirantes que optaron por razonar el problema de forma más algebraica, como en la segunda resolución *estándar*, tal y como puede verse en la figura 5:

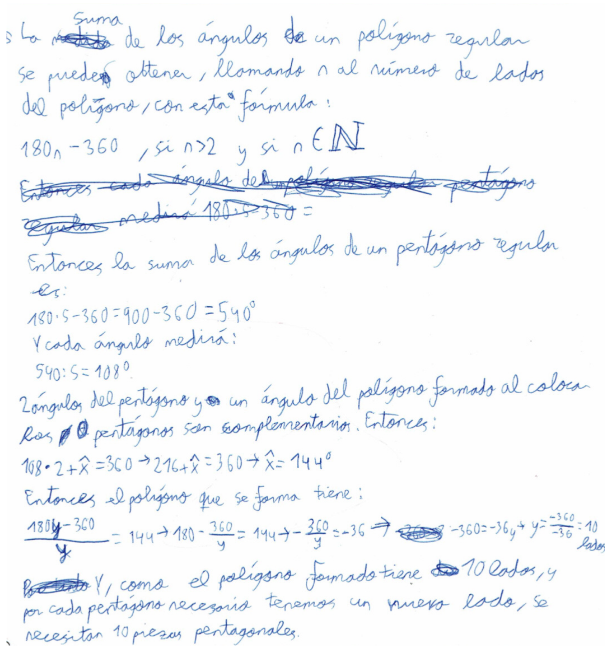
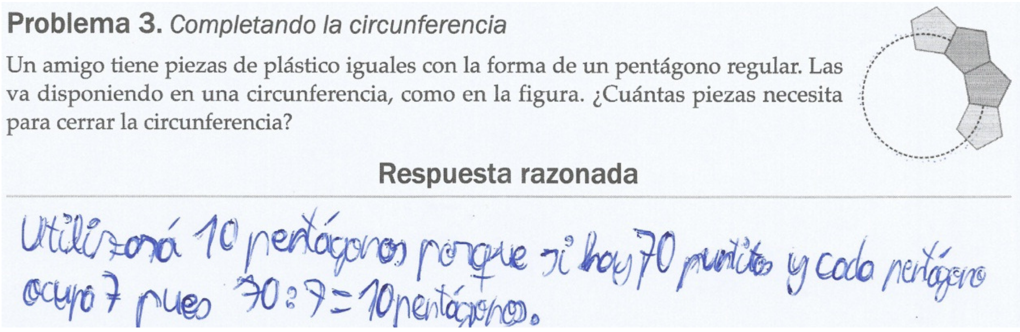


Figura 5: Solución de un participante
siguiendo la segunda resolución estándar

Los alumnos son una caja de sorpresas, pueden explorar caminos no previstos y encontrar maneras de realizar los ejercicios que son verdaderamente un desafío a los autores y correctores de los problemas. Fueron bastantes los casos (con variantes) en los que nos encontramos un proceso similar al que se muestra en la figura 6, que tras deliberar cómo calificarlo, resolvimos puntuarlo como razonamiento intermedio.


Problema 3. *Completando la circunferencia*

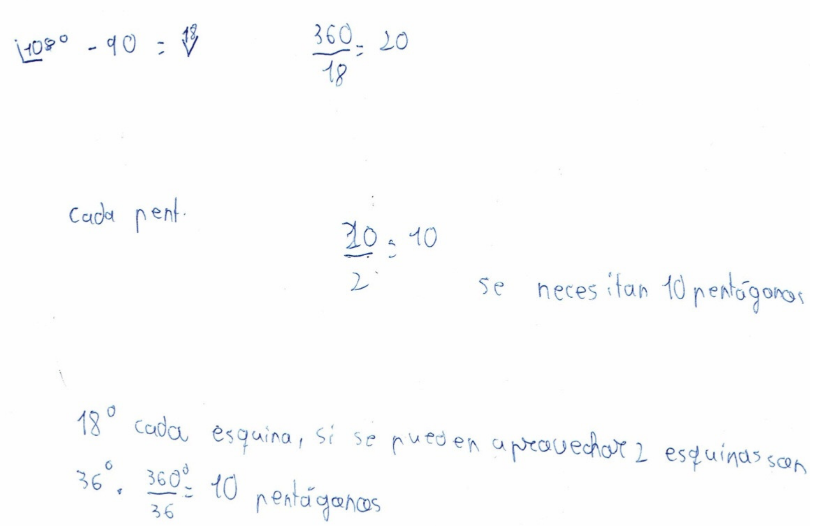
Un amigo tiene piezas de plástico iguales con la forma de un pentágono regular. Las va disponiendo en una circunferencia, como en la figura. ¿Cuántas piezas necesita para cerrar la circunferencia?

Respuesta razonada

Utilizará 10 pentágonos porque si hay 70 puntitos y cada pentágono ocupa 7 pues 70:7 = 10 pentágonos.

Figura 6. Resolución ingeniosa de un alumno. Notar los puntitos que fue marcando en la figura

También nos encontramos una solución (ver figura 7) que usa ángulos rectos. Siendo esta una variante de la primera resolución estándar.


