Las secciones del cubo

por
Carlos Matute Gómez
(IES El Portillo, Zaragoza)

Si salimos a la calle y le pedimos a la gente que nos encontremos que nos resuma en una palabra qué son para ellos las matemáticas, seguramente obtendremos respuestas como «calcular», «números»…, dejando aparte las típicas «aburridas» o «difíciles». No se sabe muy bien por qué, se piensa que una persona buena en matemáticas lo es porque puede calcular muy rápido y con mucha exactitud. Quizás en la televisión se ha fomentado esta visión simplista ya que en multitud de concursos o shows se abusa mucho de la figura del clásico concursante o showman con capacidad para calcular rápido, o desde las clases de matemáticas en educación primaria se han focalizado los esfuerzos en enseñar a sumar, restar, multiplicar y dividir, o bien, se trata de algo social: cuando hay que dividir la cuenta de una cena parece que esa es la prueba de fuego para comprobar si al que le toca hacerla es buen matemático o no.

Es importante conocer bien los números y saber operar con ellos, pero las matemáticas son desde luego mucho más que esto. Las matemáticas son también imaginar formas en el plano y en el espacio, elaborar estrategias ganadoras en un juego, buscar patrones o reglas en comportamientos de la naturaleza o de la sociedad, tomar decisiones correctas, diseñar un algoritmo para resolver un puzzle, conocer los protagonistas de la historia de la ciencia…

En la parte que nos toca a los profesores de matemáticas, que vivimos agobiados por los amplios currículos que tenemos que desarrollar a nuestros alumnos cada curso, y tan centrados en hacerles aprender tantos métodos de cálculo, pocas veces nos queda tiempo en las aulas para enseñar estas otras matemáticas.

En particular, en geometría, ocurre esto también. En el primer ciclo de ESO, se centra la acción docente en obtener ángulos desconocidos en un polígono, aplicar el teorema de Pitágoras o una proporción para calcular longitudes, áreas o volúmenes desconocidos pero sin profundizar demasiado ni ir más allá de los cálculos.

En 3.º de ESO casi no da tiempo de dar geometría por las 3 horas semanales y en 4.º parece que se abandonara la geometría métrica de regla y compás para siempre, que queda sometida a las órdenes del álgebra para poder estudiar geometría analítica y trigonometría de una forma quizás demasiado metódica y poco imaginativa.

Un ejemplo claro de que los alumnos no comprenden bien el sentido de la geometría podría verse al preguntar a un grupo de alumnos de 4.º de ESO qué es el número π. Las respuestas principales seguramente serían 3,14, o 3,1416, incluso algún alumno más aventajado podría comentar que es un número irracional. Pero probablemente ningún estudiante diría que π es la razón entre la medida de la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro.

El quinto problema de los seis en los que ha consistido este año la final de la XXVI Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO es un ejemplo de problema de matemáticas en el que realizar cálculos no es lo primordial. Sí que es necesario hacerlos para resolver el problema perfectamente pero entrañan poca dificultad y deben tener lugar después de haber completado otros pasos previos que son:

1. Comprender la terminología técnica.
2. Entender exactamente qué tipo de elementos geométricos hay que dar como solución.
3. Utilizar la inteligencia espacial.

El enunciado del quinto problema es el siguiente:

Problema 5

Las secciones del cubo

En el espacio, dados dos puntos *P* y *Q*, el conjunto de todos los puntos del espacio que equidistan de *P* y *Q* es el plano perpendicular a la recta *PQ* que pasa por el punto medio del segmento (ver figura 1).

Se considera un cubo *ABCDEFGH* (ver figura 2) de arista 10 cm. *Determinar cuál es la sección, y calcular su área, que determina en el cubo el conjunto de los puntos que equidistan de:*

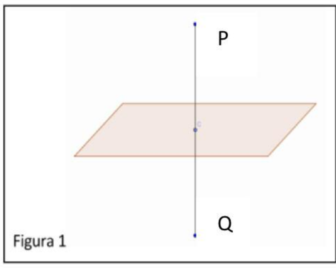

Figura 1

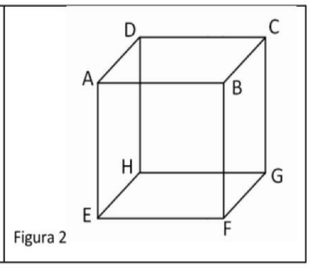

Figura 2

1. *B* y C
2. *B* y *D*
3. *B* y *H*

Este problema, al igual que todos los demás, lo realizaron un total de 98 alumnos. Para calificarlo, los profesores correctores teníamos que valorarlo con un número entero comprendido entre 0 y 9. Dado que la dificultad de cada apartado era directamente proporcional a su orden, tuvimos en cuenta el siguiente criterio de puntuaciones:

Apartado	*Determinación de la sección*	*Cálculo del área*
1.	1 punto	1 punto
2.	1 punto	2 puntos
3.	2 puntos	2 puntos

Antes de empezar a evaluar, teníamos bastante claro que el tercer apartado iba a resultar muy difícil a los chicos, y que muy pocos conseguirían pasar de 5 puntos. En efecto, llamando *X* a la puntuación obtenida, veamos la tabla de frecuencias de esta variable *X*:

X	0 puntos	1 punto	2 puntos	3 puntos	4 puntos	5 puntos	6 puntos
F	72	5	7	1	3	8	2

No nos equivocamos en nuestro juicio a priori, porque la totalidad de los 10 alumnos que tuvieron un 5, fue porque completaron satisfactoriamente los apartados 1 y 2; los que tuvieron 6, sumaron 1 punto adicional porque se atrevieron con el apartado 3 y realizaron algunos dibujos o cálculos que no llegaron a completar, pero intentaron explicar bien cómo era esa sección.

