Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(2), nº 78, pp. 99-109*

Problemas divulgativos

F. Damian Aranda Ballesteros
Manuel Gómez Lara

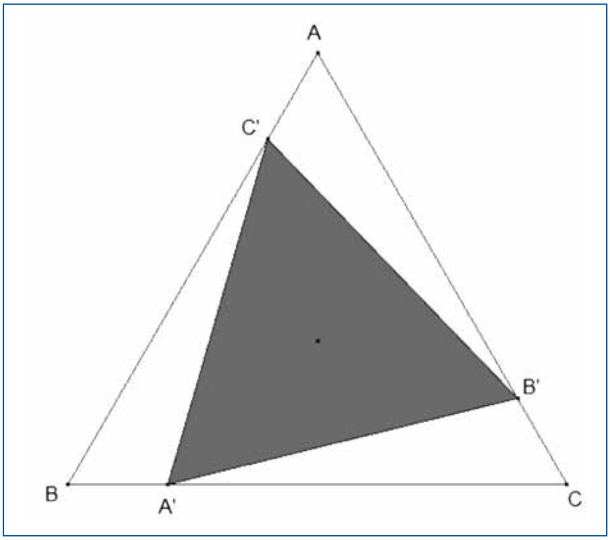
DI_003_EPSILON. *TRIÁNGULOS CEVIANOS, CUASICEVIANOS Y RESIDUALES.*

PROBLEMA MOTIVADOR

Sea el triángulo equilátero ABC de lado 1.

a) Sobre cada uno de los lados situamos los puntos A', B' y C' de modo que se verifique la condición vectorial, $k.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB};\ k.\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC};\ k.\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CA}.$

Determina la razón de áreas entre los triángulos equiláteros ABC y A'B'C'.



Sea la relación dada, $k.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB};\ k.\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC};\ k.\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CA}.$

Por el teorema del coseno, aplicado al triángulo A'B C',

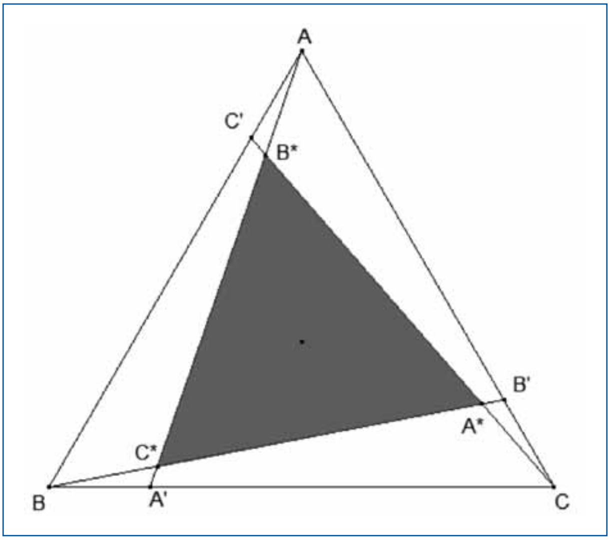
$$\begin{cases} A'C'^2 = A'B^2 + BC'^2 - 2.(A'B).(BC').cos\ 60^o \\ A'C'^2 = \dfrac{l^2}{k^2} + (l - \dfrac{l}{k})^2 - \dfrac{l}{k}.(l - \dfrac{l}{k}) = \dfrac{(k^2 - 3k + 3).l^2}{k^2} \end{cases}$$

La razón de áreas K, será igual al cuadrado de la razón de semejanza entre los lados de ambos triángulos equiláteros:

$$K = \frac{Area(A'B'C')}{Area\ (ABC)} = \frac{\dfrac{(k^2 - 3k + 3).l^2}{k^2}}{l^2} = \frac{k^2 - 3k + 3}{k^2}$$

b) Sobre cada uno de los lados situamos los puntos A', B' y C' de modo que se verifique la condición $k.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB};\ k.\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC};\ k.\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CA}$. Sean las cevianas AA', BB' y CC'. Las respectivas intersecciones entre ellas determinan los puntos A*, B* y C*, respectivamente.

Determina la razón de áreas entre los triángulos equiláteros ABC y A*B*C*.



Sea la relación dada, $k.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB};\ k.\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC};\ k.\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CA}$.

