Ecuación de Moore-Gibson-Thompson

por
Luciano Abadías
(Universidad de La Rioja)

Históricamente, los modelos de flujo termoviscoso de fluidos comprensibles se basan en las leyes físicas clásicas de la conservación de masa, de conservación del momento, de conservación de energía, de conservación de estado no isentrópico, y la ley de Fourier para el flujo del calor. Esta última implica una paradoja, que el calor se propaga más rápido que la luz. Para solucionar esta problemática, recientemente se ha sustituido la ley de Fourier por Ley de Maxwell-Cattaneo en versiones acústicas de la ecuación de onda. La ley de Maxwell-Cattaneo añade a la Ley de Fourier una relajación en la velocidad de propagación del flujo del calor. Juntando las leyes anteriores y linealizando se obtiene la ecuación en derivadas parciales lineal de Moore-Gibson-Thompson, a la que llamaremos en adelante ecuación MGT. Dado Ω un conjunto abierto y acotado en el espacio $\mathbb{R}^3$, con frontera regular $\partial\Omega$, la ecuación MGT con condiciones iniciales es la siguiente,

$$\tau u_{ttt}(t,x) + \alpha u_{tt}(t,x) - c^2\Delta u(t,x) - b\Delta u_t(t,x) = 0, \quad t>0 \;\; x\in\Omega$$
$$u(0,x) = u_0(x),\;\; u_t(0) = u_1(x),\;\; u_{tt}(0,x) = u_2(x) \qquad x\in\Omega$$

donde u (la solución del problema) es una función dependiente del tiempo t y del espacio x, u_t es la derivada de la función u con respecto de la variable temporal t, u_{tt} es la derivada de u_t con respecto de t, y así sucesivamente. El operador Δ, conocido como el operador de Laplace o Laplaciano, actúa sobre una función de la siguiente forma

$$\Delta u(t,x) = \sum_{j=1}^{3} u_{x_j x_j}(t,x)$$

donde x es un vector del espacio ambiente que se denota por sus tres coordenadas $x=(x_1, x_2, x_3)$, y $u_{x_j x_j}$ es la derivada de orden 2 de la función u con respecto de la variable x_j. Además, en esta ecuación, la constante $c>0$ representa la velocidad del sonido, $\tau>0$ la relajación en la velocidad de propagación citada anteriormente, b la difusividad del sonido y α la amortiguación viscosa del material.

En los últimos años se ha observado que el anterior modelo se queda un poco pobre ya que en ningún momento se están considerando los efectos de memoria que tienen los materiales viscoelásticos, como son los polímeros amorfos, polímeros semicristalinos o biopolímeros entre otros. Observar la siguiente figura.

En el año 2008, Fatiha Alabau y Piermarco Cannarsa, en [4], estudiaron los efectos de la memoria en el decaimiento de energía de fenómenos acústicos. Este fue el primer paso hacia una gran cantidad de estudios acerca de estos modelos. Entre estos estudios, se pueden destacar las publicaciones de Alabau y Cannarsa [2, 3], Lasiecka y

Wang [6, 8], Ti-Jun Xiao y Jin Liang [5]. En [7], Lasiecka y Wang estudian la existencia de solución y la estabilidad de energía de la ecuación MGT en espacios de Hilbert (espacios de funciones), sometido a efectos de memoria,

$$\tau u_{ttt}(t,x) + \alpha u_{tt}(t,x) - c^2\Delta u(t,x) - b\Delta u_t(t,x) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(t,x)\,dt = 0 \qquad t>0,\ x\in\Omega$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0) = u_1(x),\ u_{tt}(0,x) = u_2(x), \quad x\in\Omega$$

donde g es una función positiva llamada función de memoria, que describe la dependencia entre la deformación y la tensión. El término

$$\int_0^t g(t-s)\Delta u(t,x)\,dt$$

refleja los efectos de memoria debido a la viscoelasticidad de los materiales.

Durante el último año, un grupo de investigación formado por investigadores españoles y chilenos del que yo formo parte, hemos estudiado la existencia de solución de la ecuación anterior en unos espacios de funciones llamados de tipo Hölder, ver [1]. Para ello se usan técnicas matemáticas de multiplicadores de Fourier. Actualmente estamos estudiando la estabilidad de energía de la ecuación MGT con memoria, añadiendo un término que representa la amortiguación friccional. Consideramos el problema

$$\tau u_{ttt}(t,x) + \alpha u_{tt}(t,x) - c^2\Delta u(t,x) - b\Delta u_t(t,x) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(t,x)\,dt = f(u_t) \qquad t>0,\ x\in\Omega$$

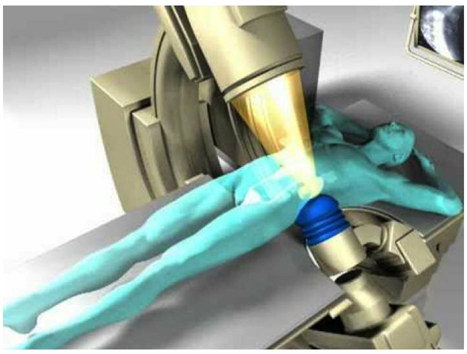
$$u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0) = u_1(x),\ u_{tt}(0,x) = u_2(x) \qquad x\in\Omega$$

donde por ejemplo un amortiguamiento friccional clásico es $f(ut) = |u_t|^{p-1}u_t$, con $p > 1$. Se ha observado que la energía del sistema modelado por la ecuación anterior decae conforme pasa el tiempo, al igual que ocurría con el caso sin amortiguamiento friccional probado por Lasiecka y Wang. Pero más aún, hemos visto que la energía, tanto en el caso con amortiguamiento friccional como sin él, decae a cero asintóticamente en la misma medida que la función de memoria g lo hace, concluyendo que, bajo ciertas condiciones, el decaimiento de energía solo depende de la memoria del modelo.