Pero lo que no esperábamos es que casi tres cuartas partes de los participantes fracasaran a la hora de resolver el problema.

De entre los 78 que tuvieron 0 puntos, 14 entregaron el ejercicio en blanco. Puede ser que el cansancio o el desánimo ya al final de la prueba les pasase factura. Los otros 64 sí que intentaron dibujar, calcular, explicar…, pero infructuosamente.

La primera clave que arroja luz sobre estos resultados tiene que ver con el lenguaje: es el dominio de la terminología técnica en geometría. Una de las normas de las Finales de las Olimpiadas es que los profesores vigilantes no pueden resolver dudas a los alumnos durante la realización de los ejercicios. Y al término de la sesión, muchos de los profesores vigilantes comentaban que los participantes les preguntaron por las palabras «sección» y «equidistan». Seguramente, el alumno que no conocía el significado de estas palabras, estaba condenado a no comprender siquiera qué era lo que se le pedía en el ejercicio.

La segunda clave, que vamos a estudiar con más profundidad, es que la realización de dibujos favoreció de manera significativa la obtención de una puntuación mayor.

Para ello, definimos la variable Y = «calidad de los dibujos realizados», y también, Z = «calidad de los cálculos realizados». Para cuantificarlas, se hará entre 0 y 6 puntos, utilizando los siguientes indicadores de logro:

Puntuación	*Indicadores de logro*
0 puntos	Inexistencia de dibujos
1 punto	Dibujos irrelevantes: segmentos trazados sobre la figura dada en el enunciado, o bien dibujo de la réplica del cubo del enunciado
2 puntos	Dibujos de uno de los siguientes tres: — triángulo rectángulo isósceles de catetos 10 cm — dibujo de un triángulo de catetos 10 y $10\sqrt{2}$ cm — diagonal de una cara o de la diagonal interna del cubo, o bien, esbozo de un plano equidistante de dos puntos
3 puntos	Dibujo de polígonos en el interior del cubo o acumulación de varios dibujos del apartado anterior
4 puntos	Dibujo correcto de una sola de las secciones pedidas
5 puntos	Dibujo correcto de dos de las secciones pedidas
6 puntos	Igual que el apartado anterior más un intento de dibujo de la tercera sección

Variable *Y*

Puntuación	*Indicadores de logro*
0 puntos	Ausencia de cálculos
1 punto	Algunos cálculos no relevantes para la solución
2 puntos	Al menos uno de los siguientes: — Cálculo de la raíz de 200 — Cálculo del área de un triángulo, en lugar de un cuadrilátero — Respuestas a los apartados 1 y 2, pero desordenadas
3 puntos	Al menos uno de los siguientes: — Cálculo de la diagonal interna del cubo — Cálculo del área de la sección de 1
4 puntos	Cálculo correcto del área solamente de la sección de 2
5 puntos	Cálculos correctos de las áreas de 1 y de 2
6 puntos	Como el anterior más intento de calcular el área de la sección 3

Variable *Z*

La distribución de la variable Y es:

Y	0 puntos	1 punto	2 puntos	3 puntos	4 puntos	5 puntos	6 puntos
F	33	19	26	9	1	4	6

Y la de Z:

Z	0 puntos	1 punto	2 puntos	3 puntos	4 puntos	5 puntos	6 puntos
F	21	27	16	21	1	7	5

Veamos si existe alguna relación entre Y y Z:

— El coeficiente de correlación de Pearson de Y y Z es aproximadamente 0,736, lo que indica una relación fuerte directa entre ambas. Si se calcula filtrando los 14 ejercicios que fueron entregados en blanco, se obtiene 0,680, que es un valor también potente.

— Estudiando la distribución de la variable $D = |Y - Z|$,

D	0 puntos	1 punto	2 puntos	3 puntos	4 puntos	5 puntos	6 puntos
F	30	54	8	4	1	1	0

se puede ver que en general no hay excesiva diferencia de puntuación en calidad de dibujos y calidad de cálculos.

— Hubo un total de 19 alumnos que realizaron cálculos sin haber dibujado nada. De ellos, solamente 2 tuvieron alguna puntuación, aunque sí que hay que destacar a uno de ellos, que obtuvo 5 puntos sin necesidad de dibujar nada.

Así que, estos tres hechos sugieren que, en general, una buena realización de los dibujos influye decisivamente en poder responder bien a lo que se pide.

Para finalizar, un apunte curioso es que varios alumnos, aunque no se les pedía, obtuvieron la medida de la diagonal del cubo, posiblemente con el propósito de mostrar a los correctores que sí que tenían destreza imaginando el interior del cubo en tres dimensiones y utilizando el teorema de Pitágoras.

En conclusión, para una buena enseñanza de la geometría en la ESO, no es preciso centrarse en calcular elementos o magnitudes desconocidas, sino primero desarrollar la inteligencia espacial de los alumnos para comprender perfectamente cómo son las figuras planas y tridimensionales, así como entender todos los conceptos que tengan que ver con ellas y sus propiedades. Porque un buen conocimiento en todo lo anterior ayudará de forma notable a entender mejor la geometría y, en particular, a realizar todos los cálculos que sean precisos en cada problema geométrico.