

UNIVERSITAT JAUME I

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE SISTEMAS INDUSTRIALES Y DISEÑO



**Control predictivo de modelos borrosos
Takagi-Sugeno mediante
función de Lyapunov contractiva**

TESIS DOCTORAL

Doctorando:

Fernando Bedate Boluda

Dirigida por:

Dr. D. Carlos Ariño Latorre

Dr. D. Emilio Pérez Soler

Castellón, 2015

Agradecimientos

Desde estas líneas quiero expresar mi sincero agradecimiento a todos aquellos que de alguna forma han contribuido a la conclusión de este trabajo. En especial, a mis directores por su guía, consejo y su infinita paciencia.

Gracias.

Resumen

La presente tesis doctoral estudia cómo aplicar las técnicas de control predictivo a modelos borrosos Takagi-Sugeno, garantizando la estabilidad, mediante la aplicación de la programación copositiva paramétrica y el teorema de Polya.

El objetivo de partida es, por tanto, avanzar en la construcción de tres áreas de la teoría de control: modelado Takagi-Sugeno, control predictivo y estabilidad de Lyapunov.

Los modelos borrosos se han mostrado como una técnica eficaz de modelado y control de sistemas con fuertes no linealidades. Los modelos no lineales presentan una problemática de control de difícil solución computacional y los modelos borrosos consiguen expresar el modelo no lineal original como un conjunto de modelos lineales locales interpolados por una función de pertenencia que contiene las no linealidades del modelo original. De esta forma, se consigue desarrollar distintas técnicas de control y análisis de estabilidad basándose en la obtención de condiciones suficientes aunque no necesarias sobre el conjunto de modelos lineales, por ejemplo en forma de desigualdades matriciales lineales. Estas condiciones contienen un cierto conservativismo que limita la eficacia de su aplicación. Sin embargo, se han desarrollado múltiples trabajos que reducen este conservativismo.

Por otro lado, el control predictivo basado en modelos, utiliza de forma explícita un modelo matemático interno del proceso a controlar para predecir la evolución de las variables a lo largo de un horizonte temporal de predicción. Debido a su formulación abierta, permite combinar distintos tipos de modelos, restricciones, criterios de decisión y optimizadores.

Los principios de la teoría de Lyapunov permiten realizar un análisis de estabilidad y diseño de modelos basándose en la existencia de una función de Lyapunov. La elección de dicha función condiciona de forma significativa el procedimiento de análisis y diseño de control. A su vez, la teoría de estabilidad de Lyapunov está fuertemente relacionada con los conjuntos invariantes y contractivos. Para la obtención de estos conjuntos se pueden utilizar algoritmos recursivos basados en la obtención de los conjuntos a un paso.

Mediante la combinación de todos estos ingredientes, en esta tesis se propone una estrategia de control predictivo para sistemas no lineales que contiene las siguientes características.

- El sistema no lineal se modeliza como un modelo borroso de tipo Takagi-Sugeno. Sobre este modelo le aplicamos una acción de control predictiva en línea, cuya formulación contiene la información de las funciones de pertenencia futuras.
- La estabilidad del modelo viene garantizada por una función de Lyapunov, obtenida a partir de la mejor aproximación interior politópica del máximo conjunto invariante, que contiene las restricciones del sistema. El control predictivo resultante permite formular la estabilidad de una forma muy eficiente computacionalmente, por lo que no se restringe su aplicación a los modelos con tiempos de muestreo grandes.
- Las restricciones sobre el sistema se pueden expresar como un conjunto de restricciones lineales, que si bien son más conservativas que las restricciones originales, se aproximan asintóticamente a las restricciones originales.

Con todo esto conseguimos un control predictivo basado en modelos borrosos TS, resoluble mediante optimización cuadrática con restricciones lineales, y cuya estabilidad se garantiza para la mayor región invariante “shape independent” (con cualquier posible realización de las funciones de pertenencia).

Resum

La present tesis doctoral estudia com aplicar les tècniques de control predictiu basat en models borrosos Takagi-Sugeno, garantint l'estabilitat, mitjançant la aplicació de la programació copositiva paramètrica i el teorema de Polya.

El objectiu de partida, és per tant, avançar en la continuació de tres àrees de la teoria de control: el modelat Takagi-Sugeno, el control predictiu i la estabilitat de Lyapunov.

Els models borrosos s'han mostrat com una tècnica eficaç de modelat i control de sistemes amb forts no linealitats. Els models no lineals presenten una problemàtica de control de difícil solució computacional i els models borrosos aconseguen expressar el model no lineal original com a un conjunt de models lineals locals interpolats per una funció de pertinença que conté les no linealitats del model original. Amb això, es aconseguix desenvolupar diferents tècniques de control i anàlisi de estabilitat basant-se es la obtenció de condicions suficients però no necessàries sobre el conjunt de models lineals, com per exemple en forma de desigualtats matricials lineals. Estes condicions contenen un cert conservadorisme que limita la eficàcia de la seua aplicació. No obstant, se han desenvolupat múltiples treballs que redueixen aquest conservadorisme.

D'altra banda, el control predictiu basat en model, utilitza de forma explícita un model matemàtic intern del procés a controlar per a predir la evolució de les variables a controlar al llarg d'un horitzont temporal de predicció. Gràcies a la seua formulació oberta, permet combinar els diferents tipus de models, restriccions, criteris de decisió i optimitzadors.

Els principis de la teoria de Lyapunov permeten realitzar un anàlisi d'estabilitat i disseny de molts models basant-se en l'existència d'una funció de Lyapunov. L'elecció del tipus de funció de Lyapunov condiciona d'una manera molt significativa el procediment d'anàlisi i disseny del control. També, la teoria de estabilitat de Lyapunov està fortament relacionada amb els conjunts invariants i contractius. Per a la obtenció d'aquestos conjunts es pot utilitzar algoritmes recursius basats el l'obtenció de conjunts a un pas.

Mitjançant la combinació de tots aquestos ingredients proposem una estratègia de control predictiva per a sistemes no lineals que contenen les següents característiques.

- El sistema no lineal es modelitza com a un model borrós de tip Takagi-Sugeno. Sota aquest model l'apliquem una acció de control predictiva en línea, la formulació del qual conté la informació de les funcions de pertinença futures.
- L'estabilitat del model ve garantida per una funció de Lyapunov, obtinguda a partir de la millor aproximació interior politópica del màxim conjunt invariant, que conté les restriccions del sistema. El control predictiu resultant permet formular l'estabilitat d'una manera molt eficient computacionalment, per lo qual, no es restringeix la seua aplicació als models amb temps de mostreig grans.
- Les restriccions sobre el sistema es poden expressar com a un conjunt de restriccions lineals, que si bé son més conservatives que les restriccions originals, s'aproximen asintòticament a les restriccions originals.

Amb tot això, aconseguim un control predictiu basat en un model borrós TS, resoluble mitjançant optimització quadràtica amb restriccions lineals, i l'estabilitat del qual es garantida per a la major regió invariant "shape independent" (per a qualsevol possible realització de les funció de pertinença).

Abstract

This thesis studies how to apply predictive control techniques based on Takagi-Sugeno fuzzy models, with stability guaranty, by applying co-positive parametric programming and Polya theorem.

The objective is therefore, to go ahead in the development of three main areas of control theory: Takagi-Sugeno modeling, predictive control and Lyapunov stability.

Fuzzy models had proved to be an efficient technique for modeling and control for non-linear systems. Non-linear models has difficult computational treatment, and fuzzy models express successfully the non-linear model as a convex set of linear models with a non-linear membership functions. The main idea is to develop different control and stability analysis techniques based in sufficient and non necessary conditions applied to the linear model set, for instance, with linear matrix inequalities. These conditions contain certain conservatism that limits its application. However, several studies have successfully reduced this conservatism.

Predictive control based on model uses an explicit mathematical model of the process control to predict the variables through a time horizon. Due to its open formulation, predictive control allows different combinations of model, restrictions, decision criteria and optimizers.

Lyapunov theory principle allow to produce a stability analyze and design of many different models based on Lyapunov functions. The shape of the Lyapunov function conditions the procedure of this analysis and control design. Also, Lyapunov stability theory is strongly related with invariant and contractive sets. To obtain these sets, recursive algorithms based on one step sets can be used.

Combining all these ingredients we propose a predictive control strategy for non-linear systems with the following characteristics.

- Non linear systems are modeled by TS fuzzy models. A predictive on-line control action containing information of the membership functions is applied.
- Stability is guaranteed by a Lyapunov function, obtained as the best inner polytopic approach of the maximal invariant set with the restrictions of the system. The resulting predictive control allows expressing the stability conditions in a very efficient way in term of computational cost, so this technique is available for fast sample timing models.
- Restrictions can be expressed as linear restriction set, which is more conservative, but approaches asymptotically to the original restrictions.

The resulting predictive control procedure is based on TS fuzzy models, solved by quadratic optimization with linear restrictions and with guaranteed stability for the biggest shape independent invariant set.

Índice General

1	Introducción.....	13
1.1	Motivación.....	13
1.2	Objetivos.....	14
1.3	Estructura.....	15
1.4	Glosario de términos.....	16
1.4.1	Modelos.....	16
1.4.2	Región de interés.....	16
1.4.3	Conjuntos invariantes.....	16
1.4.4	Conjuntos contractivos.....	17
1.4.5	Conjuntos a un paso.....	18
1.4.6	Conjuntos controlables.....	18
1.4.7	Conjuntos estabilizables.....	18
1.4.8	Modelos de predicción.....	18
2	Estado del arte.....	19
2.1	Teoría de estabilidad.....	19
2.2	Teoría de conjuntos invariantes.....	21
2.3	Programación copositiva paramétrica.....	25
2.3.1	Teorema de Polyá.....	25
2.4	Control borroso.....	30
2.4.1	Introducción.....	30
2.4.2	Modelado.....	31
2.4.3	Estabilidad.....	33
2.4.4	LMIs.....	33
2.4.5	Complemento de Schur.....	34
2.4.6	Optimización convexa.....	35
2.4.7	Diseño de controladores borrosos mediante LMIs.....	35
2.4.8	Relajaciones.....	36
2.4.9	Prestaciones.....	39
2.4.10	Región de validez.....	43
2.5	Control predictivo.....	44
2.5.1	Estabilidad.....	46
2.5.2	Control predictivo lineal estable.....	48
2.5.3	Control predictivo no lineal.....	49
2.5.4	Control predictivo robusto.....	52
2.6	Control predictivo borroso.....	54

3	Conjuntos invariantes y contractivos politópicos para modelos borrosos Takagi-Sugeno en bucle cerrado	57
3.1	Conjuntos invariantes y contractivos	58
3.2	Definición del problema.....	59
3.3	Conjuntos a un paso	60
3.3.1	Ley de control lineal	60
3.3.2	Ley de control PDC	61
3.4	Aproximación interior politópica	62
3.4.1	Polya	62
3.4.2	Triangulación.....	64
3.5	Aproximaciones interiores con conocimiento de las funciones de pertenencia	66
3.5.1	Solapamiento	66
3.5.2	Modelos locales	68
3.6	Comparativa con otros conjuntos invariantes	69
3.7	Convergencia	70
3.7.1	Comparativa.....	72
3.8	Análisis frente a perturbaciones	73
3.8.1	Máximo conjunto invariante robusto	73
3.8.2	Mínimo conjunto alcanzable robusto.....	75
3.9	Ejemplos	76
3.9.1	Ejemplo A.....	76
3.9.2	Ejemplo B	81
3.9.3	Ejemplo C	84
3.10	Conclusiones	87
4	Control estable de modelos borrosos Takagi-Sugeno mediante conjuntos contractivos.....	89
4.1	Definición del problema.....	89
4.2	Conjuntos contractivos y estabilizables para modelos borrosos TS.....	90
4.3	Aproximación interior politópica al conjunto a un paso	93
4.3.1	Aproximación interior politópica al máximo conjunto contractivo	94
4.4	Estabilidad de Lyapunov	95
4.5	Algoritmo de control en línea estabilizable.....	97
4.5.1	Ampliación de la región de estabilidad asintótica.....	98
4.6	Ejemplos	99
4.6.1	Comparativa de las regiones contractivas.....	99
4.6.2	Simulación del modelo controlado	100
4.7	Conclusiones	102
5	Control predictivo borroso TS	103
5.1	Definición del problema.....	104

5.2	Estabilidad	104
5.3	Modelos de predicción.....	106
5.3.1	Modelo de predicción borroso exacto.....	106
5.3.2	Modelos de predicción con conocimiento de los estados pasados.....	111
5.3.3	Modelo de predicción lineal	121
5.3.4	Modelos borrosos obtenidos por identificación experimental	128
5.4	Restricciones	128
5.4.1	Estabilidad	128
5.4.2	Restricciones sobre los estados y acciones de control futuras	130
5.4.3	Restricción terminal.....	139
5.5	Región de factibilidad	142
5.5.1	Regiones de factibilidad exactas.....	142
5.5.2	Regiones de factibilidad sobre los vértices del modelo de predicción.....	144
5.5.3	Restricciones de factibilidad sobre modelos linealizados	147
5.5.4	Ejemplos de regiones de factibilidad	147
5.6	Índice de coste y optimizador	151
5.6.1	Modelo de predicción linealizado en bucle abierto	153
5.6.2	Modelo de predicción linealizado con acción de control borrosa.....	154
5.6.3	Modelo de predicción linealizado en bucle cerrado.....	154
5.6.4	Algoritmos secuenciales	155
5.7	Síntesis de soluciones	156
5.7.1	Ley de control terminal y en bucle cerrado	157
5.7.2	Condición de estabilidad.....	159
5.7.3	Restricciones sobre los estados y acciones de control futuras	160
5.7.4	Criterio de optimización	162
5.8	Simulaciones	165
5.8.1	Modelo borroso.....	165
5.8.2	Péndulo invertido.....	168
5.9	Conclusiones	174
6	Conclusiones y trabajos futuros.....	177
6.1	Conclusiones.....	177
6.2	Trabajos futuros	178
6.3	Publicaciones	178
7	Bibliografía.....	181

1 INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN

El control predictivo es una disciplina que tiene como objetivo resolver problemas de control y automatización de procesos industriales que se caractericen por presentar un comportamiento dinámico complicado, multivariable y/o inestable.

El control predictivo es una técnica ampliamente extendida en el control de procesos multivariables, especialmente cuando estos están sometidos a restricciones. El control predictivo ha demostrado su potencial y ha sido ampliamente aceptado en el control de procesos multivariables a nivel industrial, especialmente debido a su capacidad de incorporar en el diseño restricciones tanto en las entradas como en las variables del proceso, así como un índice objetivo del coste de la evolución temporal del modelo. Por ello, es objeto de estudio a nivel científico en el área de control de procesos.

Por otro lado, los sistemas físicos presentan en su gran mayoría un comportamiento no lineal. La teoría clásica de control afronta este problema a través de la linealización de dichos sistemas en torno a un punto de funcionamiento, donde se espera que trabaje el sistema. Esta simplificación ha permitido desarrollar toda una serie de teorías y procedimientos de diseño que permiten afrontar una gran cantidad de problemas de control de forma suficiente. Sin embargo, en muchos otros casos, esta aproximación no resulta satisfactoria. El diseño de controladores a partir de modelos lineales en sistemas que presentan fuertes no linealidades, puede dar lugar a problemas de estabilidad y/o de prestaciones.

Así, una posible estrategia de control pasa por realizar un primer diseño de controladores a partir de la teoría clásica de control, y si ésta no resulta satisfactoria, se continúa por plantear las diferentes técnicas modernas de control que contemplan las dinámicas no lineales del sistema.

Entre las distintas técnicas de análisis de modelos no lineales, destacamos las técnicas de diseño de controladores basados en modelos borrosos. Estos modelos basan su definición en una interpolación sobre un conjunto de modelos lineales. Así, gran parte de los principios de control lineales tienen una aplicación análoga en los modelos borrosos. En concreto, en esta tesis se utilizan con profundidad los modelos borrosos Takagi-Sugeno.

La unión de estas dos técnicas, el control predictivo y el control de modelos borrosos da lugar a una estrategia de control denominada control predictivo borroso. Este control contempla los ingredientes básicos del control predictivo, pero siendo aplicado a modelos no lineales de tipo borroso.

En general, la problemática asociada a cualquier técnica de control borroso se encuentra en el conservativismo de las soluciones obtenidas. Esto motiva que todavía no exista unas técnicas de control predictivo-borroso ampliamente aceptadas en la teoría de control.

1.2 OBJETIVOS

El objetivo de esta tesis consiste en desarrollar una estrategia de control predictivo que garantice la estabilidad y que sea aplicable a los modelos discretos borrosos Takagi-Sugeno.

Por un lado, las técnicas de control de modelos borrosos han conseguido probar estabilidad y prestaciones de control reduciendo el problema no lineal a un conjunto de problemas lineales, con la contrapartida de introducir cierto conservativismo en sus soluciones. Así, gran parte de los desarrollos realizados en el campo del control borroso han ido dirigidos a reducir al máximo este conservativismo. Por otro lado las técnicas de control predictivo definen una familia de técnicas de control que basándose en un modelo de predicción, y mediante un criterio de decisión, calculan una solución óptima en línea para un horizonte móvil. La gran virtud de estas técnicas consiste en su formulación abierta

Así, hemos querido desarrollar una estrategia de control estable que contenga las virtudes de ambas filosofías de control. Por un lado, queremos que la formulación de nuestra estrategia de control en línea esté basada en un modelo del sistema y en el principio de horizonte móvil, pero que tenga una formulación abierta donde podamos combinar indistintamente distintos criterios de decisión y algoritmos de optimización. Y por otro lado, queremos poder hacer uso de las técnicas de modelado borroso, pero pudiendo utilizar los avances que permiten reducir el conservativismo de las soluciones obtenidas. Además, para que la estrategia de control sea de gran aplicación, es necesario que el proceso de cálculo en línea sea poco costoso computacionalmente.

Cumpliendo estos objetivos, podríamos tratar los sistemas no lineales dentro del marco del modelado borroso como un conjunto convexo de modelos lineales dentro de una región de interés. Sobre este modelo imponemos unas restricciones, que si bien en esta tesis pretendemos que sean al menos politópicas, deben poder aceptar distintas formulaciones. Seleccionando el horizonte de predicción y el criterio de decisión, ya se tiene planteado el problema de control a optimizar. Con el fin de poder aplicar indistintamente el optimizador deseado, recurriremos a garantizar la estabilidad y la factibilidad del problema mediante la obtención de una función de Lyapunov obtenida a priori. Y por último los componentes del optimizador deben poder asegurar una solución óptima con poco coste de cálculo, aunque también se pueda permitir una mayor precisión si la dinámica del sistema lo permite.

En resumen, la presente tesis persigue plantear unos principios sobre los que poder aplicar simultáneamente los desarrollos realizados tanto en el control borroso como en el predictivo, dejando abierta la formulación exacta del algoritmo de control deseado según el proceso concreto.

Por último, se pretende que el planteamiento propuesto se pueda continuar desarrollando con otro tipo de restricciones, optimizadores y criterios de decisión, y pueda incorporar perturbaciones e incertidumbres, así como otras prestaciones de control modernas.

Con este objetivo, partiremos de un modelo borroso TS con restricciones politópicas. En el capítulo 3 propondremos el procedimiento de cálculo del máximo conjunto contractivo politópico mediante las técnicas de relajación borrosas de Polya. A partir de este conjunto, obtendremos una función de Lyapunov tratable dentro del esquema de optimización, con la que garantizaremos la estabilidad. En el capítulo 4 desarrollamos el esquema de optimización en línea con un criterio de decisión basado en un índice de coste cuadrático, y con restricciones lineales, el cual es computado de forma eficiente y rápida mediante programación cuadrática, y garantizando la estabilidad mediante una función de Lyapunov. En el capítulo 5 se plantea un control predictivo basado en el modelo borroso TS, a partir del cual TS se obtiene un modelo de predicción borroso que será por lo general no lineal. Las restricciones se aplicarán a los vértices del modelo de predicción, con lo que se obtienen un conjunto de restricciones lineales. Aquí se aplicarán las técnicas de relajación borrosas con las que reducir el conservativismo. El criterio de decisión estará basado en una estimación lineal del índice de coste cuadrático. Y para la estabilidad, se hará uso de una función de Lyapunov basada en el máximo conjunto contractivo. Con esto tenemos los ingredientes para aplicar un control predictivo, computable mediante un optimizador QP en línea, y aplicando el principio de horizonte móvil.

1.3 ESTRUCTURA

Comenzamos la presente tesis con una revisión del estado del arte tanto en el control predictivo como en el control borroso y analizaremos los avances conseguidos en la unificación de ambas teorías. En este mismo capítulo trataremos los conceptos de estabilidad de Lyapunov y su relación con los conjuntos invariantes y contractivos, así como los principios de programación copositiva paramétrica sobre los que se fundamentan los métodos para reducir el conservativismo de los problemas basados en modelos borrosos.

En el capítulo 3 se trata la problemática de obtención del máximo conjunto invariante y contractivo para modelos no lineales con restricciones politópicas. Aquí se desarrolla un procedimiento iterativo basado en los conjuntos a un paso y las relajaciones de Polyá, que permiten obtener la mejor aproximación interior politópica para unas ciertas condiciones suficientes particulares. Posteriormente se analiza las garantías de convergencia que estos conjuntos implican, y se compara con otros procedimientos de obtención de funciones de Lyapunov. El capítulo se completa con la aplicación de algunas relajaciones cuando se tiene cierto conocimiento de las funciones de pertenencia del modelo, y con una extensión del análisis para modelos con perturbaciones politópicas.

El capítulo 4 propone una estrategia de control que sin que pueda considerarse predictiva, pues carece de horizonte de predicción más allá del siguiente paso, introduce algunos elementos presentes en el control predictivo deseado. La acción de control obtenida consigue garantizar la estabilidad del modelo en bucle cerrado para una región de atracción máxima mediante el uso de una función de Lyapunov obtenida por unos procedimientos muy similares a los desarrollados en el capítulo precedente. Por otra parte se propone un criterio de coste y un optimizador cuadrático cuyo coste de cálculo es muy reducido.

En el capítulo 5 se da un paso más ampliando el horizonte de predicción a varios pasos. Consecuentemente se analizan los modelos de predicción, tanto para la aplicación de las restricciones, como para la optimización del criterio de decisión. Finalmente, tras un breve análisis de los modelos de predicción y de los procesos de optimización más frecuentes, realizamos una propuesta de control basada aplicar las restricciones a los vértices de un modelo de predicción expandido mediante el teorema de Polyá, y en linealizar dicho modelo de predicción para la obtención de un problema de optimización QP basado en un criterio de coste cuadrático. El modelo borroso sobre el que trabajaremos se obtiene de aplicar una acción de control borrosa en “bucle cerrado”, es decir, con una acción de control aditiva de una ley de control PDC fija y un término borroso variable. Por último, destacamos que la formulación que hemos utilizado para los modelos de predicción trata de ser lo más similar posible a la formulación matricial típica de los modelos de predicción lineales utilizada frecuentemente en el control predictivo lineal.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones de la tesis, las aportaciones y las líneas de trabajo futuro. Así mismo, se presentan las publicaciones derivadas de la tesis y la bibliografía.

1.4 GLOSARIO DE TÉRMINOS

1.4.1 MODELOS

$x_k \in \mathbb{R}^n$: Vector de estados del modelo.

$u_k \in \mathbb{R}^m$: Vector de acciones de control del modelo.

$x_{k+1} = f(x_k)$: Modelo no lineal

$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$: Modelo no lineal bajo control.

$x_{k+1} = f(x_k, h(x_k))$: Modelo no lineal en bucle cerrado con ley de control $u_k = h(x_k)$.

$\mu(x_k) \in \Delta_r$: Vector de funciones de pertenencia.

$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k)(A_i x_k + B_i u_k)$: modelo borroso TS.

$u_k = h(x_k) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k)(F_i x_k)$: Ley de control tipo “Parallel Distributed Compensation” (PDC).

$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) (A_i + B_i F_j) x_k$: modelo borroso TS con ley de control PDC.

$u_k = \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k) u_{k,j}$: Acción de control borrosa.

$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) (A_i x_k + B_i u_{k,j})$: Modelo borroso TS con acción de control borrosa.

$u_k = \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k) (F_j x_k + v_{k,j})$: Acción de control PDC con término independiente borroso.

$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) ((A_i + B_i F_j) x_k + B_i v_{k,j})$: Modelo borroso TS en “bucle cerrado” con acción de control borrosa.

$x_{k+1} = \sum_{i \in \mathbb{I}_{2+d}^+} \mu_i n_i \tilde{T}_i$: Modelo expandido Polya.

1.4.2 REGIÓN DE INTERÉS

$\Omega \in \mathbb{R}^{n+m}$: Región de interés politópica.

$\text{proy}_x(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Proyección de Ω en x .

$\Omega^h \in \mathbb{R}^n$: Conjunto admisible de Ω con ley de control $u = h(x)$.

1.4.3 CONJUNTOS INVARIANTES

$\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$: Conjunto invariante para el modelo $x_{k+1} = f(x_k)$.

$\mathcal{C} \in \mathbb{R}^n$: Conjunto invariante bajo control para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$.

$\mathcal{O}^h \in \mathbb{R}^n$: Conjunto invariante en bucle cerrado para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ con ley de control $u_k = h(x_k)$.

$\mathcal{O}^\infty(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Máximo conjunto invariante en Ω para un modelo $x_{k+1} = f(x_k)$.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Máximo conjunto invariante bajo control en Ω para un modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$.

$\mathcal{O}^{h,\infty}(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Máximo conjunto invariante en bucle cerrado en Ω para un modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ con ley de control $u_k = h(x_k)$.

$\mathcal{C}^{si}(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Máximo conjunto invariante bajo control en Ω “shape independent”. Puede ser aplicado indistintamente a un modelo borroso $x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k)(A_i x_k + B_i u_k)$ o a un modelo $x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k)(A_i x_k + B_i u_{k,j})$.

$\tilde{\mathcal{C}}(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Sub-conjunto politópico de $\mathcal{C}^{si}(\Omega)$ obtenido de aplicar las restricciones a cada vértice del modelo borroso $x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k)(A_i x_k + B_i u_k)$ o $x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k)(A_i x_k + B_i u_{k,j})$.

$\tilde{\mathcal{C}}^d(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Sub-conjunto politópico de $\mathcal{C}^{si}(\Omega)$ obtenido de aplicar las restricciones a cada vértice del modelo borroso expandido Polya de complejidad Polya d .

$\mathcal{O}^{h,si}(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Máximo conjunto invariante en bucle cerrado con ley de control $u_k = h(x_k)$ en Ω “shape independent”. Puede ser aplicado indistintamente a un modelo borroso con simple o doble sumatorio borroso.

$\tilde{\mathcal{O}}^h(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Sub-conjunto politópico de $\mathcal{O}^{h,si}(\Omega)$ obtenido de aplicar las restricciones a cada vértice del modelo borroso.

$\tilde{\mathcal{O}}^{h,d}(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Sub-conjunto politópico de $\mathcal{O}^{h,si}(\Omega)$ obtenido de aplicar las restricciones a cada vértice del modelo borroso expandido Polya de complejidad Polya d .

1.4.4 CONJUNTOS CONTRACTIVOS

$\mathcal{O}^\lambda \in \mathbb{R}^n$: Conjunto λ -contractivo para el modelo $x_{k+1} = f(x_k)$.

$\mathcal{C}^\lambda \in \mathbb{R}^n$: Conjunto λ -contractivo bajo control para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$.

$\mathcal{O}^{h,\lambda} \in \mathbb{R}^n$: Conjunto λ -contractivo en bucle cerrado para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ con ley de control $u_k = h(x_k)$.

$\mathcal{O}^{\lambda,\infty}(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Máximo conjunto λ -contractivo en Ω .

$\mathcal{C}^{\lambda,\infty}(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Máximo conjunto λ -contractivo bajo control en Ω .

$\mathcal{O}^{h,\lambda,\infty}(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Máximo conjunto λ -contractivo en bucle cerrado en Ω .

$\mathcal{C}^{\lambda,si}(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Máximo conjunto λ -contractivo bajo control en Ω “shape independent”. Puede ser aplicado indistintamente a un modelo borroso $x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k)(A_i x_k + B_i u_k)$ o a un modelo $x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k)(A_i x_k + B_i u_{k,j})$.

$\tilde{\mathcal{C}}^\lambda(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Sub-conjunto politópico de $\mathcal{C}^{\lambda,si}(\Omega)$ obtenido de aplicar las restricciones a cada vértice del modelo borroso.

$\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Sub-conjunto politópico de $\mathcal{C}^{\lambda,si}(\Omega)$ obtenido de aplicar las restricciones a cada vértice del modelo borroso expandido Polya de complejidad Polya d .

$\mathcal{O}^{h,\lambda,si}(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Máximo conjunto λ -contractivo en bucle cerrado con ley de control $u_k = h(x_k)$ en Ω “shape independent”. Puede ser aplicado indistintamente a un modelo borroso con simple o doble sumatorio borroso.

$\tilde{\mathcal{O}}^{h,\lambda}(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Sub-conjunto politópico de $\mathcal{O}^{h,\lambda,si}(\Omega)$ obtenido de aplicar las restricciones a cada vértice del modelo borroso.

$\tilde{\mathcal{O}}^{h,\lambda,d}(\Omega) \in \mathbb{R}^n$: Sub-conjunto politópico de $\mathcal{O}^{h,\lambda,si}(\Omega)$ obtenido de aplicar las restricciones a cada vértice del modelo borroso expandido Polyá de complejidad Polyá d .

1.4.5 CONJUNTOS A UN PASO

$\mathcal{Q}(\mathbb{T}) \in \mathbb{R}^n$: Conjunto a un paso hacia \mathbb{T} para el modelo $x_{k+1} = f(x_k)$ o para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ con ley de control $u_k = h(x_k)$.

$\mathcal{Q}(\mathbb{T}) \in \mathbb{R}^{n+m}$: Conjunto a un paso hacia \mathbb{T} para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$.

$\mathcal{Q}^{si}(\mathbb{T})$: Conjunto a un paso hacia \mathbb{T} “shape independent”.

$\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbb{T})$: Aproximación interior politópica de $\mathcal{Q}^{si}(\mathbb{T})$ para todos los vértices del modelo borroso.

$\tilde{\mathcal{Q}}^d(\mathbb{T})$: Aproximación interior politópica de $\mathcal{Q}^{si}(\mathbb{T})$ para todos los vértices del modelo borroso expandido Polyá con índice de complejidad Polyá d .

1.4.6 CONJUNTOS CONTROLABLES

$\mathbb{K}_i(\Omega, \mathbb{T}) \in \mathbb{R}^n$: Conjunto controlable de Ω hacia \mathbb{T} en i -pasos para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$.

$\mathbb{K}_i^h(\Omega^h, \mathbb{T}) \in \mathbb{R}^n$: Conjunto controlable de Ω^h hacia \mathbb{T} en i -pasos en bucle cerrado $\mathbb{K}_i^h(\Omega^h, \mathbb{T})$ para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ con ley de control $u_k = h(x_k)$.

1.4.7 CONJUNTOS ESTABILIZABLES

$\mathbb{S}_i(\Omega, \mathbb{T}) \in \mathbb{R}^n$: Conjunto estabilizable en i pasos para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$.

$\mathbb{S}_i^{si}(\Omega, \mathbb{T}) \in \mathbb{R}^n$ Conjunto estabilizable “shape independent”.

$\tilde{\mathbb{S}}_i(\Omega, \mathbb{T}) \in \mathbb{R}^n$: Aproximación interior politópica de $\mathbb{S}_i^{si}(\Omega, \mathbb{T})$ para cualquier vértice del modelo borroso.

$\tilde{\mathbb{S}}_i^d(\Omega, \mathbb{T}) \in \mathbb{R}^n$: Aproximación interior politópica de $\mathbb{S}_i^{si}(\Omega, \mathbb{T})$ para cualquier vértice del modelo borroso expandido Polyá con índice de complejidad Polyá d .

1.4.8 MODELOS DE PREDICCIÓN

$\bar{x} = M \cdot (\theta \cdot x_k + \Gamma \cdot \bar{u})$: Modelo de predicción borroso exacto en bucle abierto.

$\bar{x} = \tilde{M} \cdot (\tilde{\theta} \cdot x_k + \tilde{\Gamma} \cdot \bar{U})$: Modelo de predicción borroso exacto con acción de control borrosa.

$\bar{x} = \tilde{M} \cdot (\tilde{\theta}_{bc} \cdot x_k + \tilde{\Gamma}_{bc} \cdot \bar{V})$: Modelo de predicción borroso exacto en bucle cerrado.

$\bar{x} = M' \cdot (\theta' \cdot x_k + \Gamma' \cdot \bar{u})$: Modelo de predicción borroso en bucle abierto con conocimiento de x_k .

$\bar{x} = \tilde{M}' \cdot (\tilde{\theta}' \cdot x_k + \tilde{\Gamma}' \cdot \bar{U})$: Modelo de predicción con acción de control borrosa con conocimiento de x_k .

$\bar{x} = \tilde{M}' \cdot (\tilde{\theta}'_{bc} \cdot x_k + \tilde{\Gamma}'_{bc} \cdot \bar{V})$: Modelo de predicción borroso en bucle cerrado con conocimiento de x_k .

$\hat{x} = \theta^0 \cdot x_k + \Gamma^0 \cdot \bar{u}$: Modelo de predicción borroso linealizado en bucle abierto.

$\hat{x} = \tilde{\theta}^0 \cdot x_k + \tilde{\Gamma}^0 \cdot \bar{U}$: Modelo de predicción borroso linealizado con acción de control borrosa.

$\hat{x} = \tilde{\theta}_{bc}^0 \cdot x_k + \tilde{\Gamma}_{bc}^0 \cdot \bar{V}$: Modelo de predicción linealizado en bucle cerrado con acción de control borrosa

$\hat{x} = \hat{F}(x_k, \bar{u}) = F(x_k, \bar{u}_0) + \nabla F(x_k, \bar{u}_0) \cdot (\bar{u} - \bar{u}_0)$: Modelo de predicción de Taylor.

2 ESTADO DEL ARTE

En este capítulo definiremos el concepto de estabilidad para los modelos no lineales de sistemas físicos, y haremos una síntesis de la teoría de conjuntos invariantes aplicadas a modelos discretos. Introduciremos los principios de la programación copositiva paramétrica y el teorema de George Polya (1887-1985). Posteriormente trataremos las técnicas de diseño de controladores borrosos Takagi-Sugeno basados en el planteamiento de problemas de optimización convexa expresados como desigualdades matriciales lineales, así como las técnicas de borrosificación de los sistemas físicos y modelos no lineales. Posteriormente revisaremos las técnicas de control predictivo, empezando por los modelos lineales y analizando sus conclusiones más significativas, las cuales servirán para orientarnos en el desarrollo de las técnicas de control predictivo para modelos no lineales. También trataremos el enfoque general que se hace del control predictivo con modelos no lineales y resumiremos algunas de las técnicas englobadas en el control predictivo y robusto, que por su similitud matemática con los modelos borrosos, llevan a planteamientos análogos a los realizados para estos modelos. Como unión de los campos de aplicación hasta ahora descritos, encontramos algunas técnicas para el control predictivo de modelos borrosos.

2.1 TEORÍA DE ESTABILIDAD

Consideramos una clase de sistemas dinámicos no lineales (Slotine & Li, 1991) representados por un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad (2.1)$$

Donde la solución de las ecuaciones $\{x_k\}$ representa la trayectoria del sistema en el espacio. Una clase especial de estos sistemas son los sistemas lineales (Antsaklis & Mitchel, 1997) de la forma de estados:

$$x_{k+1} = A(t)x \quad (2.2)$$

Con $A(t)$ constante, se llama sistema lineal invariante en el tiempo (LTI), si no se denomina sistema variante en el tiempo (LTV).

