Epsilón *- Revista de Educación Matemática* *2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 95-108*

Taller de calculadoras: curvas clásicas, animaciones con la ClassPad

José Manuel Fernández Rodríguez
I.E.S. El Almijar, Competa (Málaga)
Encarnación López Fernández
I.E.S. Virgen del Mar, San Pedro de Alcántara (Málaga)

Resumen: *Manipular objetos geométricos, investigar y descubrir relaciones, analizar las consecuencias de los cambios que introducimos, son algunas de las posibilidades que nos ofrecen los programas de geometría dinámica. En este taller construiremos, utilizando la aplicación Geometría de la calculadora ClassPad 330, alguna de las curvas que han destacado a lo largo de la historia de la Matemática. Realizaremos nuestras propias animaciones y aprenderemos a modificarlas para que tengan el aspecto que nosotros deseemos. En la documentación que se ofrece aparecen las construcciones como curvas mecánicas de la espiral de Arquímedes, la espiral logarítmica, la cuadratíz de Dinóstrato, la concoide de Nicómedes, la cicloide y la deltoide (como consecuencia del sistema tolemaico de epiciclos y deferentes).*

Palabras clave: *Trisección, curvas mecánicas.*

ESPIRAL DE ARQUÍMEDES

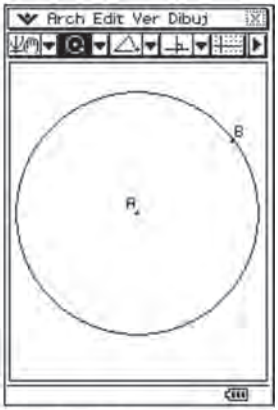
"Imaginaos una línea que gira con velocidad constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad lineal constante: ese punto describirá una espiral".

Vamos a animar un punto (C) de una circunferencia. Construiremos el segmento AC y en él animaremos el punto D, al que le pondremos trazo. De esta forma conseguiremos que el segmento gire a la vez que el punto D se desplaza por el segmento, obteniendo así la curva buscada.

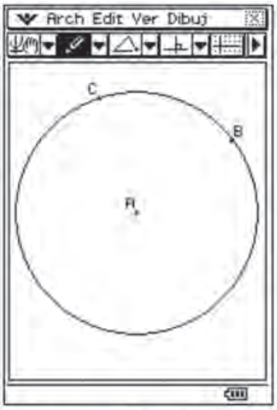
TABLA 1
LA ESPIRAL DE ARQUÍMEDES

Menú ClassPad.

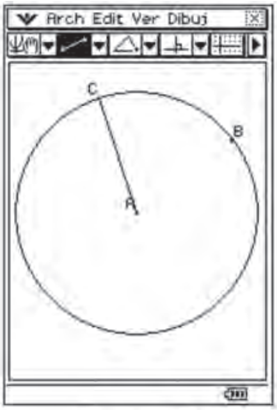
Pantalla de geometría.



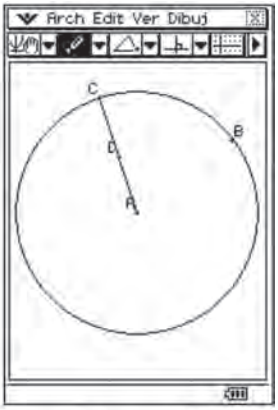
Circunferencia de centro A y de radio $|\overline{AB}|$.



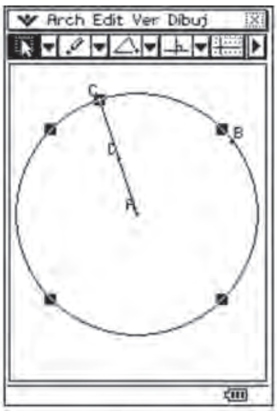
C, un punto de la circunferencia.



El segmento $\overline{AC}$.

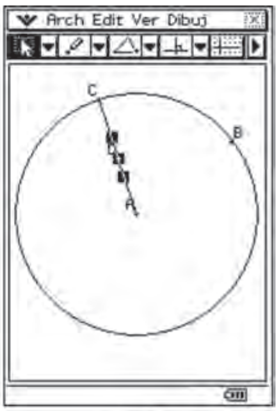


D, un punto de $\overline{AC}$.



Seleccionamos la circunferencia y el punto C.

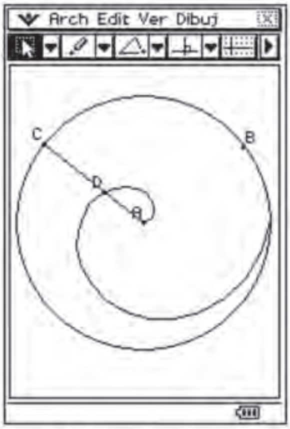
Agregamos animación.



