Epsilón - *Revista de Educación Matemática* 2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 57-64

Estalmat: una experiencia con cerillas

Francisco T. Sánchez Cobo
Universidad de Jaén
Ángela Capel Cuevas
I.E.S. Huarte de San Juan

Resumen: *En este trabajo mostramos los resultados de una experiencia llevada a cabo en el campo de la resolución de problemas. Se presentan las diversas estrategias seguidas, planes empleados, así como distintas extensiones de los problemas propuestos. También queremos significar la relevancia de la resolución de problemas dentro del currículo matemático no universitario.*

Palabras clave: *Resolución de problemas; Heurísticos; Matemáticas.*

Abstract: *In this paper we show the results of an experience carried out in the field of problem solving. The variety of strategies and plans we have followed are presented, as well as, different generalizations of the proposed problems. We also want to emphasize the importance of the problems solving within the mathematical curriculum out of the university.*

Keywords: *Problem solving; Heuristic strategies; Mathematics.*

INTRODUCCIÓN

Dentro del abanico de actividades que organiza la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales se encuentra el proyecto ESTALMAT, cuya idea fue iniciada e impulsada en nuestro país por Miguel de Guzmán. En cada edición se seleccionan cincuenta jóvenes, veinticinco por cada sede, que a partir de una prueba y una entrevista, muestran una destacada aptitud para las Matemáticas. Durante dos años, ellos recibirán una formación especial, principalmente, en nuestra disciplina, plasmada en una serie de cursos. Fruto del trabajo desarrollado en el curso denominado “Pólya y la heurística”, comenzó la colaboración con una alumna de ESTALMAT, Ángela Capel, que continua en el tiempo y que, por ahora, ha devenido en el presente trabajo.

Este artículo tiene como objetivo poner de manifiesto variados aspectos en la resolución de problemas. El primero tiene que ver con la elaboración de un plan para resolverlo. El segundo hace referencia a la utilización de estrategias de resolución o heurísticos, que son las herramientas con la que abordaremos el proceso de resolución de los problemas planteados. Otro aspecto es el intentar resolver el problema por diferentes caminos, cuantos más mejor, ya que esto fortalecerá nuestra comprensión del mismo y nos permitirá establecer una tupida red de conexiones, que profundizará nuestro conocimiento sobre él. Una cuestión importante es la búsqueda de procedimientos que generalicen el problema dado, lo cual enriquecerá la situación problemática inicial. Podríamos añadir algunos más pero preferimos irlos mencionando en el texto conforme vayan apareciendo.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Todos los ciudadanos nos vemos enfrentados en nuestra vida diaria a la resolución de situaciones problemáticas, algunas de las cuales pueden matematizarse. Las Matemáticas pueden verse como un espacio de problemas, en el cual los matemáticos, desde siempre, nos hemos visto incitados a su resolución. Es por ello que, como diría Halmos, la resolución de problemas forma parte del "corazón de las Matemáticas".

Pero, qué entendemos por problema. Un problema es una situación en la que desconocemos, inicialmente, el procedimiento para obtener su solución, si es que la tiene (N.C.T.M., 2003). De ahí que para dos resolutores una misma situación pueda ser o no un verdadero problema.

Las ideas seminales de Pólya sobre resolución de problemas y heurísticos (Pólya, 1965) son básicos en este campo. Él ofrece todo un conjunto de estrategias para el resolutor: hacer una figura o diagrama, casos más sencillos, generalizar, analogía, trabajar marcha atrás, etc. En la década de los ochenta, las investigaciones de Schoenfeld revitalizan este campo, estimulando su introducción en los curricula de Matemáticas no universitarios (Schoenfeld, 1985). Desde entonces la resolución de problemas ocupa un lugar destacado dentro de la enseñanza de nuestra ciencia. Así, la Nacional Council of Teachers of Mathematics recoge dentro de sus Estándares la resolución de problemas, indicando que:

> Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:
>
> - Construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas.
> - Resolver problemas que surjan de las Matemáticas y de otros contextos.
> - Aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas.
> - Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él." (N.C.T.M., 2003).