Por el teorema del coseno, aplicado al triángulo ACC',

$$\begin{cases} CC'^2 = AC'^2 + AC^2 - 2.(AC').(AC).\cos 60^\circ \\ CC'^2 = \dfrac{l^2}{k^2} + l^2 - \dfrac{l^2}{k} = \dfrac{(k^2 - k + 1).l^2}{k^2} \end{cases}$$

Por la semejanza que existe entre los triángulos ACC’ y AB*C’, se tiene que:

$\frac{AC'}{CC'} = \frac{AB^*}{AC} = \frac{B^*C'}{AC'} \rightarrow \frac{AC'}{CC'} = \frac{A^*C}{l} = \frac{B^*C'}{AC'}$ Por tanto, $B^*C' = \frac{AC'^2}{CC'}$ y $A^*C = \frac{AC'.l}{CC'}$

Sustituyendo en las anteriores expresiones:

$$B^*C' = \frac{AC'^2}{CC'} = \frac{\frac{l^2}{k^2}}{\frac{\sqrt{k^2-k+1}.l}{k}} = \frac{l}{k.\sqrt{k^2-k+1}} \quad \text{y} \quad A^*C = \frac{AC'.l}{CC'} = \frac{\frac{l^2}{k}}{\frac{\sqrt{k^2-k+1}.l}{k}} = \frac{l}{\sqrt{k^2-k+1}}$$

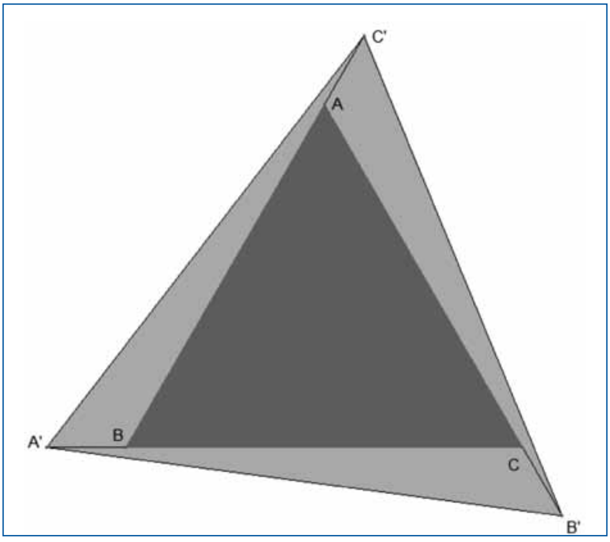
De este modo: $A^*B^* = CC' - B^*C' - A^*C = \frac{\sqrt{k^2-k+1}.l}{k} - \frac{l}{k.\sqrt{k^2-k+1}} - \frac{l}{\sqrt{k^2-k+1}}$

$$A^*B^* = \frac{((k^2-k+1)-1-k)l}{k.\sqrt{k^2-k+1}} = \frac{(k^2-2k)l}{k.\sqrt{k^2-k+1}}$$

La razón de áreas K, será igual al cuadrado de la razón de semejanza entre los lados de ambos triángulos equiláteros:

$$K = \frac{Area(A^*B^*C^*)}{Area(ABC)} = \frac{\frac{(k^2-2k)^2 l^2}{k^2.(k^2-k+1)}}{l^2} = \frac{(k-2)^2}{k^2-k+1}$$

c) Sobre las prolongaciones de cada uno de los lados situamos los puntos A`, B’ y C’ de modo que se verifique la condición $k.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BA}$; $k.\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{CB}$; $k.\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{AC}$. Determina la razón de áreas entre los triángulos equiláteros ABC y A’B’C’.



Sea la relación dada, $k.\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB};\quad k\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{BC};\quad k.\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{CA}$

Por el teorema del coseno, aplicado al triángulo AB'C',

$$\begin{cases} C'B'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2.(AB').(AC').\cos 120^\circ \\ C'B'^2 = (\frac{1}{k}+1)^2.l^2 + \frac{l^2}{k^2} + \frac{(k+1)l^2}{k^2} = \frac{[(k+1)^2+1+(k+1)].l^2}{k^2} = \frac{(k^2+3k+3).l^2}{k^2} \end{cases}$$

La razón de áreas K, será igual al cuadrado de la razón de semejanza entre los lados de ambos triángulos equiláteros:

$$K = \frac{Area(A'B'C')}{Area(ABC)} = \frac{\frac{(k^2+3k+3).l^2}{k^2}}{l^2} = \frac{k^2+3k+3}{k^2}$$

Conclusiones: Tras estos enunciados, merecería la pena intentar saber qué ocurriría en el caso de no ser el triángulo equilátero. Otra línea de resolución de problemas consistiría en observar lo que sucedería si los puntos A', B' y C' estuviesen dispuestos bajo otras condiciones de no regularidad. Esto nos motiva a presentar el siguiente estudio.

