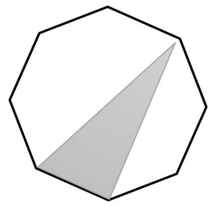
El lado oscuro del octógono

por
José Miguel Rubio Chueca
(SIES Rodanas, La Muela)

La final de la XXV Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de la ESO tuvo lugar en el Aula Magna de la Facultad de Ciencias el día 21 de mayo del 2016. En ella, 109 alumnos matriculados en los IES de la comunidad autónoma de Aragón, intentaron resolver de la mejor forma posible 6 problemas. El problema que vamos analizar en esta ocasión es el problema número 2 entregado en la primera parte de la prueba y cuyo enunciado es el siguiente:

Enunciado

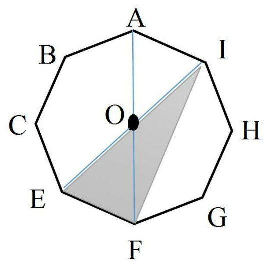
¿Qué fracción del octógono regular representa la zona oscura?



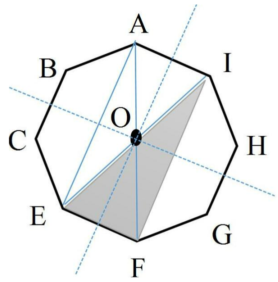
Solución

Veamos una solución puramente geométrica.

Trazamos el octógono y la parte sombrada etiquetando sus vértices. El segmento $\overline{\text{IE}}$ divide al octógono en dos partes iguales (deja a los lados el mismo número de vértices).Tomando el segmento $\overline{\text{AF}}$ encontramos como intersección de ambos segmentos el centro del octógono regular, $\overline{\text{IE}}\cap\overline{\text{AF}}$.



Por ser un polígono regular el triángulo ΔEOF representa 1/8 del octógono. Por lo tanto solo nos queda averiguar la parte que representa el triángulo y sumarla a la anterior. Para ello, unimos los vértices A y E obteniendo el rectángulo AEFI. A continuación trazamos rectas perpendiculares a los lados del rectángulo haciéndolas pasar por el centro del octógono. De esa manera obtenemos las mediatrices de los lados del rectángulo dividiendo dicho rectángulo en 8 partes iguales (triángulos rectángulos).

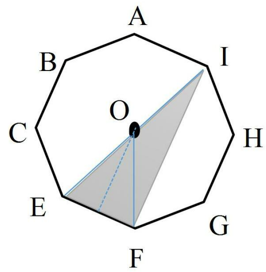


Vemos en la figura que los triángulos y el triángulotienen el mismo número de partes por lo que representan la misma fracción del octógono.

Por lo tanto, la parte oscura del octógono representa: $1/8+1/8=2/8=1/4$ del octógono

Otra forma de resolverlo:

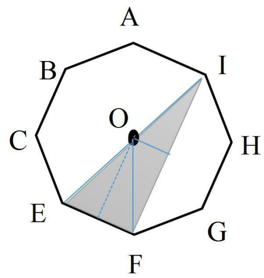
Consideremos el punto O el centro del octógono y tracemos la apotema sobre el lado $\overline{\text{EF}}$. Tenemos que el triángulo ΔEOF representa 1/8 del área del octógono.



Sin pérdida de generalidad supongamos que el lado del octógono es igual a 1u y la apotema es igual a x. Así tenemos la siguiente área:

$$A_{\triangle EOF}=\frac{\overline{\text{EF}}\cdot a_p}{2}=\frac{1\cdot x}{2}=\frac{x}{2}\text{u}^2$$

Para hallar el área del triángulo ΔIOF trazamos la altura sobre el lado $\overline{\text{IF}}$ que justamente se corresponde con la mitad del lado $\overline{\text{EF}}$. Por otro lado $\overline{\text{IF}}$ es igual al doble de la apotema anteriormente calculada, es decir $\overline{\text{IF}}=2x$. Por lo tanto tenemos que el área es:



$$A_{\triangle IOF}=\frac{\overline{\text{IF}}\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{2x\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{x}{2}\text{u}^2$$