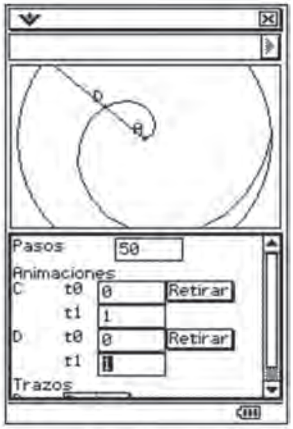
Seleccionamos D y $\overline{AC}$, y lo animamos.

TABLA 1
CONTINUACIÓN

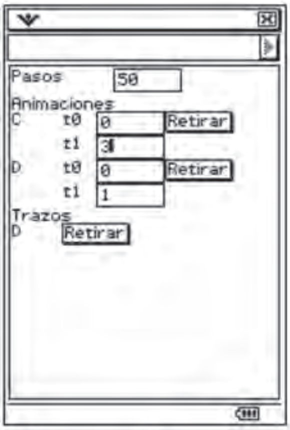
Con D seleccionado le activamos la opción trazo.



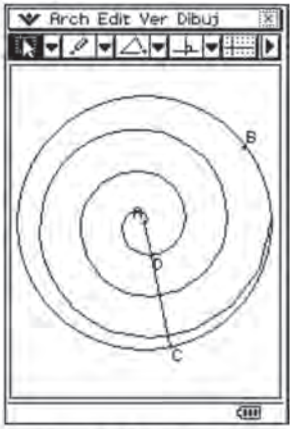
Resultado de reproducir la animación.



Si editamos la animación.



Hacemos que C de tres vueltas.



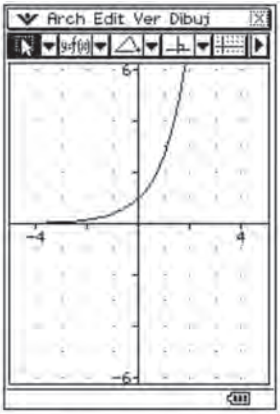
Resultado de la animación.

ESPIRAL LOGARÍTMICA

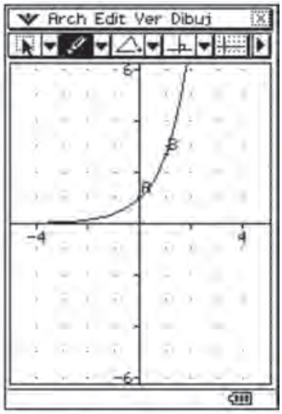
La idea de la construcción es similar a la utilizada en la espiral de Arquímedes, pero ahora vamos a animar el punto B sobre la curva $y=e^x$; el punto que irá dejando el trazo ahora será uno sobre la circunferencia.

TABLA 2
LA ESPIRAL LOGARÍTMICA

Introducimos la expresión de la función.

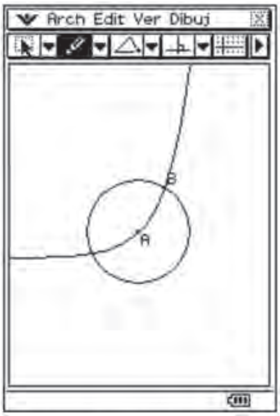


Representación gráfica.

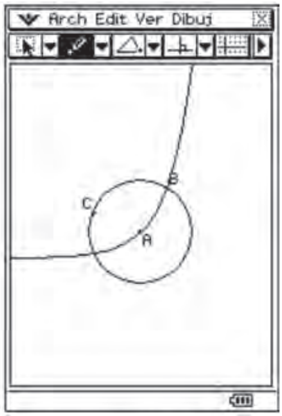


Fijamos a la curva los puntos A (0,1) y B.

Animamos B sobre la curva.

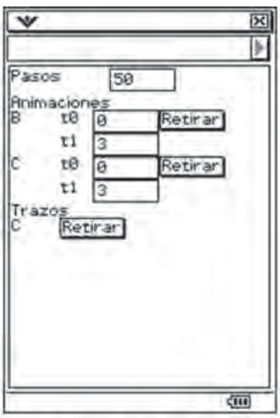


Círculo de centro A y de radio $|AB|$.

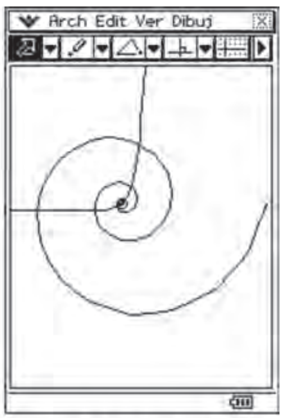


Situamos C sobre el círculo.

Le activamos el trazo y lo animamos.



Editamos las animaciones.