$108° - 90 = 18$ $\frac{360}{18} = 20$

cada pent. $\frac{20}{2} = 10$ se necesitan 10 pentágonos

$18°$ cada esquina, si se pueden aprovechar 2 esquinas son $36°$. $\frac{360°}{36} = 10$ pentágonos

Figura 7. Solución que hace intervenir al ángulo de 90º

Tenemos que subrayar que la resolución que más nos gustó de todas la podemos ver en la figura 8. Dicha solución no estaba prevista dentro de las estándar, es breve pero concisa, e indica un alto grado de conocimientos geométricos por parte del aspirante.

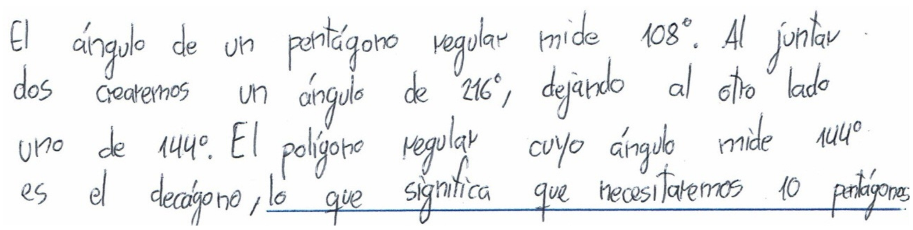
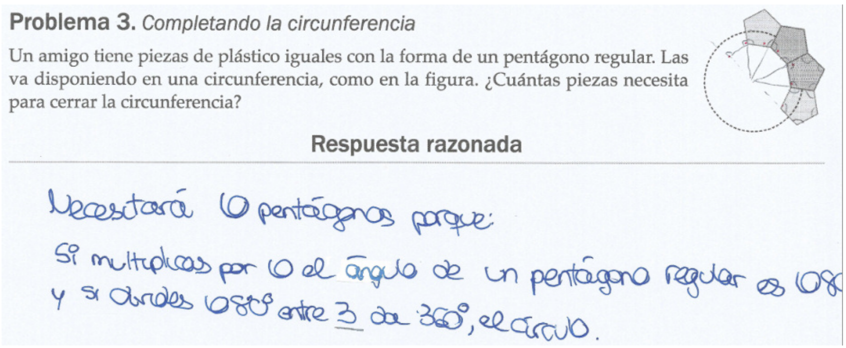

El ángulo de un pentágono regular mide 108°. Al juntar dos crearemos un ángulo de 216°, dejando al otro lado uno de 144°. El polígono regular cuyo ángulo mide 144° es el decágono, lo que significa que necesitaremos 10 pentágonos

Figura 8. Una solución inesperada

Para terminar con estos ejemplos de resoluciones, puede verse en la figura 9 una muy curiosa, que nos mantuvo ocupados durante bastante tiempo intentando discernir si el procedimiento tenía sentido. Tuvimos incluso que pedir el criterio de otros dos profesores que colaboraban en la jornada. Finalmente tomamos la decisión de evaluar dicha resolución con 3 puntos. No obstante, animamos al lector a intentar descifrar este misterio, y si puede arrojar algo de luz y mostrar que nos equivocamos al puntuarla tan bajo, no dude en comunicarlo a esta revista o a sus autores.



Problema 3. *Completando la circunferencia*

Un amigo tiene piezas de plástico iguales con la forma de un pentágono regular. Las va disponiendo en una circunferencia, como en la figura. ¿Cuántas piezas necesita para cerrar la circunferencia?

Respuesta razonada

Necesitará 10 pentágonos porque:
Si multiplicas por 10 el ángulo de un pentágono regular es 108
y si divides 1080º entre 3 da 360º, el círculo.

Figura 9. Una resolución que parece buena, pero no acaba de convencer… ¿Genio o fraude?

Análisis de los resultados

En la siguiente tabla se observa la distribución de puntuaciones obtenidas por los alumnos en el problema.

Puntuación	Frecuencia
0	26
1	8
2	3
3	52
4	3
5	5
6	0
7	0
8	0
9	8

Tabla 1. Distribución de las puntuaciones del problema 3

Pese a que pueda parecer que los resultados no son los deseables para una final de olimpiada (ya que la media no supera el 2,7 con una desviación del 2,3, en realidad no son un fracaso. Se puede observar cómo la mayoría de los alumnos obtuvieron una calificación de 3, indicando este hecho que se animaron a presentar un razonamiento al problema que, aunque calificado como *pobre*, denota un esfuerzo por su parte digno de valoración. Además, debemos observar que un total de 8 alumnos resolvieron el problema de manera perfecta, exponiendo soluciones (algunas de ellas aquí recogidas) que denotaban una gran brillantez, originalidad y variedad.

Conclusiones

Hemos de reconocer que terminamos la corrección del problema con un buen sabor de boca, constatando que los alumnos aragoneses de segundo de ESO gozan de una relativamente buena *salud geométrica*. Aunque obviamente, la muestra de estudio es altamente no representativa de lo que ocurre en las aulas durante el día a día. Con las resoluciones aquí mostradas, esperamos haber animado a los lectores (especialmente a los profesores de matemáticas) a que luchemos todos juntos por mejorar y fomentar el estudio de la geometría en primaria y secundaria.

Referencias bibliográficas

ALSINA, C., J. FORTUNY y R. PÉREZ (1997), *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*, Madrid: Síntesis.