De todo lo anterior se deduce que la resolución de problemas se constituye en una parte fundamental en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Un elemento primordial, en el proceso de resolución, es la elaboración de un plan. Los trabajos de Pólya (Pólya, 1965) y de Mason, Burton y Stacey (Mason, Burton y Stacey, 1988) nos pueden iluminar sobre este particular. Así, por ejemplo, Pólya establecía varias etapas dentro del proyecto para resolver un problema: (i) entender el problema; (ii) configurar un plan; (iii) ejecutar el plan, y, (iv) mirar hacia atrás.

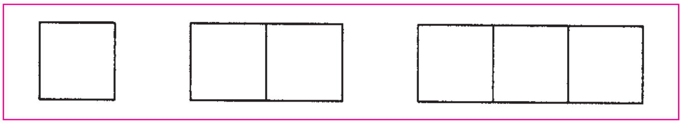
En la actualidad existen muchos concursos y olimpiadas de matemáticas donde la resolución de problemas es su eje central. Es por ello que se publican cierta cantidad de libros sobre problemas de estas competiciones. Merece la pena citar el manual de Tao (Tao, 2006), obra que escribió con quince años, por ser ganador de una medalla de oro de la Olimpiada Matemática Internacional celebrada en 1989, y, principalmente, por haber recibido la medalla Fields el año 2006, además de otros notables premios.

ACTIVIDADES CON CERILLAS

Dentro del curso, ya mencionado, de "Pólya y la heurística" uno de los problemas que se les ofrecía a los alumnos era el siguiente.

Problema 1. ¿Cuántas cerillas se necesitan para construir 14 cuadrados en línea, de forma que el lado de cada cuadrado sea una cerilla, como en la sucesión del dibujo?

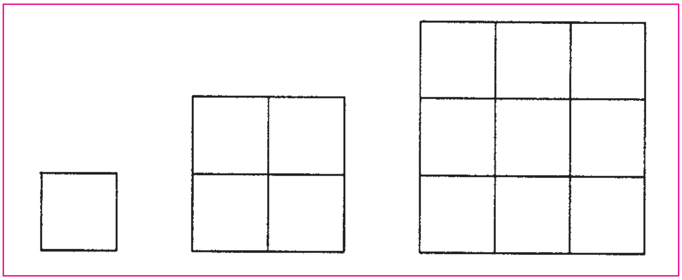
FIGURA 1



Otro problema ofrecido a los alumnos con la misma temática era el siguiente.

Problema 2. ¿Cuántas cerillas se necesitan para construir cuadrados unitarios formando otro cuadrado mayor, como en la siguiente sucesión del dibujo?

FIGURA 2



Ambos problemas comparten puntos de contacto. En las dos situaciones, hay una serie de elementos que nos sirven de guía para elaborar los planes de resolución, entre los cuales podemos citar los siguientes:

- Marco numérico.
- Posición de las cerillas.
- Configuración de cerillas.
- Análisis de los vértices.
- Parecido con otros objetos geométricos.

También se ha considerado procedimientos basados en la especificidad de la situación problemática. Por último, se ha diseñado un plan para resolver el problema 2 a partir del problema 1. Todo lo anterior se puede explicitar en los siguientes planes de resolución:

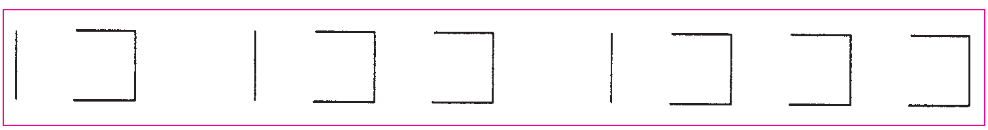
Plan 1. Deducir el término general de una sucesión.

Elaborando la siguiente tabla:

Nº cuadrados	1	2	3	4	…	n
Problema 1	4	7	10	13	…	1+3n
Problema 2	4	12	24	40	…	2n(n+1)

abordaríamos el problema dentro de su marco numérico. Una cuestión interesante es obtener ideas para resolver estos problemas a partir de la solución previamente alcanzada. Notemos que ahora lo importante no es la solución, pues ya la poseemos, sino los métodos de resolución. Es de subrayar que el camino habitual es del plan a la solución, mientras que ahora el proceso es al contrario. Usaremos esta técnica en el marco geométrico, por ejemplo, en el Problema 1:

FIGURA 3



O bien en el Problema 2, donde la expresión obtenida $2n(n+1) = 2(n^2+n)$, puede reinterpretarse de la siguiente manera

$$\text{Nº cerillas} = 2(\text{Nº cuadrados} + \text{Nº cuadrados por lado})$$

Plan 2. Posición de las cerillas.