Para finalizar, se mencionan algunas interesantes aplicaciones ingenieriles de los estudios anteriores de la ecuación MGT.

— *Litotripcia*. La litrotripcia es un procedimiento médico que utiliza ultrasonidos para romper cálculos en el riñon, la vejiga o el uréter. Despúes del procedimiento, los diminutos pedazos de los cálculos salen del cuerpo a través de la orina. Existen muchos tipos de litotripcia, siendo la más común la litotripcia extracorpórea por ondas de choque. Las ondas de choque de alta energía, también llamadas ondas sonoras, atravesarán el cuerpo hasta que golpeen los cálculos renales. Si se está despierto, se pueden experimentar una sensación de golpes ligeros cuando esto comienza, las ondas rompen los cálculos en pedazos diminutos.

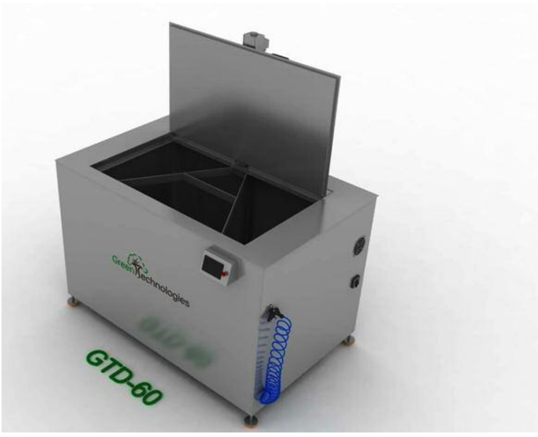
La litotripcia generalmente es segura, el pronóstico depende de la cantidad de cálculos que se tenga, de su tamaño y del lugar donde se encuentren en el aparato urinario. La mayoría de las veces, la litotripcia elimina por completo los cálculos.



— *Termoterapia.* La termoterapia es el uso medicinal del calor, cuyos efectos conllevan un aumento de la temperatura en el área afectada que a su vez promueve la mejora de la circulación sanguínea a la zona. Esto acelera la recuperación y produce relajación, y como consecuencia se produce una disminución del dolor y una recuperación de la elasticidad y calidad de los tejidos. Este tratamiento suele ser utilizado tanto para mejorar patologías crónicas como agudas (48 horas despúes de la lesión). Igualmente la aplicación de calor en un área específica puede ayudar a calentar la musculatura antes de hacer estiramientos y ejercicios, por lo que sirve para prevenir calambres y desgarros de tendones y músculos.

El tipo de termoterapia que nos interesa es el calor profundo. El calor profundo se consigue con el uso del ultrasonido terapéutico, se trata de crear calor por el movimiento mecánico de las células producido por las vibraciones del ultrasonido, y sirve para el tratamiento de musculatura profunda.

— *Limpieza por ultrasonido.* La limpieza por ultrasonidos se basa en el principio de ondas de alta frecuencia (a partir de 20 KHz) producidas en el líquido en el que las piezas se sumergen. La naturaleza de la energía ultrasónica proporciona el empuje físico requerido para romper los enlaces mecánicos e iónicos que establecen las partículas muy pequeñas alojadas en la superficie. Debido a la frecuencia de trabajo y la densidad del líquido, se forman continuas depresiones y sobrepresiones que aparecen y desaparecen en cuestión de microsegundos en el líquido, haciendo implosionar la molécula de agua, aproximadamente 40.000 veces por segundo, produciendo un microcepillado que actuá alrededor de cualquier elemento que se introduzca. Este efecto recibe el nombre de cavitación ultrasónica, y elimina la suciedad de la superficie de las piezas sumergidas incluso en los puntos de más difícil acceso. Puede alcanzar las áreas internas que no son accesibles con otros medios de limpieza.



Referencias

[1] L. Abadias, C. Lizama and M. Murillo-Arcila. *Well-posedness of the Moore-Gibson-Thompson with infinite delay.* Send to publish.

[2] F. Alabau-Boussouira. *A unifed approach via convexity for optimal energy decay rates of finite and infinite dimensional vibrating damped systems with applications to semi-discretized vibrating damped systems.* J. Differential Equations, 248(6) (2010), 1473–1517.

[3] F. Alabau-Boussouira and P. Cannarsa. *A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 347(15) (2009), 867–872.

[4] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa, and D. Sforza. *Decay estimates for second order evolution equa- tions with memory.* J. Funct. Anal., 254(5) (2008), 1342–1372.

[5] X. Han and M. Wang. *General decay estimate of energy for the second order evolution equations with memory.* Acta Appl. Math., 110(1) (2010), 195–207.

[6] I. Lasiecka and X. Wang. *Intrinsic decay rate estimates for semilinear abstract second order equations with memory.* In New Prospects in Direct, Inverse and Control Problems for Evolution Equations, Springer. (2014), 271–303.

[7] I. Lasiecka and X. Wang. *Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part II: General decay of energy.* J. Differential Equations. 259(12) (2015), 7610–7635.

[8] I. Lasiecka and X. Wang. *Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part I: Exponential decay of energy.* Z. Angew. Math. Phys., 67(2) (2016) 1–23.