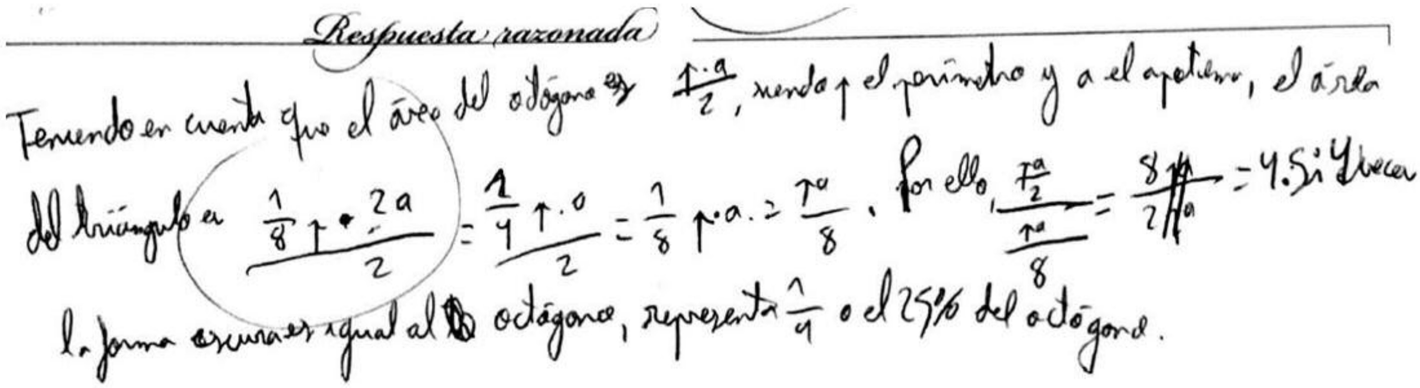
De esta forma comprobamos que las dos áreas ocupan la misma fracción del octógono. Luego la zona oscura del octógono es $1/8+1/8=2/8=1/4$, del octógono

Análisis de los resultados

En cuanto a las soluciones proporcionadas por los alumnos de la final de la Olimpiada, de los 105 problemas entregados para corregir, el 11 % dejaron el problema en blanco o dieron una respuesta sin ningún tipo de explicación, el 39 % intentaron resolver el problema dando una solución errónea y el 50 % llegaron a la solución del problema usando diversos procedimientos.

Analizando las soluciones podemos destacar los siguientes resultados:

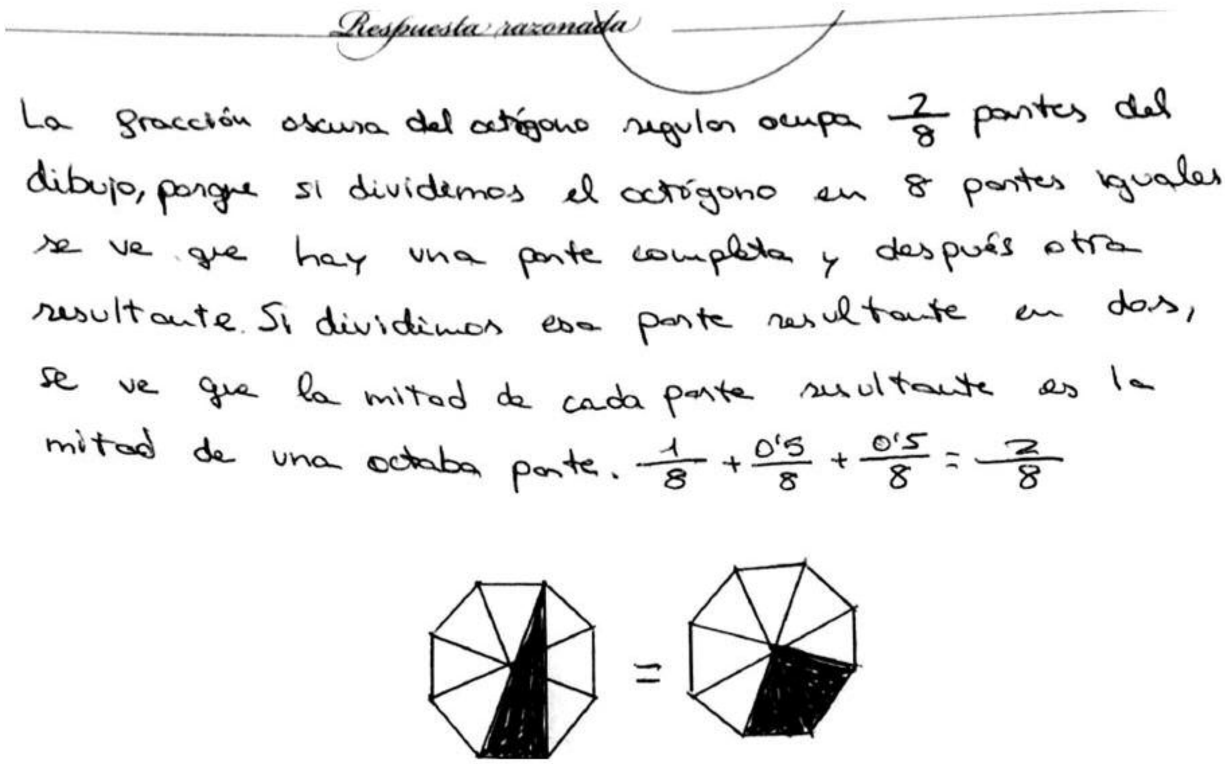
De los participantes que llegaron a la solución correcta y explicaron el ejercicio de forma precisa y clara, 3 de ellos llegaron a la solución usando el cálculo de áreas de figuras planas mediante fórmulas debidamente explicadas. Para ello, dieron algún valor imaginario a alguna distancia como hemos hecho en la segunda demostración al problema.