TEOREMA DE ROUTH
CONSECUENCIAS DERIVADAS: TEOREMAS DE CEVA Y MENELAO

Introducción

En 1891, Edward John Routh, en *A treatise on Analytical Statics, with numerous examples, vol.1, Cambridge U. Press, p. 82,* enunció sin demostración el teorema siguiente:

Sean AA_1, BB_1, CC_1 tres cevianas del triángulo ABC, que se cortan dos a dos en el triángulo A"B"C".

Si se verifican las relaciones: $\alpha = \frac{AC_1}{C_1B}$, $\beta = \frac{BA_1}{A_1C}$ y $\lambda = \frac{CB_1}{B_1A}$, siendo S y S" las áreas de los triángulos ABC y A"B"C", respectivamente, se tiene que: .

$$\frac{S''}{S} = \frac{(1-\alpha\beta\lambda)^2}{(1+\alpha+\alpha\beta).(1+\beta+\beta\lambda).(1+\lambda+\lambda\alpha)}$$

Habitualmente, este resultado se conoce como Teorema de Routh, y ha sido estudiado extensamente. La demostración que presentamos, completamente elemental, se basa en un simple estudio de las relaciones vectoriales que se dan en el triángulo.

Nos basaremos para ello, en un hecho básico de la geometría vectorial plana.

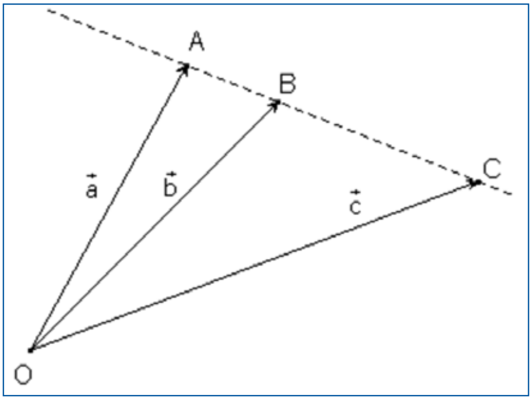
Proposición

1) Si los extremos de tres vectores distintos de origen común, $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son colineales, entonces se cumple la relación: $\begin{cases} \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\lambda\vec{c}=\vec{0} \\ \alpha+\beta+\lambda=0 \end{cases}$, siendo α, β, λ escalares distintos de cero.

2) Recíprocamente, si tres vectores distintos cumplen la relación $\begin{cases} \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\lambda\vec{c}=\vec{0} \\ \alpha+\beta+\lambda=0 \end{cases}$ y α, β, λ son escalares distintos de cero, entonces los extremos de los vectores serán colineales.

Dem

1) Sean tres vectores distintos, con extremos colineales y origen común. Se tiene que:



$$\vec{b}=\vec{a}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{AB}{AB+BC}(\vec{c}-\vec{a});$$

$$\vec{b}=\frac{BC}{AB+BC}\vec{a}+\frac{AB}{AB+BC}\vec{c};$$

De este modo, podemos escribir:

$$(AB+BC).\vec{b}-BC.\vec{a}-AB.\vec{c}=\vec{0}$$

y así se verifica con

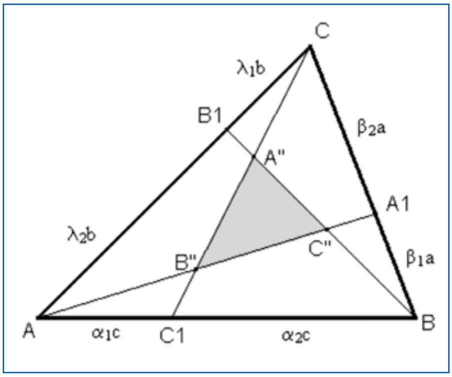
α=AB + BC, β= −AB, λ= −BC la relación α + β + λ = 0.

