MATRIZES: UM EXEMPLO DE ANEL QUE POSSUI DIVISORES DE ZERO E NÃO É COMUTATIVO

MATRICES: AN EXAMPLE OF RING THAT HAS ZERO DIVISORS AND IS NOT COMMUTATIVE

Autores: Ben-Hur de Oliveira COUCEIRO, Sara Regina da Rosa PINTER.
Identificação autores: Técnico integrado em Automação Industrial, IFC – *Campus* São Francisco do Sul; Orientadora IFC - *Campus* São Francisco do Sul).

RESUMO

A maioria dos anéis estudados em nível médio são comutativos e sem divisores de zero. O presente trabalho mostra que nem todos os anéis satisfazem essas propriedades, através de um exemplo de anel que não é comutativo e possui divisores de zero.

Palavras-chave: anel, não comutativo, divisor de zero.

ABSTRACT

Most of the rings studied at high school are commutative and has not zero divisors. The present work shows that not all rings satisfy these properties, through an example of a ring that is noncommutative and has zero divisors.

Keywords: ring, noncommutative., zero divisor.

INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

O processo de contagem começou a ser desenvolvido pelo ser humano antes mesmo de haver escrita ou civilização. E é baseado nesse processo que definimos o conjunto numérico mais básico que estudamos na atualidade: o conjunto dos números naturais. A partir daí, temos ainda com aplicações diretas no cotidiano os conjuntos dos números inteiros, racionais e reais. Há interesse em conhecer propriedades das operações e relações nesses conjuntos.

Conjuntos com operações que satisfazem axiomas determinados previamente são chamados de estruturas algébricas. Um anel é, em resumo, uma estrutura algébrica em que se pode somar e multiplicar razoavelmente bem.

Um dos matemáticos que mais contribuiu para o avanço do ponto de vista abstrato na teoria dos anéis foi Emmy Noether (1882-1935). É costume apontar-se o seu artigo “Ideal theory in rings” de 1921 como origem da teoria abstrata dos anéis.

Todos os conjuntos numéricos citados anteriormente possuem, além dos axiomas de anel, outras propriedades em comum. O objetivo deste trabalho é apresentar um exemplo de conjunto que satisfaz os axiomas de anel, mas não se comporta exatamente como os conjuntos numéricos mais conhecidos.

Matrizes estão presentes frequentemente no dia a dia, tanto em tabelas de preços e placares de futebol, como no funcionamento de dispositivos eletrônicos digitais: computadores; celulares; aparelhos televisivos de LED, etc.

O conjunto das matrizes 2x2 satisfaz as condições do exemplo desejado. Mais geralmente, o conjunto das matrizes quadradas de qualquer ordem é um anel não comutativo e com divisores de zero.

METODOLOGIA

A metodologia consistiu de um estudo dirigido, através da leitura e estudo das referências citadas na bibliografia e outras. Mantivemos um programa semanal de metas de aprendizado e organizamos reuniões semanais, de modo que o estudante pôde tirar suas dúvidas e expor os conteúdos estudados.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Um **anel** é um conjunto não vazio A no qual estão definidas duas operações, $+$ (adição) e . (multiplicação), satisfazendo os seguintes axiomas:

1. $x+y=y+x, \forall\ x, y \in A$ (comutatividade).
2. $(x+y)+z=x+(y+z), \forall\ x, y, z \in A$ (associatividade da adição).
3. Existe $0_A \in A$ tal que $x+0_A=x=0_A+x, \forall\ x \in A$ (elemento neutro da adição).

4. Para todo elemento $x \in A$, existe um elemento $(-x) \in A$ tal que $x+(-x)=0_A=(-x)+x$ (elemento simétrico ou oposto).
5. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall\ x,y,z \in A$ (associatividade da multiplicação).
6. $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall\ x,y,z \in A$

   $(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x, \forall\ x,y,z \in A$ (distributividade).

Os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são exemplos de anéis. O conjunto $\mathbb{N}$ não é um anel (pois qualquer $n \in N, n \neq 0$ não possui oposto em $\mathbb{N}$).

Seja A um anel. Dizemos que A é um **anel unitário** se existe um elemento $1_A \in A$ tal que $1_A \cdot x = x = x \cdot 1_A, \forall\ x \in A$. Tal elemento é chamado de unidade do anel A. Dizemos que A é um **anel comutativo** se vale a propriedade comutativa também para a multiplicação, isto é, $x \cdot y = y \cdot x, \forall\ x,y \in A$. Um elemento $a \in A$ é chamado divisor de zero quando $a \neq 0$ e existe $b \in A, b \neq 0$ tal que $a \cdot b = 0$ ou $b \cdot a = 0$. Dizemos que Aé um **domínio de integridade** se é um anel unitário, comutativo e sem divisores de zero.

Os conjuntos numéricos citados acima são todos domínios de integridade. Daí, surge a pergunta: todos os anéis são domínios de integridade? Para responder a essa pergunta, consideremos o conjunto das matrizes 2x2, isto é, $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$

Não é difícil verificar que tal conjunto com as operações usuais de adição e multiplicação de matrizes é um anel. Para verificarmos que este anel não é comutativo, consideremos as matrizes $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}.$$

Logo, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e portanto o anel das matrizes não é comutativo. Isso é suficiente para afirmar que Anão é domínio de integridade. Observemos, ainda, que A possui divisores de zero. Para isso, consideremos as matrizes $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ambas são diferentes da matriz nula (que é o elemento neutro da adição do anel A) e $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Portanto, tais elementos são divisores de zero no anel das matrizes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados estudados neste projeto são de extrema importância para pesquisas futuras na área de álgebra. Com isso, o trabalho não serviu apenas como uma aprendizagem momentânea ou expansão de conhecimento, mas também, como uma grande influência para que o aluno possa ter como uma de suas opções, a área de ciências exatas e da terra como futuro na área acadêmica e profissional.

REFERÊNCIAS

Janesch, O. J.; Taneja I. J. 2011. *Álgebra I.* UFSC/EAD/CED/CFM, Florianópolis, SC, Brasil. 215p.

NOETHER, Emmy. Idealtheorie in ringbereichen. *Mathematische Annalen,* v. 83, n. 1-2, p. 24-66, 1921.