Respuesta razonada

Teniendo en cuenta que el área del octógono es $\frac{p\cdot a}{2}$, siendo p el perímetro y a el apotema, el área del triángulo es $\frac{\frac{1}{8}p\cdot 2a}{2} = \frac{\frac{1}{4}p\cdot a}{2} = \frac{1}{8}p\cdot a = \frac{pa}{8}$. Por ello, $\frac{\frac{pa}{2}}{\frac{pa}{8}} = \frac{8pa}{2pa} = 4$. Si la forma oscura es igual al octógono, representa $\frac{1}{4}$ o el 25% del octógono.

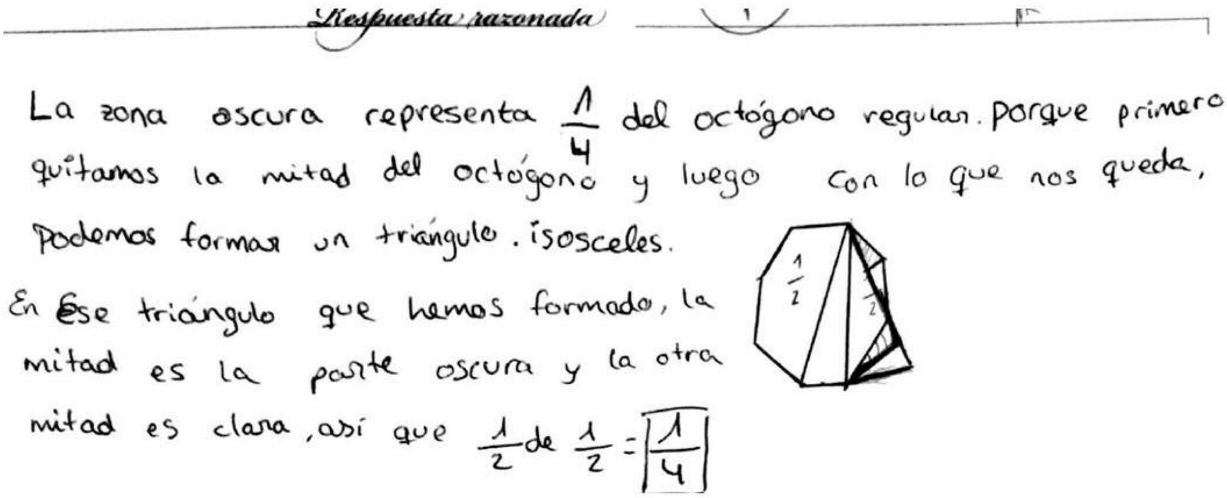
Destacar que 13 de ellos usaron la partición del octógono en triángulos completando la parte coloreada similar a como hemos realizado la primera demostración. Estos alumnos obtuvieron la solución razonando el resultado de forma correcta, premiando la originalidad, precisión y claridad expositiva a la hora de razonar los pasos seguidos en su demostración.