2) Si se cumple la relación $\begin{cases} \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\lambda\vec{c}=\vec{0} \\ \alpha+\beta+\lambda=0 \end{cases}$, podemos escribir: β= − (α + λ) y así:

$\beta\vec{b}=-\alpha\vec{a}-\lambda\vec{c}$; $\vec{b}=-\frac{\alpha}{\beta}\vec{a}-\frac{\lambda}{\beta}\vec{c}=\vec{a}-\frac{\lambda}{\beta}.(\vec{c}-\vec{a})$, lo que significa que el punto extremo B del vector $\vec{b}$ se encuentra en la recta que une A y C.

TEOREMA DE ROUTH

Con estos resultados, vamos a construir nuestra demostración del Teorema de Routh.



Establezcamos las siguientes notaciones para el triángulo ABC, de lados a, b y c y área S.

Las cevianas AA_1, BB_1 y CC_1, determinan el triángulo A"B"C" de área S".

Sean asimismo las siguientes expresiones, donde se habrán de tener en cuenta el signo de los segmentos orientados correspondientes:

$$\alpha_1 c = AC_1, \alpha_2 c = C_1B, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1; \qquad \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$\beta_1 a = BA_1, \beta_2 a = A_1C, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1; \qquad \beta = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

$$\lambda_1 b = CB_1, \lambda_2 b = B_1A, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1; \qquad \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Como B, A_1 y C están alineados, consideramos sus vectores de posición, $\vec{b}, \vec{a_1}\ y\ \vec{c}$ con un origen común y extremos dichos puntos B, A_1 y C, respectivamente.

Por la proposición anterior, tenemos que: $\vec{a_1} = \beta_1 \vec{c} + \beta_2 \vec{b}$

Análogamente, escribimos las igualdades: $\vec{b_1} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{c}$ y $\vec{c_1} = \alpha_1 \vec{b} + \alpha_2 \vec{a}$.

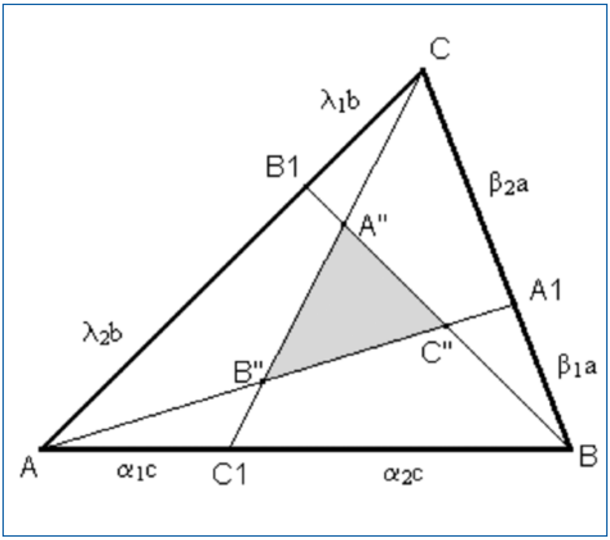
Igualamos las expresiones $\vec{b}, \vec{a_1}\ y\ \vec{c}$ de obtenidas en las anteriores igualdades.

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{a} = \dfrac{1}{\lambda_1}\vec{b_1} - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{c} \\ \vec{a} = \dfrac{1}{\alpha_2}\vec{c_1} - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{b} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \vec{b} = \dfrac{1}{\beta_2}\vec{a_1} - \dfrac{\beta_1}{\beta_2}\vec{c} \\ \vec{b} = \dfrac{1}{\alpha_1}\vec{c_1} - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \vec{c} = \dfrac{1}{\beta_1}\vec{a_1} - \dfrac{\beta_2}{\beta_1}\vec{b} \\ \vec{c} = \dfrac{1}{\lambda_2}\vec{b_1} - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\vec{a} \end{array}\right.$$

De cada grupo, podemos obtener la condición que nos asegura la existencia de los puntos $A" = BB_1 \cap CC_1$, $B" = BB_1 \cap CC_1$ y $C" = AA_1 \cap BB_1$.

Para ello, y en cada caso, establecemos según hemos visto, la condición necesaria y suficiente de la alineación de tres puntos.