Se denomina punto de equilibrio a la trayectoria del sistema que corresponde a un único punto estacionario. Un punto x_0 es de equilibrio si se cumple que:

$$f(x_0) = x_0 \quad (2.3)$$

Si el sistema es LTI, existe un único punto de equilibrio en $x_0 = 0$ si $A \neq I$. Para sistemas no lineales, pueden existir varios puntos de equilibrio.

Cualitativamente, un sistema es estable si empezando en un punto cercano a un punto de funcionamiento deseado, el sistema permanecerá cerca de ese punto. A este punto lo llamamos punto de equilibrio. Clasificamos los puntos de equilibrio en (Slotine & Li, 1991) (Boyd, 1994):

- Asintóticamente estable: el sistema vuelve al punto de equilibrio tras una pequeña perturbación.
- Estable no asintótico: el sistema permanece cerca del punto de equilibrio tras una pequeña perturbación.
- Inestable: el sistema se aleja del punto de equilibrio tras una pequeña perturbación.

Cualquier modelo matemático de los sistemas físicos reales se suele definir para cierta región de interés sobre el espacio de estados, sobre la que se prevé que evolucione la trayectoria del modelo. Esta región de interés viene definida como Ω .

El concepto de estabilidad de Lyapunov refina el concepto de estabilidad antes descrito, y permite aplicarlo con éxito a los modelos no lineales.

Definición 2.1

Un modelo es estable de Lyapunov en Ω , si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$x_0 \in \Omega ; \|x_0\| < \delta \implies \|x_k\| < \epsilon \quad \forall k \geq 0 \quad (2.4)$$

Esencialmente la estabilidad de Lyapunov significa que cualquier trayectoria del modelo empezando suficientemente cerca del punto de equilibrio x_0 puede mantenerse arbitrariamente cerca de dicho punto.

Definición 2.2

Un modelo es atractivo en Ω si existe un $\eta > 0$ tal que

$$x_0 \in \Omega ; \|x_0\| < \eta \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \quad (2.5)$$

Definición 2.3

Se dice que Ω es una región de atracción del modelo, si cualquier punto $x \in \Omega$ es atractivo.

Definición 2.4

Un modelo es asintóticamente estable si es estable y atractivo.

Resumiendo, estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov (Slotine & Li, 1991) significa que el punto de equilibrio es estable y además, si el modelo comienza cerca del punto de equilibrio, converge a dicho punto.

Definición 2.5

Un modelo es exponencialmente estable si existe un $\theta > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que

$$x_0 \in \Omega \implies \|x_k\| \leq \theta \cdot \|x_0\| \cdot \lambda^k \quad (2.6)$$

Un modelo es estable asintóticamente si y solo si es estable exponencialmente. Con el fin de asegurar estabilidad asintótica, definimos el concepto de función de Lyapunov.

Proposición 3.1

Un modelo definido como en (2.1), es asintóticamente estable en Ω si existe una función $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \Omega$

$$V(x) \geq 0 \quad (2.7)$$

$$V(0) = 0 \quad (2.8)$$

$$V(f(x)) - V(x) < 0 \quad (2.9)$$

Y $V(x)$ es una función de Lyapunov.

Proposición 3.2

Un modelo es contractivo en Ω si existe una función de Lyapunov en Ω , y $\forall x \in \Omega$ existe un $0 < \lambda < 1$ tal que

$$V(f(x)) < \lambda \cdot V(x) \quad (2.10)$$

Para un tratamiento más detallado de la estabilidad de los sistemas discretos puede consultarse (Kalman, 1960)(Vidyasagar, 2002).

2.2 TEORÍA DE CONJUNTOS INVARIANTES

Muchas de las técnicas de control predictivo y de control borroso vía LMIs (“Linear Matrix Inequalities”), utilizan para asegurar su estabilidad una serie de conjuntos definidos en el espacio \mathbb{R}^n . Así, enunciamos las siguientes definiciones basadas en las definiciones de (Kerrigan, 2000), con (x_k, u_k) pertenecientes a los conjuntos de estados y entradas factibles, $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{U} \in \mathbb{R}^m$ respectivamente:

Definición 2.6

El conjunto $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$ es **invariante** para el modelo $x_{k+1} = f(x_k)$ si y sólo si para cualquier $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x_k \in \mathcal{O} \Rightarrow x_{k+1} \in \mathcal{O} \quad (2.11)$$

La existencia de un conjunto invariante implica que el modelo es estable en \mathcal{O} , pues para cualquier estado perteneciente a \mathcal{O} cualquier estado futuro permanecerá dentro del mismo. No obstante, la existencia de un conjunto invariante no asegura la estabilidad asintótica del modelo.

Definición 2.7

El conjunto $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^n$ es **invariante bajo control** para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ si y solo si para cualquier $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x_k \in \mathcal{C} \Rightarrow \exists u_k \in \mathbb{U} \setminus x_{k+1} \in \mathcal{C} \quad (2.12)$$

Si existe un conjunto invariante bajo control, significará que existe una acción de control que hace que el modelo sea estable dentro de ese conjunto invariante bajo control.

Definición 2.8

El conjunto $\mathcal{O}^h \in \mathbb{R}^n$ es **invariante en bucle cerrado** para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ y una ley de control $u_k = h(x_k)$, si y sólo si para cualquier $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x_k \in \mathcal{O}^h \Rightarrow x_{k+1} \in \mathcal{O}^h \quad (2.13)$$

Para definir los siguientes conjuntos contractivos, representamos como $\lambda \cdot \mathcal{O}$ como el conjunto \mathcal{O} escalado por un factor λ .

Definición 2.9

Un conjunto $\mathcal{O}^\lambda \in \mathbb{R}^n$ es **λ -contractivo** para el modelo $x_{k+1} = f(x_k)$ si y solo si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $0 < \lambda < 1$

$$\forall x_k \in \mathcal{O}^\lambda \Rightarrow x_{k+1} \in \lambda \cdot \mathcal{O}^\lambda \quad (2.14)$$

Si existe un conjunto contractivo, significará que el modelo es asintóticamente estable en ese conjunto.

Definición 2.10

El conjunto $\mathcal{C}^\lambda \in \mathbb{R}^n$ es **λ -contractivo bajo control** para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ si y solo si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $0 < \lambda < 1$

$$\forall x_k \in \mathcal{C}^\lambda \Rightarrow \exists u_k \in \mathbb{U} \setminus x_{k+1} \in \lambda \cdot \mathcal{C}^\lambda \quad (2.15)$$

Si existe un conjunto contractivo bajo control, significará que existe una acción de control que hace que el modelo en bucle cerrado sea asintóticamente estable para cualquier estado inicial contenido en ese conjunto.

Definición 2.11

Un conjunto $\mathcal{O}^{h,\lambda} \in \mathbb{R}^n$ es **λ -contractivo en bucle cerrado** para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ y una ley de control $u_k = h(x_k)$, si y sólo si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $0 < \lambda < 1$

$$\forall x_k \in \mathcal{O}^{h,\lambda} \Rightarrow x_{k+1} \in \lambda \cdot \mathcal{O}^{h,\lambda} \quad (2.16)$$

Definición 2.12

Definimos el conjunto de restricciones politópicas en (x, u) mediante el conjunto de restricciones Ω .

$$\Omega = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus Rx + Su + s < 0\} \quad (2.17)$$

Se denota como $proj_x(\Omega)$ a la proyección de Ω en el espacio \mathbb{R}^n .

Definición 2.13

Dada una acción de control $u_k = h(x_k)$, el **conjunto admisible Ω^h** se define como el conjunto de estados que generan una acción de control admisible.

$$\Omega^h = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus Rx + Sh(x) + s < 0\} \quad (2.18)$$

Definición 2.14

El conjunto $\mathcal{O}^\infty(\Omega)$ es el **máximo conjunto invariante en Ω** si es invariante y contiene a todos los conjuntos invariantes contenidos en Ω .

Definición 2.15

El conjunto $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ es el **máximo conjunto invariante bajo control en Ω** si es invariante bajo control y contiene a todos los conjuntos invariantes bajo control contenidos en Ω .

Definición 2.16

El conjunto $\mathcal{O}^{h,\infty}(\Omega)$ es el **máximo conjunto invariante en bucle cerrado en Ω** si es invariante en bucle cerrado y contiene a todos los conjuntos invariantes en bucle cerrado contenidos en Ω^h .

Definición 2.17

El conjunto $\mathcal{O}^{\lambda,\infty}(\Omega)$ es el **máximo conjunto λ -contractivo en Ω** si es λ -contractivo y contiene a todos los conjuntos λ -contractivo contenidos en Ω .

Definición 2.18

El conjunto $\mathcal{C}^{\lambda, \infty}(\Omega)$ es el **máximo conjunto λ -contractivo bajo control en Ω** si es λ -contractivo bajo control y contiene a todos los conjuntos λ -contractivo bajo control contenidos en Ω .

Definición 2.19

El conjunto $\mathcal{O}^{h, \lambda, \infty}(\Omega)$ es el **máximo conjunto λ -contractivo en bucle cerrado en Ω** si es λ -contractivo en bucle cerrado y contiene a todos los conjuntos λ -contractivo en bucle cerrado contenidos en Ω^h .

Para la obtención de los conjuntos previamente definidos, así como para determinar si dicho conjunto es invariante, seguimos los procedimientos desarrollados por (Kerrigan, 2000), para los cuales serán de utilidad las siguientes definiciones:

Definición 2.20

Se define el **conjunto a un paso** para el modelo $x_{k+1} = f(x_k)$ como el conjunto $Q(\mathbb{T}) \in \mathbb{R}^n$ que lleva al modelo al conjunto $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^n$ en un paso.

$$Q(\mathbb{T}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in \mathbb{T}\} \quad (2.19)$$

Definición 2.21

Se define el **conjunto a un paso** para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ como el conjunto de $(x, u) \in \mathbb{R}^{m+n}$ que lleva al modelo al conjunto $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^n$ en un paso.

$$Q(\mathbb{T}) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid f(x, u) \in \mathbb{T}\} \quad (2.20)$$

A la proyección de $Q(\mathbb{T})$ en \mathbb{R}^n se denota $proy_x(Q(\mathbb{T}))$

Definición 2.22

Se define el **conjunto a un paso en bucle cerrado** para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ con ley de control $u_k = h(x_k)$ como el conjunto de estados $x \in \mathbb{R}^n$ que lleva al modelo al conjunto $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^n$ en un paso.

$$Q(\mathbb{T}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x, h(x)) \in \mathbb{T}\} \quad (2.21)$$

Teorema 2-1

Para el modelo $x_{k+1} = f(x_k)$, el conjunto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ es invariante si y solo si $\mathcal{O} \in Q(\mathcal{O})$.

Teorema 2-2

Para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$, el conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ es invariante bajo control si y solo si $\mathcal{C} \in proy_x(Q(\mathcal{C}))$.

Teorema 2-3

Para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ con ley de control $u_k = h(x_k)$, el conjunto $\mathcal{O}^h \subset \mathbb{R}^n$ es invariante en bucle cerrado si y solo si $\mathcal{O}^h \in Q(\mathcal{O}^h)$.

La demostración de estos teoremas se puede encontrar en (Dórea & Hennes, 1999).

Definición 2.23

El **conjunto controlable en i-pasos** $\mathbb{K}_i(\Omega, \mathbb{T})$ para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ es el máximo conjunto para el que existe una secuencia de acciones de control admisibles que lleve al modelo a $\mathbb{T} \in \mathbb{R}^n$ en i pasos y mantenga el modelo en Ω en los $i-1$ pasos anteriores.

$$\mathbb{K}_i(\Omega, \mathbb{T}) = \{x_k \in \mathbb{R}^n \mid \exists \{u_{k+i}\}_0^{i-1}: \{(x_{k+i}, u_{k+i}) \in \Omega\}_0^{i-1}, x_{k+i} \in \mathbb{T}\} \quad (2.22)$$

El límite de los conjuntos controlables define el conjunto controlable de tiempo infinito.

$$\mathbb{K}_\infty(\Omega, \mathbb{T}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{K}_i(\Omega, \mathbb{T}) \quad (2.23)$$

Puede demostrarse (Kerrigan, 2000) que, cualquier conjunto invariante bajo control puede calcularse a partir del conjunto controlable correspondiente, y por tanto, se obtiene el máximo conjunto invariante bajo control.

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \mathbb{K}_\infty(\Omega, \text{proy}_x(\Omega)) \quad (2.24)$$

Para calcular los conjuntos controlables utilizaremos el concepto del conjunto a un paso introducido previamente, aprovechando la siguiente propiedad:

$$\mathbb{K}_1(\Omega, \mathbb{T}) = \mathcal{Q}(\mathbb{T}) \cap \Omega \quad (2.25)$$

Con esta idea se desarrolla el siguiente Algoritmo 2.1 que permite calcular el del máximo conjunto invariante bajo control a partir de un proceso recursivo de cálculo de conjuntos a un paso.

Algoritmo 2.1

- 1) Hacer $i = 0$, $\mathbb{K}_1 = \emptyset$, $\mathbb{K}_0 = \text{proy}_x(\Omega)$.
- 2) Mientras $\mathbb{K}_{i+1} \neq \mathbb{K}_i$ repetir
 - a) $\mathbb{K}_{i+1} = \text{proy}_x(\mathcal{Q}(\mathbb{K}_i) \cap \Omega)$
 - b) $i = i + 1$
- 3) $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \mathbb{K}_i$.

Definición 2.24

El **conjunto controlable en i-pasos en bucle cerrado** $\mathbb{K}_i^h(\Omega^h, \mathbb{T})$ es el máximo conjunto para el que la ley de control $u_k = h(x_k)$ que lleva al modelo a \mathbb{T} en i pasos y mantenga el modelo en Ω^h en los $i-1$ pasos anteriores.

$$\mathbb{K}_i^h(\Omega^h, \mathbb{T}) = \{x_k \in \mathbb{R}^n \mid \{x_{k+i} \in \Omega^h\}_0^{i-1}, x_i \in \mathbb{T}\} \quad (2.26)$$

El límite de los conjuntos controlables define el conjunto controlable de tiempo infinito en bucle cerrado.

$$\mathbb{K}_\infty^h(\Omega^h, \mathbb{T}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{K}_i^h(\Omega^h, \mathbb{T}) \quad (2.27)$$

El cálculo del máximo conjunto invariante en bucle cerrado se obtiene de forma análoga y puede calcularse a partir del conjunto controlable correspondiente,

$$\mathcal{O}^{h,\infty}(\Omega) = \mathbb{K}_{\infty}^h(\Omega, \text{proy}_x(\Omega)) \quad (2.28)$$

mediante el siguiente algoritmo.

Algoritmo 2.2

- 1) Hacer $i = 0$, $\mathbb{K}_1 = \emptyset$, $\mathbb{K}_0 = \Omega^h$.
- 2) Mientras $\mathbb{K}_{i+1} \neq \mathbb{K}_i$ repetir
 - a) $\mathbb{K}_{i+1} = (\mathcal{Q}(\mathbb{K}_i) \cap \Omega^h)$
 - b) $i = i + 1$
- 3) $\mathcal{O}^{h,\infty}(\Omega) = \mathbb{K}_i$.

Y también de forma análoga, podemos calcular el máximo conjunto contractivo bajo control $\mathcal{C}^{\lambda,\infty}(\Omega)$ y el máximo conjunto contractivo en bucle cerrado $\mathcal{O}^{\lambda,h,\infty}(\Omega)$, sustituyendo $\mathcal{Q}(\mathbb{K}_i)$ por $\mathcal{Q}(\lambda\mathbb{K}_i)$.

Definición 2.25

El conjunto $\mathbb{S}_i(\Omega, \mathbb{T})$ es **estabilizable en i pasos** para el modelo $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ si y solo si el conjunto terminal \mathbb{T} es invariante bajo control y contiene a todos los estados con una acción de control admisible que sitúa al modelo en \mathbb{T} en un máximo de i-pasos, manteniéndolo en Ω en los i-1 pasos anteriores.

$$\mathbb{S}_i(\Omega, \mathbb{T}) = \{x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{u_{k+i}\}_0^{i-1} : \{(x_{k+i}, u_{k+i}) \in \Omega\}_0^{i-1}, x_{k+i} \in \mathbb{T}\} \quad (2.29)$$

2.3 PROGRAMACIÓN COPOSITIVA PARAMÉTRICA

Debido a la importancia de la programación copositiva en el desarrollo de las principales ideas de esta tesis, vamos a realizar un pequeño resumen de sus principios más importantes.

Sea un polinomio $\Xi(x, \mu)$, con $\mu \in \mathbb{R}^r$ y lineal en $x \in \mathbb{R}^n$, la programación copositiva busca una solución de $x \in \mathbb{R}^n$ donde el polinomio es positivo para cualquier valor de $\mu > 0$.

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \Xi(x, \mu) > 0 \quad \forall \mu > 0 \quad (2.30)$$

y el polinomio $\Xi(x, \mu)$ es copositivo.

La programación copositiva paramétrica busca obtener el conjunto en $x \in \mathbb{R}^n$, donde se cumplan las condiciones de positividad del polinomio $\Xi(x, \mu)$ en función de μ :

$$\Pi(x) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Xi(x, \mu) > 0; \quad \forall \mu > 0\} \quad (2.31)$$

2.3.1 TEOREMA DE POLYA

Considérese una partición simplex

$$\Delta_r = \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i = 1 \quad \setminus \quad \mu_i > 0 \quad ; \quad \forall i = 1 \dots r \right\} \quad (2.32)$$

Y sea un polinomio $\Xi(\mu_1, \dots, \mu_r)$ homogéneo y copositivo en Δ_r , entonces, el teorema de Polya (Pòlya & Szegö, 1928) afirma que para un exponente entero d suficientemente grande, todos los coeficientes de

$$(\mu_1 + \dots + \mu_r)^d \mathcal{E}(\mu_1, \dots, \mu_r) \quad (2.33)$$

son positivos.

Obviamente, el polinomio $\mathcal{E}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ es copositivo si todos sus coeficientes son positivos. Y también podemos afirmar si $\mathcal{E}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ es copositivo entonces $(\mu_1 + \dots + \mu_r)^d \mathcal{E}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ también es copositivo.

$$\mathcal{E}(\mu_1, \dots, \mu_r) > 0 \Leftrightarrow (\mu_1 + \dots + \mu_r)^d \mathcal{E}(\mu_1, \dots, \mu_r) > 0 \quad (2.34)$$

El desarrollo $(\mu_1 + \dots + \mu_r)^d \mathcal{E}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ se denota como “desarrollo Polya de orden d ” del polinomio original.

Como se verá a continuación, podemos concluir que la copositividad del desarrollo Polya es condición necesaria y asintóticamente suficiente para asegurar la copositividad del polinomio original.

2.3.1.1 Aplicación del teorema de Polya a los modelos borrosos

Como se verá más adelante, los modelos borrosos se definen como un conjunto de modelos lineales interpolados por unas funciones de pertenencia no lineales. Por otra parte, las condiciones de estabilidad del modelo, y las restricciones sobre las variables de dicho modelo, vienen definidas como una serie de desigualdades, que se puede expresar como un problema de copositividad de un polinomio $\mathcal{E}(x)$. El conjunto $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ define como el espacio de estados donde se cumplen dichas condiciones.

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{E}(x) > 0\} \quad (2.35)$$

En general, como $\mathcal{E}(x)$ viene definido por un sumatorio multidimensional de funciones lineales $Q_{i_1 \dots i_p}(x)$ y de las funciones de interpolación no lineales $\mu_{i_1} \dots \mu_{i_p}$, el polinomio $\mathcal{E}(x)$ se puede expresar de la forma:

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{i_1=1}^r \dots \sum_{i_p=1}^r (\mu_{i_1} \dots \mu_{i_p}) \cdot Q_{i_1 \dots i_p}(x) \quad (2.36)$$

Así, en general el conjunto Π viene definido por una condición de copositividad no lineal:

$$\mathcal{E}(x) > 0 \quad (2.37)$$

Llegado a este punto, vamos a definir el subconjunto de Π para cualquier posible realización de las funciones $\mu_i(x)$, que se forma cuando desconocemos cualquier información de $\mu_i(x)$ a parte del hecho de pertenecer al simplex Δ_r . A este subconjunto de Π lo denominamos “subconjunto independiente de la forma de las $\mu_i(x)$ ” (originalmente del inglés “shape independent”).

$$\Pi^{si} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{E}(x) > 0 \quad \forall \mu_i \in \Delta_r\} \quad (2.38)$$

Así, como primera aproximación, y de forma evidente, es condición suficiente de (2.38) que se cumplan las condiciones para cada uno de los modelos lineales del modelo borroso:

$$Q_{i_1 \dots i_p} > 0 \quad \forall i_1, i_2, \dots, i_p \quad (2.39)$$

Lo cual nos lleva a condiciones excesivamente restrictivas que nos limitarán en exceso su aplicabilidad práctica.

Así, pasamos a describir cómo obtener condiciones suficientes y asintóticamente necesarias de (2.38).

Con el fin de realizar una descripción más compacta, se describe la siguiente notación multi-dimensional (Sala & Ariño, 2007):

$$\mathbb{I}_p = \{\mathbf{i} = i_1, i_2, \dots, i_p\} \in \mathbb{N}^p \setminus \{1 \leq i_j \leq r \quad \forall j = 1, \dots, p\} \quad (2.40)$$

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_p} Q_{\mathbf{i}} = \sum_{i_1=1}^r \dots \sum_{i_p=1}^r Q_{i_1 \dots i_p} \quad (2.41)$$

Así, en el sumatorio multi-dimensional de $Q_{\mathbf{i}}$, el símbolo en negrita \mathbf{i} representa un multi-índice en un espacio multi-dimensional \mathbb{I}_p de orden p . Por ejemplo, un triple sumatorio en un sistema borroso de cuatro reglas será representado por un multi-índice $\mathbf{i} \in \mathbb{I}_3$, donde \mathbb{I}_3 tiene 4^3 elementos:

$$\{1,1,1\}, \{1,1,2\}, \dots, \{1,1,4\}, \{1,2,1\}, \dots, \{4,4,4\} \quad (2.42)$$

Definimos que la yuxtaposición de varios multi-índices genera un multi-índice de mayor dimensión, simbolizado entre paréntesis:

$$\mathbf{i} \in \mathbb{I}_p, \mathbf{j} \in \mathbb{I}_q \Rightarrow \mathbf{k} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathbb{I}_{p+q} \quad (2.43)$$

Los índices unidimensionales seguirán representándose en letras itálicas: $i \in \mathbb{I}_1$.

El propósito de esta nomenclatura multi-dimensional es representar de forma más compacta los sumatorios borrosos multi-dimensionales, como se muestra a continuación.

$$\mu_{\mathbf{i}} = \prod_{l=1}^p \mu_{i_l} = \mu_{i_1} \mu_{i_2} \dots \mu_{i_p} \quad \mathbf{i} \in \mathbb{I}_p \quad (2.44)$$

Por ejemplo, $\mu_{3,4,1,1} = \mu_3 \mu_4 \mu_1 \mu_1$ será el monomio asociado al término $Q_{3,4,1,1}$, en un sumatorio borroso de dimensión 4.

Con esta notación, la condición de positividad de un sumatorio borroso de dimensión p se puede expresar como

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_p} \mu_{\mathbf{i}} Q_{\mathbf{i}} > 0 \quad (2.45)$$

Por otra parte, como los términos de la partición simplex Δ_r son escalares, podemos agrupar los elementos en un sumatorio múltiple borroso que comparten el mismo monomio. Por ejemplo,

$$\mu_{1,1,3,4} = \mu_{3,1,4,1} = \mu_{4,1,1,3} = \dots \quad (2.46)$$

Expresado de forma más compacta tenemos como sigue. Dado un multi-índice $\mathbf{i} \in \mathbb{I}_p$, denominamos a $\mathcal{P}(\mathbf{i}) \subset \mathbb{I}_p$ al conjunto de permutaciones (con posibilidad de repetición de elementos) del multi-índice \mathbf{i} . Por ejemplo, si $\mathbf{i} = (3,3,1,1)$

$$\mathcal{P}(\mathbf{i}) = \{(3,3,1,1), (3,1,3,1), (3,1,1,3), (1,3,1,3), (1,1,3,3), (1,3,3,1)\} \quad (2.47)$$

El número de permutaciones de \mathbf{i} , $\mathbf{i} \in \mathbb{I}_p$ se denominará $n_{\mathbf{i}}$. Estos números pueden ser computados usando cualquier expresión de combinatoria. Obviamente, si $\mathbf{i} \in \mathcal{P}(\mathbf{j}) \leftrightarrow \mathbf{j} \in \mathcal{P}(\mathbf{i})$.

Las permutaciones serán usadas para agrupar elementos en un sumatorio múltiple borroso que comparten el mismo antecedente, esto es, que

$$\mathbf{j} \in \mathcal{P}(\mathbf{i}) \Rightarrow \mu_{\mathbf{i}} = \mu_{\mathbf{j}} \quad (2.48)$$

Con esta idea, agruparemos términos que comparten los mismos monomios. Esta idea se expresa formalmente a través de las clases equivalentes.

Se define la clase equivalente de un multi-índice \mathbf{i} como el conjunto de sus permutaciones. El siguiente subconjunto de \mathbb{I}_p :

$$\mathbb{I}_p^+ = \{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_p \mid i_k \leq i_{k+1}, k = 1 \dots p-1\} \quad (2.49)$$

Dado un índice $\mathbf{j} \in \mathbb{I}_q$, existe una única permutación del mismo, por ejemplo \mathbf{i} , que pertenece a \mathbb{I}_q^+ . Es decir, que $\mathcal{P}(\mathbf{j}) \cap \mathbb{I}_q^+$ tiene sólo un elemento.

Volviendo al problema de comprobar la copositividad de (2.38), será equivalente a

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_p} \mu_{\mathbf{i}} Q_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_p^+} \mu_{\mathbf{i}} \tilde{Q}_{\mathbf{i}} > 0 \quad (2.50)$$

$$\tilde{Q}_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{P}(\mathbf{i})} Q_{\mathbf{j}} \quad (2.51)$$

De esta forma agrupamos el polinomio por los coeficientes que multiplican a cada monomio

Por ejemplo, para $Q_{\mathbf{i}}$ con $p = 3$ y $r = 2$:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{111} &= Q_{111} \\ \tilde{Q}_{112} &= Q_{112} + Q_{121} + Q_{211} \\ \tilde{Q}_{122} &= Q_{122} + Q_{212} + Q_{221} \\ \tilde{Q}_{222} &= Q_{222} \end{aligned}$$

Así, como primera aproximación a la copositividad de (2.38), el siguiente conjunto de desigualdades son condición suficiente de (2.38).

$$\tilde{Q}_{\mathbf{i}} > 0 \quad \forall \mathbf{i} \in \mathbb{I}_q^+ \quad (2.52)$$

Ahora bien, todavía estamos ante condiciones suficientes de (2.38).

Haciendo uso del hecho evidente que

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_p} \mu_{\mathbf{i}} = \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \right)^n = 1 \quad (2.53)$$

con n un entero cualquiera, podemos ampliar (2.38) multiplicándolo por (2.53), quedando:

$$\mathcal{E} = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \mu_i \sum_{i \in \mathbb{I}_p} \mu_i Q_i = \sum_{i \in \mathbb{I}_{p+d}} \mu_i Q_i \quad (2.54)$$

donde sólo los primeros p subíndices de Q_i son considerados, es decir, que

$$Q_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+d}} = Q_{i_1 \dots i_p} \quad (2.55)$$

de donde se deduce que la siguiente expresión es condición suficiente de (2.38):

$$\tilde{Q}_i > 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}_{p+d}^+ \quad (2.56)$$

Por tanto, aplicando el teorema de Polya, la positividad de (2.38) es equivalente a comprobar

$$\mathcal{E} = \sum_{i \in \mathbb{I}_{p+d}^+} \mu_i \tilde{Q}_i > 0 \quad (2.57)$$

Se puede probar que a medida que aumenta el índice d , que se denotará “grado de complejidad Polya”, disminuye su conservativismo, pero aumenta su coste computacional. De hecho, las condiciones (2.56) se vuelven equivalentes a (2.38) cuando $d \rightarrow \infty$. Es decir, son asintóticamente necesarias.

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \tilde{\Pi}_d = \Pi^{si} \quad (2.58)$$

$$\tilde{\Pi}_d = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{Q}_i > 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}_{p+d}^+\} \quad (2.59)$$

Mediante el siguiente ejemplo se observa la evolución de las condiciones hacia un menor conservativismo.

Sea un modelo borroso con un doble sumatorio, con dos modelos $r = 2$, las condiciones que definen el conjunto para todos los vértices del modelo borroso $\tilde{\Pi}$ son:

$$Q_{11} > 0$$

$$Q_{12} > 0$$

$$Q_{21} > 0$$

$$Q_{22} > 0$$

El desarrollo Polya con grado de complejidad $d = 0$ que define el conjunto $\tilde{\Pi}_0$ viene definido por las siguientes condiciones:

$$Q_{11} > 0$$

$$Q_{12} + Q_{21} > 0$$

$$Q_{22} > 0$$

Para un grado de complejidad Polya $d = 1$, obtenemos el conjunto de condiciones de $\tilde{\Pi}_1$ a partir del desarrollo de Q_i con $p = 3$ y $r = 2$:

$$\tilde{Q}_{111} = Q_{111}$$

$$\tilde{Q}_{112} = Q_{112} + Q_{121} + Q_{211}$$

$$\tilde{Q}_{122} = Q_{122} + Q_{212} + Q_{221}$$

$$\tilde{Q}_{222} = Q_{222}$$

Donde sólo los primeros 2 subíndices son considerados, quedando:

$$Q_{11} > 0$$

$$Q_{11} + Q_{12} + Q_{21} > 0$$

$$Q_{12} + Q_{21} + Q_{22} > 0$$

$$Q_{22} > 0$$

Las condiciones de $\tilde{\Pi}_2$ derivan del desarrollo con de Q_i con $p = 4$ y $r = 2$:

$$\tilde{Q}_{1111} = Q_{1111}$$

$$\tilde{Q}_{1112} = Q_{1112} + Q_{1121} + Q_{1211} + Q_{2111}$$

$$\tilde{Q}_{1122} = Q_{1122} + Q_{1212} + Q_{1221} + Q_{2121} + Q_{2211} + Q_{2112}$$

$$\tilde{Q}_{1222} = Q_{1222} + Q_{2122} + Q_{2212} + Q_{2221}$$

$$\tilde{Q}_{2222} = Q_{2222}$$

Donde sólo los primeros 2 subíndices son considerados, quedando:

$$Q_{11} > 0$$

$$Q_{11} + Q_{11} + Q_{12} + Q_{21} > 0$$

$$Q_{11} + Q_{12} + Q_{12} + Q_{21} + Q_{22} + Q_{21} > 0$$

$$Q_{12} + Q_{21} + Q_{22} + Q_{22} > 0$$

$$Q_{22} > 0$$

Y así sucesivamente, donde se observa cómo a medida que aumenta el grado de complejidad Polya, las condiciones convergen asintóticamente a las condiciones Π^{si} , reduciendo paulatinamente el conservativismo de las soluciones.

2.4 CONTROL BORROSO

2.4.1 INTRODUCCIÓN

Los modelos borrosos desarrollados por (Takagi & Sugeno, 1985) (TS) modelizan un sistema no lineal mediante un conjunto de modelos locales lineales definidos por un conjunto de reglas borrosas de la forma SI-ENTONCES, donde cada regla expresa un comportamiento significativo del sistema expresado como un modelo lineal. Así, el conjunto del sistema se describe como una interpolación de estos sistemas lineales (Babuska R., 1998)(Babuska R. F., 1996).

Para un modelo no lineal de la forma $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$, las reglas SI-ENTONCES se suelen representar mediante:

SI z es M_i ENTONCES

$$x_{k+1} = A_i x_k + B_i u_k \quad (2.60)$$

Donde $A_i x_k + B_i u_k$ representa el modelo local lineal, que se utiliza para computar la salida final como a partir de una combinación del simplex Δ_r :

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k) (A_i x_k + B_i u_k) \quad (2.61)$$

$$\Delta_r = \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(x) = 1 \quad \wedge \quad \mu_i(x) > 0 \quad ; \quad \forall i = 1 \dots r \right\} \quad (2.62)$$

2.4.1.1 Ley de control borrosa

En este tipo de modelos, cuando la acción de control sigue una ley de control, lo más frecuente es usar dos tipos de controladores, lineales y paralelos de compensación distribuida (PDC).

Los controladores lineales se representan de la forma:

$$u_k = F \cdot x_k \quad (2.63)$$

donde F es un vector de constantes.

Y el controlador borroso PDC es un controlador basado en un conjunto de controladores lineales asociados cada uno a un modelo lineal y a su correspondiente regla borrosa. El controlador resultante se obtiene, como en los modelos borrosos TS, por interpolación mediante las mismas funciones de pertenencia. Así, el controlador PDC más frecuente queda definido por:

SI z es M_i ENTONCES

$$u_k = F_i \cdot x_k \quad (2.64)$$

Donde cada regla lleva asociado un controlador lineal con realimentación por estados del sistema. Y el controlador borroso PDC para el modelo borroso TS queda como:

$$u_k = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k) F_i x_k \quad (2.65)$$

Los controladores borrosos paralelos de compensación distribuida (PDC) fueron propuestos por primera vez en (Sugeno & Kang, 1988) sin análisis de estabilidad. Dicho análisis fue desarrollado en profundidad en (Tanaka & Sugeno, 1992). En este trabajo, se describen las herramientas matemáticas necesarias para garantizar la estabilidad, esto es, mediante desigualdades matriciales lineales (LMIs).

2.4.2 MODELADO

La construcción del modelo borroso TS de un sistema no lineal representa un proceso básico y capital en la aplicación de esta metodología de diseño. Trataremos brevemente los dos métodos más frecuentes:

- Identificación experimental de varios puntos mediante análisis de entradas y salidas.
- Modelizado matemático aproximado de las ecuaciones no lineales.

Existe una extensa literatura al respecto del modelado experimental mediante análisis de las entradas y salidas del sistema siguiendo los trabajos de Takagi, Sugeno y Kang (Takagi & Sugeno, 1985)(Sugeno & Kang, 1988). El proceso se resume en dos partes, identificación de la estructura y de sus parámetros. El método de identificación experimental del sistema es útil en sistemas cuyos modelos físicos analíticos son muy difíciles de obtener.

Para el resto de sistemas, los principios físicos nos conducen a unas ecuaciones no lineales del modelo que se aproximan con suficiente precisión al comportamiento dinámico del sistema. En este caso, la construcción del modelo borroso a partir del modelo no lineal se puede realizar siguiendo diversos métodos, destacando el método “sector no lineal” que describimos a continuación.

La idea de aproximar el modelo no lineal mediante el método “sector no lineal” aparece por primera vez en (Kawamoto, 1992) y se desarrolla en (Tanaka & Wang, 2001). La idea consiste en dado en sistema no lineal $x_{k+1} = f(x_k)$, $x_k \in \mathbb{R}$, buscamos acotar esta función para un sector global mediante

$$a_1 x_k \leq f(x_k) \leq a_2 x_k \tag{2.66}$$

con a_1 y a_2 constantes. Teniendo los modelos locales lineales, construimos ahora las funciones de pertenencia que el modelo borroso coincida exactamente con el modelo no lineal inicial.