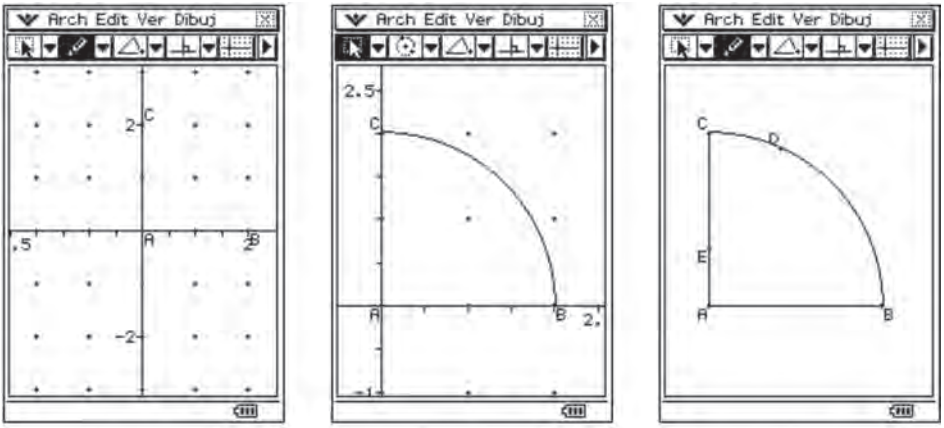
Resultado de la animación.

CUADRATIZ DE DINÓSTRATO

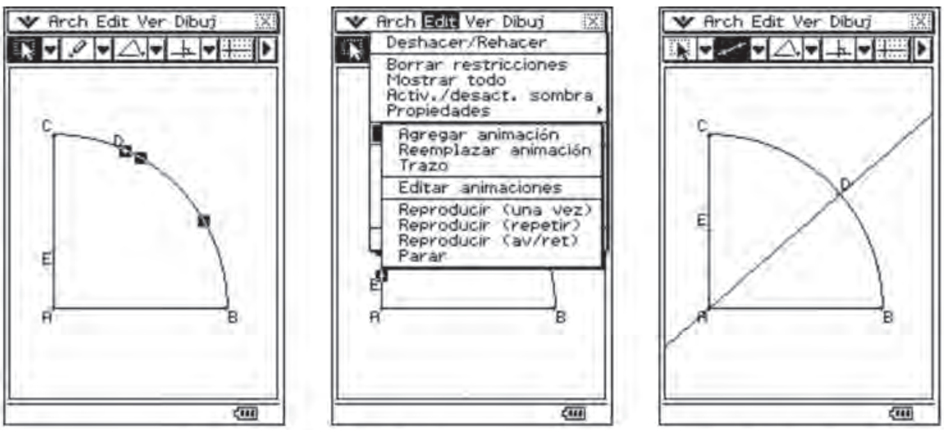
Dinóstrato utilizó la trisectriz de Hipias para cuadrar el círculo, por eso se la conoce también como la cuadratriz de Dinóstrato. Esta curva se genera por la intersección de dos rectas que se mueven, una de ellas, paralela al eje de abscisas, se desplaza verticalmente con velocidad constante y la otra gira con velocidad angular constante sobre el origen de coordenadas; el movimiento es tal que ambas rectas coinciden de forma simultánea con el eje de abscisas.

Vamos a realizar la construcción sólo para el primer cuadrante.

TABLA 3
LA CUADRATRIZ DE DINÓSTRATO

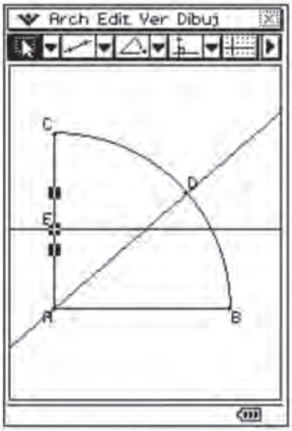


Construimos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. | Arco de circunferencia BC. | Un punto sobre el arco y otro sobre el segmento.

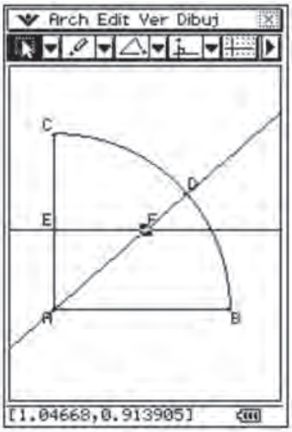


Animamos el punto D sobre el arco. | Construimos la recta que pasa por A y D.

TABLA 3
CONTINUACIÓN

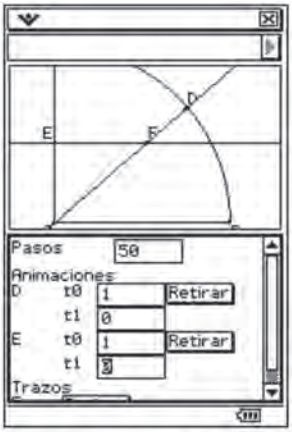


Trazamos la perpendicular a $\overline{AC}$ por E.