Veámoslo con mayor detalle para el punto A".



$$\begin{cases} \vec{a} = \dfrac{1}{\lambda_1}\vec{b_1} - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{c} \\ \vec{a} = \dfrac{1}{\alpha_2}\vec{c_1} - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{b} \end{cases} \quad ; \quad \frac{1}{\lambda_1}\vec{b_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{c} = \frac{1}{\alpha_2}\vec{c_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{b} \quad ; \quad \left| \frac{1}{\lambda_1}\vec{b_1} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{b} = \frac{1}{\alpha_2}\vec{c_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{c} \right.$$

Si multiplicamos por $\dfrac{\lambda_1\alpha_2}{\alpha_2 + \lambda_1\alpha_1} = \dfrac{\lambda_1\alpha_2}{\lambda_1 + \lambda_2\alpha_2}$ obtenemos ahora:

$$\vec{a''} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \lambda_1\alpha_1}\vec{b_1} + \frac{\lambda_1.\alpha_1}{\alpha_2 + \lambda_1\alpha_1}\vec{b} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2\alpha_2}\vec{c_1} + \frac{\alpha_2.\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2\alpha_2}\vec{c}$$

Lo que sin duda equivale a decir que las cevianas BB_1 y CC_1 se cortan en el punto A”, situado de manera que $\dfrac{BA''}{A''B_1} = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_2 + \lambda_1\alpha_1}$; $\quad \dfrac{CA''}{A''C_1} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2\alpha_2}$.

De forma similar obtendríamos las expresiones:

$$\vec{b''} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2\beta_2 + \alpha_1}\vec{a_1} + \frac{\beta_2.\alpha_2}{\alpha_2\beta_2 + \alpha_1}\vec{a} = \frac{\beta_1.\alpha_1}{\alpha_1\beta_1 + \beta_2}\vec{c} + \frac{\beta_2}{\alpha_1\beta_1 + \beta_2}\vec{c_1}$$

$$\vec{c''} = \frac{\lambda_2}{\beta_1\lambda_1 + \lambda_2}\vec{a_1} + \frac{\lambda_1.\beta_1}{\beta_1\lambda_1 + \lambda_2}\vec{a} = \frac{\beta_1}{\beta_2\lambda_2 + \beta_1}\vec{b_1} + \frac{\beta_2.\lambda_2}{\beta_2\lambda_2 + \beta_1}\vec{b}$$

Una vez establecidas estas relaciones vectoriales, podemos determinar el área de A”B”C”.

S” = [A”B”C”] = S×(1–[AC”B]–[BA”C]–[CB”A]).

$$[AC''B]=\frac{1}{2}c.h_{C''}=\frac{1}{2}c.h_c.\frac{\lambda_2\beta_1}{\lambda_1\beta_1+\lambda_2} \quad ; \qquad [AC''B]=\frac{\lambda_2\beta_1}{\lambda_1\beta_1+\lambda_2}S$$

Esto es así ya que: $\frac{h_{c''}}{h_{A_1}}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1\beta_1+\lambda_2}$; $\frac{h_{A_1}}{h_c}=\beta_1$.

Ahora bien, $[AC''B]=\frac{\lambda_2\beta_1}{\lambda_1\beta_1+\lambda_2}S=\frac{\beta}{\beta\lambda+\beta+1}.S$

De forma análoga, tenemos que:

$$[BA''C]=\frac{\lambda}{\lambda\alpha+\lambda+1}S \qquad [CB''A]=\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}S$$

En definitiva, tenemos:

S” = [A”B”C”] = S×(1–[AC”B]–[BA”C]–[CB”A]) = S×(1 – $\frac{\beta}{\beta\lambda+\beta+1}-\frac{\lambda}{\lambda\alpha+\lambda+1}-\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}$)

$$\boxed{S''=\frac{(\alpha\beta\lambda-1)^2}{(\beta\lambda+\beta+1).(\lambda\alpha+\lambda+1).(\alpha\beta+\alpha+1)}S}$$ **Teorema de ROUTH.**

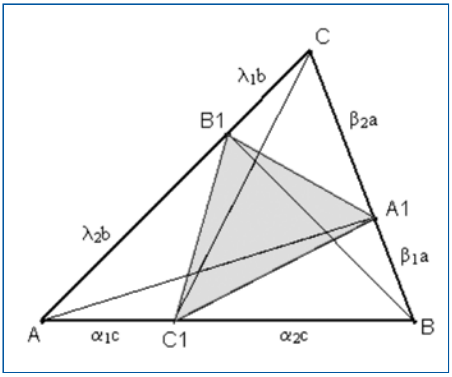
S” es nula si y solo si α×β×λ=1, de manera que la concurrencia de las tres cevianas corresponde a la condición α×β×λ=1, lo que equivale pues, al Teorema de Ceva.