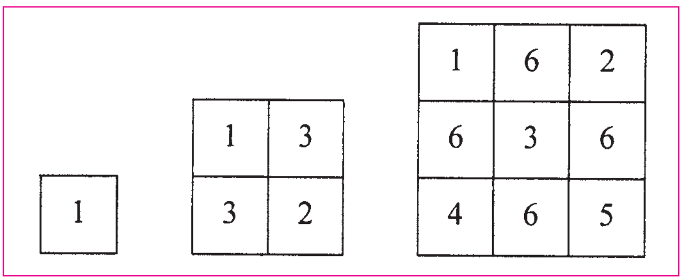
Básicamente, podemos clasificarlas con arreglo a dos criterios: i) cerillas interiores y del borde, y, ii) cerillas horizontales y verticales. Es evidente, que el número total de cerillas de cada figura se obtiene como suma de los dos tipos de cerillas. Bastará hallar los términos generales de las sucesiones correspondientes a cada caso, para resolver el problema general. Aquí descomponemos el problema en dos subproblemas. Es importante reseñar, que la idea de estudiar el número de cerillas verticales y horizontales es la clave que permite resolver la extensión de estos problemas, y que abordaremos en el siguiente parágrafo.

Plan 3. Estudio de las configuraciones de cerillas.

En este caso nos referimos: a) al estudio, exclusivamente, del número de cuadrados; b) al estudio del número de cuadrados, de formaciones con tres cerillas, de formaciones con dos cerillas y de formaciones con una cerilla, según el problema. En el apartado a) deberemos tener en cuenta las cerillas compartidas, para obtener el número de cerillas total. En el segundo apartado, tendremos que encontrar el número de configuraciones de cada tipo y el problema se resuelve elementalmente.

Cuando se trata del segundo problema, el contar el número de cuadrados se vuelve estéticamente atractivo. Veámoslo.

FIGURA 4



Plan 4. A partir de los vértices.

Igual que con las cerillas existen tres tipos de vértices, según el número de cerillas que confluyen a él. Resolveríamos como en el caso anterior.

Plan 5. Analogía con otros objetos matemáticos.

Ambos casos son, desde un punto de vista geométrico, redes o grafos conexos, y, por consiguiente, podemos aplicarle la fórmula, que es una reconversión de la usual,

$$\text{Cerillas} = \text{Arcos} = \text{Vértices} + \text{Cuadrados} - 1.$$

Esta es la forma en la que Ángela la redacta.

Plan 6. Resolver el problema 2 apoyándonos en el problema 1.

Se trata de un planteamiento puramente geométrico: descomposición de figuras. De este modo se consigue:

Cerillas figura problema 2 = n × Cerillas tira correspondiente – n(n–1).

Esta es una idea típica a la hora de resolver un problema, transformarlo en otro que si sabemos solucionar.

Para llevar a cabo estos planes se han utilizado los siguientes heurísticos: 1) hacer una figura o diagrama; 2) hacer una tabla; 3) estudio de casos sencillos; 4) generalizar; 5) analogías, y, 6) análisis de subproblemas. Estas son algunas de las herramientas básicas que deben formar parte del bagaje de todo resolutor, y que le permitirá, en bastantes ocasiones, diseñar caminos para hallar la solución de los problemas a los que se enfrenta.

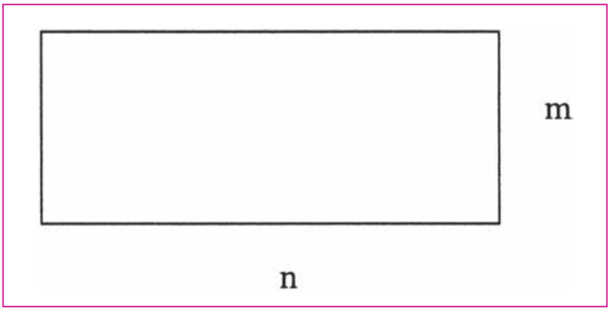
EXTENSIÓN DE LA ACTIVIDAD CON CERILLAS

Una manera, bastante natural, de extender las situaciones problemáticas presentadas, es aumentar la dimensión de los objetos matemáticos. En nuestro caso, sería estudiar las sucesiones formadas por cubos. Compartirían planes y estrategias de resolución con los problemas ya analizados, por lo que no vamos a incidir en este punto.