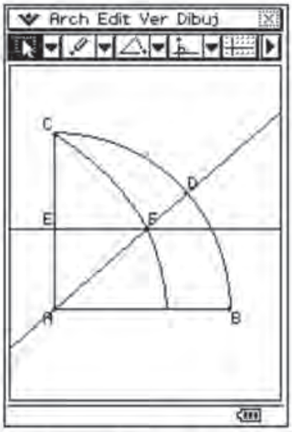


Fijamos F a la intersección.

Animamos E sobre $\overline{AC}$ y activamos el trazo para F.



Editando los parámetros de la animación.

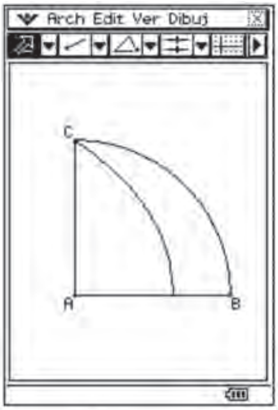


Resultado de la animación: la cuadratriz de Dinóstrato.

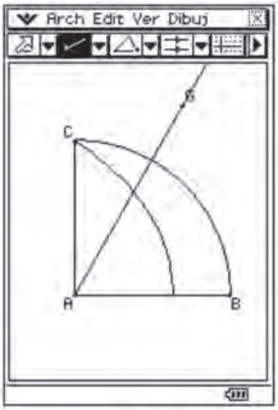
TRISECCIÓN

Vamos a describir a continuación el procedimiento a seguir para trisecar un ángulo. La idea no es complicada ya que, como la trisectriz de Hipias es el lugar geométrico de los puntos de corte de dos rectas cumplirán, lógicamente las condiciones de las dos rectas; esto se traduce en que, la proyección sobre AC del arco de trisectriz determinado por un ángulo es directamente proporcional a la amplitud de dicho ángulo. Este hecho nos va permitir dividir cualquier ángulo sin más que dividir la proyección sobre AC del arco de trisectriz que determina dicho ángulo.

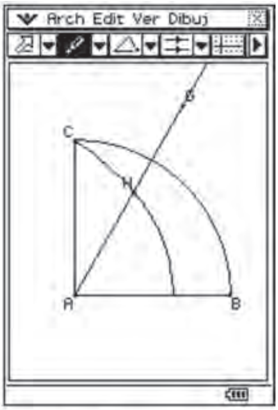
TABLA 4
TRISECANDO UN ÁNGULO



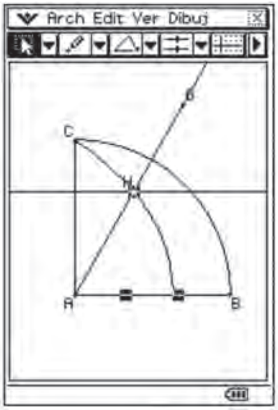
Partimos de la construcción anterior.



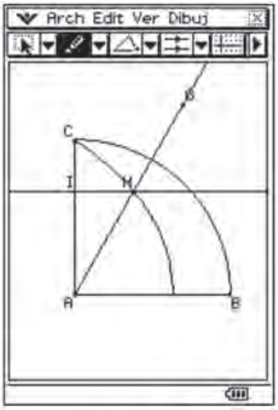
Determinamos el ángulo que vamos a trisecar.



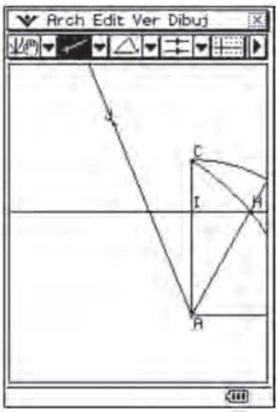
La semirrecta AG corta a la trisectriz en H.

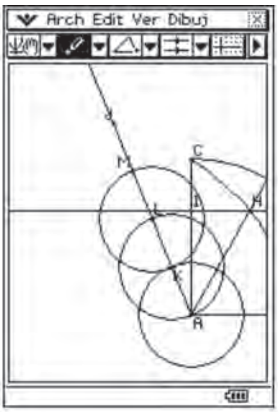


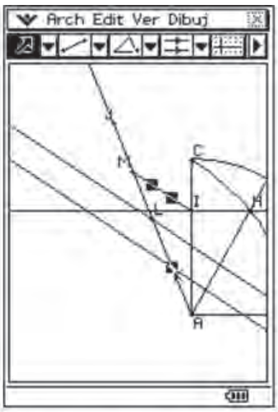
Proyectamos $\overline{AH}$ sobre $\overline{AC}$.