Generalizando, para cualquier función no lineal acotada tal que $f(x_k) \in [f_1, f_2]$, con f_1 y f_2 funciones lineales, entonces:

$$f(x_k) = \frac{f(x_k) - f_1}{f_2 - f_1} \cdot f_2 + \frac{f_2 - f(x_k)}{f_2 - f_1} \cdot f_1 = \mu_2(x_k) \cdot f_2 + \mu_1(x_k) \cdot f_1 \tag{2.67}$$

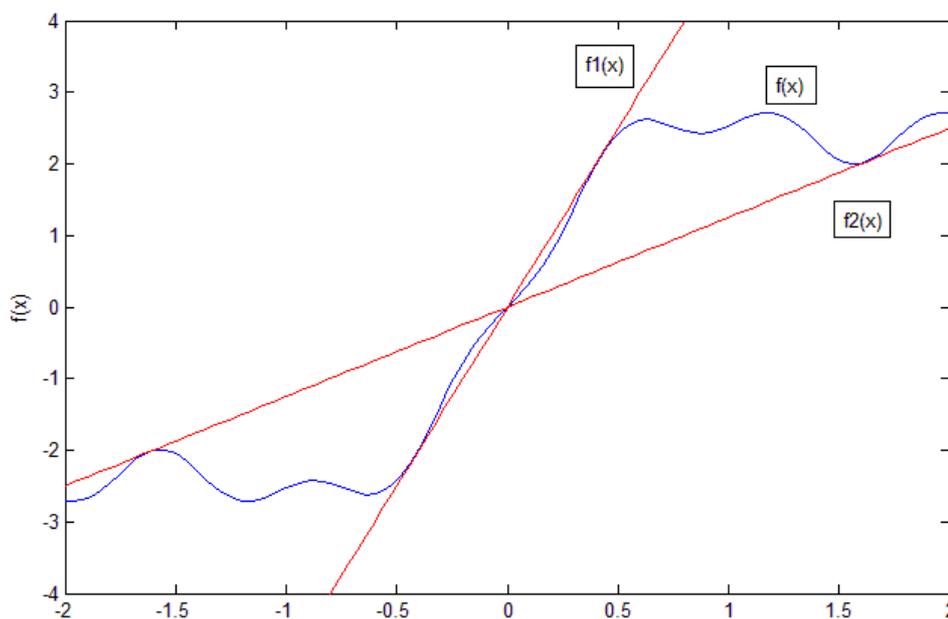


Ilustración 2-1: Funciones lineales de $f(x)$

Algunas contribuciones importantes al modelado borroso TS de sistemas no-lineales son (Sugeno & Kang, 1988)(Babuska R. , 1998)(Hori, 2002) (Baranyi, 2004) (Feng, 2006). También existen algunas interesantes aportaciones (Tanaka & Wang, 2001) que muestran como los modelos borrosos TS pueden aproximar cualquier tipo de sistema.

2.4.3 ESTABILIDAD

La estabilidad asintótica de un modelo borroso TS se puede asegurar mediante el uso de la teoría de Lyapunov, que postula que, si para cierto modelo borroso TS podemos encontrar una función de Lyapunov asociada, entonces podemos garantizar que el modelo es asintóticamente estable.

Sea un modelo discreto (2.61), se define una función $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como función de Lyapunov si:

$$V(x) \geq 0 \quad (2.68)$$

$$V(0) = 0 \quad (2.69)$$

$$V(f(x)) - V(x) < 0 \quad (2.70)$$

En principio, podríamos elegir cualquier función arbitraria como candidata a ser función de Lyapunov, sin embargo, la forma elegida de dicha función nos restringe el espacio de soluciones posibles. Así, podemos encontrar funciones de Lyapunov lineales, politópicas, cuadráticas, polinomiales, no lineales, etc. Sin embargo, la forma más común de función de Lyapunov sigue una forma cuadrática.

Sea una función cuadrática

$$V(x) = x_k^T P x_k; \quad P > 0 \quad (2.71)$$

Por definición, será de Lyapunov si cumple que:

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \quad (2.72)$$

Así, para un modelo de la forma (2.61), con una acción de control lineal (2.63), se desarrolla en:

$$\sum_{i=1}^r \mu_i (x_k^T [G_i^T P G_i - P] x_k) < 0 \quad (2.73)$$

Con $G_i = A_i + B_i F$, y para una acción de control PDC (2.65) se desarrolla en

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j (x_k^T [G_{ij}^T P G_{ij} - P] x_k) < 0 \quad \forall x \quad (2.74)$$

Con $G_{ij} = A_i + B_i F_j$, se expresa la condición equivalente:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j [G_{ij}^T P G_{ij} - P] < 0 \quad (2.75)$$

La cual puede ser planteada mediante el uso desigualdades matriciales lineales. (LMI de “Linear Matrix Inequalities”).

2.4.4 LMIS

Una desigualdad matricial lineal (Boyd, 1994)(Gahinet, 1995) es una expresión de la forma:

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_N A_N < 0 \quad (2.76)$$

donde:

$x = (x_1 \dots x_N)$ es un vector de N variables llamadas variables de decisión.

$A_0 \dots A_N$ son matrices reales simétricas.

En la desigualdad (2.76), $A(x) < 0$ significa que $A(x)$ es definida negativa. Esto es equivalente a decir que todos los autovalores de $A(x)$ son negativos, o equivalentemente, que su máximo autovalor sea negativo.

Algunas propiedades importantes de la LMIs son:

A) Es un conjunto convexo: el conjunto de soluciones de la LMI $A(x) < 0$ define el conjunto convexo siguiente:

$$\Phi = \{x \mid A(x) < 0\} \quad (2.77)$$

De hecho, si x_1 y x_2 pertenecen a Φ , entonces $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ también pertenece a Φ , con $0 < \alpha < 1$

$$A(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = A(\alpha x_1) + A((1 - \alpha)x_2) < 0 \quad (2.78)$$

B) Un conjunto de LMIs puede ser expresado como una sola LMI: Así, un conjunto de LMIs:

$$A_1(x) < 0, \dots, A_k(x) < 0 \quad (2.79)$$

Puede ser expresado como una sola LMI de la forma:

$$A(x) = \begin{pmatrix} A_1(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_k(x) \end{pmatrix} < 0 \quad (2.80)$$

Este resultado es evidente pues $A(x)$ es simétrica para cualquier x . Además, los autovalores de $A(x)$ son simplemente la unión de los autovalores de $A_1(x), \dots, A_k(x)$.

C) Un conjunto afín puede ser expresado como una LMI: Podemos convertir una restricción afín de la forma $A(x) < 0$ sujeto a $x = Au + B$, en una restricción lineal de la forma $\hat{A}(u) < 0$.

D) Si A es una LMI se le puede aplicar una transformación congruente y sigue cumpliéndose la desigualdad: Si M es una matriz cuadrada y T es no-singular, entonces el producto $T^T M T$ se denomina transformación congruente de M . Para matrices cuadradas M esta transformación no modifica los autovalores. De hecho, una LMI $A(x) < 0$ que se cumple para cierto x , entonces $u^T A(x) u < 0$ para cualquier u y x perteneciente al espacio de soluciones de la LMI. En particular, si $u = Tv$

$$v^T T^T A(x) T v < 0 \quad (2.81)$$

entonces $T^T A(x) T < 0$.

2.4.5 COMPLEMENTO DE SCHUR

Sea una LMI de la forma:

$$A(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{12}(x)^T & A_{22}(x) \end{pmatrix} < 0 \quad (2.82)$$

Con $A_{11}(x)$ y $A_{22}(x)$ simétricas, entonces la siguiente expresión es equivalente a:

$$\begin{cases} A_{11}(x) < 0 \\ A_{22}(x) - A_{12}(x)^T A_{11}(x)^{-1} A_{12}(x) < 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

Y también a:

$$\begin{cases} A_{22}(x) < 0 \\ A_{11}(x) - A_{12}(x) A_{22}(x)^{-1} A_{12}(x)^T < 0 \end{cases} \quad (2.84)$$

Este resultado nos permite, entre otras cosas, transformar una restricción no lineal de la forma (2.83) o (2.84) en una restricción lineal de la forma (2.82). Más información se puede encontrar en (Boyd, 1994).

2.4.6 OPTIMIZACIÓN CONVEXA

Existen dos tipos de problemas genéricos relacionados con las LMIs:

- Problema de optimización: Sea la función objetivo $f: \phi \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Phi = \{x \mid A(x) < 0\}$ el problema de optimización consiste en minimizar f , sujeto a una restricción LMI. La función f es lineal de la forma $f = c_1 x_1 + \dots + c_N x_N$.
- Problema de existencia de solución: Resolvemos si existe una solución $x \in \mathbb{R}$ tal que $A(x) < 0$. Esto es, $A(x) < 0$ es realizable si y solo si el máximo autovalor $\lambda(A(x))$ es menor que cero. Este problema lleva implícito un problema de optimización de la función $f: x \rightarrow \lambda_{\max}(A(x))$, lo cual es posible porque $A(x) < 0$ es convexo.

La resolución de un problema de optimización LMI es un algoritmo numérico que obtiene la solución del problema (con un cierto grado de precisión). Desde los años '40, se ha realizado un gran esfuerzo para desarrollar algoritmos que resuelvan varias clases de problemas de optimización, analizando sus propiedades y desarrollando programas de cálculo. La efectividad de estos algoritmos varía considerablemente, y dependen de muchos factores como la forma particular del problema, de sus funciones objetivo y de restricción y del número de variables y restricciones.

Los dos métodos de cálculo usados por los programas de optimización son el método del elipsoide y el método del punto interior. El primer método es un algoritmo simple, numéricamente robusto y fácil de implementar, pero puede ralentizarse para problemas de optimización de gran tamaño. El método del punto interior supuso un gran avance en el campo de la optimización convexa. Algunas buenas implementaciones de programas de cálculo para problemas de optimización convexa están disponibles en (Gahinet, 1995)(Sturm, 1999).

2.4.7 DISEÑO DE CONTROLADORES BORROSOS MEDIANTE LMIS

A partir de las condiciones de estabilidad de Lyapunov, expresamos el problema de diseño de un controlador que estabilice el modelo en bucle cerrado mediante una acción de control de tipo PDC (2.75).

La expresión (2.75) no es una LMI, pero puede transformarse realizando el siguiente cambio de variable:

$$X = P^{-1} \quad (2.85)$$

$$M_j = F_j X \quad (2.86)$$

Pre-multiplicando y pos-multiplicando por X obtenemos:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \left[(A_i X + B_i M_j)^T P (A_i X + B_i M_j) - X \right] < 0 \quad (2.87)$$

Y aplicando complemento de Schur lo convertimos en la desigualdad siguiente:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q_{ij} > 0 \quad (2.88)$$

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} X & A_i X + B_i M_j \\ (A_i X + B_i M_j)^T & X \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

Estas desigualdades no son estrictamente una LMI, puesto que las funciones de pertenencia son funciones no lineales.

Así, en el control borroso en general, nos encontramos con definiciones del problema de control basadas en desigualdades matriciales lineales interpoladas por funciones de pertenencia no lineales. Lo cual nos conduce al planteamiento de aproximaciones de estos problemas genéricos.

Como primera aproximación, podemos plantear el siguiente conjunto de condiciones suficientes:

$$Q_{ij} > 0 \quad \forall i, j \quad (2.90)$$

Comprobar la positividad de (2.90), si bien son condición suficiente, llevan al planteamiento de problemas, que o bien obtienen soluciones muy conservativas, o bien carecen de solución numérica (Tanaka & Wang, 2001).

2.4.8 RELAJACIONES

Con el fin de aproximar las condiciones suficientes lo más posible al problema original, han sido desarrolladas una serie de relajaciones que reducen el conservativismo del problema. Estas relajaciones las podemos clasificar en dos grandes grupos, según tengamos algún conocimiento de las funciones de pertenencia o no.

Los primeros pasos en las técnicas de relajación de LMIs fueron dados en los '90 por (Tanaka & Sano, 1994) y (Tanaka & Wang, 2001), que plantearon como conjunto de condiciones suficientes de (2.57):

$$Q_{ii} > 0 \quad \forall i \quad (2.91)$$

$$Q_{ij} + Q_{ji} > 0 \quad \forall i, j \quad (2.92)$$

Posteriormente investigaciones para concebir condiciones LMIs menos conservativas fueron desarrolladas por (Kim & Lee, 2000) y (Teixeira, Assunção, & Avellar, 2003).

En (Tuan, 2001) se plantean las siguientes condiciones:

$$Q_{ii} > 0 \quad \forall i \quad (2.93)$$

$$\frac{1}{r-1} (Q_{ii} + Q_{ij} + Q_{ji}) > 0 \quad \forall i = 1 \dots r \quad i < j \quad (2.94)$$

Y (Liu & Zhang, 2003) proponen como condición suficiente la existencia de matrices $X_{ij} = X_{ij}^T$ tal que:

$$X_{ii} \leq Q_{ii} \quad \forall i \quad (2.95)$$

$$X_{ij} + X_{ji} \leq Q_{ij} + Q_{ji} \quad i \neq j \quad (2.96)$$

$$\begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{r1} & \dots & X_{rr} \end{pmatrix} > 0 \quad \forall i \quad (2.97)$$

Hasta aquí, las relajaciones consiguen reducir el conservativismo del problema, pero no dejan de ser condiciones suficientes. Además, no hay que olvidar que incluso consiguiendo reducir al máximo el conservativismo del problema debido al doble sumatorio de los sistemas borrosos, seguiríamos conservando el conservativismo debido al tipo de función de Lyapunov seleccionada, en este caso cuadrática. Otras posibles funciones de Lyapunov son estudiadas en (Guerra & Vermeiren, 2004).

2.4.8.1 Relajación de Polya

En (Sala & Ariño, 2007), se proponen las condiciones suficientes y asintóticamente necesarias para asegurar la positividad de la desigualdad $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q_{ij} > 0$. El planteamiento se basa en los principios de programación copositiva y el teorema de Polya (Pölya & Szegö, 1928) explicados en la sección 2.3.

La desigualdad $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q_{ij} > 0$ es un sumatorio borroso de dimensión 2, al que se le puede aplicar directamente los principios expuestos de la sección 2.3.

Así, un grado de complejidad Polya $d = 0$ lleva directamente a las condiciones suficiente de Tanaka (2.91) y (2.92) y las condiciones de Tuan (2.93) y (2.94), no son más que un caso particular de un grado de complejidad Polya $d = 1$. En función de la precisión deseada y de la capacidad computacional de nuestro procesador, elegiremos un grado de complejidad Polya mayor o menor.

Y como consecuencia del teorema de Polya, a medida que aumenta el grado de complejidad Polya d , disminuye el conservativismo, pero aumenta su coste computacional. De hecho, las condiciones resultantes convergen a las condiciones originales cuando $d \rightarrow \infty$. Es decir, que son asintóticamente necesarias. Ver sección 2.3 para más detalles.

Definición 2.26

En (Sala & Ariño, 2007), se define el modelo borroso Takagi Sugeno con expansión de Polya d como:

$$x_{k+1} = \sum_{i \in \mathbb{I}_{2+d}^+} n_i \mu_i (\tilde{A}_i x_k + \tilde{B}_i u_k) \quad (2.98)$$

De forma que las relajaciones de Polya pueden ser entendidas como una expansión del modelo borroso original, donde los nuevos vértices sobre los que comprobar la copositividad son:

$$\tilde{A}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} A_j \quad (2.99)$$

$$\tilde{B}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} B_j \quad (2.100)$$

Con $n_i = \# \mathcal{P}(i)$ al número de elementos en esa permutación.

2.4.8.2 Relajación de modelos borrosos TS con solapamiento

En ciertos modelos borrosos TS, el conocimiento de la funciones de pertenencia nos permite restringir la existencia de algunas zonas del espacio de funciones de pertenencia, y plantear unas LMIs menos conservativas que las originales. Este hecho se puede expresar por la desigualdad:

$$\mu^T S \mu + t \mu + v \leq 0 \quad (2.101)$$

Donde $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)^T$, $t \in \mathbb{R}^{1 \times r}$, $v \in \mathbb{R}$ y $S \in \mathbb{R}^{r \times r}$, y los elementos de S se denominarán s_{ij} .

Como las funciones de pertenencia conforman una partición borrosa, se demuestra en (Sala & Ariño, 2007) que (2.101) es equivalente a

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \beta_{ij} \leq 0 \quad (2.102)$$

Con $\beta_{ij} = (s_{ij} + t_i + v)$.

Multiplicando por un vector arbitrario de elementos positivos $L \in \mathbb{R}^p$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \beta_{ij} L \leq 0 \quad (2.103)$$

Así, sea una desigualdad $\mathcal{E} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q_{ij} > 0$, se le puede sumar (2.103) y, si el resultado es positivo, la desigualdad original \mathcal{E} evidentemente también lo será.

$$\mathcal{E} \leq \mathcal{E} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \beta_{ij} L = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j (Q_{ij} + \beta_{ij} L) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q'_{ij} \quad (2.104)$$

Por tanto, la positividad de \mathcal{E} está garantizada comprobando la positividad de

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q'_{ij} \geq 0 \quad (2.105)$$

Nótese que, como todos los elementos de L pueden ser nulos, esta nueva desigualdad es obviamente menos conservativa que la desigualdad original.

Resultados similares se pueden extender a múltiples condiciones sobre las funciones de pertenencia $\beta_{ij}^{[k]}$, $k = 1 \dots t$.

Así, existirán múltiples vectores $L_k \geq 0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \left(Q_{ij} + \sum_{k=1}^t \beta_{ij}^{[k]} L_k \right) \geq 0 \quad (2.106)$$

Como caso particular, es frecuente encontrar una cota al solapamiento entre las funciones de pertenencia, expresadas para dos funciones concretas μ_k, μ_l , con $k \neq l$:

$$0 \leq \mu_k(x) \mu_l(x) \leq \gamma_{kl} \quad \forall x \quad (2.107)$$

Las ecuaciones precedentes para este caso particular quedan

$$s_{kl} = s_{lk} = \frac{1}{2}, \quad v = -\gamma_{kl}, \quad s_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \neq (k, l) \quad (2.108)$$

Quedando $\beta_{kl} = \beta_{lk} = \frac{1}{2} - \gamma_{kl}$, y $\beta_{ij} = -\gamma_{kl}$.

Más información se puede encontrar en (Sala & Ariño, 2007).

2.4.9 PRESTACIONES

Hasta ahora, hemos revisado brevemente las condiciones de estabilidad para un modelo borroso TS en bucle cerrado con una acción de control de tipo PDC, así como algunas de las relajaciones más importantes.

En esta sección se discute cómo plantear en forma de LMI las prestaciones que deseamos que nuestro modelo borroso TS con controlador PDC cumpla.

En general llegaremos a desigualdades dependientes de las funciones de pertenencia, las cuales podrán ser convertidas en LMIs mediante las relajaciones expuestas en la sección precedente.

2.4.9.1 Tasa de decrecimiento

La velocidad de respuesta está relacionada con la tasa de decrecimiento, esto es, el exponente de Lyapunov más pequeño $0 < \lambda < 1$ (Boyd, 1994) tal que

$$\|x_k\| \leq e^{\lambda^2 k} \|x_0\| \quad (2.109)$$

La condición suficiente para que se cumpla esta condición con una función de Lyapunov cuadrática candidata $V(x) = x^T P x$ es

$$V(x_{k+1}) - \lambda V(x_k) < 0 \quad (2.110)$$

Con $0 < \lambda < 1$. Operando, agrupando términos y aplicando el complemento de Schur, se llega a

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q_{ij} > 0 \quad (2.111)$$

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda X & (A_i X + B_i M_j)^T \\ A_i X + B_i M_j & X \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

2.4.9.2 Coste garantizado

El diseño de controlador PDC con coste garantizado fue desarrollado por (Tanaka & Wang, 2001). Sea un índice de coste cuadrático de la forma

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T H u_k \quad (2.113)$$

y dada una función cuadrática candidata a ser función de Lyapunov, definida como

$$V(x) = x^T P x \quad (2.114)$$

que pretende acotar superiormente al índice coste mediante

$$J < \sum_{k=1}^{\infty} (V(x_k) - V(x_{k+1})) \quad (2.115)$$

La condición (2.115) se cumplirá si

$$x_k^T Q x_k + u_k^T H u_k + V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \quad \forall k = 1 \dots \infty \quad (2.116)$$

Que sustituyendo queda

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j x_k^T [Q + F_j^T H F_j + G_{ij}^T P G_{ij} - P] x_k < 0 \quad (2.117)$$

Y realizando el cambio de variable

$$X = P^{-1}$$

$$M_j = F_j X$$

Y aplicando complemento de Schur lo convertimos en las desigualdades siguientes:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q_{ij} > 0 \quad (2.118)$$

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} X & (A_i X + B_i M_j)^T & X & M_j^T \\ A_i X + B_i M_j & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ M_j & 0 & 0 & H^{-1} \end{pmatrix}$$

Si el sistema es asintóticamente estable, entonces $V(x_{\infty}) = 0$, y por tanto

$$J < \sum_{k=1}^{\infty} V(x_k) - V(x_{k+1}) = V(x_0) = x_0^T P x_0 \quad (2.119)$$

Es decir, que el valor de la función de Lyapunov en el instante inicial, acota superiormente el coste cuadrático de la evolución temporal del modelo. Y ésta puede ser acotada a su vez por un escalar objetivo ϑ , tal que

$$V(x_0) < \vartheta \quad (2.120)$$

que expresado en forma matricial

$$J < x_0^T P x_0 < \vartheta \quad (2.121)$$

y por el complemento de Schur

$$\begin{pmatrix} \vartheta & x_0^T \\ x_0 & X \end{pmatrix} > 0 \quad (2.122)$$

El problema de optimización, que minimiza el coste garantizado J , queda como sigue:

$$\begin{cases} \min: & \vartheta \\ \text{sueto a:} & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q_{ij} > 0 \\ & \begin{pmatrix} \vartheta & x_0^T \\ x_0 & X \end{pmatrix} > 0 \end{cases} \quad (2.123)$$

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} X & (A_i X + B_i M_j)^T & X & M_j^T \\ A_i X + B_i M_j & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ M_j & 0 & 0 & H^{-1} \end{pmatrix}$$

2.4.9.3 Restricciones en las entradas

Es habitual que en los procesos reales existan unas restricciones sobre las acciones de control que se pueden aplicar al sistema. Las restricciones sobre las entradas del modelo u_k pueden ser expresadas en forma de LMIs de la siguiente forma.

Sea una cota superior de u_k , definida como

$$\|u_k\|_2 < \phi \quad (2.124)$$

y una cota superior de la función de Lyapunov

$$x_k^T P x_k \leq x_0^T P x_0 < 1 \quad (2.125)$$

La condición

$$\frac{1}{\phi^2} F_i^T F_i - P < 0 \quad \forall i \quad (2.126)$$

Implica que $x_k^T F_i^T \cdot F_i x_k < \phi^2$ para todo i . Y multiplicando a ambos lados por $\sum_{i=1}^r \mu_i$, se obtiene que:

$$u_k^T \cdot u_k < \phi^2 \quad (2.127)$$

Las condiciones (2.125)(2.126) y la condición de estabilidad se expresan de forma matricial como:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \phi^2 I \end{pmatrix} > 0 \quad \forall i \\ \begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & X \end{pmatrix} > 0 \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \begin{pmatrix} X & A_i X + B_i M_j \\ (A_i X + B_i M_j)^T & X \end{pmatrix} > 0 \end{cases} \quad (2.128)$$

2.4.9.4 Coste garantizado con restricciones en las entradas

En (Ariño & Pérez, 2010) se describe el procedimiento para establecer las condiciones LMIs que permiten diseñar un controlador con coste garantizado y con restricciones tanto en las entradas como en los estados.

Para unas restricciones de la forma:

$$\begin{cases} \|x_0\|_2 < \varrho \\ \|u_k\|_2 < \phi \end{cases} \quad (2.129)$$

El objetivo es encontrar un controlador PDC que garantice una cota superior al índice de coste (2.113), que a su vez está acotado por un escalar:

$$J < x_0^T P x_0 < \vartheta \quad (2.130)$$

Considerando la región inicial, la condición precedente se cumple si

$$x_0^T P x_0 < \vartheta \frac{x_0^T x_0}{\varrho^2} \quad (2.131)$$

Que a su vez se cumple si

$$P < \frac{\vartheta}{\varrho^2} I \quad (2.132)$$

O también

$$\varrho^2 \vartheta^{-1} I < X \quad (2.133)$$

Como $x^T P x$ es una función de Lyapunov, $x^T P x < x_0^T P x_0$, y por tanto se tiene que si

$$\begin{pmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \vartheta^{-1} \phi^2 I \end{pmatrix} > 0 \quad \forall i \quad (2.134)$$

entonces,

$$\frac{1}{\phi^2} \sum_{i=1}^r \mu_i \mu_i \cdot x^T F_i^T \cdot F_i x < \frac{1}{\vartheta} x^T P x \quad (2.135)$$

Y de las restricciones en la acción de control y la forma del controlador PDC, se tiene que

$$u^T u = \sum_{i=1}^r \mu_i \mu_i \cdot x^T F_i^T \cdot F_i x < \phi^2 \quad (2.136)$$

Y siguiendo un procedimiento similar a los apartados anteriores, se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min: \vartheta \\ \text{sujeto a:} \\ X > \vartheta^{-1} \varrho^2 I \\ \begin{pmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \vartheta^{-1} \varphi^2 I \end{pmatrix} > 0 \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \begin{pmatrix} X & (A_i X + B_i M_j)^T & X & M_j^T \\ A_i X + B_i M_j & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ M_j & 0 & 0 & H^{-1} \end{pmatrix} > 0 \end{array} \right. \quad (2.137)$$

Aquí destacamos que la región de validez del problema anterior sólo tendrá validez en la región elipsoidal definida por $V(x) = x^T P x < \rho$ con $\rho > 0$, contenida en $x_0^T x_0 < \varrho^2$. Sin embargo, la estabilidad del modelo estará garantizada en cualquier región elipsoidal para la cual no sature en ningún caso la acción de control.

u_k no saturará mientras esté dentro de $x^T P x$ y $J < \vartheta$ mientras $x_0^T x_0 < \varrho^2$.

Si las restricciones en las entradas se expresan de la forma

$$\| u_j \| \leq \phi_j \quad (2.138)$$

Cada fila individual de $\sum_{i=1}^r F_i x$ tiene que ser usada en (2.122) en vez de la matriz completa, quedando

$$\begin{pmatrix} X & M_{i,j}^T \\ M_{i,j} & \vartheta^{-1} \phi_j^2 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall i, j \quad (2.139)$$

2.4.10 REGIÓN DE VALIDEZ

La teoría de diseño de controladores para modelos borrosos mediante LMIs permite obtener tanto la ley de control (normalmente de tipo lineal o PDC), como la función de Lyapunov que garantiza la estabilidad asintótica del modelo.

En el caso de funciones cuadráticas de la forma (2.71), esta función de Lyapunov define una familia de elipsoides de la forma

$$\theta = \{x \mid x^T P x \leq \rho; \quad \rho > 0\} \quad (2.140)$$

Así, por las definiciones de estabilidad desarrolladas en la sección 2.4.3, cualquier punto inicial contenido en θ será asintóticamente estable. Con lo que haciendo ρ lo suficientemente grande, cubriríamos todo el espacio de estados \mathbb{R}^n .

Sin embargo, el tamaño del elipsoide va a estar limitado, bien porque normalmente los modelos borrosos TS vienen definidos únicamente para una región convexa contenida entre los vértices del modelo, o bien por las propias restricciones de control.

Denominando Ω a la intersección de las restricciones y la región de validez del modelo TS, Ω define el espacio que limita el tamaño de la región invariante. Por tanto, la máxima región de validez del controlador obtenido, vendrá determinada por el máximo elipsoide de la forma (2.140) contenido en Ω .

Para una región politópica simétrica definida por

$$\Omega = \{x \mid \| a_j^T \cdot x \| < 1\} \quad (2.141)$$

Entonces,

$$\theta \in \Omega \leftrightarrow \{a_j^T P^{-1} a_j \leq \rho^{-1}; \quad \forall j\} \quad (2.142)$$

Así, para cierto modelo borroso TS, con una función de Lyapunov cuadrática de la forma

$$V(x) = x^T P x \quad (2.143)$$

la máxima región de atracción cuadrática que se puede probar corresponde el máximo radio

$$\rho = \max \left[(a_j^T P^{-1} a_j)^{-1} \right] \quad (2.144)$$

A partir de estos principios podemos desarrollar las condiciones LMIs que nos permitan maximizar la región de validez de nuestro controlador. Este planteamiento también nos permite realizar un estudio del máximo conjunto invariante cuadrático de un modelo borroso TS dado. Para más información ver (Boyd, 1994).

2.4.10.1 Máximo conjunto invariante cuadrático

El volumen de un elipsoide de la forma (2.140) se calcula como a partir del determinante de P :

$$Vol = \frac{4}{3} \pi \sqrt{\det P^{-1}} \quad (2.145)$$

Así, el máximo elipsoide (en términos de maximizar su volumen), de la forma (2.140) contenido una región politópica simétrica se obtiene de resolver el siguiente problema de optimización

$$\begin{cases} \min: & \log(\rho) - \log(\det P) \\ \text{sujeto a:} & P > 0 \\ & \begin{pmatrix} \rho^{-1} & a_j^T \\ a_j & P \end{pmatrix} > 0 \quad \forall j \end{cases} \quad (2.146)$$

El máximo elipsoide entendido como el que contiene la mayor esfera de radio $x^T x < r$, y que está contenido en el politopo simétrico

$$\Omega = \{x \mid \| a_j^T \cdot x \| < 1\} \quad (2.147)$$

se obtiene de resolver el siguiente problema de optimización

$$\begin{cases} \min: & r \\ \text{sujeto a:} & 0 < P \cdot \rho^{-1} < r \\ & \begin{pmatrix} \rho^{-1} & a_j^T \\ a_j & P \end{pmatrix} > 0 \quad \forall j \end{cases} \quad (2.148)$$

2.5 CONTROL PREDICTIVO

El control predictivo desea controlar procesos que se caracterizan por presentar un comportamiento dinámico complicado y multivariable. Esta estrategia de control utiliza el modelo matemático del proceso a controlar para predecir el comportamiento futuro de dicho sistema, y en base a este comportamiento futuro puede predecir la señal de control futura.

El control predictivo que vamos a tratar es el Control Predictivo Basado en Modelo (Model Predictive Control, MPC). Esta estrategia también se conoce como control por horizonte móvil o deslizante, por ser ésta la forma en la que se aplican acciones de control.

El control predictivo basado en modelo se puede definir como una estrategia de control que se basa en la utilización de forma explícita de un modelo matemático interno del proceso a controlar (modelo de predicción), el cual se utiliza para predecir la evolución de las variables a controlar a lo largo de un horizonte temporal de predicción.

Otra de las características del MPC es su criterio de decisión. En el control predictivo, las variables de decisión se calculan mediante un proceso de optimización en línea. El criterio a optimizar, o función de coste, está relacionado con el comportamiento futuro del sistema, que se predice gracias a un modelo dinámico del mismo, denominado modelo de predicción.

El intervalo de tiempo futuro que se considera en la optimización se denomina horizonte de predicción. Dado que el comportamiento futuro del sistema depende de las actuaciones que se aplican a lo largo del horizonte de predicción, son éstas las variables de decisión respecto a las que se optimiza el sistema.

La posible discrepancia entre el comportamiento predictivo y el comportamiento real del sistema crean la necesidad de imponer cierta robustez al sistema incorporando realimentación del mismo. Esta realimentación se consigue gracias a la técnica del horizonte móvil que consiste en aplicar las actuaciones obtenidas durante un periodo de tiempo, tras el cual se muestrea el estado del sistema y se resuelve un nuevo problema de optimización. De esta manera, el horizonte de predicción se va deslizando a lo largo del tiempo.

Una de las propiedades más atractivas del MPC es su formulación abierta, que permite la incorporación de distintos tipos de modelos de predicción, sean lineales o no lineales, monovariantes o multivariantes, y la consideración de restricciones sobre las señales del sistema.

Resumiendo, los ingredientes fundamentales de cualquier control predictivo MPC son:

- Un modelo que describa el comportamiento futuro de nuestro sistema o planta, que debe mostrar la dependencia de los estados futuros con el estado actual con las acciones de control presentes y futuras. Se utiliza siempre de forma explícita.
- Un criterio de decisión, el cual requiere que sea definido numéricamente. A esta función dependiente de la trayectoria futura del modelo de predicción se denomina coste o índice de coste. Representa la función objetivo que se desea minimizar.
- Un optimizador, que obtiene las acciones de control óptimas para el índice de coste propuesto.
- Horizonte móvil, que consiste en que en cada instante de muestreo sólo se aplica la primera acción de control calculada.

Por tanto, cualquier MPC implica la resolución de un problema de optimización en bucle abierto y la aplicación del principio de horizonte móvil.

Definimos el problema de optimización mediante la función de coste, como se define en (Mayne, Rawlings, Rao, & Sokaert, 2000):

$$V_N^{OPT}(x) = \min V_N(\{x_k\}, \{u_k\}) \quad (2.149)$$

sujeto a

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$

$$x_0 = x$$

$$(x_k, u_k) \in \Omega \quad k = 0 \dots N - 1$$

$$x_N \in \mathbb{T}$$

$$V_N(\{x_k\}, \{u_k\}) := \mathcal{F}(x_N) + \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}(x_{k+i}, u_{k+i})$$

Donde

- $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función del modelo, en general no lineal, que describe el comportamiento dinámico del sistema.
- N es el horizonte de predicción.
- $V_N(\{x_k\}, \{u_k\})$ es la función de coste, siendo la función \mathcal{F} la penalización terminal del estado, y \mathcal{L} la penalización del estado y las acciones de control.
- $\{x_k\} = \{x_k \dots x_{k+N}\} \in \mathbb{R}^n$ y $\{u_k\} = \{u_k \dots u_{k+N}\} \in \mathbb{R}^m$ son respectivamente los vectores de estados y acciones de control.
- x es el estado actual medido del sistema (bien directamente o bien a través de observadores de estado).
- $\Omega \in \mathbb{R}^{n+m}$ es el conjunto de restricciones sobre los estados y las acciones de control, y $\mathbb{T} \in \mathbb{R}^n$ son las restricciones terminales.

La solución de dicho problema es una secuencia de control que minimiza la función de coste:

$$\{u_k^{OPT}\} = \{u_k^{OPT}, \dots, u_{k+N-1}^{OPT}\} \quad (2.150)$$

La selección de una u otra función de coste es campo de un amplio debate. De entre los índices de coste más populares son los denominados índices de coste cuadráticos, también llamadas formas cuadráticas, cuya forma más extendida es con:

$$\mathcal{L}(x, u) = x^T Q x + u^T H u \quad (2.151)$$

$$\mathcal{F}(x) = x^T P x^T \quad (2.152)$$

2.5.1 ESTABILIDAD

En esta sección trataremos el tema de cómo garantizar la estabilidad del sistema en bucle cerrado. El tratamiento de la estabilidad en bucle cerrado del control predictivo presenta dos características particulares que lo diferencian de otros controladores basados en una acción de control de la forma $u = h(x)$, por una parte el índice de coste de horizonte finito y por otra la filosofía del horizonte móvil.

Existen dos planteamientos para garantizar la estabilidad en control predictivo. La primera de ellas consiste en utilizar directamente los conceptos de estabilidad de Lyapunov y de la teoría de conjuntos invariantes y contractivos. Para asegurar la estabilidad del modelo se requiere:

- La obtención de una función de Lyapunov obtenida “a priori”, antes de iniciar el proceso de control en línea.
- La garantía de que el optimizador puede encontrar una solución numérica con las restricciones que conllevan la existencia de dicha función de Lyapunov.
- Que dicha solución se computará en un tiempo menor que el tiempo de muestreo.

Este es el enfoque que se va a utilizar en esta tesis para garantizar la estabilidad de los modelos borrosos.

Hay que destacar que la función de Lyapunov ha de ser la misma para cada una de las optimizaciones en cada tiempo de muestreo. Debido a la aplicación del principio de horizonte móvil no podemos obtener la

función de Lyapunov durante el proceso de optimización, tal y como se realiza habitualmente en la literatura LMI. Una función de Lyapunov obtenida de esta forma sólo asegura la convergencia de la trayectoria del modelo con la secuencia óptima calculada, y no aplicaríamos el principio de horizonte móvil.