Área del triángulo *cuasiceviano*

Llamaremos triángulo cuasiceviano del triángulo ABC al triángulo $A_1B_1C_1$, determinado por las cevianas AA_1, BB_1 y CC_1, respectivamente.

El valor de su área, S_1 = [A_1 B_1 C_1] la relacionaremos, cómo no, con el área S del triángulo inicial ABC.

S_1 = [$A_1B_1C_1$] = S×(1–[AB_1C_1]– [BC_1A_1]– [CA_1B_1])



Ahora bien:

$$[AB_1C_1] = \frac{1}{2}\alpha_1 c\lambda_2 b\,senA = \alpha_1\lambda_2 S$$

$$[BC_1A_1] = \frac{1}{2}\alpha_2 c.\beta_1 a.senB = \alpha_2\beta_1 S$$

$$[CB_1A_1] = \frac{1}{2}\beta_2 a.\lambda_1 b\,senC = \beta_2\lambda_1 S$$

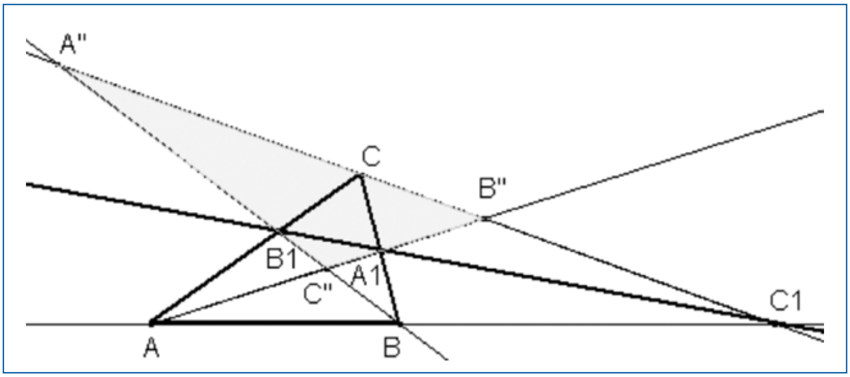
$S_1 = [A_1B_1C_1] = S\times(1-[AB_1C_1]-[BC_1A_1]-[CA_1B_1])$

$S_1 = [A_1B_1C_1] = S\times(1-\alpha_1\times\lambda_2-\alpha_2\times\beta_1-\beta_2\times\lambda_1)$

$$S_1 = S.(1-\frac{\alpha}{(\alpha+1).(\lambda+1)}-\frac{\beta}{(\beta+1).(\alpha+1)}-\frac{\lambda}{(\lambda+1).(\beta+1)})$$

$$\boxed{S_1 = S.\frac{\alpha.\beta\lambda+1}{(\alpha+1).(\beta+1).(\lambda+1)}}$$

En el caso en que los extremos de las tres cevianas sean colineales, entonces el triángulo $A_1B_1C_1$ es degenerado y su área S_1 es nula. Este hecho se corresponde con la condición $\alpha\times\beta\times\lambda=-1$, lo que equivale al Teorema de Menelao.



Área del triángulo ceviano. Triángulo ceviano de área máxima

Veamos cuál es el triángulo ceviano de área máxima. En estos triángulos, las cevianas concurren en un punto y así, $\alpha.\beta.\lambda.=1$ Por tanto, la expresión de su área será $S_1 = S.\frac{2}{(\alpha+1).(\beta+1).(\lambda+1)}$.