En algunos casos, los alumnos llegaron a la resolución del problema usando particiones del octógono en zonas que no quedaban lo suficientemente claras de por qué correspondían a la fracción del octógono que ellos determinaban.


Respuesta razonada

La fracción oscura del octógono regular ocupa $\frac{2}{8}$ partes del dibujo, porque si dividimos el octógono en 8 partes iguales se ve que hay una parte completa y después otra resultante. Si dividimos esa parte resultante en dos, se ve que la mitad de cada parte resultante es la mitad de una octaba parte. $\frac{1}{8} + \frac{0'5}{8} + \frac{0'5}{8} = \frac{2}{8}$

Considerando en estos casos que llegaron a la solución por pura intuición o azar. Como ejemplo, algunos tomaron como cierto que la zona sombreada y la zona formada por el trapecio isósceles ocupaban el mismo espacio dentro del octógono. Aunque dicha afirmación es cierta, creemos necesaria una explicación de por qué estas dos figuras representan la misma zona. De la misma manera otros optaron por intentar solventar el problema asignando fracciones diferentes que tampoco vinieron sustentadas por ninguna explicación. Sin embargo, destacar la originalidad con que muchos se enfrentaron a dicha dificultad para obtener la solución, como por ejemplo, probando a completar cuatro cuadrados de misma área siendo uno de ellos la zona sombreada, o realizando la construcción de un paralelogramo cuya área coincidía con la mitad del octógono teniendo en cuenta ciertas relaciones angulares, o completando un triángulo isósceles el cual se corresponde con la mitad del octógono.


Respuesta razonada

La zona oscura representa $\frac{1}{4}$ del octógono regular. porque primero quitamos la mitad del octógono y luego con lo que nos queda, podemos formar un triángulo. isosceles.
En Ese triángulo que hemos formado, la mitad es la parte oscura y la otra mitad es clara, así que $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ = $\boxed{\frac{1}{4}}$

El resto de los participantes aspiraron a resolver el problema midiendo los lados, usando escalas o reglas de tres, teniendo en cuenta el teorema de Pitágoras para averiguar algunas distancias que necesitaban para determinar ciertas áreas, y en algunas ocasiones, tomando particiones equivocadas que les llevaron a resultados erróneos. Ninguno de ellos llegó a la solución correcta. Destacar uno de los principales problemas que tuvieron estos alumnos al pensar que el octógono se podía dividir en 7 cuadrados cuyos lados eran los del octógono suponiendo que la diagonal de un cuadrado coincide con su lado.

Realizando el análisis nos ha resultado llamativo el hecho de que el 50% obtuviera una solución correcta al problema aunque hubiera una falta de coherencia en sus argumentos o falta de explicación. Esto nos puede llevar a pensar que ciertos alumnos tienen una gran predisposición intuitiva a resolver cuestiones geométricas aunque carezcan de las herramientas racionales que les hagan apoyar su intuición matemática. También podemos destacar la diversidad de instrumentos utilizados para llegar a la solución aunque no siempre haya sido con éxito. En algunos casos, el trabajo de campo llevado a cabo por los alumnos también ha resultado ser interesante intentando extraer conclusiones generales apoyándose en unas medidas concretas del problema.

Por lo tanto, en este problema lo complicado para los participantes no ha sido la comprensión de lo que se ha pedido demostrar sino la explicación de lo que se ha querido probar usando para ello unas herramientas matemáticas que todos ellos parece que disponían demostrando, según la teoría de van Hiele, que los alumnos de estos cursos están en un nivel 2, entendiendo cómo algunas propiedades de las figuras geométricas pueden derivar en otras, estableciendo ciertas relaciones entre las propiedades y las consecuencias derivadas de ellas, usando relaciones entre las partes y un todo, intentando obtener un resultado, que a priori parecían conocer de una forma totalmente intuitiva. Ello nos hace reflexionar sobre la importancia en su pensamiento de la axiomatización a la hora de poder transmitir con precisión sus ideas. La necesidad parece clara pero la metodología no tanto. Seguiremos reflexionando sobre ello para intentar hacer llegar las matemáticas a nuestros alumnos sin caer en la exigencia formal que pueda llevarles a la frustración. Sin embargo, no nos podemos olvidar de la necesidad del formalismo matemático a la hora de estructurar correctamente una demostración que nos haga comprender el significado de la misma de una forma precisa y coherente.