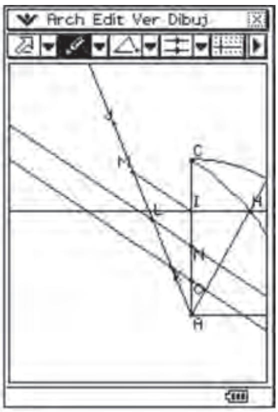


Obtenemos $\overline{AI}$.



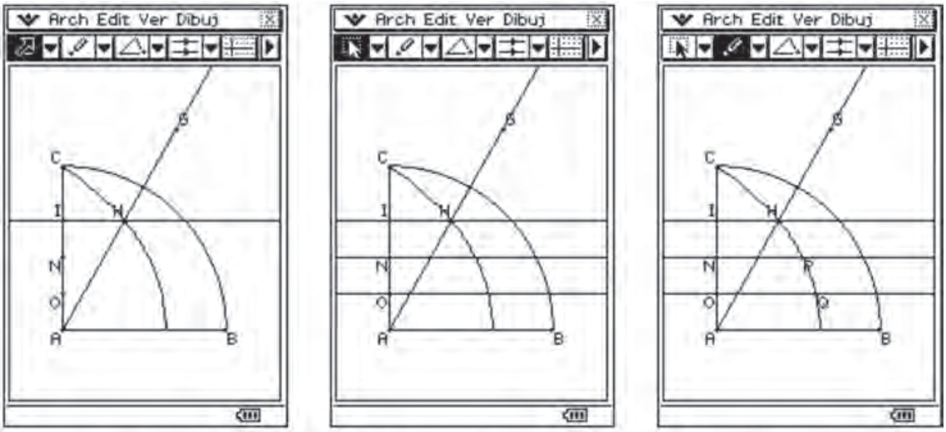




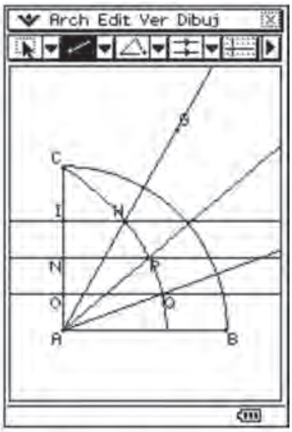


Dividimos $\overline{AI}$ en tres partes iguales obteniendo los puntos O y M.

TABLA 4
CONTINUACIÓN



Trasladamos la división de $\overline{AI}$ sobre la trisectriz obteniendo los Puntos P y Q que nos determinan …

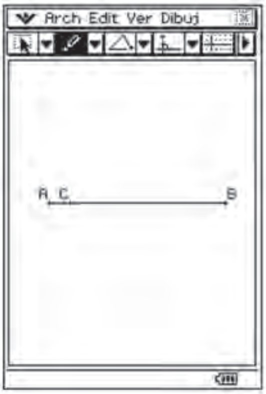


… la trisección del ángulo elegido.

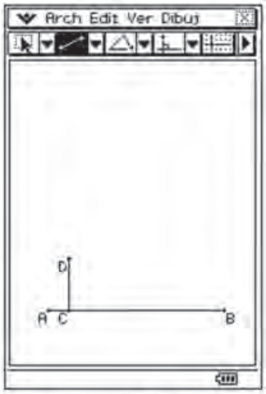
CICLOIDE

Podemos definir la cicloide como la curva que describe un punto de una circunferencia cuando ésta rueda, sin deslizarse, por una línea recta. Curva de máxima resistencia estructural, tautócrona y braquistócrona; son propiedades que por sí solas hablan de la importancia de esta curva, si además nombramos a Galileo, Pascal o Newton, queda patente lo mucho que ésta nos puede enseñar. En esta construcción, tras hacer rodar la circunferencia sobre un segmento, ajustaremos algunos parámetros para obtener el resultado deseado.

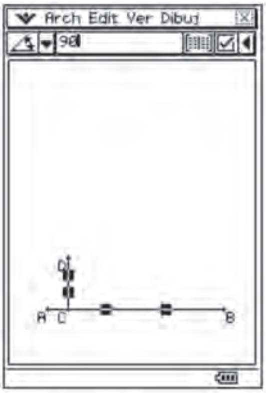
TABLA 5
LA CICLOIDE



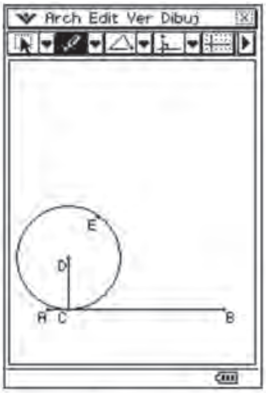
Animamos C en $\overline{AB}$.