Por otra parte, también hay que destacar que la forma de la función de Lyapunov restringe el espacio de soluciones factibles y condiciona la solución a obtener por el optimizador. Así, deberemos buscar una función de Lyapunov tal, que restrinja lo menos posible el espacio de soluciones.

La segunda estrategia para asegurar estabilidad es el enfoque utilizado tradicionalmente en el control predictivo basado en modelo, que consiste en incorporar tres ingredientes básicos al control predictivo: unas restricciones terminales que definen una región terminal $\mathbb{T} \in \mathbb{R}^n$ sobre la que se aplica una ley de control $u = K(x)$ y una ponderación del estado terminal que habitualmente corresponde con una función de coste $\mathcal{F}(x_N)$.

A partir de estos ingredientes, las diferentes propuestas bibliográficas demuestran estabilidad con dos enfoques diferentes.

El primero de ellos es el enfoque directo, que emplea la función de coste $V_N^{OPT}(x)$ como función de Lyapunov. Para ello, se establecen diferentes condiciones sobre $\mathbb{T}, K(x)$ y $\mathcal{F}(x_N)$ que garanticen que se cumple

$$V_N^{OPT}(x_{k+1}) - V_N^{OPT}(x_k) + \mathcal{L}(x_k, K(x_k)) \leq 0 \quad (2.153)$$

Esta es la filosofía que subyace, entre otras, a las propuestas de (Chen & Allgower, 1998; Chmielewski & Manousiouthakis, 1996; Keerthi & Gilbert, 1988; Mayne & Michalska, 1988; Michalska & Q., 1993; Scokaert & Rawlings, Constrained linear quadratic regulation, 1998; Rawlings & Muske, 1993).

El segundo enfoque se basa en la monotonicidad de la secuencia de funciones de coste $V_j^{OPT}(x)$. Estos métodos utiliza la siguiente igualdad:

$$V_N^{OPT}(x_{k+1}) - V_N^{OPT}(x_k) + \mathcal{L}(x_k, K(x_k)) = V_N^{OPT}(x_{k+1}) - V_{N-1}^{OPT}(x_{k+1}) \quad (2.154)$$

De esta forma, la desigualdad (2.153) puede demostrarse probando que la función $V_j^{OPT}(x)$ es monótona decreciente. Este enfoque es utilizado entre otros por (Bemporad & Morari, 1999)(Chen & Shaw, 1982)(Gevers, Wertz, & Bitmead, 1990)(Nicolao, Magni, & Scattoloni, 1996)(Magni & Sepulchre, 1997)(Meadows, 1997)(Primbs & Nevistic, 1997).

Sintetizando en un marco común las propuestas más destacadas para la estabilidad del control predictivo, en (Mayne, Rawlings, Rao, & Scokaert, 2000) se proponen las siguientes condiciones suficientes de estabilidad:

- 1) La ponderación de la etapa $\mathcal{L}(x, u)$ satisface que $\mathcal{L}(0,0) = 0$ y $\mathcal{L}(x, u) \geq \gamma(\|x\|)$ para todo $x \in \mathbb{S}_n$ (el conjunto máximo conjunto estabilizable) $u \in \mathbb{U}$, donde $\gamma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es continua, $\gamma(t) > 0$ para todo $t > 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$.
- 2) La ponderación terminal del estado $F(x)$ satisface $F(0) = 0$, $k(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{T}$ y cumple la siguiente propiedad: existe una ley de control terminal $K: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{U}$ tal que $F(f(x, K(x))) - F(x) \leq -\mathcal{L}(x, K(x))$ para todo $x \in \mathbb{T}$.
- 3) El conjunto \mathbb{T} es positivamente invariante para el sistema $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ bajo la ley de control $u = K(x)$.
- 4) La ley de control terminal $u = K(x)$ satisface las restricciones del control en \mathbb{T} .
- 5) Los conjuntos \mathbb{U} y \mathbb{T} contienen al origen de sus respectivos espacios.

Con las condiciones de estabilidad propuestas se desarrollan diversos planteamientos de control predictivo.

2.5.2 CONTROL PREDICTIVO LINEAL ESTABLE

El control predictivo lineal se refiere a un conjunto de técnicas de control predictivo basadas en modelos de predicción y restricciones lineales. Estas técnicas han dado muy buenos resultados en muchísimos procesos.

Puesto que los modelos borrosos basan su definición en un conjunto de modelos lineales, se hace necesaria su revisión como paso previo para el estudio de los mismos (Goodwin & Seron, 2005)(Camacho, 2004)(Rossiter, 2003).

Considerando el siguiente modelo linear e invariante en el tiempo (LTI):

$$x_{k+1} = Ax_k + B_k u_k \quad (2.155)$$

Donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y $u_k \in \mathbb{R}^m$ las entradas. Por ser un sistema linear, si $A \neq I$, el único estado de equilibrio posible es el origen. Por tanto, este será el objetivo final de cualquier acción de control que desee estabilizar asintóticamente el modelo.

Con el fin de representar de forma compacta el modelo de predicción a N pasos, expresamos el modelo de la forma:

$$\bar{x} = \theta \cdot x_k + \Gamma \cdot \bar{u} \quad (2.156)$$

con

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+N} \end{pmatrix} \quad (2.157)$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+N-1} \end{pmatrix} \quad (2.158)$$

$$\theta = \begin{pmatrix} A \\ \vdots \\ A^N \end{pmatrix} \quad (2.159)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{pmatrix} \quad (2.160)$$

Y las restricciones de la forma lineal

$$\Omega = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Rx + Su + s < 0\} \quad (2.161)$$

Con este modelo y para la función cuadrática definida en (2.151), el problema de optimización (2.149) queda:

$$\begin{cases} \min & \frac{1}{2} \bar{u}^T (\Gamma^T \bar{Q} \Gamma + \bar{H}) \bar{u} + (\Gamma^T \bar{Q} \theta) \bar{u} \\ \text{sujeto a} & \bar{S} \bar{u} < -\bar{R} \bar{x} - \bar{s} \end{cases} \quad (2.162)$$

con

$$\bar{Q} = \text{diag}\{Q, \dots, Q, P\} \quad (2.163)$$

$$\bar{H} = \text{diag}\{H, \dots, H\} \quad (2.164)$$

$$\bar{R} = \text{diag}\{R, \dots, R\} \quad (2.165)$$

$$\bar{S} = \text{diag}\{S, \dots, S\} \quad (2.166)$$

$$\bar{s} = (s, \dots, s)^T \quad (2.167)$$

Así, en presencia de restricciones lineales sobre las entradas y los estados, el problema de optimización para un horizonte de predicción finito se puede transformar en un problema QP (QuadraticProgram).

Existen procedimientos numéricos de cálculos ampliamente desarrollados para resolver el problema QP (llamados algoritmos QP).

2.5.3 CONTROL PREDICTIVO NO LINEAL

En general, los procesos industriales son no lineales, pero como se ha visto hasta ahora, la mayoría de aplicaciones del control predictivo están basadas en el uso de modelos lineales. Hay varias razones fundamentales para ello: de un lado la identificación experimental de modelos lineales a partir de los datos del proceso es un procedimiento relativamente sencillo, y por otra parte los modelos lineales dan buenos resultados cuando el proceso está operando cerca del punto de funcionamiento para el que se obtuvo el modelo lineal. Además, el uso de modelos lineales conduce al uso de algoritmos convexos con programación cuadrática cuyas soluciones están bien estudiadas. Y por último, la existencia de algoritmos que garantizan la convergencia de la solución en un tiempo más pequeño que el tiempo de muestreo es crucial cuando el número de variables a controlar aumenta.

Sin embargo, la respuesta dinámica con estos controladores lineales se vuelve inaceptable cuando el proceso muestra fuertes no linealidades. Además, aunque los procesos suelen estar operando la mayor parte del tiempo cerca de algún punto de funcionamiento específico, hay situaciones importantes donde esto no ocurre. Por una parte, en ciertos sistemas fuertemente no lineales, el controlador lineal no consigue garantizar la estabilidad del proceso, y por otra parte, algunos procesos experimentan continuas transiciones y durante gran parte del tiempo el proceso permanece alejado de estos puntos de funcionamiento. Por todos estos motivos, una ley de control lineal puede no ser suficientemente efectiva, y es aquí donde se requieren los algoritmos de control no lineales.

El control predictivo no lineal se entiende como la técnica de control en línea de modelos no lineales, donde la utilización de un modelo de predicción, optimización de un índice de coste y aplicación de un horizonte móvil, es también aplicable.

El control predictivo no lineal presenta varios puntos que hacen difícil su desarrollo y aplicación:

Primeramente, el proceso de modelado para la obtención de un modelo no lineal satisfactorio es un campo todavía abierto a la investigación.

Segundo, el proceso de optimización es no-convexo, en contrapartida con el problema de programación QP. La resolución de este tipo de problemas es mucho más compleja que un problema QP, y suelen estar basadas en la obtención de un sub-óptimo.

Tercero, el tiempo computacional del problema de optimización es muy superior a un QP. Esto puede conllevar severas limitaciones para su aplicación en ciertos procesos reales, donde el tiempo de muestreo limita el tiempo de cálculo del optimizador.

Y por último, ciertas cuestiones fundamentales de estudio de cualquier controlador se vuelven sumamente complejas, como son el estudio de su estabilidad, robustez, rechazo de perturbaciones, etc.

A pesar de las dificultades enunciadas, existen muchos trabajos desarrollados en este campo. En concreto, con el fin de evitar los problemas asociados al problema de optimización no-convexo, es frecuente resolver los problemas no-convexos mediante programación cuadrática secuencial (SQP).

Un SQP es un método iterativo de optimización no lineal, usados en problemas donde tanto la función objetivo como las restricciones son doblemente derivables. Los métodos SQP resuelven una secuencia de sub-problemas de optimización, cada uno de ellos optimiza un modelo cuadrático del objeto sujeto a una linealización de las restricciones. Si el problema no tiene restricciones, entonces, el método se reduce al método de Newton de búsqueda del punto donde el gradiente objeto se desvanece. Si el problema tiene sólo restricciones expresadas en forma de igualdades, entonces el método es equivalente a aplicar el método de Newton a las condiciones de optimalidad de primer orden, también llamadas condiciones Karush-Kuhn-Tucker. De forma genérica, el proceso de un SQP se resume como sigue (Bonnans, Gilbert, Lemarechal, & Sagastizábal, 2006).

Sea un problema definido por

$$\begin{cases} \min: f(x) \\ \text{sujeto a: } \begin{cases} b(x) \geq 0 \\ c(x) = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.168)$$

El lagrangiano para este problema es:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \sigma) = f(x) - \lambda^T b(x) - \sigma^T c(x) \quad (2.169)$$

Donde λ y σ son los multiplicadores de Lagrange. En la iteración x_k , una secuencia básica del algoritmo de programación cuadrática se define en una dirección apropiada d_k como la solución al sub-problema de programación cuadrático.

$$\begin{cases} \min & \mathcal{L}(x_k, \lambda_k, \sigma_k) + \nabla \mathcal{L}(x_k, \lambda_k, \sigma_k)^T d_k + \frac{1}{2} d_k^T \nabla_x^2 \mathcal{L}(x_k, \lambda_k, \sigma_k) d_k \\ \text{sujeto a:} & \begin{cases} b(x_k) + \nabla b(x_k)^T d_k \geq 0 \\ c(x_k) + \nabla c(x_k)^T d_k = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.170)$$

Muchos son los problemas que pueden aparecer en los SQPs, como por ejemplo la disponibilidad de la derivada segunda o la factibilidad de una solución intermedia, entre otros.

Como en general las restricciones son lineales el SQP se re-escribe como:

$$\begin{cases} \min & \mathcal{L}(x_k, u_k, \lambda_k) + \nabla_u \mathcal{L}(x_k, u_k, \lambda_k)^T d_k + \frac{1}{2} d_k^T \nabla_u^2 \mathcal{L}(x_k, u_k, \lambda_k) d_k \\ \text{sujeto a:} & b(x_k, u_k) \geq 0 \end{cases} \quad (2.171)$$

con

$$d_k = \begin{pmatrix} u_k - u_k^0 \\ \vdots \\ u_{k+N-1} - u_{k+N-1}^0 \end{pmatrix}$$

Volvemos a destacar que:

- La solución obtenida es un sub-óptimo, pues el problema es no-convexo.

- La convergencia del algoritmo no está asegurada, y menos en el tiempo de muestreo pre-establecida.

Si el algoritmo no ha concluido antes de finalizar el periodo de muestreo, la última solución obtenida es la que se aplicará, pudiendo no satisfacer las restricciones del proceso. Algunas variaciones del problema enunciado se han desarrollado para superar algunos de los inconvenientes planteados, y para mejorar la eficiencia y la convergencia del algoritmo (Biegler, 2000).

A pesar de los grandes avances que se han realizado en mejorar la eficiencia computacional de los algoritmos SQP, muchos de los inconvenientes de estas técnicas no han sido todavía superados. Existen muchas propuestas que persiguen resolver las dificultades enumeradas evitando resolver un problema tan general y se intenta aprovechar algunas de las particularidades de cada problema. Alguna de estas posibles soluciones se resumen en (Camacho, 2004).

- MPC lineal extendido: Introducido originalmente para el DMC (Hernandez & Arkun, 1991). Se añade un término no lineal al modelo de predicción pero no dependiente de las acciones de control futuras, lo que permite que el problema a optimizar siga siendo resoluble mediante un QP.
- Modelos locales: Se trata de linealizar sucesivamente el modelo no lineal del sistema alrededor de diferentes puntos de funcionamiento. Dentro de esta estrategia destacan (Kouvaritakis, Cannon, & Rossiter, 1998), que realiza las sucesivas linealizaciones alrededor de las trayectorias predichas en instantes anteriores, y (Townsend & Irwin, 2001) que ajusta un conjunto de controladores predictivos generalizados (GPCs) para los diferentes modelos y aplica una planificación de ganancia entre ellos.
- MPC no lineal sub-óptimo: Fue propuesto por (Scokaert & Rawlings, 1998). La idea consiste en buscar una que cumpla restricciones y que haga decrecer dicho índice una cantidad suficiente, en lugar de buscar la secuencia de acciones de control que minimiza un índice de coste. Después, si queda tiempo para el cálculo, buscar una reducción mayor del coste.
- Uso de horizontes bajos: La idea es calcular exactamente sólo la primera acción de control de la secuencia (la única que se va a aplicar) y aproximar de alguna manera el resto (por ejemplo, linealizando el modelo del sistema). Al reducir las variables de decisión, el problema optimización se simplifica considerablemente. En (Zheng & Zhang, 2001) y (Kouvaritakis, Cannon, & Rossiter, 1998) se utilizan estrategias de este tipo.
- Descomposición de la secuencia de control: La idea en este caso consiste en separar la secuencia de acciones de control futuras en dos términos, una secuencia de control base que viene dada y un incremento sobre esta, que está libre. Después, se separa la respuesta debida a cada una de ellas, usando para la primera un modelo no lineal y para la segunda uno lineal. Esto permite obtener la secuencia de incrementos libres mediante la resolución de un QP. Debido al no cumplimiento del principio de superposición para sistemas no lineales, en general es necesario establecer un procedimiento iterativo en el que la suma de las dos secuencias se hace igual a una nueva secuencia base y se buscan nuevos incrementos. Cuando éstos se hacen igual a cero, se aplica la acción de control (De Keyser, 1998).
- Linealización por realimentación: Consiste en una cancelación de la no linealidad del sistema, lo que en general lleva a tener un índice de coste cuadrático pero restricciones no lineales, que se aproximan por restricciones lineales (Botto, Boom, Krijgsman, & Costa, 1999).
- MPC basado en modelos de Volterra: Cuando el modelo no lineal del sistema es un modelo de Volterra de segundo orden puede establecerse un procedimiento iterativo pero considerablemente rápido que, mediante la resolución de varios QP, obtiene el óptimo. Un caso especial de modelos de Volterra son los modelos de tipo Hammerstein y Wiener y permiten resolver la optimización mediante una cancelación de la no linealidad (Dua & Pistikopoulos, 2000).
- Redes neuronales: Al ser las redes neuronales aproximadores universales, pueden también ser utilizadas como optimizador de la función de coste fuera de línea (Arahal, Berenguek, & Camacho, 1998).

2.5.4 CONTROL PREDICTIVO ROBUSTO

Los modelos matemáticos de los procesos reales no pueden contemplar todos los aspectos de la realidad del proceso. Por ello, se han de contemplar simplificaciones del proceso, especialmente cuando los modelos van a ser usados en el proceso de optimización y control. Así, es necesario destacar que el modelo sólo describe el proceso real de una manera aproximada.

El tratamiento de las incertidumbres del proceso de modelado son tratadas en el llamado control robusto (Camacho, 2004). En concreto, el control predictivo es muy sensible a errores en el modelado, no pudiendo garantizar ni estabilidad ni optimalidad.

Existen distintos planteamiento para modelar las incertidumbres asociadas al proceso de modelado, dependiendo fundamentalmente del tipo de control que se vaya a aplicar. Los dos planteamientos más usuales en la literatura son las incertidumbres en frecuencia y las incertidumbres paramétricas. Ambos planteamientos consideran que el proceso exacto pertenece a una familia de modelos que describen los límites de la incertidumbre.

La forma matemática de modelado con incertidumbres paramétricas está compuesta por un conjunto convexo de incertidumbres politópicas, con unas funciones de ponderación o pertenencia $\mu_i(t)$ entre varios modelos lineales llamados vértices:

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(t)(A_i x_k + B_i u_k) \quad (2.172)$$

$$\Delta_r = \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(t) = 1 ; \mu_i(t) > 0 ; \forall i = 1 \dots r \right\} \quad (2.173)$$

Como se puede observar, la similitud con los modelos borrosos es muy grande, siendo la principal diferencia entre ambos que, así como en los modelos borrosos las funciones de pertenencia pueden ser conocidas o aproximadas, en los modelos robustos son del todo desconocidas. Como se verá más adelante, esto nos va a condicionar la posibilidad de aplicación de técnicas de relajación de las funciones y los conjuntos robustos asociados.

Debido a su similitud con los modelos borrosos, se hace necesario su estudio y sus técnicas de control predictivo, dentro del estudio del estado del arte de esta tesis.

La estructura de control predictivo robusto sigue los mismos principios que cualquier otro control predictivo:

- Un modelo de predicción a N pasos basado en el modelo original (2.172).
- Unas restricciones sobre las entradas, salidos y/o estados.
- Un criterio de decisión.
- Una filosofía de horizonte móvil.

2.5.4.1 Función de coste

Una forma usual de optimización cuando consideramos incertidumbres politópicas, consiste en obtener la secuencia \bar{u} que minimice el valor de una función de coste objetivo $\mathcal{L}(\bar{u}, \mu)$ para los valores de función de pertenencia μ más desfavorables. Esto es:

$$\min_{\bar{u}} \max_{\mu \in \Delta} J(\bar{u}, \mu) \quad (2.174)$$

En general, la función de coste a minimizar suele ser de la forma de una máxima norma que mide la bondad de la trayectoria futura del modelo. Los enfoques más frecuentemente utilizados usan norma 2, aunque también existen algunas funciones de coste basadas en norma ∞ y norma 1. La utilización de estas últimas normas permite expresar la función de coste de forma lineal con \bar{u} .

La filosofía seguida por los controladores predictivos es la búsqueda de una secuencia de acciones de control futuras que minimizan el índice de coste (dependiente de unos parámetros acotados) para el peor caso posible (obtenido como la maximización del coste en función de dichos parámetros).

2.5.4.2 Paradigma en bucle cerrado

El paradigma en bucle cerrado fue propuesto originalmente como parte de un algoritmo de control predictivo estable (Kouvaritakis, Rossiter, & Chang, 1992). Posteriormente ha sido introducido paulatinamente por otros investigadores de control predictivo debido a sus buenas propiedades en la predicción de los estados futuros (Camacho, 2004). De forma general consigue un mejor condicionamiento numérico de la optimización y permite un análisis frente a perturbaciones más directo, aunque algebraicamente la estrategia de control en bucle abierto es la misma que en bucle cerrado.

La idea básica consiste en elegir una ley de control estabilizable y asumir que esta ley de control está presente durante las predicciones.

De forma matemática esta idea se expresa como:

$$u_k = h(x_k) + v_k \quad (2.175)$$

Donde $h(x)$ define la ley de control, y v_k es la acción de control aditiva que vamos a aplicar.

Esta forma de formular la acción de control permite suponer que la ley de control está integrada en la computación predictiva.

Por ejemplo, para una ley de control de tipo lineal

$$h(x_k) = Fx_k \quad (2.176)$$

el controlador predictivo trabaja con un modelo de predicción de la forma:

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(t) [(A_i + B_i F)x_k + B_i v_k] \quad (2.177)$$

Si la predicción se realiza en base a una ley de control que hace que el modelo en bucle cerrado sea estable, entonces el usuario tiene una prueba potencial trivial de estabilidad, bastará con aplicar simplemente la ley de control con $v_k = 0$. Sin embargo, esta estrategia está lejos de ser la, y además, no tiene porqué satisfacer las restricciones impuestas, y por tanto no ser realizable, lo que invalida el argumento previo de estabilidad.

Para la obtención de esta ley de control se puede plantear cualquier estrategia de diseño no-predictiva que se desee, aunque generalmente se opte por una acción de control lineal o PDC, para un modelo con o sin restricciones.

El paradigma en bucle cerrado nos permite separar la ley de control estabilizable de la acción de control predictiva. Este último punto es importante porque si optamos por calcular la ley de control sin restricciones, nos permite tener una visión más profunda del impacto de las restricciones sobre la acción de control, y cómo condiciona al optimizador.

La diferencia fundamental de aplicar el paradigma en bucle abierto o en bucle cerrado se entienden al ver cómo influyen las incertidumbres de los modelos borrosos en la predicción a N pasos. Así, al predecir la trayectoria del modelo con un horizonte de predicción elevado (para un N suficientemente grande), las funciones de interpolación que nos acotan la incertidumbre del modelo real respecto a los vértices extremos, se van multiplicando por sí mismas en cada paso, y aumenta exponencialmente dicha incertidumbre. Por tanto, los vértices obtenidos para las funciones y conjuntos borrosos son cada vez más extremos, y por tanto y al plantear las condiciones suficientes para dichos conjuntos y funciones, nos encontraremos con un espacio de soluciones más reducido.

En este punto, la predicción en bucle cerrado consigue que los vértices iniciales estén menos dispersos (o sea, que el modelo sea más lineal que el modelo original), y por tanto, al obtener el modelo de predicción a N pasos, sus vértices también serán menos extremos.

En la práctica, las condiciones de estabilidad y prestaciones se van a formular en función de los vértices del modelo, en vez de sobre el modelo original (del que se desconoce sus funciones de ponderación). Así, al reducir la incertidumbre del modelo a N pasos, las condiciones suficientes son planteadas sobre un modelo con menos incertidumbre.

2.6 CONTROL PREDICTIVO BORROSO

Revisando los ingredientes básicos de un MPC, tenemos que tener:

- Un modelo de predicción.
- Un criterio de decisión.
- Un optimizador.
- Una estrategia de horizonte móvil.

Así, podemos encontrar diferentes definiciones del control predictivo borroso dependiendo de dónde y cómo hagamos uso del modelo borroso. En la literatura hemos podido encontrar al menos tres definiciones para el control predictivo borroso (Roubos, Mollov, Babuska, & Verbruggen, 1999).

La primera acepción se refiere a las técnicas que emplean modelos borrosos para calcular la predicción en el horizonte de predicción preestablecido (Sousa, Setnes, Baptista, & Da costa, 1999)(De Oliveira & Lemos, 1995).

En segundo lugar, el control predictivo borroso también hace referencia a las metodologías que emplean restricciones e índices de coste mediante conjunto borrosos. Generalmente, se emplean modelos lineales para la predicción del horizonte (Sousa, Babuska, Brujin, & Verbruggen, 1996).

Por último, las técnicas que emplean optimizadores borrosos residen en que el proceso de optimización se encuentra controlado por un conjunto de reglas borrosas de manera que pueden incluir todo un conjunto de decisiones que sería difícil general con otros métodos de optimización (Lu, He, & Xu, 1996).

En la presente tesis, el control predictivo borroso que tratamos hace referencia a las técnicas de control predictivo aplicadas a modelos no lineales de tipo borroso Takagi-Sugeno. Es decir, una estrategia de control con los ingredientes básicos del control predictivo basado en modelos (MPC), donde el modelo de predicción es un modelo borroso TS, y las restricciones y el índice de coste se aplican sobre dicho modelo.

Existen pocas técnicas disponibles para el tratamiento sistemático del control predictivo para modelos borrosos TS. En aplicaciones prácticas del control predictivo, suele ser difícil obtener un modelo fiable de predicción. Sin embargo, debido a la buena precisión en la aproximación a los modelos no lineales que se consigue con los modelos borrosos TS, se hace necesaria una metodología de tratamiento del control predictivo para este tipo de modelos.

Algunas de las primeras aportaciones desarrolladas en el campo del control predictivo borrosos son (Kim, Kim, & Park, 1996) que trata los modelos lógicos borrosos como una colección de modelos lineales a

trozos; (Huang, Lou, Gong, & Edgar, 2000) describe el proceso como un modelo de convolución borroso compuesto por varias implicaciones borrosas casi lineales; (Fisher, Nelles, & Isermann, 1998) que utiliza funciones de pertenencia Gaussianas con modelos borrosos TS y utilizando un optimizador donde combina métodos de búsqueda de Newton, Hooke-Jeeves y mallas; (Sousa, Setnes, Baptista, & Da costa, 1999) también utilizan sistemas de predicción dinámicos donde una inversión del modelo combinado con un algoritmo de ramificación y poda sirve como base para el problema de optimización y por último (Vucovic, 2001) donde el algoritmo de control se selecciona de entre un conjunto de acciones de control predeterminadas por el modelo. Estas metodologías presentaban la problemática conjunta de requerir un tipo de modelo borroso específico, y además, no incorporaban adecuadamente las restricciones sobre las variables y las entradas del proceso, que es uno de los puntos fuertes del control predictivo tradicional.

Recientemente se han desarrollado algunas síntesis del control predictivo para modelos borrosos TS en bucle cerrado, por ejemplo los procedimientos desarrollados en (Mollov, Babuska, Abonyi, & Verbruggen, 2004)(Mollov, Boom, Cuesta, Ollero, & Babuska, 2002)(Ding, 2009) en los que se diseña el controlador predictivo asumiendo que el estado actual es medible. En (Sarimveis & Bafas, 2003) se presenta una interesante técnica donde el optimizador utilizado se basa en algoritmos genéticos.

Otra propuesta interesante es la desarrollada en (Zhang, Feng, & Lu, 2007), donde se propone un diseño basado en dos etapas. En la primera etapa se calcula mediante un problema LMI fuera de línea el controlador terminal basado en unas restricciones terminales y un conjunto de desigualdades que garanticen la estabilidad del diseño a partir de un índice de predicción infinito, tal y como muestran las siguientes ecuaciones.

$$J_{\infty} = \sum_{q=0}^{N-1} J(\hat{x}_{k+q}, \hat{u}_{k+q}) + \sum_{q=N}^{\infty} J(\hat{x}_{k+q}, \hat{u}_{k+q}) \quad (2.178)$$

Donde \hat{x}_{k+q} y \hat{u}_{k+q} hacen referencia a las predicciones de los estados y acciones de control futuras, empleando el modelo borroso TS, y N hace referencia al horizonte de predicción, y $J(\hat{x}_{k+q}, \hat{u}_{k+q}) = \hat{x}_{k+q}^T Q \hat{x}_{k+q} + \hat{u}_{k+q}^T H \hat{u}_{k+q}$.

A continuación se define una función cuadrática $V(\hat{x}_{k+q}) = \hat{x}_{k+q}^T P \hat{x}_{k+q}$ tal que

$$\sum_{q=N}^{\infty} J(\hat{x}_{k+q}, \hat{u}_{k+q}) \leq V(\hat{x}_{k+q}) \quad (2.179)$$

Con lo que

$$J_N = \sum_{q=0}^{N-1} J(\hat{x}_{k+q}, \hat{u}_{k+q}) + V(\hat{x}_{k+q}) \quad (2.180)$$

es un límite superior de J_{∞} . Por tanto se puede plantear un problema de optimización equivalente que consiste en encontrar una secuencia de control que minimiza J_N . Por otro lado se establece una restricción terminal $\hat{u}_{k+q} = F \hat{x}_{k+q}$, $q \geq N$ que satisface (2.179) y consigue que $\hat{x}_{k \rightarrow \infty} = 0$.

En la segunda fase del diseño, se persigue la resolución de un problema de optimización, que se plantea en el último estadio de la fase anterior, es decir, encontrar una secuencia de control óptima que minimiza J_N . Sin embargo, la principal debilidad que contiene la metodología propuesta es el hecho de que no se contemplan variaciones en las funciones de pertenencia a lo largo del horizonte de predicción. Este hecho determina que la secuencia de control que se calcula mediante el QP no será óptima respecto al modelo original, si no una simplificación del mismo. Continuando con esta línea argumental, en (Xia, Yang, Shi, & Fu, 2010) se amplía las técnicas desarrolladas con leyes de control terminal de tipo PDC y no-PDC, y en

(García, Martínez, & Salcedo, 2010) se propone la modelización del sistema a N pasos de forma que mantengan constantes las funciones de pertenencia en cada paso.

Hay que destacar que muchos desarrollos realizados en el campo del control predictivo borroso utilizan técnicas de optimización análogas a las utilizadas en control predictivo no lineal y en control predictivo robusto y contienen por tanto las mismas limitaciones que sus técnicas de control análogas. Por ejemplo, algunos optimizadores utilizados en la literatura mencionada presentan el problema de su alto coste computacional, otras de estas técnicas no utilizan el conocimiento de las funciones de pertenencia borrosas o bien utilizan un tratamiento similar al utilizado en las funciones de interpolación de modelos robustos.

Por otro lado, las técnicas basadas en la resolución de LMIs, si bien son capaces de resolver el problema convexo en línea, presentan las limitaciones típicas de los planteamientos borrosos clásicos y su conservativismo en las soluciones, además del alto coste computacional de los métodos de optimización convexa necesarios para resolver los planteamientos basados en LMIs.

Por último cabe destacar que la mayoría de los planteamientos propuestos resuelven el problema de estabilidad del control predictivo borrosos mediante el uso de una función terminal, lo que es condicionante de la estrategia de control en línea a desarrollar.

3 CONJUNTOS INVARIANTES Y CONTRACTIVOS POLITÓPICOS PARA MODELOS BORROSOS TAKAGI-SUGENO EN BUCLE CERRADO

Para los modelos borrosos TS, existe una amplia literatura que describe las metodologías de diseño y estabilidad vía LMIs. Éstas permiten obtener tanto las acciones de control en forma de ley de control, como las regiones de validez de dichos controladores. Todas estas metodologías se basan en plantear una serie de desigualdades lineales sobre sus vértices o modelos lineales, o más concretamente sobre combinaciones de éstos, que son condición suficiente para que se cumplan los requerimientos de estabilidad y diseño propuestos para el modelo borroso no lineal. Así, debido al conservativismo introducido en estas desigualdades, los problemas de optimización LMIs conducen a resultados limitados tanto en sus regiones de validez como en su respuesta dinámica.

En este capítulo, vamos a presentar una metodología para obtener el máximo conjunto λ -contractivo e invariante bajo control, para modelos borrosos TS. Además, el procedimiento nos permitirá obtener una candidata a función de Lyapunov contractiva, esto es, que cumple que $V(x_{k+1}) < \lambda \cdot V(x_k)$. El procedimiento se basa en el presentado en (Gilbert & Tan, 1991) y posteriormente modificado en (Pluymers, Rossiter, Suykens, & De Moor, 1996)(Kerrigan, 2000) para aplicarlo a sistemas con incertidumbres politópicas; en (Rakovic, Kerrigan, Mayne, & Kouramas, 2007) para aplicarlo con perturbaciones aditivas o en (Lazar, Heemels, Weiland, & Bemporad, 2006) para sistemas afines a tramos. Para todos estos casos, el conjunto invariante se demuestra que es politópico. Así, el puente entre los conceptos de estabilidad sobre los que se basan las metodologías LMIs, y la computación politópica para el control predictivo con horizonte finito están establecidas.

Nótese que, a pesar de que los modelos borrosos TS con controlador lineal pueden ser analizados del mismo modo que los modelos con incertidumbres politópicas, los modelos borrosos TS en bucle cerrado con controlador PDC (compensación distribuida en paralelo), forman una clase en sí misma, debido a que en su expresión se utiliza un doble sumatorio que contienen las mismas funciones de pertenencia. Por supuesto, en una situación ideal, nuestro objetivo sería obtener el máximo conjunto contractivo (entendido como la mayor región de atracción al origen) para este tipo de modelos en una región de modelado Ω .

Esta cuestión no suele ser tenida en cuenta en la literatura LMI, considerando el problema resuelto una vez exista una solución factible y una función de Lyapunov asociada al problema de optimización LMI. Sin embargo, el mayor equipotencial de Lyapunov contenido en Ω , puede ser una región muy pequeña dentro de nuestra región de interés Ω , a pesar de que la región de atracción real (tanto del modelo borroso del que solo se conocen sus vértices, como del modelo borroso no lineal) sea mucho mayor.

Con el fin de calcular el máximo conjunto invariante independiente de las funciones de pertenencia, seguimos un procedimiento similar a las relajaciones de Polya desarrollado en la literatura LMI, con el que obtener las condiciones lineales asintóticamente necesarias de las condiciones borrosas originales, expresadas como un sumatorio borroso múltiple.

También probaremos que este máximo conjunto invariante asociado a un cierto grado de complejidad Polya, contendrá a cualquier conjunto invariante obtenido mediante cualquier procedimiento basado en LMIs de complejidad Polya análoga.

3.1 CONJUNTOS INVARIANTES Y CONTRACTIVOS

En esta sección vamos a presentar el procedimiento usualmente empleado para la obtención del máximo conjunto invariante y/o contractivo de un modelo borroso. Este procedimiento se basa en un proceso recursivo de conjuntos a un paso.

Sea un modelo borroso TS discreto

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k)(A_i x_k + B_i u_k) \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(x) = 1 \quad \mu_i(x) > 0 \quad \forall i = 1 \dots r \quad (3.2)$$

Y unas restricciones politópicas

$$\Omega = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Rx + Su + s < 0\} \quad (3.3)$$

Dada una acción de control $u = h(x)$ el **conjunto admisible** Ω^h se define como el conjunto de estados que generan una acción de control admisible.

$$\Omega^h = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Rx + Sh(x) + s < 0\} \quad (3.4)$$

Para una ley de control de tipo PDC

$$h(x_k) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k)(F_i u_k) \quad (3.5)$$

El modelo en bucle cerrado se expresa como

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) (A_i + B_i F_j) x_k \quad (3.6)$$

Se define el conjunto $\mathcal{O}^h \in \mathbb{R}^n$ como **invariante en bucle cerrado**, si y sólo si para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $\forall x_k \in \mathcal{O}^h \Rightarrow x_{k+1} \in \mathcal{O}^h$. Y $\mathcal{O}^{h,\infty}(\Omega)$ define el **máximo conjunto invariante en bucle cerrado en Ω** si es invariante en bucle cerrado y contiene a todos los conjuntos invariantes en bucle cerrado contenidos en Ω^h .