Otra posibilidad sería cambiar de polígono base para estudiar qué ocurre cuando se desarrollan en una dimensión (tiras), en dos dimensiones o en tres dimensiones. Sin embargo, esta prolongación es de corto recorrido, pues con las restricciones impuestas, únicamente podríamos trabajar con el triángulo equilátero.

La vía más fructífera es generalizar de tal forma que los problemas propuestos sean casos particulares. Por ejemplo, en el plano, tanto para las tiras como para las configuraciones de cuadrados, el rectángulo es la generalización. Sea el rectángulo n × m, donde las unidades de medida en la base y la altura son de igual magnitud.

FIGURA 5



Si deseamos conocer cuantas cerillas contiene esta figura de n × m cuadrados, podemos aplicar diversos de los planes mostrados en el parágrafo anterior. En particular, y por su cómoda aplicación al caso general, utilizaremos el plan 2, con el cálculo de las cerillas horizontales y verticales. Obsérvese que corresponden a cada una de las dimensiones del rectángulo. Es fácil determinar que el número total de cerillas será n(m+1) +(n+1)m, donde el primer sumando hace referencia al total de cerillas horizontales y el segundo al de verticales. Nótese que cuando se trata de tiras, como en el problema 1, será m = 1, obteniéndose el conocido 3n+1. En las configuraciones de cuadrados, se tiene m = n; por lo tanto, se llega a 2n(n+1).

A partir de aquí, se puede generalizar a k dimensiones, siendo, si la longitud en la dimensión j es x_j, con j = 1, 2, …, k, la cantidad:

$$\text{N}^{\text{o}} \text{ cerillas} = x_1(x_2+1)(x_3+1) \ldots (x_k+1) + (x_1+1)\, x_2(x_3+1) \ldots (x_k+1) + \ldots + (x_1+1)(x_2+1) \ldots (x_{k-1}+1)\, x_k.$$

De esta manera, a partir de la expresión anterior podemos conseguir la fórmula de cualquiera de las situaciones evaluadas previamente. Además, se llega, para ciertos casos sencillos, a fórmulas en función del número de cuadrados y de la dimensión en la que crece la sucesión. Por ejemplo, cuando se trata de tiras, se crece en una dimensión, verbigracia, $x_1 = n$, pero las demás dimensiones tienen por medida la unidad. Entonces, se alcanza:

$$\text{N}^{\text{o}} \text{ cerillas} = n2^{k-1} + (n+1)\, 2^{k-2}(k-1) = 2^{k-2}(k+1)\, n + 2^{k-2}(k-1).$$

CONCLUSIONES

Con esta experiencia queremos mostrar que los problemas, que los alumnos asumen como tal, son catalizadores de la actividad matemática. La aproximación a la mayoría de los conceptos matemáticos que se enseñan en primaria y secundaria, debería realizarse a partir de problemas, convenientemente elegidos. Aunque en la resolución de problemas el énfasis se sitúa tanto en los conceptos matemáticos implicados en el mismo, como en los elementos metamatemáticos inherentes –plan establecido, estrategias aplicadas, etc.–, otros aspectos, no menos interesantes, serían susceptibles de desarrollarse: defensa de nuestras ideas, elaboración de argumentos para justificarlas, revisión de la labor realizada, aumento del dominio del lenguaje, fomentar el trabajo en equipo, etc.

Evidentemente, a pesar de que la resolución de problemas sería conveniente diluirla dentro del currículo matemático, debe tener su propio espacio, en el cual se enseñe a diseñar planes para resolverlos, se expongan las distintas estrategias o heurísticos, se transmita una visión matemática del mundo, etc.

Agradecimientos: El presente trabajo se realiza dentro del Grupo de Investigación "Aproximación y Métodos Numéricos", FQM-178, subvencionado por la Junta de Andalucía.

Referencias bibliográficas

Coriat, M., García, C., Lara, A., Pérez, A., Pérez, R., Sandoval, P. y Vela, M. (1989). *Seis para cuadrar*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Armilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor-MEC.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1.985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academia Press.

Stacey, K. y Groves, S. (1999). *Resolver problemas: Estrategias*. Madrid: Narcea.

Tao, T. (2006). *Solving Mathematical Problems. A Personal Perspective*, 2ª edición, Norfolk: Oxford University Press.