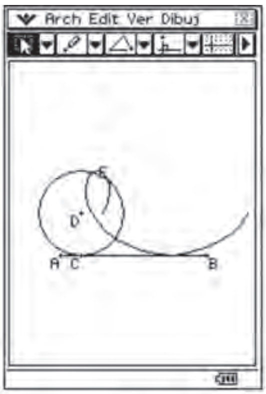
Construimos el radio de la circunferencia



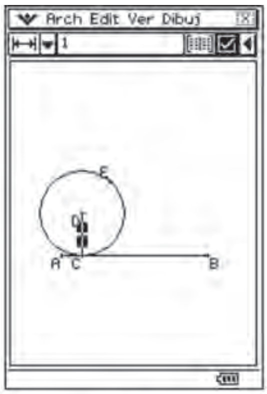
Lo hacemos perpendicular al segmento $\overline{AB}$.

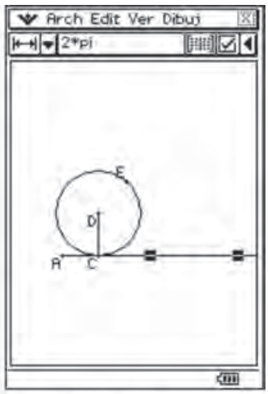


Construimos la circunferencia y animamos E sobre ella.



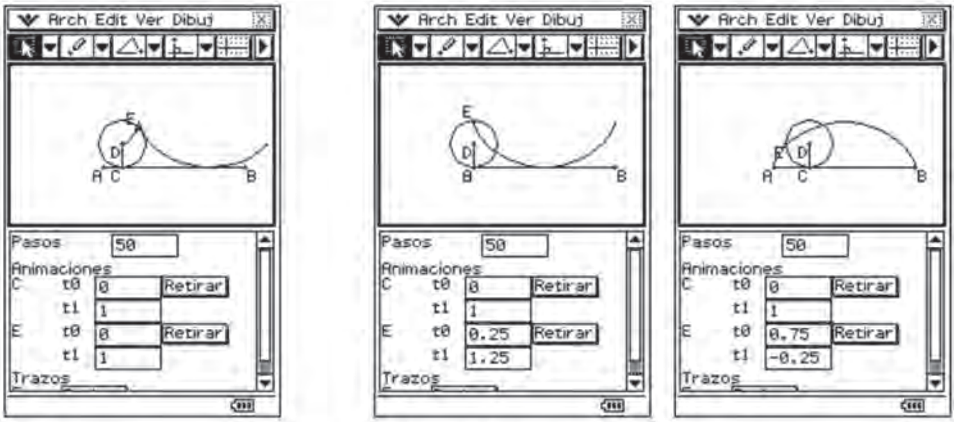
Resultado de la animación.



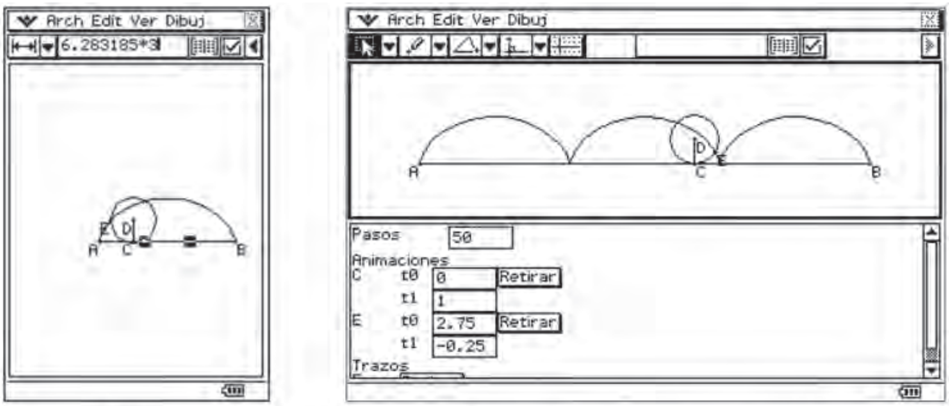


Longitude de la circunferencia iguala a la de $\overline{AB}$.

TABLA 5
CONTINUACIÓN



Ajustando los parámetros de la animación.



Hacemos la longitud del segmento tres veces la de la circunferencia y modificamos los parámetros de la animación.

LA CONCOIDE DE NICÓMEDES

La concoide de Nicómedes (siglo II a. C) aparece al trisecar un ángulo por medio del método de Arquímedes (siglo III a. C.). Podemos definirla como el lugar geométrico de los pares de puntos G y H, situados sobre una recta que pasa por un punto fijo D, el polo, y otro punto E que a su vez se desplaza a lo largo de una recta (que contiene al segmento $\overline{ABAB}'$) llamada directriz. La distancia de G a E y de H a E es una distancia fija. Este método de construcción se lo debemos a Roberval.