El cálculo del máximo conjunto invariante en bucle cerrado $\mathcal{O}^{h,\infty}(\Omega)$ se realiza a partir del conjunto a un paso en bucle cerrado $\mathcal{Q}(\mathbb{T})$ (2.21). Esto es, el conjunto de estados $x_k \in \mathbb{R}^n$ que lleva al modelo al conjunto $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^n$ en un paso $\mathcal{Q}(\mathbb{T}) = \{x_k \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} \in \mathbb{T}\}$.

El siguiente algoritmo resume el procedimiento para el cálculo del máximo conjunto invariante en bucle cerrado.

Algoritmo 3.1

- 1) Hacer $i = 0$, $\mathbb{K}_1 = \emptyset$, $\mathbb{K}_0 = \Omega^h$.
- 2) Mientras $\mathbb{K}_{i+1} \neq \mathbb{K}_i$ repetir
 - a) $\mathbb{K}_{i+1} = (\mathcal{Q}(\mathbb{K}_i) \cap \Omega^h)$
 - b) $i = i + 1$
- 3) $\mathcal{O}^{h,\infty}(\Omega) = \mathbb{K}_i$.

De forma análoga se calcula el máximo conjunto λ -contractivo en bucle cerrado en Ω , representado por $\mathcal{O}^{h,\lambda,\infty}(\Omega)$, siendo λ un escalar $0 < \lambda < 1$. Bastará con sustituir $\mathcal{Q}(\mathbb{K}_i)$ por $\mathcal{Q}(\lambda\mathbb{K}_i)$ en el algoritmo anterior, donde $\lambda\mathbb{K}_i$ representa el conjunto \mathbb{K}_i escalado linealmente por λ . A este nuevo algoritmo modificado lo denominaremos Algoritmo 3.1- λ .

Si existe un conjunto contractivo en bucle cerrado en Ω , significará que el modelo es asintóticamente estable en el conjunto Ω^h , y también es λ -contractivo. De hecho, este λ representa la tasa de decrecimiento que podemos asegurar para dicho modelo y para los estados iniciales contenidos en el conjunto $\mathcal{O}^{h,\lambda,\infty}(\Omega)$.

Los conjuntos contractivos están relacionados con las funciones de Lyapunov, en el sentido que si para un modelo (3.1) existe una función de Lyapunov que cumple que

$$V(\lambda x) \leq V(x) \quad (3.7)$$

$$V(x_k) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega^h; \quad V(0) = 0 \quad (3.8)$$

$$V(x_{k+1}) < V(\lambda x_k) \quad \forall k \geq 0 \quad \forall x \in \Omega^h \setminus 0 \quad (3.9)$$

entonces, el modelo es asintóticamente estable y para cualquier estado inicial contenido en cualquier equipotencial de $V(x) \in \Omega^h$, es λ -contractivo.

Por otro lado, la existencia de un conjunto λ -contractivo implica la existencia de una función de Lyapunov λ -contractiva.

Por definición, el máximo conjunto λ -contractivo contiene a todos los conjuntos λ -contractivos posibles. Y por tanto, si converge el Algoritmo 3.1- λ , encontrará el mayor dominio de atracción al origen con una tasa de decrecimiento λ . Así, cualquier otra función de Lyapunov que cumpla (3.7), (3.8) y (3.9) estará contenida en $\mathcal{O}^{h,\lambda,\infty}(\Omega)$.

3.2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Como se acaba de exponer, el máximo conjunto invariante $\mathcal{O}^{h,\infty}(\Omega)$ y el máximo conjunto λ -contractivo $\mathcal{O}^{h,\lambda,\infty}(\Omega)$ en Ω , se pueden obtener en teoría mediante procesos recursivos de los conjuntos a un paso $\mathcal{Q}(\mathbb{T})$.

En la mayoría de los casos, debido a las no linealidades del modelo, este cálculo es imposible de realizar. Así, procedimientos de cálculo exacto sólo se pueden encontrar en la literatura para una serie limitada de tipos de modelo: lineales (Kerrigan, 2000)(Pluymers, Rossiter, Suykens, & De Moor, 1996), politópicos (Gilbert & Tan, 1991), con perturbaciones aditivas (Rakovic, Kerrigan, Mayne, & Kouramas, 2007), afines a tramos (Lazar, Heemels, Weiland, & Bemorad, 2006) y lineales con restricciones no convexas (Ariño & Pérez, 2010).

Sin embargo, para los modelos borrosos TS, puesto que son interpolaciones convexas de modelos lineales, se van a poder extender las ideas que caracterizan los sumatorios borrosos multi-dimensionales para obtener aproximaciones interiores politópicas del máximo conjunto λ -contractivo y del máximo conjunto

invariante. La precisión del resultado obtenido dependerá de la complejidad de la relajación utilizada sobre el sumatorio borroso multidimensional.

3.3 CONJUNTOS A UN PASO

Como se puede observar, el Algoritmo 3.1 está basado en la computación recursiva del conjunto a un paso en bucle cerrado $\mathcal{Q}(\mathbb{T})$ (2.21). En el caso de modelos borrosos, el conjunto a un paso depende de las funciones de pertenencia, que son en general no lineales. Este hecho hace que la obtención exacta de de estos conjuntos, así como su aplicación, un problema de difícil concreción. Por tanto, nuestro objetivo será encontrar una aproximación interior politópica del conjunto a un paso.

Por simplicidad, consideremos que la región de definición del modelo borroso es una región politópica sobre la que se ha aplicado la técnica de sector no lineal para la obtención del modelo borroso TS y sobre la que existen ciertas restricciones sobre las entradas y los estados (por ejemplo, para evitar la saturación). Cuando estas restricciones son afines, se pueden expresar como en (3.3), redefiniéndola como:

$$\Omega = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus R'x + Su + s < 0\} \quad (3.10)$$

Se define una ley de control $u = h(x)$, así, las restricciones se pueden expresar únicamente sobre \mathbb{R}^n .

$$\Omega^h = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus R'x + Sh(x) + s < 0\} \quad (3.11)$$

3.3.1 LEY DE CONTROL LINEAL

Si la ley de control definida es un controlador lineal $h(x) = Fx$, las restricciones quedan

$$\Omega^h = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus (R' + SF)x + s < 0\} \quad (3.12)$$

Y el modelo en bucle cerrado se expresa como

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i (A_i + B_i F) x_k \quad (3.13)$$

Entonces, redefiniendo $R = (R' + SF)$, el conjunto a un paso exacto para las restricciones Ω^h se expresa como

$$\mathcal{Q}(\Omega^h) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \sum_{i=1}^r \mu_i (R(A_i + B_i F)x + s) < 0 \right\} \quad (3.14)$$

En caso de no tener más conocimiento de las funciones de pertenencia, definimos el conjunto “shape independent” como el conjunto a un paso para cualquier posible realización de μ :

$$\mathcal{Q}^{si}(\Omega^h) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \sum_{i=1}^r \mu_i (R(A_i + B_i F)x + s) < 0 \quad \forall \mu \in \Delta_r \right\} \quad (3.15)$$

Debido a que el sumatorio de todos los términos de la desigualdad queremos que sea negativo, las siguientes condiciones suficientes definen una primera aproximación interior politópica de $\mathcal{Q}^{si}(\Omega^h)$, donde las restricciones son válidas para cualquiera de los vértices o modelos lineales del modelo borroso.

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\Omega^h) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus R(A_i + B_i F)x + s < 0 \quad \forall i\} \quad (3.16)$$

En este caso concreto, donde la ley de control utilizada es una ley de control lineal, el subconjunto a un paso $\tilde{Q}(\Omega^h)$ es exactamente igual al subconjunto a un paso $Q^{si}(\Omega^h)$.

3.3.2 LEY DE CONTROL PDC

Alternativamente, si la ley de control es de tipo PDC, las restricciones se expresan como

$$\Omega^h = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \sum_{j=1}^r \mu_j(x) (R' + SF_j)x + s < 0 \right\} \quad (3.17)$$

Que son generalmente no politópicas, por depender de las funciones de pertenencia, las cuales son habitualmente no lineales. Este conjunto está caracterizado por una colección de desigualdades no lineales, de difícil computación. Sin embargo, debido al hecho de que todas las funciones de pertenencia son funciones positivas, podremos definir una primera aproximación interior politópica para cualquier posible realización de las funciones de pertenencia. Esta primera aproximación se define como:

$$\tilde{\Omega}^h = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus (R' + SF_j)x + s < 0 \quad \forall j = 1 \dots r\} \quad (3.18)$$

Para evitar arrastrar la tilde en el resto del capítulo y el superíndice h , y obteniendo R por yuxtaposición vertical de cada término de $(R' + SF_j)$ con s , expresaremos la forma politópica de $\tilde{\Omega}^h$ en \mathbb{R}^n como

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus Rx + s < 0\} \quad (3.19)$$

También simplificaremos la notación y denotaremos $\mathcal{O}(\Omega)$ y $\mathcal{O}^\lambda(\Omega)$ para referirnos a los máximos conjuntos invariante y contractivo contenidos en $\tilde{\Omega}^h$. Y lo mismo se aplica a los conjuntos a i -pasos, donde \mathbb{K}_i se refiere a $\mathbb{K}_i^h(\tilde{\Omega}^h, \mathbb{T})$.

Con esta ley de control, el modelo en bucle cerrado queda como un doble sumatorio borroso:

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j (A_i + B_i F_j) x_k \quad (3.20)$$

Así, el conjunto a un paso exacto se expresa como:

$$Q(\Omega) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j (R(A_i + B_i F_j)x + s) < 0 \right\} \quad (3.21)$$

y el conjunto politópico para cualquier posible realización de las funciones de pertenencia

$$Q^{si}(\Omega) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j (R(A_i + B_i F_j)x + s) < 0 \quad \forall \mu \in \Delta_r \right\} \quad (3.22)$$

De forma análoga al Algoritmo 3.1, podemos obtener el conjunto invariante “shape independent” $\mathcal{O}^{si}(\Omega)$ sustituyendo en dicho algoritmo $Q(\mathbb{K}_i)$ por $Q^{si}(\mathbb{K}_i)$. Nótese que en la primera iteración del Algoritmo 3.1, se aplican las matrices R y s de las restricciones sobre \mathbb{R}^n que definen a Ω , sin embargo, en las iteraciones posteriores, las matrices R y s en (3.22) hacen referencia a las restricciones sobre \mathbb{R}^n que definen a \mathbb{K}_i .

El conjunto $\mathcal{O}^{si}(\Omega)$ es politópico, y es el máximo subconjunto invariante de $\mathcal{O}(\Omega)$, sin mayor conocimiento de las funciones de pertenencia que el hecho de pertenecer al simplex (3.2).

Una primera aproximación interior politópica del conjunto a un paso $\mathcal{Q}^{si}(\Omega)$, donde las restricciones son válidas para cualquier vértice o modelo lineal de modelo borroso, se expresa como:

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid R(A_i + B_i F_j)x + s < 0 \quad \forall i, j\} \quad (3.23)$$

Y de forma análoga, obtenemos el conjunto invariante $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$, válido para cualquier vértice del modelo borroso, de aplicar el Algoritmo 3.1, sustituyendo $\mathcal{Q}(\mathbb{K}_i)$ por $\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbb{K}_i)$.

En esta caso, $\tilde{\mathcal{Q}}(\Omega)$ no coincide con $\mathcal{Q}^{si}(\Omega)$, y por tanto, el conjunto invariante $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$ tampoco coincide con $\mathcal{O}^{si}(\Omega)$, sino que $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega) \subseteq \mathcal{O}^{si}(\Omega)$.

Con el fin de obtener la mejor aproximación interior politópica de $\mathcal{O}(\Omega)$, y siguiendo con la filosofía de relajación de las condiciones suficientes borrosas que se aplica en la literatura LMI, comentadas en la sección 2.4.8, desarrollamos los resultados expuestos a continuación.

Nota: Razonamientos similares a los expuestos en esta sección pueden ser aplicados a los conjuntos λ -contractivos. Bastará con sustituir en el Algoritmo 3.1 el conjunto a un paso exacto $\mathcal{Q}(\mathbb{K}_i)$ por su correspondiente conjunto a un paso escalado $\mathcal{Q}(\lambda\mathbb{K}_i)$, $\tilde{\mathcal{Q}}(\lambda\mathbb{K}_i)$ y $\mathcal{Q}^{si}(\lambda\mathbb{K}_i)$.

3.4 APROXIMACIÓN INTERIOR POLITÓPICA

Hemos visto que cuando aplicamos una ley de control PDC al modelo borroso, el conjunto a un paso $\mathcal{Q}^{si}(\Omega)$ suele ser difícil de computar. Y por otra parte, la aproximación interior politópica $\tilde{\mathcal{Q}}(\Omega)$ conduce a un conjunto generalmente muy reducido.

Así, haciendo uso de los principios de la programación copositiva paramétrica, vamos a obtener una serie de aproximaciones interiores politópicas que converjan asintóticamente a conjunto $\mathcal{Q}^{si}(\Omega)$.

3.4.1 POLYA

El conjunto a un paso exacto $\mathcal{Q}(\Omega)$ puede ser expresado como un polinomio copositivo de la forma:

$$\mathcal{Q}(\Omega) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q_{ij} > 0 \right\} \quad (3.24)$$

Con $Q_{ij} = -(R(A_i + B_i F_j)x + s)$.

Por tanto nos encontramos con un caso particular del problema de copositividad de un polinomio $\mathcal{E} > 0$.

$$\mathcal{E} = \sum_{i_1=1}^r \dots \sum_{i_p=1}^r (\mu_{i_1} \dots \mu_{i_p}) \cdot Q_{i_1 \dots i_p} \quad (3.25)$$

Con $Q_{i_1 \dots i_p} = -(R(A_{i_1} + B_{i_1} F_{i_2})x + s)$.

Basándose en el teorema de Polya (Pòlya & Szegő, 1928), introducido en la sección 2.3.1, vamos a sustituir las condiciones del conjunto a un paso $\mathcal{Q}(\Omega)$ por un conjunto de condiciones suficientes que estarán expresadas para un cierto grado de complejidad Polya d .

Con la notación multi-índice desarrollada en la sección 2.3.1, la condición de positividad de un sumatorio borroso de dimensión p se puede expresar como

$$\mathcal{E} = \sum_{i \in \mathbb{I}_p} \mu_i Q_i > 0 \quad (3.26)$$

Volviendo al problema de comprobar la positividad de (3.25), la expresión anterior será equivalente a

$$\mathcal{E} = \sum_{i \in \mathbb{I}_p} \mu_i Q_i = \sum_{i \in \mathbb{I}_p^+} \mu_i \tilde{Q}_i > 0 \quad (3.27)$$

$$\tilde{Q}_i = \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} Q_j \quad (3.28)$$

Así, como primera aproximación a la copositividad de (3.25), el siguiente conjunto de desigualdades son condición suficiente.

$$\tilde{Q}_i > 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}_p^+ \quad (3.29)$$

Haciendo uso del hecho evidente que

$$\sum_{i \in \mathbb{I}_p} \mu_i = \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \right)^n = 1 \quad (3.30)$$

con n un entero cualquiera, podemos ampliar (3.27) multiplicándolo por (3.30), quedando:

$$\mathcal{E} = \sum_{j \in \mathbb{I}_d} \mu_j \sum_{k \in \mathbb{I}_p} \mu_k Q_i = \sum_{i \in \mathbb{I}_{p+d}} \mu_i Q_i \quad (3.31)$$

donde sólo los primeros p subíndices de Q_i son considerados, es decir, que

$$Q_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+d}} = Q_{i_1 \dots i_p} \quad (3.32)$$

Por tanto, aplicando el teorema de Polya, la positividad de (3.27) es equivalente a comprobar

$$\mathcal{E} = \sum_{i \in \mathbb{I}_{p+d}^+} \mu_i \tilde{Q}_i > 0 \quad (3.33)$$

de donde se deduce que la siguiente expresión es condición suficiente de (3.27)

$$\tilde{Q}_i > 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}_{p+d}^+ \quad (3.34)$$

Más adelante, en la sección 3.7, probaremos que a medida que aumenta el índice d , que denotaremos “grado de complejidad Polya”, disminuye su conservativismo, pero aumenta su coste computacional. De hecho, las condiciones (3.34) se vuelven equivalentes al problema original (3.22) cuando $d \rightarrow \infty$. Es decir, son asintóticamente necesarias. En consecuencia,

$$\tilde{Q}(\Omega) \subseteq \tilde{Q}^d(\Omega) \subseteq \tilde{Q}^{d+1}(\Omega) \subseteq Q^{si}(\Omega) \subseteq Q(\Omega) \quad (3.35)$$

con

$$\tilde{Q}^d(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{Q}_i > 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}_{p+d}^+\} \quad (3.36)$$

$$\tilde{Q}_i = \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} Q_j \quad (3.37)$$

3.4.1.1 Modelo expandido Polya

Vamos a definir el modelo expandido Polya como el resultado de aplicar la expansión Polya a un modelo borroso TS en bucle cerrado con acción de control PDC (3.6):

$$x_{k+1} = \sum_{i \in \mathbb{I}_{2+d}} \mu_i \tilde{G}_i x_k = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) (A_i + B_i F_j) x_k \quad (3.38)$$

Donde \tilde{G}_i representan los vértices del nuevo modelo expandido Polya.

Esto permite entender que así como el conjunto a un paso $\tilde{Q}(\Omega)$ es el resultado de aplicar las restricciones a todos y cada uno de los vértices del modelo borroso (3.6), el conjunto a un paso $\tilde{Q}^d(\Omega)$ es el resultado de aplicar las restricciones a todos y cada uno de los vértices del modelo expandido Polya.

3.4.2 TRIANGULACIÓN

En esta sección presentaremos otro procedimiento de obtención de aproximaciones politópicas interiores del conjunto a un paso exacto $Q(\Omega)$, basadas en la triangulación, o en general, en particiones simplex de mayor dimensión (Kruszewski, Sala, Guerra, & Ariño, 2009).

Vamos a definir Δ como la partición simple de dimensión $r - 1$, cuyos r -vértices son la base canónica en \mathbb{R}^n .

$$v_i^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0] \quad (3.39)$$

De forma que el vector columna M esté formado de apilar las funciones de pertenencia de la forma

$$M = \sum_{i=1}^r \mu_i v_i = [\mu_1 \ \dots \ \mu_r]^T \quad (3.40)$$

Puesto que $\sum_{i=1}^r \mu_i = 1$, $M \in \Delta$.

Sea una familia $\mathcal{P} = \{\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(m)}\}$ de particiones simplex que satisfacen que

$$\Delta = \bigcup_{k=1}^m \Delta^{(k)} \quad (3.41)$$

Llamando $v_i^k \in \text{co}\{v_1 \dots v_r\}$ a cada vértice de $\Delta^{(k)}$ y los ejes coordenados de M en $\Delta^{(k)}$ como

$$M^{(k)} = [\mu_1^{(k)} \ \dots \ \mu_r^{(k)}]^T \quad (3.42)$$

Las siguientes ecuaciones se cumplen

$$\sum_{i=1}^r \mu_i^k = 1 \quad , \quad \mu_i^k \geq 0 \quad (3.43)$$

Y obtenemos la siguiente transformación de $\Delta^{(k)}$ y Δ como

$$M = [v_1^{(k)} \dots v_r^{(k)}]^T M^{(k)} \quad (3.44)$$

Entonces, dada una partición simplex Δ compuesta por m subconjuntos $\{\Delta^{(1)} \dots \Delta^{(m)}\}$, cada restricción de cada partición simplex puede ser definida como:

$$Q(\Omega)^{(k)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i^{(k)} \mu_j^{(k)} Q_{ij}^{(k)} > 0 \right\} \quad (3.45)$$

Con $Q_{ijl}^{(k)} = v_i^{(k)T} Q_l v_j^{(k)}$ el elemento l -ésimo del vector $Q_{ij}^{(k)}$, donde

$$Q_l = \begin{pmatrix} Q_{11l} & \dots & Q_{1rl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1l} & \dots & Q_{rrl} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Por lo que las restricciones originales son equivalentes a conseguir simultáneamente que todas las particiones simplex:

$$Q(\Omega) = \bigcap_{k=1}^m Q(\Omega)^{(k)} \quad (3.47)$$

El objetivo de hacer estas particiones es que comprobar la positividad de todos los $Q_{ij}^{(k)}$ para cada $k = 1 \dots m$ e intersectar estas regiones, es menos conservativo que comprobar la positividad de Q_{ij} , por lo que obtendremos un subconjunto politópico más grande que si aplicáramos únicamente las desigualdades iniciales. Consecuentemente,

$$\tilde{Q}(\Omega) \subseteq \tilde{Q}^{(m)}(\Omega) \subseteq Q(\Omega) \quad (3.48)$$

con

$$\tilde{Q}^{(m)}(\Omega) = \bigcap_{k=1}^m \tilde{Q}(\Omega)^{(k)} \quad (3.49)$$

$$\tilde{Q}(\Omega)^{(k)} = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus Q_{ij}^{(k)} > 0 \quad \forall i, j\} \quad (3.50)$$

También se puede demostrar que el conservativismo desaparece a medida que el tamaño de los subconjuntos de $\Delta^{(k)}$ decrece, es decir, son asintóticamente suficientes.

Nota: Podemos combinar las dos relajaciones descritas, de Polyá y por triangulación, para conseguir una sola y maximizar más deprisa el subconjunto politópico deseado. Los subconjuntos politópicos a un paso se definirían como:

$$\tilde{Q}^{(m),d}(\Omega) = \bigcap_{k=1}^m \tilde{Q}^d(\Omega)^{(k)} \quad (3.51)$$

$$\tilde{Q}^d(\Omega)^{(k)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} Q_j^{(k)} > 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}_{p+d}^+ \right\} \quad (3.52)$$

El siguiente algoritmo explica el criterio general para generar particiones más precisas y el procedimiento para construir el conjunto de restricciones asociadas. Con el fin de minimizar el coste computacional de evaluación de las particiones que lleven a restricciones redundantes, inicialmente evaluaremos las restricciones obtenidas para los vértices de cada partición ($Q_{ii}^{(k)} > 0$), y luego comprobar uno por uno el resto de restricciones de cada partición

$$\sum_{j_1 j_2 \in \mathcal{P}(i)} Q_{j_1 j_2}^{(k)} > 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}_p^+ ; j_1 \neq j_2 \quad (3.53)$$

y si alguna de estas restricciones conduce a nuevas restricciones no redundantes, entonces una nueva partición es generada dividiendo la partición previa en dos mitades, con el nuevo vértice localizado entre $v_i^{(k)}$ y $v_j^{(k)}$. El algoritmo concluye cuando no se puedan encontrar nuevas restricciones son redundantes (con una cierta tolerancia).

Algoritmo 3.2

- 1) Sea una partición simplex original $\Delta = \{\Delta^{(1)}\}$ con vértices $[v_1^{(1)} \dots v_r^{(1)}]$ que son la base canónica en \mathbb{R}^r . Hacemos $t=1$ y $k=1$. Y originalmente, el politopo $Q_f = \mathbb{R}^n$.
- 2) Evaluar $Q_{ijl}^{(k)} = v_i^{(k)T} Q_l v_j^{(k)}$ y el conjunto a un paso politópico con las restricciones en los vértices

$$Q_v = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus Q_{ii}^{(k)} > 0 \quad \forall i \right\}$$

Inicializar los índices $i=1$ y $j=2$.

- 3) Obtener $Q_s = Q_v \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus Q_{ij}^{(k)} > 0 \right\}$
- 4) Si $Q_s \neq Q_v$ entonces
 - $t=t+1$
 - $v^{(t)} = [v_1^{(k)} \dots v_{i-1}^{(k)}, \frac{1}{2}(v_i^{(k)} + v_j^{(k)}), v_{i+1}^{(k)} \dots v_r^{(k)}]$
 - $v^{(k)} = [v_1^{(k)} \dots v_{j-1}^{(k)}, \frac{1}{2}(v_i^{(k)} + v_j^{(k)}), v_{j+1}^{(k)} \dots v_r^{(k)}]$
 - Ir al paso 2
- 5) $k=k+1, Q_f = Q_f \cap Q_v$
- 6) Si $k \leq t$, ir al paso 2.
- 7) $\tilde{Q}^{(m)}(\Omega) = Q_f$

3.5 APROXIMACIONES INTERIORES CON CONOCIMIENTO DE LAS FUNCIONES DE PERTENENCIA

En esta sección vamos a proponer metodologías para reducir el conservativismo del conjunto a un paso, cuando hacemos uso de alguna información sobre las funciones de pertenencia.

3.5.1 SOLAPAMIENTO

En ciertos modelos borrosos TS, algunas zonas del posible espacio de las funciones de pertenencia pueden ser excluidas (o parcialmente excluidas), por lo que el tamaño del conjunto donde las funciones de pertenencia pueden tomar valores se reduce. Este hecho puede ser expresado por la desigualdad

$$\mu^T S \mu + t \mu + v \leq 0 \quad (3.54)$$

donde $\mu = (\mu_1 \dots \mu_r)^T, t \in \mathbb{R}^{1 \times r}, v \in \mathbb{R}$ y $S \in \mathbb{R}^{r \times r}$, y los elementos de S se denotan s_{ij} .

Como las funciones de pertenencia conforman una partición borrosa, se puede probar (Sala & Ariño, 2007) que (3.54) es equivalente a

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \beta_{ij} \leq 0 \quad (3.55)$$

Con $\beta_{ij} = (s_{ij} + t_i + v)$.

Multiplicando por un vector arbitrario con todos sus elementos positivos $L \in \mathbb{R}^p$.

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \beta_{ij} L \leq 0 \quad (3.56)$$

Entonces, al problema original de copositividad de \mathcal{E} (3.25) se le puede restar la expresión anterior, y si es positiva, también lo será el problema original.

$$\mathcal{E} > \mathcal{E} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \beta_{ij} L = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j (Q_{ij} + \beta_{ij} L) \quad (3.57)$$

Por tanto la positividad del problema original puede ser probada comprobando la existencia de un vector positivo $L \in \mathbb{R}^p$ tal que la expresión anterior sea positiva.

Hay que destacar que si el vector L fuera nulo, estas nuevas condiciones serían idénticas a las condiciones iniciales, por lo que no pueden ser más conservativas que las originales.

Resultados similares pueden extenderse para considerar múltiples límites a las funciones de pertenencia $\beta_{ij}^{[k]}$, $k = 1 \dots t$, si existe k vectores $L_k \geq 0 \in \mathbb{R}^p$ tal que la siguiente condición se cumpla

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \left(Q_{ij} + \sum_{k=1}^t \beta_{ij}^{[k]} L_k \right) > 0 \quad (3.58)$$

Podemos combinar los resultados obtenidos en la sección precedente para encontrar las condiciones necesarias y asintóticamente suficientes que nos permitan obtener la máxima aproximación interior politópica del conjunto a un paso, dado cierto conocimiento de las funciones de pertenencia.

Un caso particular interesante de las limitaciones sobre las funciones de pertenencia aparece cuando existe un solapamiento sobre las mismas. Asumiendo un límite al solapamiento entre dos funciones de pertenencia dadas μ_k y μ_l , expresado como:

$$\mu_k \mu_l \leq \gamma_{kl} \quad (3.59)$$

Puede escribirse (3.59) como un caso particular de (3.54) con $t_i = 0$ y

$$s_{kl} = s_{lk} = \frac{1}{2}, \quad v = -\gamma_{kl} \quad (3.60)$$

$$s_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \neq (k, l) \quad (3.61)$$

Resultando que $\beta_{lk} = \beta_{kl} = \frac{1}{2} - \gamma_{kl}$ y para el resto $\beta_{ij} = -\gamma_{kl}$.

3.5.2 MODELOS LOCALES

Con el fin de obtener un espacio invariante más grande, el modelo borroso TS original es modificado usando la información contenida en las funciones de pertenencia. Cuando sabemos que la trayectoria del modelo se va a situar en una región más reducida que la región de definición del modelo borroso, podemos hacer uso del conocimiento de la forma de las funciones de pertenencia para reducir el conservativismo de las desigualdades borrosas del problema original de copositividad de \mathcal{E} (3.25).

Definamos primeramente una nueva región politópica que define la región local, tal que $\Omega^* \subseteq \Omega$, definida por:

$$\Omega^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid R^*x + s^* \leq 0\} \quad (3.62)$$

Las funciones de pertenencia $\mu(x) = [\mu_1 \dots \mu_r]^T$ del modelo borroso pueden ser expresadas como una suma convexa de varios vectores v_p , que se calculan a partir de los valores extremos de las funciones de pertenencia:

$$\mu(x) = \sum_{p=1}^{r'} \beta_p(x) \cdot v_p \quad \forall x \in \Omega^* \quad (3.63)$$

$$\sum_{p=1}^{r'} \beta_p(x) = 1; \quad \beta_p(x) \geq 0; \quad \forall x \in \Omega^*; \quad p = 1 \dots r' \quad (3.64)$$

El proceso de re-modelado tiene la virtud de replantear el problema borroso como otro problema borroso dependiente de unas nuevas funciones de pertenencia $\beta(x) = [\beta_1 \dots \beta_r]^T$, que pese a ser desconocidas, nos permite utilizar las metodologías para plantear las restricciones suficientes que se utilizan más frecuentemente.

Así, dentro de la región local Ω^* , el modelo es exactamente igual a:

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{r'} \beta_i(x_k)(A_i^*x_k + B_i^*u_k) \quad (3.65)$$

$$u_{k1} = \sum_{j=1}^{r'} \beta_j(x_k)F_j^*x_k \quad (3.66)$$

$$A_p^* = \sum_{i=1}^r v_{pi}A_i; \quad B_p^* = \sum_{i=1}^r v_{pi}B_i; \quad F_p^* = \sum_{j=1}^r v_{pj}F_j \quad (3.67)$$

Y por tanto, el conjunto a 1 paso exacto se puede representar para el modelo local Ω^* como

$$\mathcal{Q}^*(\Omega^*) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i,j} \beta_i\beta_j Q_{ij}^* < 0 \right\} \quad (3.68)$$

$$Q_{ij}^* = R^*(A_i^* + B_i^*F_j^*)x + s^* \quad (3.69)$$

de donde podemos derivar las condiciones suficientes y asintóticamente estables siguientes:

$$\tilde{Q}^{*d}(\Omega^*) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{Q}_i^* < 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}_{p+d}^+\} \quad (3.70)$$

$$\tilde{Q}_i^* = \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} \tilde{Q}_j^* \quad (3.71)$$

$$\tilde{Q}_j^* = R^*(A_{j_1}^* + B_{j_1}^* F_{j_2}^*)x + s^* \quad (3.72)$$

La idea es que mediante este procedimiento, a medida que la región local disminuye también se reduce la incertidumbre y los modelos locales definidos para cada nuevo vértice convergen entre sí, por lo que se reduce la no linealidad del modelo. El caso extremo se produce cuando la región local define un único punto de Ω , donde los modelos locales convergen a un único modelo local que corresponde exactamente con la linealización del modelo en ese punto.

3.6 COMPARATIVA CON OTROS CONJUNTOS INVARIANTES

En esta sección, nuestro objetivo es comparar los conjuntos invariantes politópicos obtenidos por los procedimientos desarrollados en la sección 3.4 y 3.5 con los ya conocidos conjuntos invariantes que se obtienen mediante la metodología LMI derivada de la teoría de estabilidad de Lyapunov y sus funciones cuadráticas. También pretendemos asegurar la convergencia de los algoritmos propuestos para estos invariantes politópicos.

Siguiendo con la notación expuesta, llamaremos $\mathcal{O}(\Omega)$ al máximo conjunto invariante para el modelo borroso no lineal, que se obtiene de aplicar el Algoritmo 3.1 con el conjunto a 1 paso exacto $\mathcal{Q}(\Omega)$. Así, de forma análoga denotamos $\mathcal{O}^{si}(\Omega)$, $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$, $\tilde{\mathcal{O}}^d(\Omega)$ a los conjuntos invariantes politópicos que se obtienen de aplicar el Algoritmo 3.1 usando respectivamente los conjuntos a 1 paso aproximados $\mathcal{Q}^{si}(\Omega)$, $\tilde{\mathcal{Q}}(\Omega)$, $\tilde{\mathcal{Q}}^d(\Omega)$.

Hay que destacar que los conjuntos a un paso $\tilde{\mathcal{Q}}(\Omega)$, y sus relajaciones independientes de las funciones de pertenencia $\tilde{\mathcal{Q}}^d(\Omega)$, son conjuntos politópicos, ya que Ω es politópica por definición.

Por tanto, eligiendo un grado de complejidad Polya d , la computación del conjunto invariante dará lugar a una aproximación interior politópica del máximo conjunto invariante. Sin embargo, dada la exactitud asintótica de los resultados, estas aproximaciones interiores politópicas tenderán al máximo conjunto invariante $\mathcal{O}^{si}(\Omega)$, a medida que d tiende a infinito (Sala & Ariño, 2007).

Introduciendo el factor de contractividad λ , obtenemos el Algoritmo 3.1- λ , el cual presenta una ligera modificación respecto al Algoritmo 3.1 ya que usa los conjuntos a 1 paso $\mathcal{Q}^{si}(\lambda\Omega)$, $\tilde{\mathcal{Q}}(\lambda\Omega)$, $\tilde{\mathcal{Q}}^d(\lambda\Omega)$. Si el algoritmo converge, permitirá calcular el máximo subconjunto probable del máximo conjunto λ -contractivo, que denotamos por $\mathcal{O}^{\lambda,si}(\Omega)$, $\tilde{\mathcal{O}}^\lambda(\Omega)$, $\tilde{\mathcal{O}}^{\lambda,d}(\Omega)$ con las siguientes propiedades:

- Es politópico, por la naturaleza politópica de $\tilde{\mathcal{Q}}^d(\Omega)$.
- Es λ -contractivo.
- A medida que $d \rightarrow \infty$, $\tilde{\mathcal{O}}^{\lambda,d}(\Omega) \rightarrow \mathcal{O}^{\lambda,si}(\Omega)$.

Como se vio en el discurso desarrollado en la sección 3.1; **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, los conjuntos contractivos obtenidos mediante esta metodología darán siempre mejores resultados que cualquier otra posible función de Lyapunov factible.

En los modelos borrosos en bucle cerrado con ley de control PDC, los conjuntos a un paso vienen expresados por un doble sumatorio borroso con funciones de pertenencia generalmente no lineales, lo que hace que la implementación de la solución exacta genérica sea un problema intratable.

En principio, como las modificaciones para obtener el máximo conjunto λ -contractivo introducen cierto conservativismo, podría existir alguna función de Lyapunov no lineal que conduzca a mejores resultados y cuyos conjuntos invariantes asociados sean más grandes que la aproximación politópica obtenida.

Sin embargo, el siguiente resultado muestra que el conjunto invariante (y el conjunto λ -contractivo) surgido de los algoritmos desarrollados en este capítulo, siempre darán mejores resultados que cualquier otra función de Lyapunov obtenida para un mismo grado de complejidad Polya, si las mismas condiciones suficientes particulares son usadas para la obtención de las variables de decisión de esta función de Lyapunov.

Teorema 3-1

Si x pertenece al interior de máximo conjunto λ -contractivo “shape independent” en Ω , denominado $\mathcal{O}^{\lambda,si}(\Omega)$, entonces, existe un d finito tal que x pertenece al conjunto $\tilde{\mathcal{O}}^{\lambda,d}(\Omega)$.

Demostración: Considérese un t arbitrario, tal que hayamos obtenido un conjunto politópico $\mathbb{K}_t^{si}(\Omega, \Omega)$ independiente de la forma de μ , entonces, si x pertenece al interior de $\mathbb{K}_{t+1}^{si}(\Omega, \Omega)$ existe un d_h finito tal que $x \in \tilde{\mathcal{Q}}^d(\lambda \mathbb{K}_t^{si}(\Omega, \Omega))$ debido a la naturaleza exacta de la expansión Polya.