Para los triángulos cevianos, (: $\alpha.\beta.\lambda = 1$), se verifica la igualdad

$$(\alpha+1).(\beta+1).(\lambda+1)=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+2$$

En virtud de la desigualdad aritmética-geométrica, tendremos que:

$$\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\beta}+\lambda+\frac{1}{\lambda}}{6}\geq\sqrt[6]{\alpha.\frac{1}{\alpha}.\beta.\frac{1}{\beta}.\lambda.\frac{1}{\lambda}}=1$$

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\beta}+\lambda+\frac{1}{\lambda}\geq 6$$

$$(\alpha+1).(\beta+1).(\lambda+1)=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+2\geq 8$$

dándose la igualdad sólo cuando todos los términos coinciden, es decir:.

$$\alpha=\frac{1}{\alpha}=\beta=\frac{1}{\beta}=\lambda=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow\alpha=\beta=\lambda=1$$

Así el triángulo de área máxima se obtendrá cuando las tres cevianas sean las medianas.

El valor de su área, como se sabe entonces, será igual a $S_1=\frac{1}{4}.S$

Área de los triángulos residuales

En este apartado, determinaremos el área de los triángulos AB"C_1, BC"A_1, CA"B_1, que llamaremos residuales. Nos centraremos en el primero de ellos.

$$[AB"C_1]=\frac{1}{2}.\alpha_1 c.h_{B"}=\frac{1}{2}.c.h_C.\frac{\alpha_1^2\beta_1}{\alpha_1\beta_1+\beta_2}=\frac{\alpha_1^2\beta_1}{\alpha_1\beta_1+\beta_2}.S$$

ya que: $\frac{h_{B"}}{h_{A_1}}=\frac{\alpha_1}{\alpha_1\beta_1+\beta_2}$; $\frac{h_{A_1}}{h_c}=\beta_1$.

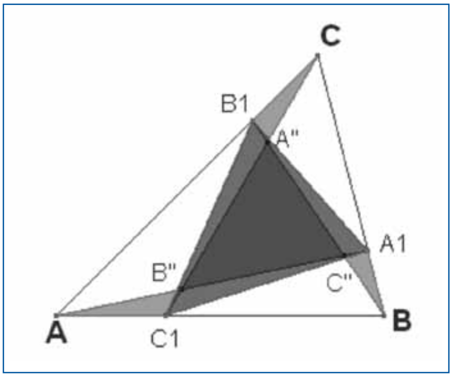
Ahora bien: $[AB"C_1]=\frac{\alpha_1^2\beta_1}{\alpha_1\beta_1+\beta_2}.S=\frac{\alpha^2\beta}{(\alpha\beta+\alpha+1).(\alpha+1)}.S$

Por analogía, obtenemos para los otros dos triángulos residuales, sus respectivas expresiones:

$$[BC"A_1]=\frac{\beta^2\lambda}{(\beta\lambda+\beta+1).(\beta+1)}.S\ ;\quad [CA"B_1]=\frac{\lambda^2\alpha}{(\lambda\alpha+\lambda+1).(\lambda+1)}.S$$

Algunos casos prácticos. Particularidades.

a) α= β=λ= 1/2



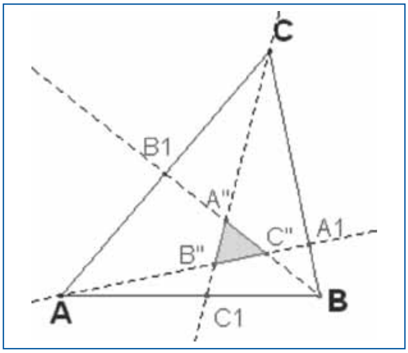
$[A'' B'' C''] = \frac{1}{7}.S$

$[A' B' C'] = \frac{1}{3}.S$

$[A\ B'' C_1] = [BC''A_1] = [CA''B_1] = \frac{1}{21}.S$

b) AA_1= Altura, BB_1= Mediana, CC_1= Bisectriz interior.

$\alpha = b/a$, $\beta = \frac{c.\cos B}{b.\cos C}$, $\lambda = 1$



$$[A'' B'' C''] = \frac{b.(c.\cos B - a.\cos C)^2}{a.(1+\cos C).(a+c.\cos B).(b+2a)}.S$$

$$[A' B' C'] = \frac{b.(c.\cos B + a.\cos C)}{2a.(a+b)}.S$$

$$[A\ B'' C_1] = \frac{b.c.\cos B}{a.(1+\cos C).(a+b)}.S$$

$$[B\ C'' A_1] = \frac{c^2.\cos^2 B}{a.(c.\cos B + a)}.S$$

$$[C\ A'' B_1] = \frac{b}{2.(b+2.a)}.S$$