FIGURA 1
LA CONCOIDE DE NICÓMEDES

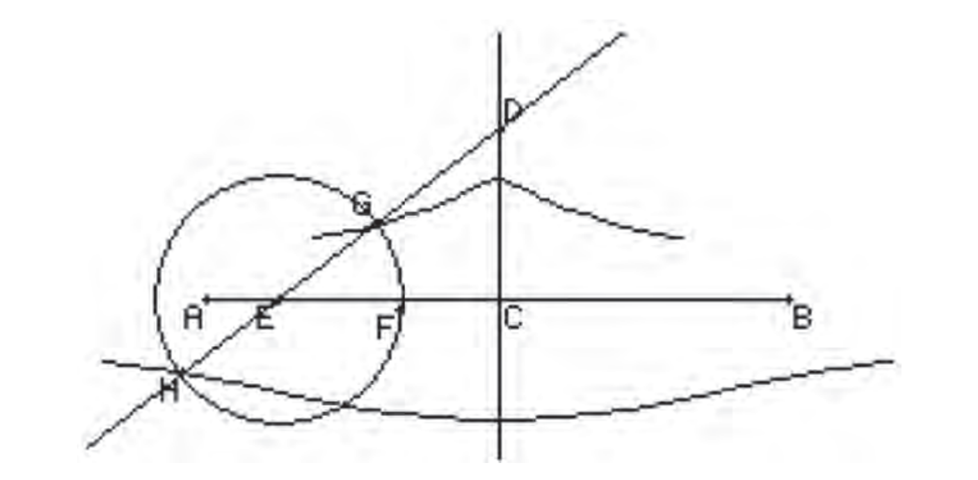
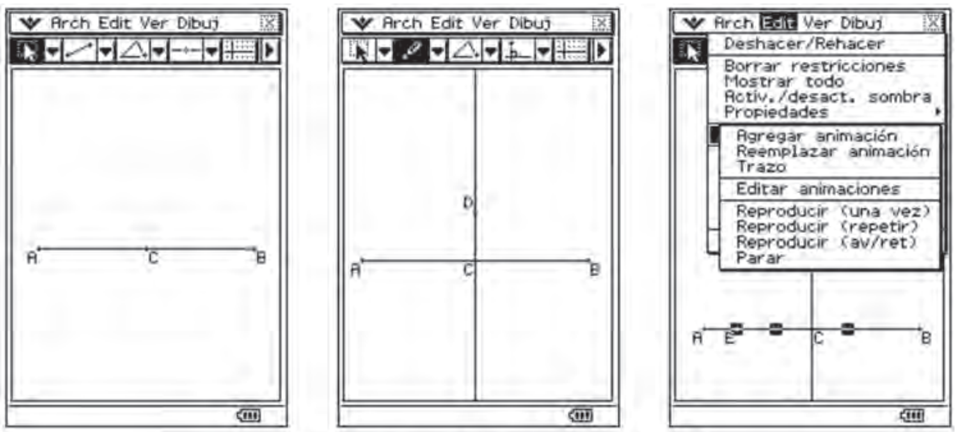
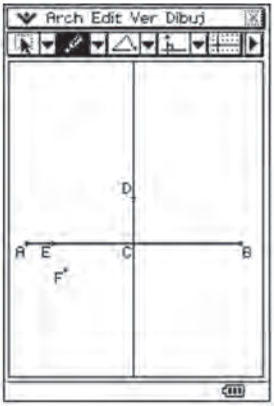


TABLA 6
LA CONCOIDE

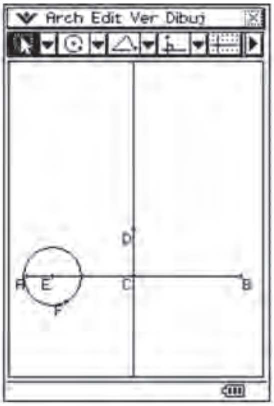


Construyendo los puntos D y E, animando el punto E en $\overline{AB}$.

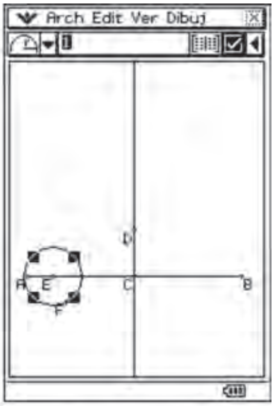
TABLA 6
CONTINUACIÓN



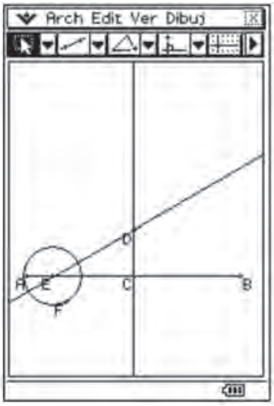
Elegimos F.