Así, empezando por $\mathbb{K}_0^{si}(\Omega, \Omega) = \Omega$, una argumentación inductiva prueba que si x pertenece al interior de conjunto a N -pasos $\mathbb{K}_N^{si}(\Omega)$, existe una secuencia $d_1 \dots d_N$ tal que generando $\mathbb{K}_{t+1}^{si}(\Omega, \Omega) = \tilde{\mathcal{Q}}^{d_t}(\lambda \mathbb{K}_t^{si}(\Omega, \Omega)) \cap \Omega$, entonces $x \in \mathbb{K}_N^{si}(\Omega, \Omega)$. Como el conservativismo de las condiciones Polya decrecen a medida que crece el grado de complejidad Polya d , eligiendo $d = \max_h d_h$, resulta que $\mathbb{K}_N^{si}(\Omega, \Omega) \subset \mathbb{K}_N^d(\Omega, \Omega)$. ■

3.7 CONVERGENCIA

Es importante resaltar que el Teorema 3-1 muestra que el Algoritmo 3.1- λ conseguirá igualar cualquier conjunto contractivo que no haga uso de ninguna información contenida en las funciones de pertenencia más allá de pertenecer al simplex (3.2), puesto que es asintóticamente convergente a $\mathcal{O}^{\lambda,si}(\Omega)$.

Hay que destacar que aunque nada dice del valor del grado de complejidad Polya d , necesario, ni del número de pasos, para muchos casos, algunos resultados relativos a d y a N van a poder obtenerse.

Muchas de las condiciones LMI presentadas en la literatura son equivalentes a encontrar una función de Lyapunov convexa tal que

$$V(\tilde{G}_i x) < V(\gamma x) \quad \forall i \in \mathbb{I}_{2+d}^+ \quad (3.73)$$

donde los parámetros de V son desconocidos y \tilde{G}_i son los vértices del modelo borroso expandido Polya (3.38). Ver sección 2.4 para más detalle.

Para esta clase de condiciones, se va a probar que el conjunto invariante obtenido está dentro del propuesto en la sección 3.4.1 con el mismo grado de complejidad Polya d .

Proposición 3-1

Si existe una función de Lyapunov convexa tal que

$$V(\tilde{G}_i x) < V(\gamma x) \quad \forall i \in \mathbb{I}_{2+d}^+ \quad (3.74)$$

Entonces, el conjunto invariante más grande obtenido mediante el Algoritmo 3.1- λ contiene a cualquier equipotencial $V(x) \leq V_c$ incluida en Ω .

Demostración: Como V es una función de Lyapunov, el conjunto $V(x) \leq V_c$ es λ -contractivo para el modelo dado. Y como el conjunto obtenido mediante el Algoritmo 3.1- λ es el máximo conjunto λ -contractivo, la proposición queda demostrada. ■

Proposición 3-2

Si el modelo en bucle cerrado es tal que existe una función de Lyapunov convexa tal que para cierto γ se cumple que

$$V(\tilde{G}_i x_k) < V(\gamma x_k) \quad \forall i \in \mathbb{I}_{2+d}^+ \quad (3.75)$$

Entonces, el Algoritmo 3.1- λ converge para un $\lambda > \gamma$ en un número finito de pasos. El número de pasos está acotado por m , siendo éste definido como el mínimo número natural tal que

$$\max_{x \in \Omega} V(\gamma^m x) \leq \min_{x \in \delta\Omega} V(\lambda^m x) \quad (3.76)$$

Donde $\delta\Omega$ hace referencia a la frontera de Ω .

Demostración: Para cualquier $x_0 \in \Omega$, considerando un instante de tiempo k , si la trayectoria cumple que $x_j \in \Omega$ con $j \leq k$, entonces tenemos que

$$V(x_k) < \max_{x \in \Omega} V(\gamma^k x) \quad (3.77)$$

Y para $k = m$, tenemos que $V(x_m) \leq \min_{x \in \delta\Omega} V(\lambda^k x)$ y por tanto pertenece al invariante de la función de Lyapunov que es λ -contractiva con $\gamma < \lambda$. Así, usando el Teorema 3-1,

$$\theta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus V(x) < \min_{x \in \delta\Omega} V(\lambda^k x) \right\} \subset \tilde{\mathcal{O}}^{\lambda,d}(\Omega) \quad \blacksquare \quad (3.78)$$

En resumen, todos los puntos iniciales cuyas trayectorias futuras no escapan de Ω en m pasos, nunca escapan, y por tanto $\mathbb{K}_m = \mathbb{K}_{m+1} = \mathbb{K}_\infty$, y el algoritmo converge en un máximo de m pasos.

Nota: El valor máximo de $V(x)$ en Ω se encuentra en la frontera de Ω , denotado por $\delta\Omega$ debido a que $V(x)$ es convexa. Y no existe ningún número natural m tal que $\gamma > \lambda$, y que $\gamma = \lambda$ solo si existe una función de Lyapunov $V(x)$ constante en toda la frontera de Ω . Así se justifica la elección de $\lambda > \gamma$.

Corolario 3-1

Para una función de Lyapunov cuadrática, el valor de m viene dado por:

$$m = \frac{1}{2} \left(\frac{\log V_{\min} - \log V_{\max}}{\log \gamma - \log \lambda} \right) \quad (3.79)$$

Donde V_{\min} y V_{\max} son respectivamente el mínimo y el máximo valor de la función de Lyapunov en $\delta\Omega$.

De hecho, la fórmula de arriba se puede resolver fácilmente puesto que

$$\max_{x \in \delta\Omega} \gamma^{2k} x^T P x \leq \min_{x \in \delta\Omega} \lambda^{2k} x^T P x \quad (3.80)$$

Corolario 3-2

Si el Algoritmo 3.1- λ converge en un número finito de iteraciones, entonces existe una función de Lyapunov politópica que prueba la λ -contractividad con $\lambda > \gamma$ en la región obtenida por el algoritmo.

De hecho, expresando directamente el resultado del algoritmo, que es un politopo, para una cierta matriz K

$$\tilde{\Theta}^{\lambda,d}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Kx \leq 1\} \quad (3.81)$$

entonces, $V(x) = \max(K_i x)$, con K_i la fila i -ésima de K , es una función de Lyapunov λ -contractiva, porque $\tilde{\Theta}^{\lambda,d}(\Omega)$ es λ -contractiva.

3.7.1 COMPARATIVA

Comparando los resultados anteriores con las equipotenciales de Lyapunov obtenidas mediante métodos de optimización convexa para resolver problemas LMIs para los modelos borrosos, se destacan los siguientes resultados.

Para conseguir que se cumplan las condiciones LMI

$$V(x) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T \sum_{i \in \mathbb{I}_d^+} n_i \mu_i P_i x \leq 1\} \subset \Omega \quad (3.82)$$

es imprescindible introducir la condición para todo $i \in \mathbb{I}_{2+d}^+$

$$\{x^T P_i x \leq 1\} \subset \Omega \quad (3.83)$$

Porque las funciones de pertenencia μ no pueden aparecer en las LMIs. Es decir, estamos obligados a asumir que $\mu_i(x)$ puede tener cualquier valor para cada caso particular.

Así, uniendo las condiciones LMIs con

$$\{x^T P_i x \leq 1\} \subset \Omega \quad (3.84)$$

se obtiene la equipotencial de Lyapunov

$$\Theta_d = \{V_i \leq 1\} \quad (3.85)$$

que es la mayor función de Lyapunov cuadrática contenida en Ω . Los algoritmos propuestos seguro que convergerán a un conjunto mayor que el obtenido mediante LMIs, para un mismo grado de complejidad d .

Comparando ahora las funciones de Lyapunov obtenidas cuando se tiene cierto conocimiento de las funciones de pertenencia, obviamente se podrán conseguir funciones de Lyapunov mayores que las obtenidas sin este conocimiento (incluso se pueden obtener funciones no convexas). Sin embargo, una vez más, si hacemos uso de ese mismo conocimiento para obtener los conjuntos de la sección 3.5, las funciones de Lyapunov obtenidas mediante LMIs estarán incluidas en dichos conjuntos invariantes.

Obviamente, las funciones de Lyapunov obtenidas mediante LMIs, haciendo uso de cierto conocimiento de las funciones de pertenencia, pueden ser mayores que la máxima equipotencial de Lyapunov $\Theta_d = \{V_i \leq 1\}$ contenida en Ω , de hecho, Θ_d es la intersección de todos sus equipotenciales para todos los posibles valores de μ . Pero este conjunto mayor no puede ser considerado por las LMIs, sino sólo ser representado a

posteriori una vez P_i es obtenido (mediante el escalado de $x^T P_i x$ para que esté contenido en Ω). Es decir, que el procedimiento de obtención de este equipotencial mayor se obtiene para la mayoría de los casos genérico por prueba-error, y puede ser bastante complejo para dimensiones altas.

Como conclusión, el procedimiento ad-hoc puede obtener equipotenciales mayores que las obtenidas mediante nuestro algoritmo, pero cuya inclusión en las LMIs no puede ser establecida.

3.8 ANÁLISIS FRENTE A PERTURBACIONES

En esta sección vamos a extender el análisis sobre conjuntos invariantes y contractivos cuando están presentes perturbaciones sobre el modelo.

Definimos primeramente un modelo no lineal genérico

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k) \quad (3.86)$$

Tal que $f_x(0) = 0$, y w_k representa la perturbación del modelo.

Este modelo puede ser expresado localmente en nuestra región compacta de interés Ω , conteniendo al origen, como un modelo Takagi-Sugeno de la forma

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k) (A_i x_k + B_i u_k + E_i w_k) \quad (3.87)$$

Si el modelo borroso es controlado por un controlador de tipo PDC, el modelo borroso en bucle cerrado se expresa como

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) \left((A_i + B_i F_j) x_k + E_i w_k \right) \quad (3.88)$$

Consideramos también que la perturbación está contenida en un politopo \mathbb{W} .

3.8.1 MÁXIMO CONJUNTO INVARIANTE ROBUSTO

De forma análoga al procedimiento explicado en las secciones precedentes, el máximo conjunto invariante robusto va a ser obtenido mediante un procedimiento recursivo de conjuntos a un paso con la ley de control definida por $u_k = h(x_k)$

$$\mathcal{Q}(\Omega) = \{x_k \in \mathbb{R}^n \mid f(x_k, h(x_k), w_k) \in \Omega, \forall w_k \in \mathbb{W}\} \quad (3.89)$$

Y su correspondiente conjunto controlable en i -pasos (que lleva al modelo a \mathbb{T} en i pasos y mantenga el modelo en Ω en los $i-1$ pasos anteriores)

$$\mathbb{K}_i(\Omega, \mathbb{T}) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \{x_k \in \Omega\}_0^{i-1}, x_i \in \mathbb{T}, \forall \{w_k \in \mathbb{W}\}_0^{i-1}\} \quad (3.90)$$

Que por definición se puede obtener mediante

$$\mathbb{K}_{i+1}(\Omega, \mathbb{T}) = \mathcal{Q}(\mathbb{K}_i(\Omega, \mathbb{T})) \cap \Omega \quad (3.91)$$

Lo cual nos permite desarrollar el algoritmo recursivo análogo al Algoritmo 3.1. El algoritmo termina cuando $\mathbb{K}_{N+1}(\Omega, \mathbb{T}) = \mathbb{K}_N(\Omega, \mathbb{T}) = \mathbb{K}_\infty(\Omega, \mathbb{T})$, y define el máximo conjunto invariante robusto y se denota por $\mathcal{O}(\Omega) = \mathbb{K}_\infty(\Omega, \mathbb{T})$

La obtención práctica del máximo conjunto invariante robusto viene condicionada por nuestra capacidad de obtener el conjunto exacto a 1 paso, el cual, debido a las no linealidades del modelo borroso, lleva a un conjunto de restricciones no lineales de difícil computación.

$$\mathcal{Q}(\Omega) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \left((A_i + B_i F_j)x + E_i w \right) + s < 0, \forall w \in \mathbb{W} \right\} \quad (3.92)$$

Como en secciones precedentes, una primera aproximación del máximo conjunto invariante robusto se puede obtener de aplicar las restricciones a cada uno de los vértices del modelo y de las perturbaciones. Denotando por w_p a cada uno de los vértices del politopo \mathbb{W} , con $p = 1 \dots n_{\mathbb{W}}$. Lo que nos lleva al siguiente conjunto a un paso

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\Omega) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus R \left((A_i + B_i F_j)x + E_i w_p \right) + s < 0 \quad \forall i, j, p \right\} \quad (3.93)$$

Sin embargo, aplicando el teorema de Polya, sabemos que podemos obtener un conjunto a un paso mayor

$$\tilde{\mathcal{Q}}^d(\Omega) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{\mathcal{Q}}_i < 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}_{p+d}^+, \forall p \right\} \quad (3.94)$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}_i = \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} R \left((A_{j_1} + B_{j_1} F_{j_2})x + E_{j_1} w_p \right) + s \quad (3.95)$$

Que sabemos que converge asintóticamente al conjunto a un paso “shape independent”

$$\mathcal{Q}^{si}(\Omega) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \left((A_i + B_i F_j)x + E_i w_p \right) + s < 0 \quad \forall \mu, \forall p \right\} \quad (3.96)$$

Consecuentemente,

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\Omega) \subseteq \tilde{\mathcal{Q}}^d(\Omega) \subseteq \tilde{\mathcal{Q}}^{d+1}(\Omega) \subseteq \mathcal{Q}^{si}(\Omega) \subseteq \mathcal{Q}(\Omega) \quad (3.97)$$

Una vez calculemos el subconjunto politópico de conjunto exacto a un paso, el Algoritmo 3.1 puede ser reemplazado por este subconjunto politópico para obtener un subconjunto del máximo conjunto invariante robusto. Sabemos que este subconjunto es también invariante, y que tenderá al máximo conjunto invariante robusto sin más conocimiento de las μ , a medida que crezca el grado de complejidad Polya d .

$$\tilde{\mathcal{O}} \subseteq \tilde{\mathcal{O}}^d \subseteq \tilde{\mathcal{O}}^{d+1} \subseteq \mathcal{O}^{si} \subseteq \mathcal{O} \quad (3.98)$$

El máximo conjunto invariante robusto será de tamaño inferior o igual al máximo conjunto invariante sin tener en cuenta las perturbaciones.

Este conjunto nos permite afirmar que, para unas perturbaciones acotadas por \mathbb{W} , cualquier trayectoria del modelo que comience en nuestro conjunto invariante robusto, nunca se saldrá del mismo.

Para los modelos sin perturbaciones, la convergencia de la trayectoria del modelo al origen la podíamos garantizar realizando un análisis análogo con los conjuntos λ -contractivos. Es decir, cualquier trayectoria que comience en un conjunto λ -contractivo convergerá al origen con exponente λ .

Sin embargo, para los modelos con perturbaciones, este análisis de los conjuntos λ -contractivos no se puede extender para garantizar la convergencia de la trayectoria del modelo al origen. De hecho, es de sobra conocido que si sobre un modelo actúan perturbaciones no conocidas, el modelo no podrá permanecer en el origen. Lo que sí podemos asegurar es que para unas perturbaciones acotadas, el modelo permanecerá en una región próxima al origen. Con el fin de evaluar esta región sobre la que se desplazará el modelo, recurrimos a los conjuntos alcanzables.

3.8.2 MÍNIMO CONJUNTO ALCANZABLE ROBUSTO

En este punto haremos uso del mínimo conjunto alcanzable para definir la región próxima al origen en la que las trayectorias del modelo permanecerán una vez haya transcurrido un tiempo suficientemente grande.

Definición 3.1

Se define el **conjunto alcanzable $\mathcal{R}(\Omega)$ desde Ω a un paso** como el conjunto de estados $x \in \mathbb{R}^n$ a los que puede evolucionar el modelo $x_{k+1} = f(x_k, h(x_k), w_k)$ en un paso desde el conjunto Ω .

$$\mathcal{R}(\Omega) = \{x_{k+1} \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_k \in \Omega, w_k \in \mathbb{W}, x_{k+1} = f(x_k, h(x_k), w_k)\} \quad (3.99)$$

Definición 3.2

Se define el **conjunto alcanzable $\mathcal{R}_i(\Omega)$ desde Ω en i -pasos** como el conjunto de estados $x \in \mathbb{R}^n$ a los que puede evolucionar el modelo en i -pasos desde cualquier $x_0 \in \Omega$.

Nótese que el conjunto $\mathcal{R}_\infty(\Omega)$ define la región a la que el modelo puede evolucionar en cualquier estado futuro, empezando en cualquier $x_0 \in \Omega$ y para una perturbación acotada por $w_k \in \mathbb{W}$.

El siguiente algoritmo iterativo nos permite obtener el conjunto $\mathcal{R}_\infty(\Omega)$ a partir del conjunto $\mathcal{R}(\Omega)$.

Algoritmo 3.3

- 1) Hacer $i = 0, \mathcal{R}_0 = \Omega$.
- 2) Mientras $\mathcal{R}_{i+1} \neq \mathcal{R}_i$ repetir
 - a) $\mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}(\mathcal{R}_i)$
 - b) $i = i + 1$
- 3) $\mathcal{R}_\infty(\Omega) = \mathcal{R}_i$.

Como introducíamos al principio de la sección, los modelos borrosos con perturbaciones acotadas pero persistentes en el tiempo, no pueden ser estabilizables asintóticamente mediante ningún controlador. Únicamente se puede conseguir asegurar estabilidad BIBO, es decir, que el modelo permanezca en una región cercana al origen.

Precisamente esta región es la que puede calcularse como el conjunto alcanzable $\mathcal{R}_\infty(\Omega_0)$ donde $\Omega_0 = \{x = 0\}$ contiene únicamente al origen.

Nótese que esta región es también la mínima región invariante para el modelo borroso en bucle cerrado con ley de control $u_k = h(x_k)$ y con perturbaciones w_k .

Otra importante cuestión de interés es el conjunto $\mathbb{K}_\infty(\Omega, \mathcal{R}_\infty(\Omega_0))$, que se obtiene de realizar un algoritmo iterativo análogo al Algoritmo 3.1. Este conjunto representa los estados iniciales que nos lleva el modelo

desde Ω a la región cercana al origen $\mathcal{R}_\infty(\Omega_0)$ en N pasos o menos. Esta región garantiza la convergencia del modelo al mínimo invariante posible en N pasos.

El número de pasos N para los que converge se obtiene del número de iteraciones necesarias para conseguir que $\mathbb{K}_{N+1}(\Omega, \mathcal{R}_\infty(\Omega_0)) = \mathbb{K}_N(\Omega, \mathcal{R}_\infty(\Omega_0)) = \mathbb{K}_\infty(\Omega, \mathcal{R}_\infty(\Omega_0))$.

En la mayoría de los casos, esta región coincide con el máximo conjunto invariante robusto.

Igual que en la sección anterior, nos encontramos con que el conjunto alcanzable a un paso exacto no es fácilmente computable, debido a las no linealidades del modelo borroso, por lo que tendremos que conformarnos con obtener una aproximación politópica de dicho conjunto exacto $\mathcal{R}(\Omega)$.

$$\mathcal{R}(\Omega) = \left\{ x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) \left((A_i + B_i F_j) x_k + E_i w_k \right) \mid \begin{array}{l} x_{k+1} \in \mathbb{R}^n \setminus \exists x_k \in \Omega, w_k \in \mathbb{W}, \\ \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) \end{array} \right\} \quad (3.100)$$

Definimos una primera aproximación politópica como la combinación convexa de la evolución del modelo para cada vértice del modelo y de las perturbaciones. En este sentido nos es más conveniente expresar los politopos Ω y \mathbb{W} como una combinación convexa de sus vértices

$$\Omega = \mathbf{conv}\{v_1 \dots v_{n_\Omega}\} \quad (3.101)$$

$$\mathbb{W} = \mathbf{conv}\{w_1 \dots w_{n_\mathbb{W}}\} \quad (3.102)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}(\Omega) = \mathbf{conv}\left\{ \left((A_i + B_i F_j) v_l + E_i w_p \right) \mid \forall i, j, \quad q = 1 \dots n_\mathbb{W}, l = 1 \dots n_\Omega \right\} \quad (3.103)$$

La aplicación del teorema de Polya nos permite definir unas mejores aproximaciones politópicas $\tilde{\mathcal{R}}^d(\Omega)$ al conjunto exacto.

$$\tilde{\mathcal{R}}^d(\Omega) = \mathbf{conv}\left\{ \left((A_i + B_i F_j) v_l + E_i w_p \right) \mid \forall i \in \mathbb{I}_d^+, \quad q = 1 \dots n_\mathbb{W}, l = 1 \dots n_\Omega \right\} \quad (3.104)$$

Notese que

$$\tilde{\mathcal{R}}(\Omega) \supseteq \tilde{\mathcal{R}}^d(\Omega) \supseteq \tilde{\mathcal{R}}^{d+1}(\Omega) \supseteq \mathcal{R}^{si}(\Omega) \supseteq \mathcal{R}(\Omega) \quad (3.105)$$

Y por tanto

$$\tilde{\mathcal{R}}_\infty(\Omega) \supseteq \tilde{\mathcal{R}}_\infty^d(\Omega) \supseteq \tilde{\mathcal{R}}_\infty^{d+1}(\Omega) \supseteq \mathcal{R}_\infty^{si}(\Omega) \supseteq \mathcal{R}_\infty(\Omega) \quad (3.106)$$

3.9 EJEMPLOS

3.9.1 EJEMPLO A

Dado un modelo borroso TS definido por:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 18.2 & 6 \\ 6 & 2.9 \end{pmatrix} & B_1 &= \begin{pmatrix} 57.9 \\ 20.6 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 8.6 & 5.8 \\ 5.8 & 3.6 \end{pmatrix} & B_2 &= \begin{pmatrix} 45.5 \\ 26.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 20.7 & 6.4 \\ 6.4 & 1.5 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 52 \\ 14.5 \end{pmatrix}$$

y controlado por una ley de control PDC, con:

$$F_1 = (-0.3 \quad -0.1)$$

$$F_2 = (-0.2 \quad -0.15)$$

$$F_3 = (-0.4 \quad -0.16)$$

cuyos coeficientes han sido obtenidos por procedimientos basados en LMIs, vamos a calcular varios conjuntos, invariantes y alcanzables, para un conjunto de restricciones politópicas definido por

$$\|x\|_{\infty} \leq 3$$

$$\|u\|_{\infty} \leq 1$$

que es expresado de la forma (3.10) con las matrices

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Primeramente, vamos a calcular distintos conjuntos invariantes que sean lo más grande posible. Empezamos obteniendo $\tilde{O}(\Omega)$, mediante el Algoritmo 3.1 con el conjunto a un paso $\tilde{Q}(\Omega)$ válido para todos los vértices del modelo borroso. El resultado del algoritmo conduce a un conjunto reducido al origen.

De acuerdo con los procedimientos descritos en la sección 3.4, vamos a obtener un conjunto invariante más grande.

3.9.1.1 Relajación de Polya

Aplicando las relajaciones de Polya, con $d = 0, 1, 2$ y 3 , obtenemos los subconjuntos invariantes basándonos en la aplicación del Algoritmo 3.1 con los conjunto a un paso correspondientes $\tilde{Q}^d(\Omega)$. Los resultados son mostrados en la Ilustración 3-1.

Como se puede observar, al aumentar el grado de complejidad Polya, el conjunto politópico invariante aumenta de tamaño, y por tanto, la región probable de estabilidad de modelo.

Además, para este ejemplo, ningún incremento en el grado de complejidad Polya (hemos probado hasta $d = 20$) conduce a incrementos del conjunto politópico invariante.

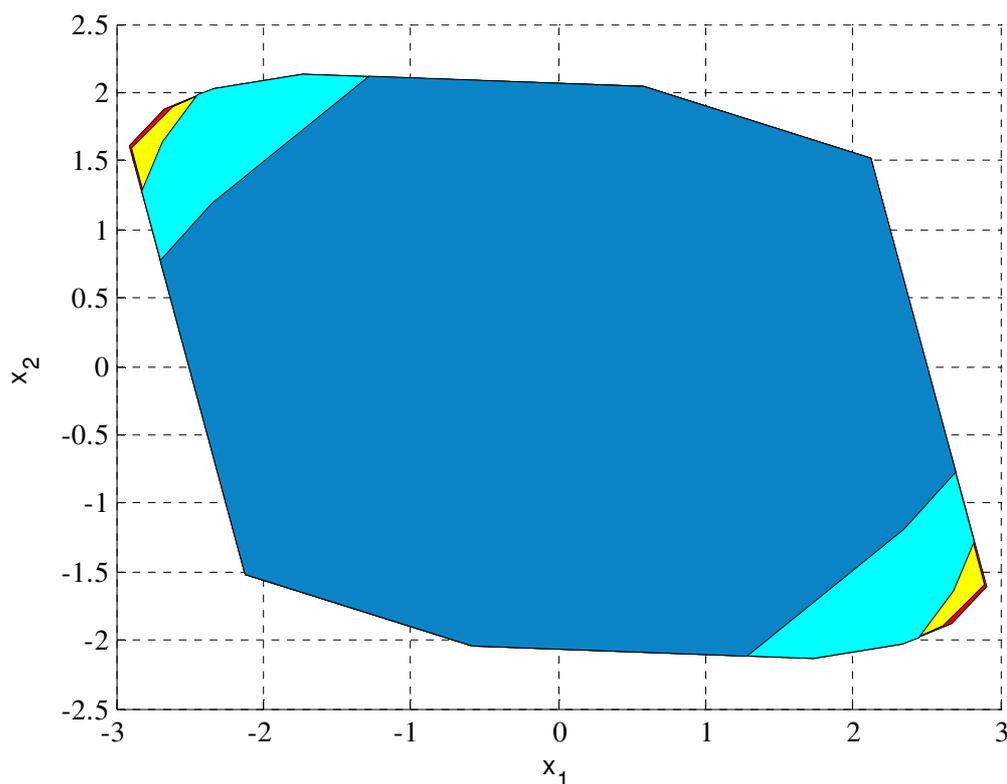


Ilustración 3-1: Subconjuntos invariantes con Polya $d=0,1,2$ y 3 , en azul, cian, amarillo y rojo respectivamente.

Por otro lado, con el fin de comparar el conjunto invariante politópico obtenido con el que se obtiene siguiendo la metodología basada en LMIs y su función de Lyapunov cuadrática, resolvemos el siguiente problema LMI:

$$\begin{cases} \min: & \alpha \\ \text{sujeto a:} & P > 0 \\ & \begin{pmatrix} P & a_i \\ a_i^T & 1 \end{pmatrix} > 0 \\ & P < \alpha W \\ & \tilde{G}_i^T P \tilde{G}_i - P < 0 \end{cases} \quad (3.107)$$

con \tilde{G}_i obtenida para una relajación de Polya $d = 3$

$$\tilde{G}_i = (\tilde{A}_i + \tilde{B}_i \tilde{F}_i) \quad (3.108)$$

donde $a_i = R_i/s_i$ (o sea, las filas i -ésimas de la matriz R divididas por las filas i -ésimas del vector s), con el fin de obtener el elipsoide

$$\theta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T P x \leq 1\} \quad (3.109)$$

que esté contenido en Ω , y donde W es una matriz arbitraria con forma elipsoidal alargada en una dirección particular. En este ejemplo hemos programado un elipsoide con el eje principal 100 veces más grande que el eje secundario, y orientado en 100 direcciones girando igualmente espaciados en una vuelta completa.

En la Ilustración 3-2 se observa que el invariante politópico obtenido por los métodos desarrollados contiene a cualquier invariante cuadrático obtenido mediante LMIs, con el mismo grado de complejidad Polyá. Esto ejemplifica la Proposición 3.1.

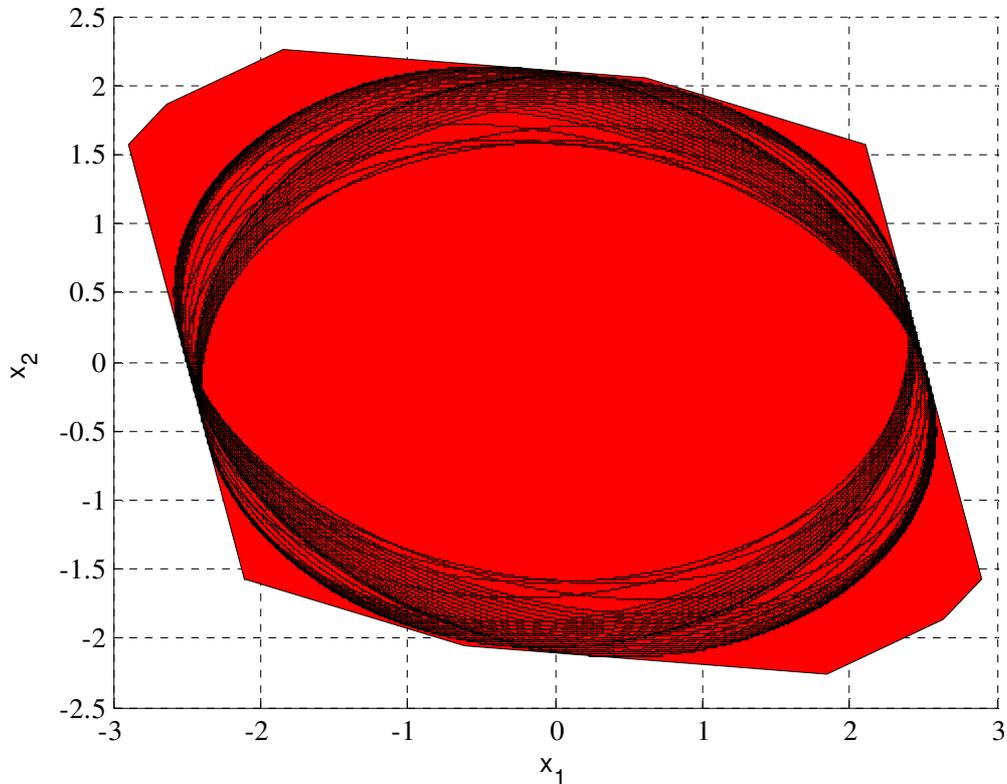


Ilustración 3-2: Invariante politópico y elipsoidales con $d=5$.

En cuanto los conjuntos λ -contractivos, en la Ilustración 3-3 se muestran los máximos conjuntos contractivos probables con un grado de complejidad Polyá $d = 3$, y un coeficiente de contracción λ creciente. El procedimiento se ha realizado siguiendo el Algoritmo 3.1- λ con el conjunto a un paso $\tilde{Q}^3(\Omega)$. El número máximo de iteraciones hasta converger se muestra en la siguiente tabla:

λ	1	0.95	0.9	0.88	0.876	0.87506	0.87505
Iteraciones	4	4	4	8	12	25	>200

De estos datos se deduce que el algoritmo propuesto es capaz de probar una tasa de decrecimiento de al menos 0.87506, que por supuesto, será igual o mejor que cualquier otra conseguida por medio de metodologías LMIs con funciones de Lyapunov cuadráticas. Como era esperado, cuanto mayor sea la tasa de decrecimiento demandada, menor será el tamaño de su región contractiva asociada. Esto ejemplifica la Proposición 3.2.

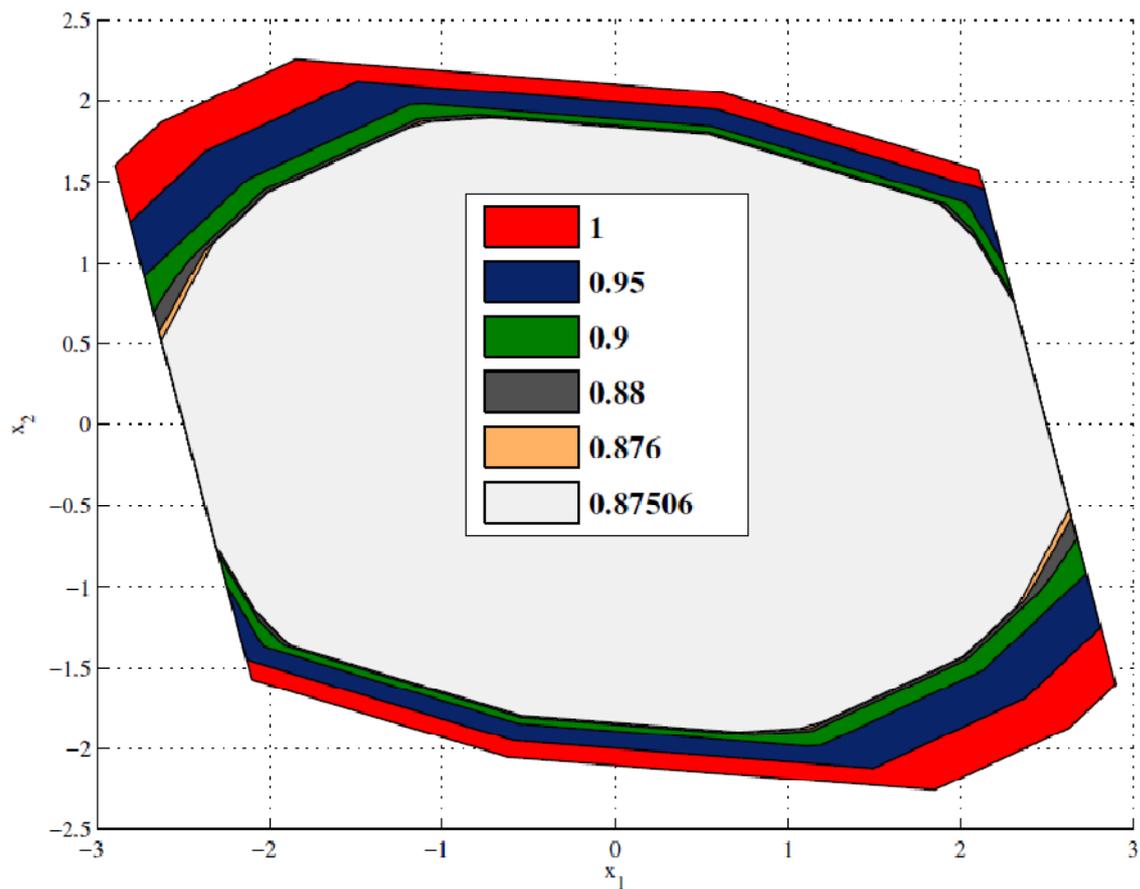


Ilustración 3-3: Máximo conjunto contractivo probable con distintas tasas de decrecimiento

3.9.1.2 Relajación por triangulación

Ahora haremos uso de la relajación por triangulación. Aplicando los procedimientos expuestos en la sección 3.4.2, ejecutamos el algoritmo y llegamos a su convergencia tras obtener un total de 5 vértices. Los resultados son mostrados en la Ilustración 3-4 y coinciden con los obtenidos mediante la relajación de Polyá.

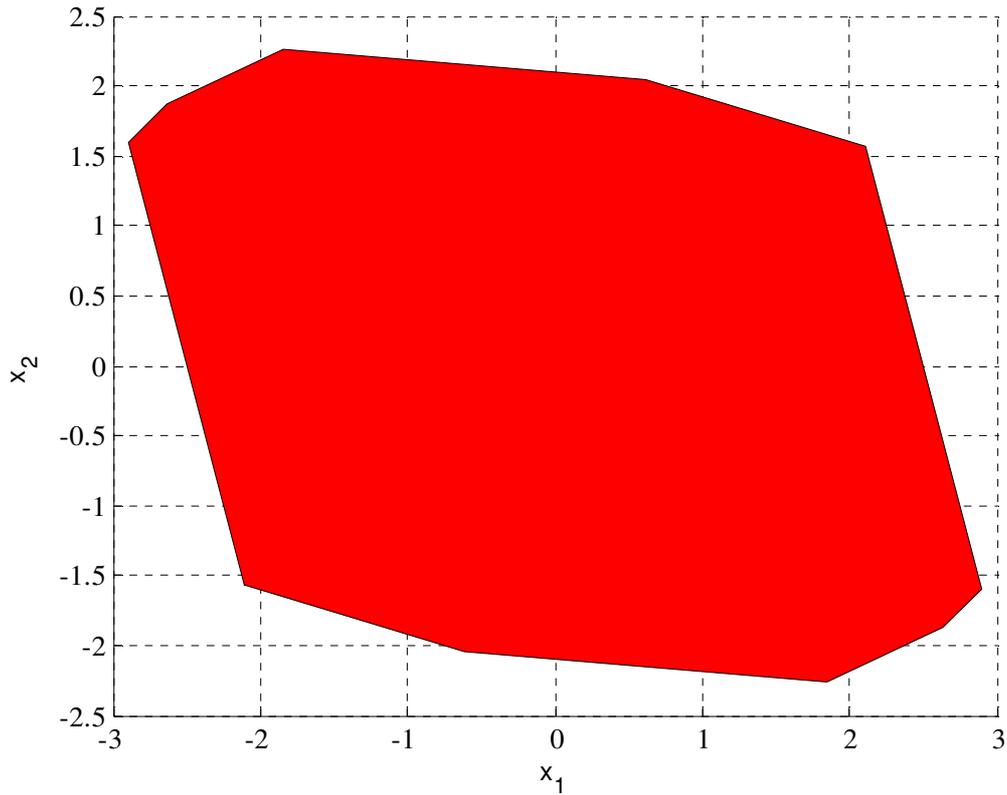


Ilustración 3-4: Máximo conjunto invariante obtenido por triangulación

Ahora pasamos a ejemplificar las relajaciones en las que disponemos de información de las funciones de pertenencia. De esta forma podemos reducir parcialmente la incertidumbre de los modelos y así obtener regiones invariantes más grandes.

3.9.2 EJEMPLO B

Dado un modelo borroso TS definido por:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} 18.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 \end{pmatrix} & B_1 &= \begin{pmatrix} 8.9 \\ 2.1 \end{pmatrix} \\
 A_2 &= \begin{pmatrix} -1.5 & -1.3 \\ -1.3 & -0.2 \end{pmatrix} & B_2 &= \begin{pmatrix} -10.8 \\ -5.5 \end{pmatrix} \\
 A_3 &= \begin{pmatrix} -4.1 & -1.7 \\ -1.7 & -0.4 \end{pmatrix} & B_3 &= \begin{pmatrix} -11.5 \\ -4.4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Controlado por el controlador PDC

$$\begin{aligned}
 F_1 &= (-0.3 \quad -0.1) \\
 F_2 &= (-0.2 \quad -0.15) \\
 F_3 &= (-0.4 \quad -0.16)
 \end{aligned}$$

y con las mismas restricciones que en el ejemplo anterior.

El conjunto a 1 paso $\tilde{Q}(\Omega)$ válido para todos los vértices del modelo borroso, nos da un conjunto vacío. Así que pasamos a aplicar la siguiente relajación sobre las restricciones.

3.9.2.1 Relajación por solapamiento

Dadas unas nuevas restricciones definidas por

$$\|x\|_{\infty} \leq 10$$

$$\|u\|_{\infty} \leq 1$$

y unas funciones de pertenencia como las representadas en la Ilustración 3-5, se obtienen unos límites al solapamiento de las funciones dados por

$$\mu_2 - 0.86 \leq 0$$

$$\mu_1\mu_3 - 0.0045 \leq 0$$

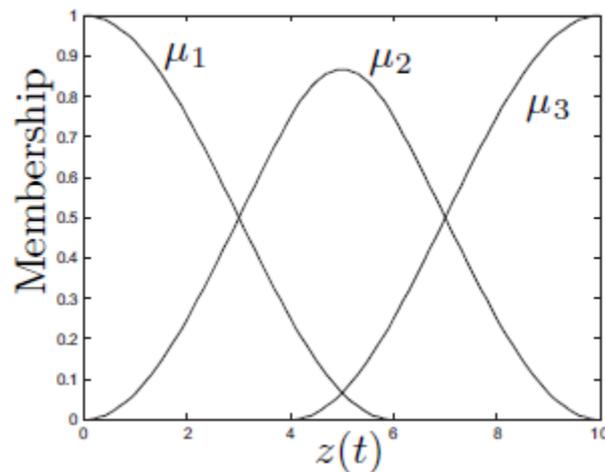


Ilustración 3-5: Funciones de pertenencia con solapamiento

Con el fin de ejemplificar mejor la efectividad del algoritmo, consideramos además unas restricciones sobre las funciones de pertenencia dadas por:

$$\mu_1\mu_2 \leq \gamma_{12}$$

Para tres casos diferentes con $\gamma_{12} = \{0.005, 0.05, 0.15\}$.

En la Ilustración 3-6 se observa las tres regiones asociadas a cada uno de los casos. Lógicamente, las restricciones al solapamiento con γ más pequeño conducen a menor incertidumbre sobre las funciones de pertenencia y por tanto, el máximo invariante probable aumenta de tamaño.

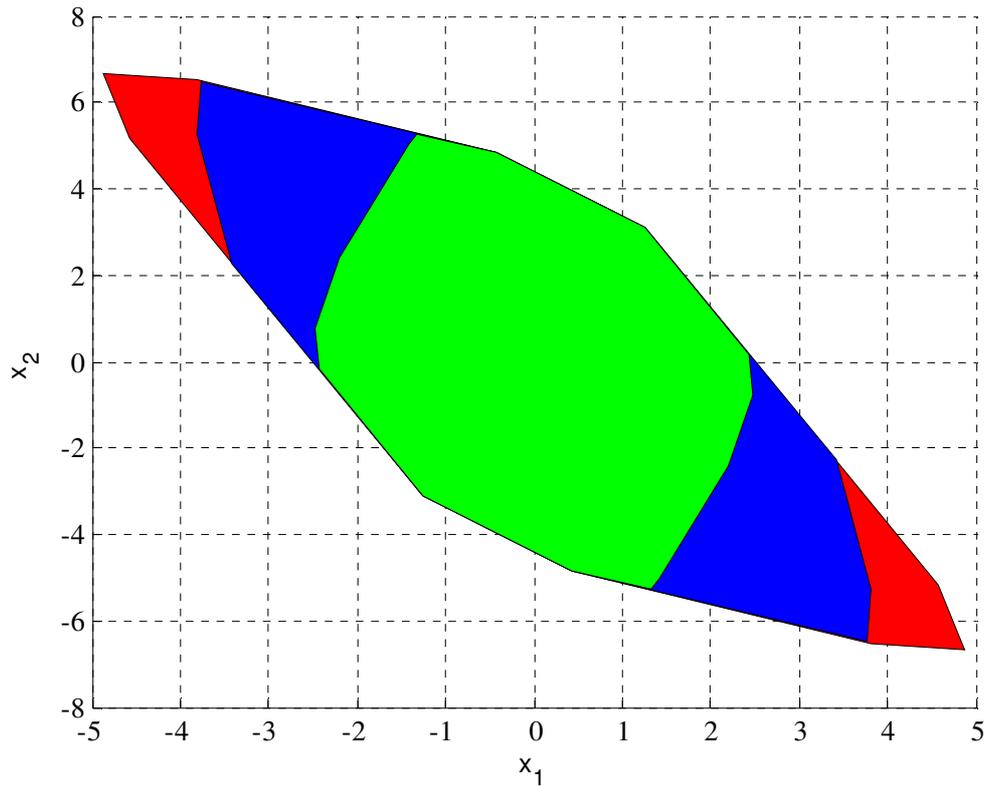


Ilustración 3-6: Conjuntos invariantes con $\gamma_{12} = \{0.005, 0.05, 0.15\}$ en rojo, azul y verde respectivamente.

3.9.2.2 Relajación por modelos locales

Supongamos ahora que las funciones de pertenencia son conocidas y tiene la forma representada en la Ilustración 3-7.

Las regiones locales serán definidas como un conjunto decreciente, tal que:

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 0.1k \\ 0.1k \\ 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $k = 1 \dots 100$.

En la Ilustración 3-8 se observa el conjunto de todos los invariantes obtenidos para cada modelo local. Si se compara con la Ilustración 3-6 se puede observar que, inicialmente, cuando empezamos reduciendo la región local, las región invariantes aumentan de tamaño, hasta que llega un punto donde las propias restricciones sobre las regiones locales fuerzan el decrecimiento de los invariantes. Esta figura nos da una idea de la forma que tiene el máximo conjunto invariante real del modelo no lineal, a partir de la unión de todos los invariantes obtenidos.

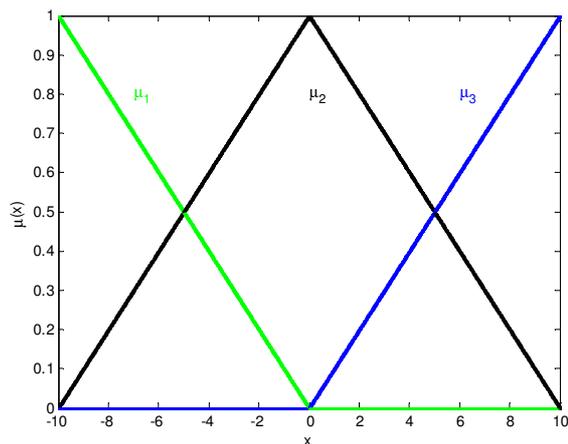


Ilustración 3-7: Funciones de pertenencia

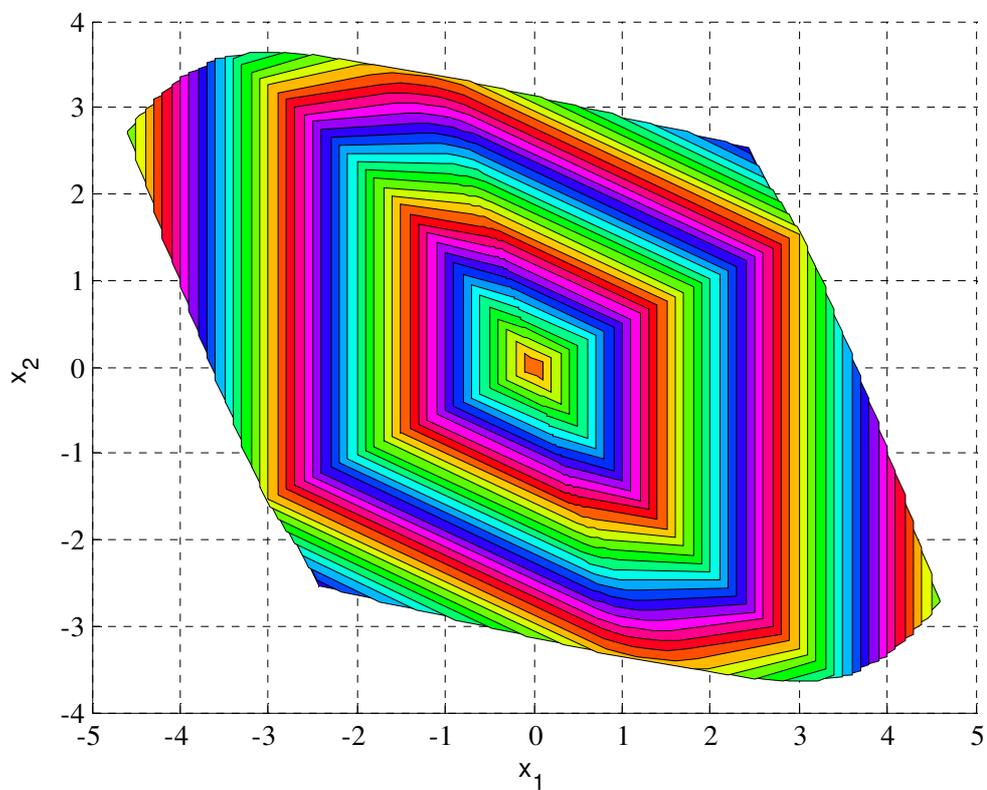


Ilustración 3-8: Regiones invariantes para modelos locales definidos por $k=1:100$

3.9.3 EJEMPLO C

Sea un modelo TS borroso definido por

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} -8.3 & -4.3 \\ -4.3 & -1.3 \end{pmatrix} & B_1 &= \begin{pmatrix} -45.5 \\ -20.6 \end{pmatrix} & E_1 &= \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.3 \end{pmatrix} \\
 A_2 &= \begin{pmatrix} -10.8 & -6.6 \\ -6.6 & -4.4 \end{pmatrix} & B_2 &= \begin{pmatrix} -34.3 \\ -22.3 \end{pmatrix} & E_2 &= \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.6 \end{pmatrix} \\
 A_3 &= \begin{pmatrix} -17.1 & -5.5 \\ -5.5 & -1.2 \end{pmatrix} & B_3 &= \begin{pmatrix} -42.7 \\ -12.2 \end{pmatrix} & E_3 &= \begin{pmatrix} 0.0033 \\ 0.9 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -3.5 & -2.5 \\ -2.5 & -1.9 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} -37 \\ -19.3 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0.025 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

Controlado por un PDC con las siguientes ganancias

$$F_1 = (-0.2 \quad -0.1)$$

$$F_2 = (-0.3 \quad -0.2)$$

$$F_3 = (-0.4 \quad -0.1)$$

$$F_4 = (-0.1 \quad -0.1)$$

Y con las restricciones definidas por

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Primero computamos el mayor invariante $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$ con $d=0,1,2,3,4,5,6$, tal y como se muestra en Ilustración 3-9. Como se esperaba, al tamaño del mayor invariante crece a medida que crece el grado de complejidad Polya d . Para este ejemplo, incrementar más aún d no reporta incrementos en el tamaño del invariante obtenido.

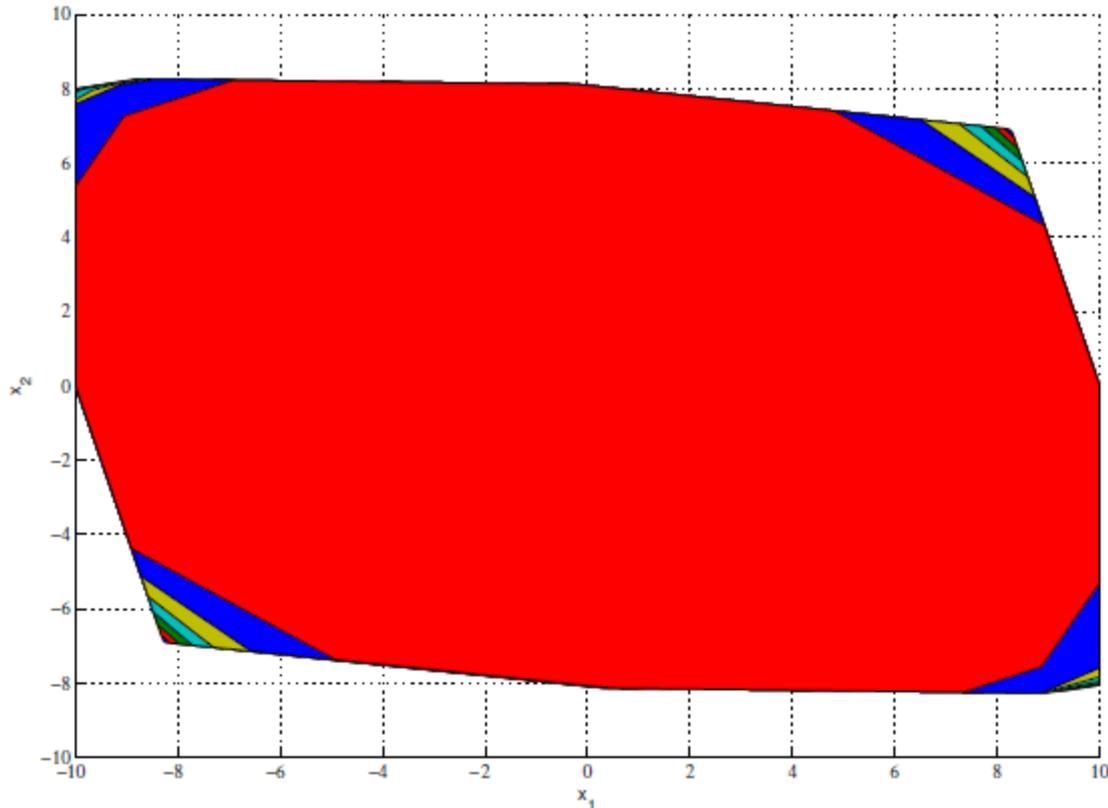


Ilustración 3-9: Regiones invariantes sub-óptimas, con $d = 0$ en rojo.

En cuanto a las regiones alcanzables desde el origen, se han obtenido las regiones mostradas en Ilustración 3-10, con grados de complejidad Polya $d=0,1$. Como se esperaba, las regiones alcanzables reducen su

tamaño a medida que aumenta el grado de complejidad Polya, siendo $d=1$ el grado de complejidad más alto que consigue reducir el tamaño de la región alcanzable obtenida.

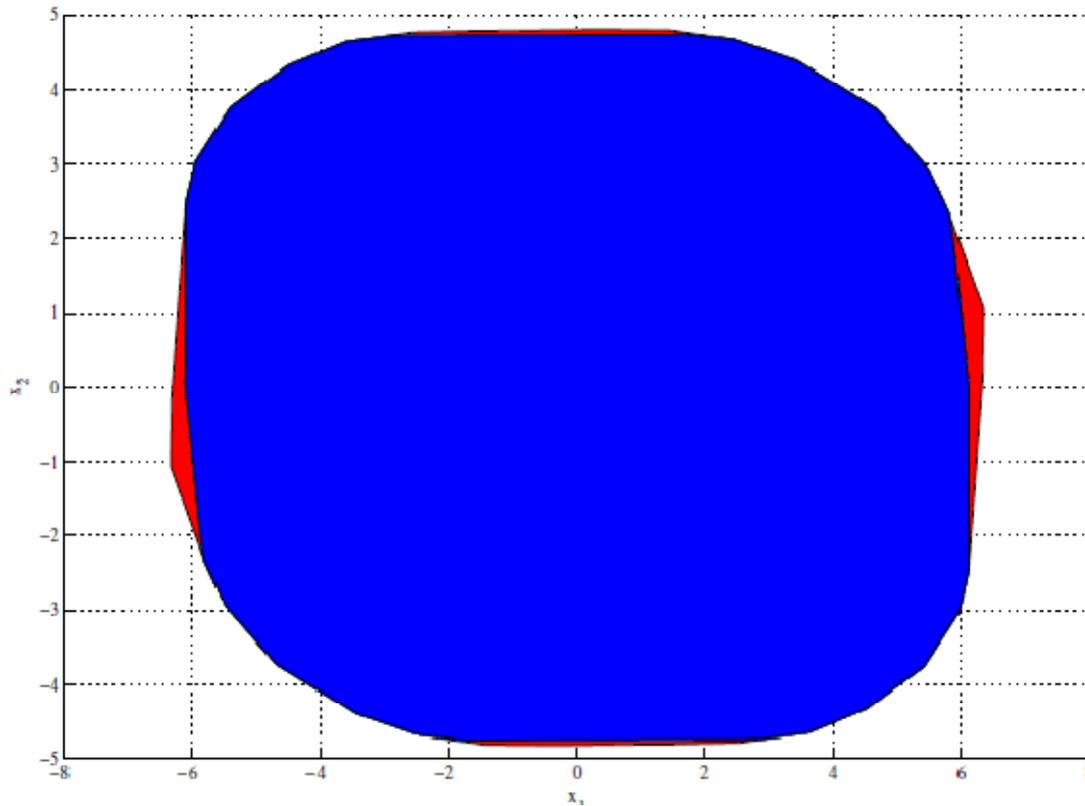


Ilustración 3-10: Región alcanzable sub-óptima con $d=0$ y 1, en rojo y azul respectivamente

En la Ilustración 3-11 se han superpuesto ambas figuras. La interpretación de las figuras es la siguiente. Puesto que el modelo es estable (pues se consigue una ley de control PDC que hace decrecer la función de Lyapunov en toda Ω), si las condiciones iniciales se encuentran dentro de la máxima región invariante, tenderá a acercarse al origen. Y una vez haya pasado suficiente tiempo, el efecto de las condiciones iniciales se habrá desvanecido, y modelo permanecerá en estado estacionario moviéndose alrededor del origen debido al efecto de las perturbaciones, siendo la mínima región alcanzable la zona en la que se moverá el modelo.

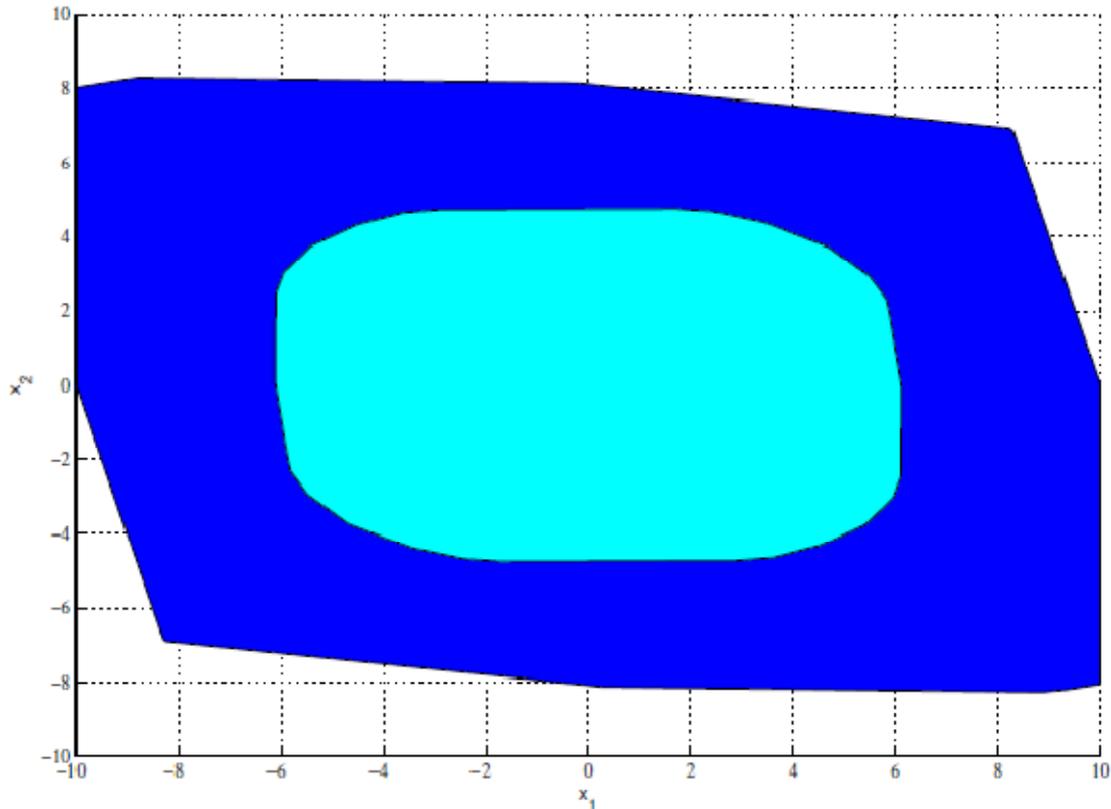


Ilustración 3-11: Regiones invariante y alcanzable, en azul y cian respectivamente.

3.10 CONCLUSIONES

En este capítulo se ha desarrollado un procedimiento para obtener un conjunto invariante politópico y un conjunto contractivo politópico para modelos borrosos en bucle cerrado TS. Este procedimiento está basado en algoritmos recursivos bien conocidos que requieren de la computación del conjunto a un paso.

Puesto que no se han asumido ninguna forma particular de las funciones de pertenencia, entonces, el máximo conjunto probable tiene que ser válido para cualquier forma particular de estas funciones de pertenencia, obteniendo el conjunto “shape independent”. Además, tanto el conjunto invariante como el contractivo, son conjuntos politópicos en la región de modelado Ω .

Posteriormente, siguiendo con las técnicas de relajación más frecuentes utilizadas en la metodología LMI, se proponen diversas aplicaciones de estas mismas técnicas a la obtención de los conjuntos invariantes y contractivos. En el capítulo se han clasificado las técnicas de relajación en dos grupos, el primer grupo comprende la técnicas que no disponne de información adicional en la forma de las funciones de pertenencia, como las técnicas de relajación Polyá y por triangulación, el segundo grupo contiene a las técnicas que hacen uso de cierta información de dichas funciones de pertenencia, como la técnicas por solapamiento y por modelos locales.

El resultado de este capítulo justifica que los conjuntos invariantes y contractivos obtenidos mediante este procedimiento, son mayores que cualquier otro conjunto invariante o contractivo de Lyapunov obtenido usando cualquier metodología LMI, siempre y cuando se hayan empleado las mismas condiciones particulares de relajación lineal de los dobles sumatorios borrosos.

También se prueba que, si las LMIs utilizadas fueran factibles, el algoritmo propuesto convergerá en un número finito de pasos, y se podrá obtener una función de Lyapunov poliédrica. Consiguientemente se realiza una comparación más específica con las funciones de Lyapunov.

Por último, se ha incorporado un primer análisis a la estabilidad y a la obtención de los conjuntos invariantes y contractivos, cuando se incorporan al modelo perturbaciones politópicas.

Se estudian dos conjuntos de interés: el conjunto de estados iniciales para los que el modelo nunca abandona la región de modelado Ω , y el conjunto al que es conducido el modelo cuando transcurra un largo periodo de tiempo. Las aproximaciones de estos dos conjuntos son realizadas usando las aproximaciones politópicas basadas en el teorema de Polya y la programación copositiva.

4 CONTROL ESTABLE DE MODELOS BORROSOS TAKAGI-SUGENO MEDIANTE CONJUNTOS CONTRACTIVOS

En el capítulo 3 se revisaron las propiedades de los conjuntos politópicos invariantes, estabilizables y λ -contractivos para modelos borrosos TS. A partir de éstos, en este capítulo vamos a desarrollar diversas técnicas de diseño de una acción de control u_k en línea.

Establecemos dos criterios de diseño para la acción de control en línea que vamos a desarrollar: asegurar la estabilidad del modelo en bucle cerrado; y optimizar ciertas prestaciones de diseño pre-establecidas “a priori”.

La optimización de prestaciones vamos a realizarla minimizando un índice de coste que está basado en la presente acción de control y en el estado futuro inmediato del modelo, y donde las variables de decisión se restringen de forma que los estados futuros pertenezcan a ciertas regiones politópicas que nos permiten garantizar la estabilidad del modelo.

4.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Sea un modelo discreto no lineal

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \quad (4.1)$$

Este modelo se puede expresar localmente en una región compacta del espacio de estados, como un modelo borroso TS definido por un conjunto de modelos lineales y una partición simplex de funciones de pertenencia

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k)(A_i x_k + B_i u_k) \quad (4.2)$$

$$\Delta_r = \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(x) = 1 \quad \wedge \quad \mu_i(x) > 0 \quad ; \quad \forall i = 1 \dots r \right\} \quad (4.3)$$

Donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados, $u_k \in \mathbb{R}^m$ el vector de acciones de control y la función $\mu(x) \in \mathbb{R}^r$ es el vector de funciones de pertenencia.

El objetivo del capítulo consiste en desarrollar un procedimiento de diseño en línea de una acción de control factible que asegura la estabilidad del modelo en bucle cerrado y minimice cierto índice de coste cuadrático. El cálculo numérico de dicha acción de control se realizará mediante un procedimiento de computación rápida, que permita realizarse a pesar de tener un sistema con tiempos de muestreo rápidos. Entre los distintos algoritmos de optimización existentes, elegimos realizar un problema QP.

En el presente capítulo, consideramos la región de interés como una región politópica. En la teoría de modelado borroso, es frecuente utilizar la técnica de sector no lineal para la construcción del modelo

borroso TS. En este caso, la región de interés puede ser entendida como la intersección de la región de modelado con las restricciones sobre los estados y las entradas (por ejemplo, para evitar saturaciones). Cuando estas restricciones vienen definidas por un espacio afín, la región de interés politópica viene definida como:

$$\Omega = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Rx + Su + s < 0\} \quad (4.4)$$

4.2 CONJUNTOS CONTRACTIVOS Y ESTABILIZABLES PARA MODELOS BORROSOS TS

En esta sección vamos a particularizar los máximos conjuntos contractivos y estabilizables para los modelos borrosos TS. Como se verá más adelante, estos conjuntos van a definirnos las regiones de convergencia de las trayectorias de nuestro modelo. Sin embargo, comprobaremos las dificultades para obtener dichos máximos conjuntos y plantaremos el procedimiento para obtener su mejor aproximación interior politópica.

El desarrollo de estos conjuntos es similar al realizado en el Capítulo 3. En dicho capítulo, el modelo está sujeto a una ley de control, bien sea lineal o de tipo PDC. En el presente capítulo, la acción de control instantánea se calcula en cada muestreo, mediante un proceso de optimización en línea.

Con el fin de plantear correctamente el problema de control, revisamos las siguientes definiciones desarrolladas en la sección 2.2 y sus implicaciones.

El conjunto al que prestaremos especial atención es $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \in \mathbb{R}^n$, que representa el máximo conjunto invariante bajo control en Ω . Si este conjunto existe, entonces tenemos garantizada la existencia de una acción de control factible que hace que la trayectoria del modelo en bucle cerrado permanezca dentro de ese mismo conjunto en el siguiente paso. Esto significa que el modelo será al menos críticamente estable en bucle cerrado. Hay que destacar que únicamente podremos asegurar estabilidad pero no estabilidad asintótica. Con el fin de asegurar estabilidad asintótica recurrimos al conjunto λ -contractivo bajo control.

Por otro lado, por ser máximo el conjunto invariante, también podemos afirmar que para cualquier $x_k \notin \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, no existe ninguna acción de control factible capaz de estabilizar el modelo.

El conjunto $\mathcal{C}^{\lambda, \infty}(\Omega)$ representa el máximo conjunto λ -contractivo bajo control en Ω , donde el coeficiente λ marca el ratio de convergencia del modelo al origen, con $0 < \lambda < 1$. Este conjunto $\mathcal{C}^{\lambda, \infty}(\Omega)$ contiene todos los estados dentro de la región de interés, para los que existe una acción de control factible que estabilice asintóticamente el modelo, con ese ratio de convergencia. Es decir, que existirá u_k factible si y solo si $x_k \in \mathcal{C}^{\lambda, \infty}(\Omega)$. El conjunto $\mathcal{C}^{\lambda, \infty}(\Omega)$ define por tanto la región de estabilidad asintótica del modelo en bucle cerrado.

Lógicamente, el valor de λ va a condicionar el tamaño y forma del máximo conjunto λ -contractivo bajo control $\mathcal{C}^{\lambda, \infty}(\Omega)$. Cuanto más cercano a 1 sea el valor de λ , mayor será el tamaño del conjunto λ -contractivo, tendiendo a igualarse con el máximo conjunto invariante bajo control cuando $\lambda \rightarrow 1$.

$$\mathcal{C}^{\lambda_1, \infty}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{\lambda_2, \infty}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Omega); \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1 \quad (4.5)$$

Por otro lado, podemos afirmar que cualquier conjunto λ -contractivo bajo control $\mathcal{C}^\lambda(\Omega)$ es también invariante bajo control.

Hay que destacar que la selección de un ratio de contracción muy restrictivo (cerca de cero), conducirá a un conjunto $\mathcal{C}^{\lambda, \infty}(\Omega)$ muy reducido, incluso llegando a hacerse vacío a partir de cierto λ . Así, será deseable poder ampliar esta región para que se aproxime lo más posible al máximo conjunto invariante bajo control. Entre el conjunto $\mathcal{C}^{\lambda, \infty}(\Omega)$ y la máxima región invariante bajo control $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, tenemos toda una región de estados, que si bien no podemos garantizar su estabilidad asintótica con dicho ratio de contracción, si que

vamos a poder garantizar la convergencia de la trayectoria del modelo al conjunto $\mathcal{C}^{\lambda, \infty}(\Omega)$ para un número finito de pasos, mediante los conjuntos estabilizables. Por tanto pasamos a presentar los conjuntos estabilizables, los cuales serán utilizados, como se verá más adelante, de forma complementaria a los conjuntos contractivos bajo control.

El conjunto $\mathbb{S}_i(\Omega, \mathbb{T})$ representa el conjunto estabilizable en i pasos y contiene a todos los estados con una secuencia de acciones de control admisibles que sitúan el estado del modelo en \mathbb{T} en un máximo de i -pasos, cumpliendo las restricciones Ω en los $i-1$ pasos anteriores.

El conjunto estabilizable $\mathbb{S}_\infty(\Omega, \mathbb{T})$ define el máximo conjunto estabilizable y podemos afirmar que es invariante bajo control y que está contenido en $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. De hecho, $\mathbb{S}_\infty(\Omega, \Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Para calcular los conjuntos anteriores utilizamos el siguiente Algoritmo 2.1 y sus variantes, basados en un proceso recursivo de conjuntos a un paso.

Algoritmo 4.1

- 1) Hacer $i = 0$, $\mathbb{K}_1 = \emptyset$, $\mathbb{K}_0 = \text{proy}_x(\Omega)$.
- 2) Mientras $\mathbb{K}_{i+1} \neq \mathbb{K}_i$ repetir
 - a) $\mathbb{K}_{i+1} = \text{proy}_x((\mathcal{Q}(\mathbb{K}_i) \cap \Omega))$
 - b) $i = i + 1$
- 3) $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \mathbb{K}_i$.

La proyección de la región de interés Ω sobre el espacio de estados \mathbb{R}^n , define un conjunto politópico de restricciones en \mathbb{R}^n . De la misma forma, la proyección de un conjunto invariante bajo control $\mathcal{C}(\Omega)$ sobre el espacio de estados \mathbb{R}^n , define un conjunto politópico de restricciones en \mathbb{R}^n . Así, la región objetivo de cada iteración se puede expresar de la forma:

$$\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Tx + r < 0\} \quad (4.6)$$

Y por tanto, el conjunto a un paso exacto para el modelo borroso TS se expresa como:

$$\mathcal{Q}(\mathbb{T}) = \left\{ (x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid T \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(x)(A_i x + B_i u) \right) + r < 0 \right\} \quad (4.7)$$

Este conjunto será en general no politópico, debido a las no linealidades del modelo, y por tanto tampoco lo serán los máximos conjuntos invariante, contractivos y estabilizables que acabamos de definir.

En caso de no tener más conocimiento de las funciones de pertenencia que el de pertenecer al simplex (4.3), definimos $\mathcal{Q}^{si}(\mathbb{T})$ como la mejor aproximación interior del conjunto a un paso que permite cumplir las restricciones Ω para cualquier posible realización de las funciones de pertenencia.

$$\mathcal{Q}^{si}(\mathbb{T}) = \left\{ (x, u) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid T \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(x)(A_i x + B_i u) \right) + r < 0 \quad \forall \mu \in \Delta_r \right\} \quad (4.8)$$

Para un modelo borroso TS cualquiera, este conjunto corresponde al que se obtiene de aplicar las restricciones a cada uno de los vértices del modelo, es decir

$$\mathcal{Q}^{si}(\mathbb{T}) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid T(A_i x + B_i u) + r < 0 \quad \forall i\} \quad (4.9)$$

Se observa que $Q^{si}(\mathbb{T})$ es politópico.

Al sustituir $Q(\mathbb{T})$ por $Q^{si}(\mathbb{T})$ en el Algoritmo 4.1, obtenemos el máximo conjunto politópico invariante bajo control para cualquier posible realización de las funciones de pertenencia. A este conjunto lo denotamos por $\mathcal{C}^{si}(\Omega)$.

El conjunto $\mathcal{C}^{si}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, y es invariante bajo control, puesto que si las restricciones que definen \mathbb{T} son válidas para cada vértice o modelo lineal del modelo borroso, también serán válidas para cualquier conjunto convexo de dichos vértices. También podemos afirmar que $\mathcal{C}^{si}(\Omega)$ es politópico, por la forma lineal de las restricciones Ω .