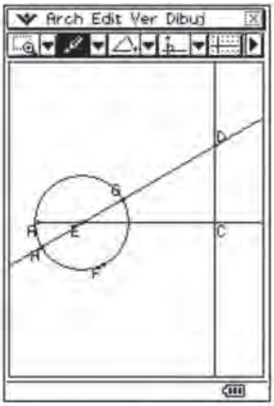
Construimos la circunferencia de radio $|EF|$.



Fijamos el radio a 1.

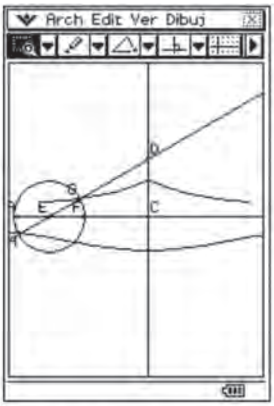


Construimos la recta que pasa por D y E.

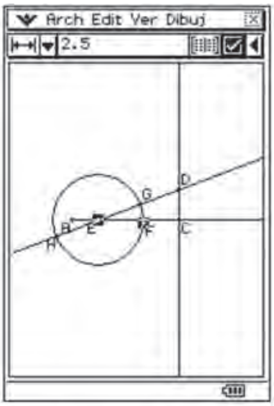


Corta a la circunferencia en G y H.

Activamos el trazo de G y H.



Resultado de la animación.



Aumentamos el radio de la circunferencia.

Resultado de la animación.

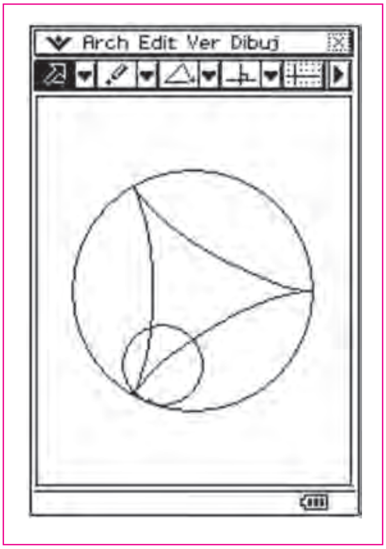
EPICICLOS Y DEFERENTES

Para explicar algunas observaciones (retrogradación, variación del tamaño y de la luminosidad de ciertos planetas), Tolomeo estableció un modelo matemático para las órbitas de los planetas en las que les asignaba a cada uno un círculo imaginario llamado deferente que contenía al nuestro en su interior. Cada planeta girará a su vez en un nuevo círculo, llamado epiciclo, cuyo centro será un punto de su deferente.

El *Almagesto* de Tolomeo comparte con los *Elementos* de Euclides, la gloria de ser los textos científicos en uso durante más tiempo. Desde su concepción en el siglo II hasta finales del Renacimiento, su obra determinó a la astronomía como ciencia.

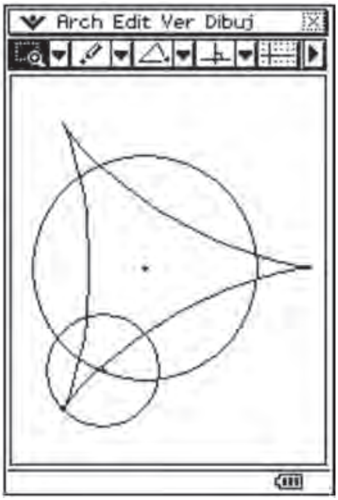
Sería un error por nuestra parte considerar la obra de Tolomeo sólo como una teoría astronómica errónea ya que desde el punto de vista matemático posee una gran riqueza y permite construir gran cantidad de curvas.

FIGURA 2
LA DELTOIDE



Sirva de muestra la deltoide, es una hipocicloide en la cual el radio de la circunferencia que gira es la tercera parte del radio de la circunferencia fija (figura 2). También se puede generar a partir de epiciclos y deferentes cuyos radios estén en razón 1/2 (figura 3).

FIGURA 3
RESULTADO DE LA ANIMACIÓN DE LA DELTOIDE



BIBLIOGRAFÍA

De Andrés, Luis Carlos. "De las Trisectrices, la Cicloide y otras Curvas". http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/03-04/PG03-04-lcandres.pdf

Páramo Fonseca, Aquiles. "Temas de cálculo integral. La gran belleza de las trocoides". http://temasmatematicos.uniandes.edu.co/Trocoides/paginas/introduccion.htm#cp0

Pérez Sanz, Antonio. "Curvas en la Naturaleza". http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/04-04/PG-04-05-perez.pdf

Pérez Sanz, Antonio. "Curvas con historia: de las cónicas a las ecuaciones de las flores". http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/curvashistoria.pdf

Sada Allo, Manuel. "Webs interactivas de matemáticas. Cicloides y trocoides". http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/trocoides.htm

ClassPad 300. Guía del Usuario. http://www.classpad.org/index.php