De forma similar obtenemos el máximo conjunto λ -contractivo $\mathcal{C}^{\lambda,\infty}(\Omega)$ y su correspondiente aproximación interior sin mayor información de las funciones de pertenencia $\mathcal{C}^{\lambda,si}(\Omega)$. Basta sustituir en el Algoritmo 2.1 por el conjunto a un paso escalado:

$$Q(\lambda\mathbb{T}) = \left\{ (x, u) \in \mathbb{R}^{m+n} \setminus T \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(x)(A_i x + B_i u) \right) + \lambda r < 0 \right\} \quad (4.10)$$

$$Q^{si}(\lambda\mathbb{T}) = \{ (x, u) \in \mathbb{R}^{m+n} \setminus T(A_i x + B_i u) + \lambda r < 0 \quad \forall i \} \quad (4.11)$$

De forma análoga podemos aplicar el siguiente algoritmo para obtener el máximo conjunto estabilizable $\mathbb{S}_\infty(\Omega, \mathbb{T})$, y su correspondiente máxima aproximación interior politópica sin mayor información de las funciones de pertenencia $\mathbb{S}_\infty^{si}(\Omega, \mathbb{T})$ sustituyendo $Q(\mathbb{T})$ por $Q^{si}(\mathbb{T})$.

Algoritmo 4.2

- 1) Hacer $i = 0$, $\mathbb{S}_1 = \emptyset$, $\mathbb{S}_0 = \mathbb{T}$.
- 2) Mientras $\mathbb{S}_{i+1} \neq \mathbb{S}_i$ repetir
 - a) $\mathbb{S}_{i+1} = \text{proy}_x((Q(\mathbb{S}_i) \cap \Omega))$
 - b) $i = i + 1$
- 3) $\mathbb{S}_\infty(\Omega, \mathbb{T}) = \mathbb{S}_i$.

Como se puede apreciar, la obtención de los máximos conjuntos invariantes y contractivos bajo control, así como la obtención del máximo conjunto estabilizable, son difíciles de obtener de forma práctica para un modelo borroso TS genérico. El cálculo de estos conjuntos requiere computar de forma recursiva el conjunto a un paso exacto $Q(\mathbb{T})$, que contiene en su formulación las funciones de pertenencia $\mu(x)$ dependientes del estado, y generalmente no lineales.

Por otro lado, en la obtención de los máximos conjuntos para cualquier realización de las funciones de pertenencia, si expresamos el modelo borroso como en (4.2), y sin más conocimiento de las funciones de pertenencia que el de pertenecer al simplex (4.3), las restricciones sobre los estados y acciones futuras sólo podrán ser expresadas como un conjunto de condiciones suficientes de cada uno de los vértices $[A_i, B_i]$. De esta forma, las restricciones que se apliquen a u_k , tienen que cumplirse para todo valor de $\mu(x_k)$, y por tanto, al ser tan restrictivas, conducirán a conjuntos de dimensiones muy reducidas.

Como veremos más adelante, estos conjuntos nos van a definir las regiones donde podremos asegurar la estabilidad asintótica del modelo en bucle cerrado. Y esto significa que la región de aplicabilidad del algoritmo de control en línea estable que vamos a desarrollar será muy limitada. Así, se hace necesario un procedimiento para calcular la mejor aproximación interior politópica del conjunto a un paso para cualquier realización de las funciones de pertenencia.

4.3 APROXIMACIÓN INTERIOR POLITÓPICA AL CONJUNTO A UN PASO

El objetivo de esta sección será obtener la mejor aproximación interior politópica a los conjuntos contractivos, invariantes bajo control y estabilizables, independientemente de la forma de las funciones de pertenencia: $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{C}^{\lambda,\infty}(\Omega)$ y $\mathbb{S}_\infty(\Omega, \mathbb{T})$.

Puesto que en el momento de aplicar la acción de control, conocemos el estado y por tanto el valor exacto de las funciones de pertenencia, vamos a expresar la acción de control de forma que contenga en su expresión el conocimiento de dicha función de pertenencia, y así las restricciones las aplicaremos únicamente para el valor de u_k correspondiente a cada vértice $[A_i, B_i]$.

Sea la acción de control expresada como una interpolación convexa de un conjunto de vértices, donde la función de interpolación es la misma que la función de pertenencia del modelo borroso TS

$$u_k = \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k) u_{k,j} \quad (4.12)$$

Llamamos a esta forma de expresar la acción de control como “acción de control borrosa”. Expresando de esta forma la acción de control, podremos aplicar los principios de la programación copositiva.

De esta forma, el modelo borroso TS a un paso se expresa como

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) (A_i x_k + B_i u_{k,j}) \quad (4.13)$$

Este modelo borroso se caracteriza por expresarse como un doble sumatorio de unas mismas funciones de pertenencia. Por analogía con los modelos borrosos TS en bucle cerrado con ley de control de tipo PDC, se pueden aplicar los mismos principios de relajación que en la sección 3.4. De esta forma, podemos asegurar que las restricciones sobre la acción de control serán menos conservativas.

Las restricciones que se van a aplicar sobre los estados y acciones de control futuras del modelo, suelen representarse como un conjunto de restricciones politópicas (4.4), las cuales pueden representarse como un conjunto de desigualdades lineales que restringen la solución óptima del optimizador. Sin embargo, debido a las no linealidades de las funciones de pertenencia, estas restricciones se transforman en unas restricciones no lineales de difícil computación.

Así, el procedimiento más conservativo consiste en aplicar las restricciones a cada uno de los vértices del modelo, generando un conjunto de condiciones suficientes que garantizan que se cumplen las restricciones impuestas. Siguiendo esta filosofía, el conjunto interior politópico que se obtendría del conjunto a un paso sería:

$$\tilde{Q}(\lambda\mathbb{T}) = \{(x, u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^{m+n} \setminus T(A_i x + B_i u_j) + \lambda r < 0 \quad \forall i, j\} \quad (4.14)$$

Este conjunto a un paso, es idéntico al conjunto a un paso obtenido mediante una acción de control no borrosa $Q^{si}(\lambda\mathbb{T})$, es decir, no aporta ninguna ventaja.

Sin embargo, siguiendo la filosofía típica de los procedimientos borrosos, podemos relajar estas condiciones mediante el desarrollo de Polya del modelo borroso original. Así, para comprobar la copositividad de las desigualdades que definen $Q(\lambda\mathbb{T})$ bastará con comprobar la positividad de ciertas combinaciones de sus vértices, lo que nos lleva a unas restricciones menos restrictivas que en $\tilde{Q}(\lambda\mathbb{T})$, como se detalla de forma más exhaustiva en capítulo 3.

Siguiendo la notación propuesta en dicho capítulo, el conjunto a un paso relajado se denota como

$$\tilde{Q}^d(\lambda\mathbb{T}) = \left\{ (x, u_j) \in \mathbb{R}^{n+r \cdot m} \setminus \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} (T(A_{j_1}x + B_{j_1}u_{j_2}) + r) < 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}_{p+d}^+ \right\} \quad (4.15)$$

Con $p = 2$, puesto que el conjunto a un paso exacto está definido como un doble sumatorio borroso, y d se refiere al grado de complejidad Polya.

Con el fin de desarrollar una notación más compacta, definimos el modelo borroso expandido Polya d como:

$$x_{k+1} = \sum_{i \in \mathbb{I}_{2+d}^+} \mu_i n_i \tilde{G}_i(x_k, u_{k,1}, \dots, u_{k,r}) \quad (4.16)$$

Donde los nuevos vértices del modelo son:

$$\tilde{G}_i(x_k, u_{k,1}, \dots, u_{k,r}) = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} (A_{j_1}x_k + B_{j_1}u_{k,j_2}) \quad (4.17)$$

Con $n_i = \# \mathcal{P}(i)$ el número de elementos en esa permutación.

De esta forma, será condición suficiente aplicar las restricciones a cada uno de los nuevos vértices para que se cumplan las restricciones de copositividad sobre este nuevo modelo borroso, dando lugar al mismo conjunto a un paso (4.15).

$$\tilde{Q}^d(\lambda\mathbb{T}) = \left\{ (x, u_j) \in \mathbb{R}^{n+r \cdot m} \setminus \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} (T\tilde{G}_i(x_k, u_{k,1}, \dots, u_{k,r}) + r) < 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}_{p+d}^+ \right\} \quad (4.18)$$

Puesto que en $\tilde{Q}(\lambda\mathbb{T})$ no se ha producido la expansión Polya, este conjunto será en general igual o más pequeño que $\tilde{Q}^d(\lambda\mathbb{T})$, es decir, $\tilde{Q}(\lambda\mathbb{T}) \subseteq \tilde{Q}^d(\lambda\mathbb{T})$.

Se puede probar que a medida que aumenta el índice d , disminuye su conservativismo, pero aumenta su coste computacional. De hecho, las condiciones del conjunto $\tilde{Q}^d(\lambda\mathbb{T})$ se vuelven equivalentes a las condiciones del conjunto $\mathcal{Q}^{si}(\lambda\mathbb{T})$ cuando $d \rightarrow \infty$. Son, por tanto, condiciones suficiente y asintóticamente necesarias. Ver sección 2.3 para más detalle. Así,

$$\tilde{Q}(\lambda\mathbb{T}) \subseteq \tilde{Q}^d(\lambda\mathbb{T}) \subseteq \tilde{Q}^{d+1}(\lambda\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{Q}^{si}(\lambda\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{Q}(\lambda\mathbb{T}) \quad (4.19)$$

4.3.1 APROXIMACIÓN INTERIOR POLITÓPICA AL MÁXIMO CONJUNTO CONTRACTIVO

De la aplicación de cada conjunto a un paso en el Algoritmo 4.1 obtenemos su equivalente conjunto contractivo bajo control.

$$\tilde{\mathcal{C}}^\lambda(\Omega) \subseteq \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega) \subseteq \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d+1}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{\lambda,si}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{\lambda,\infty}(\Omega) \quad (4.20)$$

Razonamientos análogos son aplicables a los conjuntos invariantes y estabilizables. Los denotaremos por $\tilde{\mathcal{C}}^d(\Omega)$ y $\tilde{\mathcal{S}}_\infty^d(\Omega, \mathbb{T})$.

Además, por razonamiento análogo al realizado en la sección 3.6, los conjuntos contractivos obtenidos por este procedimiento obtendrán siempre mejores resultados que cualquier otro conjunto contractivo obtenido para un mismo grado de complejidad Polya, si las mismas condiciones suficientes particulares son usadas para la obtención de las variables de decisión de este conjunto contractivo.

Entre el conjunto politópico contractivo bajo control obtenido $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, que nos garantiza la estabilidad asintótica en bucle cerrado, y la máxima región invariante bajo control que se puede obtener $\tilde{\mathcal{C}}^d(\Omega)$, tenemos toda una región de los estados, para los que si bien no podemos garantizar su estabilidad asintótica con dicho ratio de contracción, sí que podemos garantizar su convergencia al origen a partir de los conjuntos estabilizables. Es decir:

$$\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega) \subseteq \tilde{\mathbb{S}}_i(\Omega, \mathbb{T}) \subseteq \tilde{\mathbb{S}}_{i+1}(\Omega, \mathbb{T}) \subseteq \tilde{\mathcal{C}}^d(\Omega)$$

Así, primero calcularemos el máximo conjunto politópico contractivo bajo control $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$. Y luego, calculamos el máximo conjunto politópico estabilizable, donde el conjunto de destino es el conjunto contractivo obtenido previamente, esto es $\tilde{\mathbb{S}}_{\infty}^d(\Omega, \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega))$. Para cualquier estado $x \in \tilde{\mathbb{S}}_{\infty}^d(\Omega, \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega))$, existirá una secuencia de acciones de control para que el modelo converja al origen, puesto que en un número finito de pasos llegará a $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, donde ya teníamos garantizada la convergencia asintótica del modelo en bucle cerrado.

Sea el conjunto $\mathbb{T} = \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, el conjunto $\tilde{\mathbb{S}}_{\infty}^d(\Omega, \mathbb{T})$ define un conjunto invariante y convergente al origen. Cuando el estado del modelo se encuentra situado fuera del conjunto contractivo $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, pero dentro del conjunto estabilizable $\tilde{\mathbb{S}}_{\infty}^d(\Omega, \mathbb{T})$, sabemos que existe una secuencia de N acciones de control (donde N es el número de iteraciones necesarias para completar el algoritmo recursivo para obtener $\tilde{\mathbb{S}}_{\infty}^d(\Omega, \mathbb{T}) = \tilde{\mathbb{S}}_N^d(\Omega, \mathbb{T})$), que hace que el estado del modelo converja a $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, pero sin el ratio de convergencia λ garantizado. Una vez el estado del modelo se encuentra dentro del conjunto controlable $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, la estabilidad asintótica con un ratio de contracción λ ya está garantizada. De esta forma ampliamos la región de estabilidad asintótica del modelo bajo control a la región estabilizable $\tilde{\mathbb{S}}_{\infty}^d(\Omega, \mathbb{T})$.

En la mayoría de casos, el conjunto estabilizable $\tilde{\mathbb{S}}_{\infty}^d(\Omega, \mathbb{T})$ coincide con el máximo invariante $\tilde{\mathcal{O}}^d(\Omega)$.

En el ejemplo 4.6.1 se muestra una comparativa de los anteriores conjuntos.

4.4 ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Como se introdujo en el principio del capítulo, queremos desarrollar un procedimiento de control en línea que sea estable y que minimice cierto índice de coste cuadrático.

La estabilidad asintótica de un modelo borroso TS se puede asegurar mediante el uso de la teoría de Lyapunov que, como se vio en el capítulo 2, postula que si para cierto modelo borroso TS podemos encontrar una función de Lyapunov asociada, entonces podemos garantizar que el modelo es asintóticamente estable.

Se define una función $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como función de Lyapunov si:

$$V(x) \geq 0 \tag{4.21}$$

$$V(0) = 0 \tag{4.22}$$

$$V(f(x)) - V(x) < 0 \tag{4.23}$$

Así, definimos nuestra función de Lyapunov politópica a partir del máximo conjunto contractivo. Puesto que $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ es un politopo, lo expresaremos como un conjunto de g restricciones:

$$\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid L_l x < 1; l = 1 \dots g\} \quad (4.24)$$

Las cuales nos permiten crear la siguiente candidata a función de Lyapunov:

$$V(x) = \max(L_l \cdot x) \quad (4.25)$$

Sabemos que $V(x)$ puede ser función de Lyapunov porque:

- $V(0) = 0$ porque cada una de las restricciones $L_l x < 1$ son lineales en x .
- $V(x) \geq 0$ porque las restricciones son politopo acotado conteniendo al origen.
- Por escalabilidad, $\exists u$ factible tal que $V(x_{k+1}) < \lambda V(x_k)$.

Vamos a desarrollar un poco estos puntos. El hecho de que x_k pertenezca a un conjunto λ -contractivo $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, asegura que, con la adecuada acción de control, el estado siguiente x_{k+1} pertenecerá al conjunto escalado por λ , es decir $\lambda \cdot \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$. Entonces, por escalabilidad, si x_k es a un punto interior de $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, existirá un escalar $0 \leq \gamma < 1$ tal que x_k pertenece a la frontera de $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ escalado por γ , esto es, a $\partial(\gamma \cdot \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega))$. Y, por ser $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ un conjunto contractivo, x_{k+1} pertenecerá a $\gamma \cdot \lambda \cdot \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, es decir, que se habrá contraído en un factor λ , y por tanto también el valor de su función de Lyapunov. Por tanto, para un estado cualquiera x_k perteneciente a $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, sabemos que existirá una acción de control admisible u_k , tal que $V(x_{k+1}) < \lambda V(x_k)$.

En cuanto a que $V(x) \geq 0$, se comprueba por reducción al absurdo. Si $L_l x < 0 \forall l$, $\max(L_l) < 0$, y para cualquier escalar $\alpha > 0$ entonces $\max(\alpha \cdot L_l) < 0$, lo que significa que no puede ser un conjunto acotado.

Esta función de Lyapunov define un conjunto cerrado donde $\forall x \in \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega), V(x) < 1$. Así, cualquier conjunto $V(x) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) = \lambda; 0 < \lambda < 1\}$ define una equipotencial de Lyapunov.

Por ejemplo, dada una función de Lyapunov definida por:

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/5 & -1/5 \\ 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

La siguiente figura representa las equipotenciales de Lyapunov para $V(x) = \gamma$ con

$$\{\gamma\} = \{0.2 \cdot n \mid n = 1 \dots 5\} \quad (4.27)$$

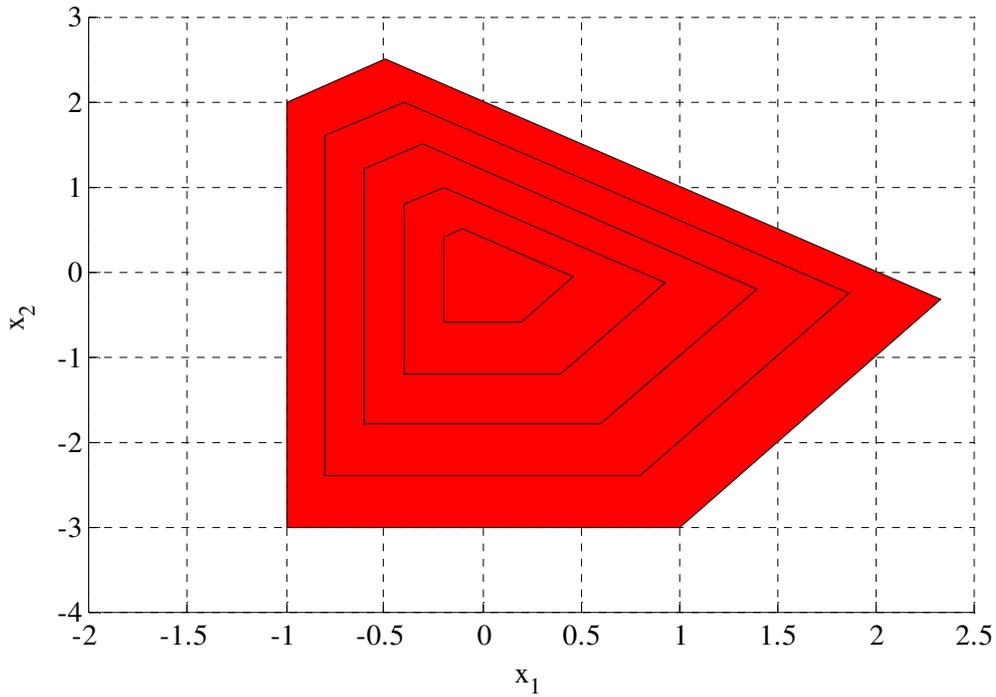


Ilustración 4-1: Equipotenciales de Lyapunov

4.5 ALGORITMO DE CONTROL EN LÍNEA ESTABILIZABLE

Ahora que ya tenemos desarrollado cómo obtener una función de Lyapunov politópica, vamos a plantear un problema de optimización en línea con la restricción de que el estado siguiente pertenezca a dicha función de Lyapunov pero escalada en un factor λ . Puesto que para cualquier punto interior del conjunto contractivo $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ tenemos garantizado la existencia de una acción control factible que cumpla este requisito, el conjunto $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ nos define la región de validez de nuestro algoritmo de control.

Las restricciones al problema de optimización se expresan matemáticamente como:

- $(x_k, u_k) \in \Omega$
- $V(x_{k+1}) < \lambda V_k$

Donde $V(x_k)$ viene definida del máximo conjunto λ -contractivo bajo control obtenido mediante los procedimientos explicados en la sección precedente.

Puesto que el estado actual x_k es conocido, también podemos evaluar el valor numérico de las funciones de pertenencia para el paso actual $\mu(x_k)$, y por tanto el valor de la función de Lyapunov actual $V(x_k)$, y las matrices

$$A(x_k) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k) A_i \quad (4.28)$$

$$B(x_k) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k) B_i \quad (4.29)$$

En cuanto a la acción de control, como conocemos el valor de la función de pertenencia $\mu(x_k)$ actual, planteamos las variables de decisión como un único vector $u = u_k$.

Expresamos dichas restricciones exactas como

$$\begin{cases} Rx_k + Su_k + s < 0 \\ \max(L_l A(x_k)x_k + L_l B(x_k)u_k) < \lambda V(x_k) \end{cases} \quad (4.30)$$

Esta última restricción se cumplirá si

$$L_l A(x_k)x_k + L_l B(x_k)u_k < \lambda V(x_k) \quad \forall l = 1 \dots g \quad (4.31)$$

Con estas restricciones ya tenemos la seguridad de que si el estado inicial se encuentra dentro de $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, existirá una acción de control que contraiga el modelo en bucle cerrado. Sólo falta definir un criterio de decisión y un optimizador para ese criterio de decisión.

Para ello, en cuanto al criterio de decisión, proponemos minimizar un índice de coste cuadrático:

$$J = f(x_{k+1}, u_k) \quad (4.32)$$

que pondere el estado siguiente y la acción de control que necesitamos aplicar para llegar a dicho estado:

$$J = x_{k+1}^T Q x_{k+1} + u_k^T H u_k \quad Q, H \geq 0 \quad (4.33)$$

El cual será optimizado por un QP.

Teniendo en cuenta que x_{k+1} se puede expresar de forma exacta como:

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k)(A_i x_k + B_i u_k) \quad (4.34)$$

El problema de optimización, para nuestro modelo borroso TS, tiene forma de QP y se expresa como:

$$\begin{cases} \min: & \frac{1}{2} u^T [B(x_k)^T Q B(x_k) + H] u + x_k^T A(x_k)^T Q B(x_k) u \\ \text{sujeto a:} & L_j B(x_k) u < \lambda V(x_k) - L_j A(x_k) x_k \quad \forall j = 1 \dots g \\ & S u < -R x_k - s \end{cases} \quad (4.35)$$

4.5.1 AMPLIACIÓN DE LA REGIÓN DE ESTABILIDAD ASINTÓTICA

Como se vio en secciones precedentes, la selección de un ratio de contracción muy restrictivo (cercano a cero), conducirá a un conjunto $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ muy reducido. Y, por tanto, con una validez muy limitada. Esto implica que la estrategia de control propuesta sólo es válida para dicha región más reducida.

Para evitar este inconveniente, se propone fijar un ratio de contracción λ muy cercano a la unidad, de forma que el conjunto contractivo resultante sea casi idéntico al conjunto invariante correspondiente. Sin embargo, si queremos asegurar un ratio de convergencia λ más restrictivo, proponemos usar los conjuntos estabilizables con el fin de ampliar la región de estabilidad asintótica.

Primero definimos el conjunto terminal a partir del máximo conjunto λ -contractivo $\mathbb{T} = \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ obtenido en la sección anterior, para definir nuestra candidata a función de Lyapunov.

Posteriormente, aplicamos el Algoritmo 4.2 modificado para obtener todos los conjuntos estabilizantes hasta $\tilde{\mathcal{S}}_{\infty}^d(\Omega, \mathbb{T})$.

Por definición, sabemos que existe una secuencia de acciones de control que, en N pasos o menos, que lleva el estado del modelo desde $\tilde{\mathcal{S}}_{\infty}^d(\Omega, \mathbb{T})$ a $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$.

Así, planteamos el problema de optimización que sitúe el estado del modelo en el conjunto estabilizable anterior, esto es:

- Si $x_k \in \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ aplicar QP (4.35), si no, recorrer $i = 1 \dots N$
- Si $x_k \in \tilde{\mathbb{S}}_{i+1}^d(\Omega, \mathbb{T})$ y $x_k \notin \tilde{\mathbb{S}}_i^d(\Omega, \mathbb{T}) \rightarrow$ aplicamos el QP siguiente

$$\begin{cases} \min: & J(x_{k+1}, u_k) \\ \text{sujeto a:} & x_{k+1} \in \tilde{\mathbb{S}}_{i-1}^d(\Omega, \mathbb{T}) \\ & (x_k, u_k) \in \Omega \end{cases} \quad (4.36)$$

Nótese que para aplicar este procedimiento, antes de resolver cada iteración tendremos que obtener en qué región se encuentra el estado actual.

4.6 EJEMPLOS

4.6.1 COMPARATIVA DE LAS REGIONES CONTRACTIVAS

Sea un modelo borroso TS de la forma (2.61) definido por

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.7 & 1.1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Las restricciones en (x, u) se definen como en (4.4) con

$$x_{max} = 1$$

$$u_{max} = 0.1$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1)^T$$

$$s = (x_{max} \ x_{max} \ x_{max} \ x_{max} \ u_{max} \ u_{max})^T$$

El índice de contracción lo fijamos a $\lambda = 0.9$.

En la siguiente figura se observa el conjunto contractivo bajo control que se obtiene para el modelo en bucle cerrado sin acción de control borrosa (en azul) y con acción de control borrosa con grado de complejidad Polya $d = 1$ (en rojo).

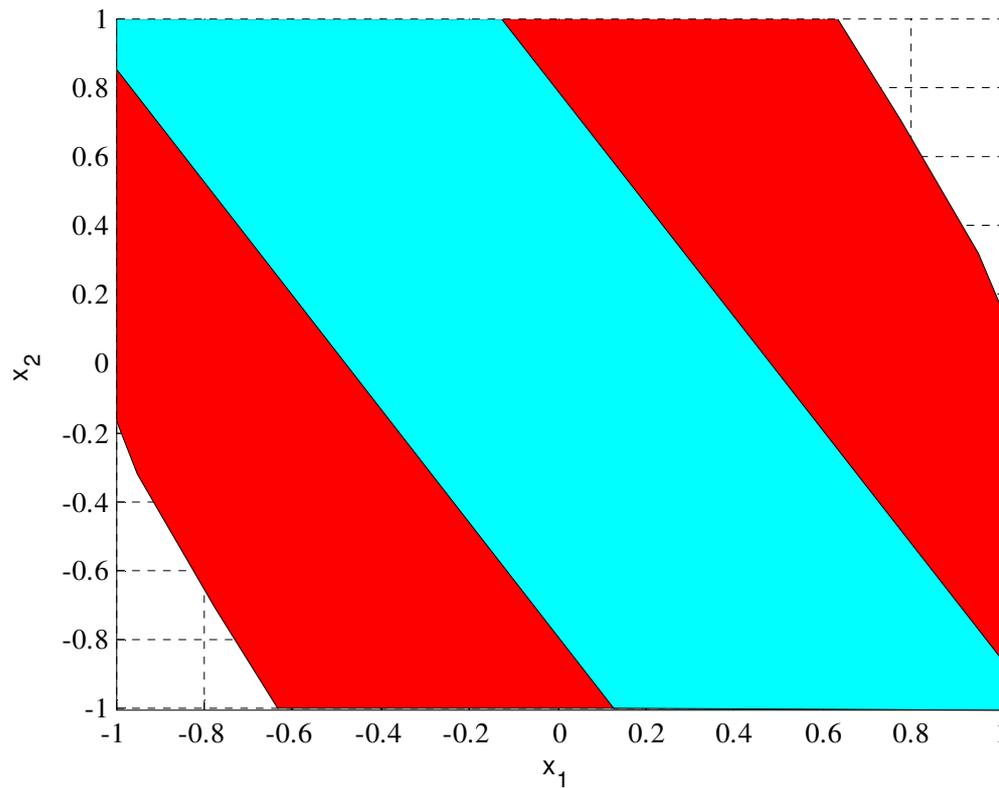


Ilustración 4-2: Regiones contractivas $\tilde{C}^{\lambda,d}(\Omega)$ y $\tilde{C}^{\lambda}(\Omega)$, en rojo y cian respectivamente

Estas dos regiones permiten observar la importancia que tiene aplicar una acción de control borrosa para maximizar la región donde podremos garantizar la convergencia, y por tanto, donde nuestro algoritmo de control tendrá garantizada la obtención de una acción de control estabilizable.

4.6.2 SIMULACIÓN DEL MODELO CONTROLADO

Sea un modelo borroso TS de la forma (4.2) definido por

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con sus funciones de pertenencia definidas por

$$\mu_1(x) = (1/20 \ 0)x + 1/2$$

$$\mu_2(x) = 1 - \mu_1(x)$$

Las restricciones en (x, u) se definen como en (4.4) con

$$x_{max} = 10$$

$$u_{max} = 3$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1)^T$$

$$s = (x_{max} x_{max} x_{max} x_{max} u_{max} u_{max})^T$$

El índice de coste viene definido en (4.33) con

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = 0.1$$

Y, por último, tomamos

$$x_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5.5 \end{pmatrix}$$

Siguiendo el procedimiento desarrollado en la secciones precedentes calculamos primero el máximo conjunto λ -contractivo $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ con $\lambda = 0.8$ y $d = 1$. Este conjunto contractivo se dibuja en la siguiente figura en rojo y representa al conjunto de estados sobre los que podemos garantizar su convergencia asintótica en bucle cerrado con una tasa de convergencia $\lambda = 0.8$.

Con el fin de ampliar la región de estabilidad del modelo, utilizamos este conjunto λ -contractivo $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ como conjunto terminal de nuestra secuencia de conjuntos estabilizables $\{\tilde{\mathcal{S}}_i^d(\Omega, \mathbb{T})\}$. Esta secuencia de conjuntos viene también dibujada en la misma figura.

Ahora aplicamos el procedimiento de control en línea descrito en la sección 4.5. Inicialmente, el estado del modelo se encuentra fuera del conjunto $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ pero dentro del conjunto $\tilde{\mathcal{S}}_\infty^d(\Omega, \mathbb{T})$, por lo que aplicaremos una acción de control que garantice que el estado siguiente del modelo se sitúe en el conjunto estabilizable $\tilde{\mathcal{S}}_{i-1}^d(\Omega, \mathbb{T})$, tal y como se describe en el QP (4.36). Una vez el estado del modelo se sitúe dentro del conjunto $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, pasaremos a aplicar una acción de control que haga que la trayectoria del modelo converja asintóticamente con un factor λ al origen.

La simulación de la evolución del modelo en bucle cerrado viene también representada en la siguiente figura. Se observa que en el primer paso, salta directamente del último conjunto estabilizable al conjunto contractivo, sin pasar por todos los conjuntos estabilizables intermedios.

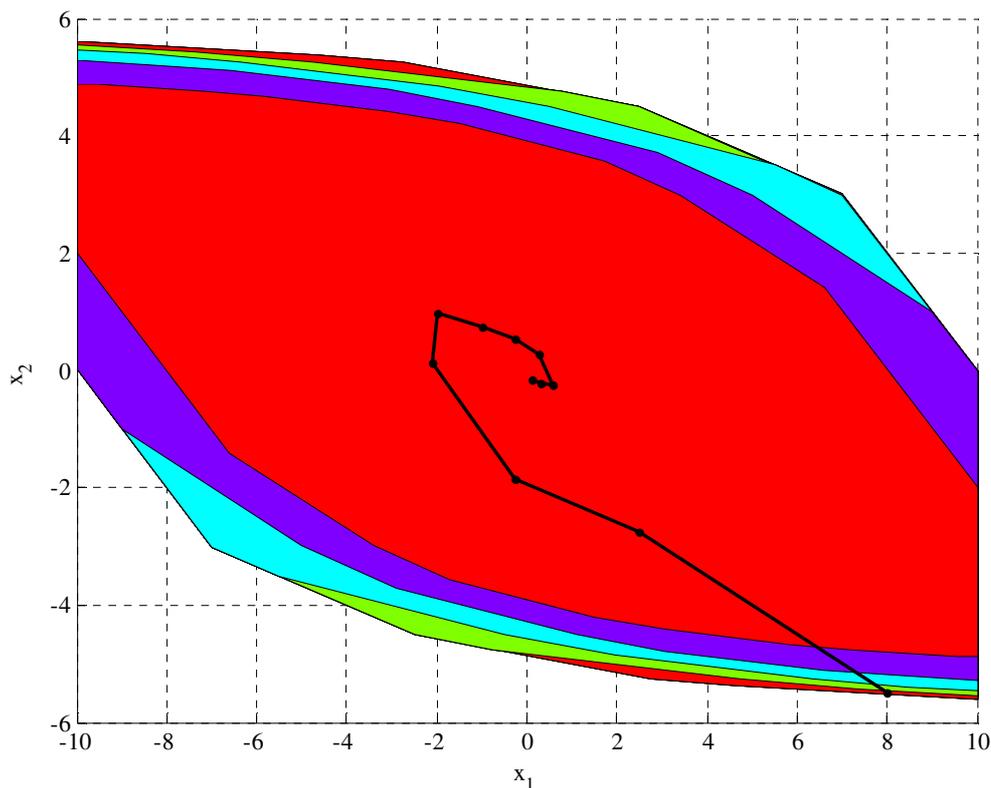


Ilustración 4-3: Conjuntos λ -contractivo (en rojo) y estabilizables, y evolución del modelo.

4.7 CONCLUSIONES

En el presente capítulo se ha propuesto un control en línea estable para un modelo borroso TS. La acción de control propuesta contiene en su expresión las mismas funciones de pertenencia que el modelo borroso original.

La estabilidad está basada en una función de Lyapunov obtenida antes de iniciar el muestreo y control en línea del sistema. Esta función de Lyapunov se obtiene a partir del máximo conjunto politópico λ -contractivo que somos capaces de calcular para un coeficiente de contracción dado a priori. Así, nuestra función de Lyapunov es politópica, y su región de validez es mayor que la de cualquier otra función de Lyapunov que se puede obtener si utilizamos las mismas condiciones particulares.

Entonces, el planteamiento de nuestro control estable en línea se basa en asegurar una acción de control que contraiga el valor de la función de Lyapunov en un factor λ , a la vez que minimizamos cierto criterio de decisión. En este capítulo se propone la minimización de un coste cuadrático a un paso.

Con el fin de ampliar al máximo la región de estabilidad del control estable en línea propuesto, hacemos uso de los conjuntos estabilizables, y desarrollamos un control en línea que garantiza la convergencia de la trayectoria del modelo al conjunto contractivo en un máximo de N pasos, donde ya teníamos garantizada la estabilidad asintótica del modelo, y por tanto, su convergencia al origen.

5 CONTROL PREDICTIVO BORROSO TS

El control predictivo borroso Takagi-Sugeno engloba a las técnicas de control que aplican el MPC (Model Predictive Control) a los modelos borrosos Takagi-Sugeno. Sin embargo, a pesar de los muchos avances y trabajos de investigación realizados hasta la fecha, no existe una metodología completamente satisfactoria de diseño de dichos controladores. Así, en este capítulo vamos a analizar los problemas que se derivan de aplicar las técnicas de control predictivo a modelos borrosos TS, así como desarrollar diferentes posibles soluciones a dichos problemas.

Como se ha discutido en capítulos precedentes, todo control predictivo se fundamenta en:

- Un modelo de predicción
- Unas restricciones sobre los estados, entradas y/o salidas
- Un criterio de decisión
- Un horizonte móvil de aplicación

En consecuencia, y tras definir con precisión el problema a resolver, vamos a estructurar el siguiente capítulo según tres bloques principales.

El primer bloque hará referencia a los modelos de predicción. Empezaremos desarrollando el modelo de predicción borroso exacto, que se deriva de aplicar el modelo borroso TS original a un horizonte de predicción a N pasos. Como este modelo contiene en su formulación unas funciones de pertenencia dependiente de los estados futuros (que también son desconocidos), será un modelo muy difícil de aplicar a nivel práctico excepto para ciertos casos particulares. Este problema es común con el diseño de controladores sobre modelos borrosos no predictivos y en la literatura borrosa es habitual enfocar el diseño de controladores fundamentándose en la información de carácter lineal contenida en los vértices, dejando de lado la información no lineal contenida en las funciones de pertenencia. Así, siguiendo esta metodología, desarrollamos una expresión matricial del modelo de predicción borroso exacto con dos términos diferenciados, por un lado una función de pertenencia global y por otro lado un conjunto de vértices a N pasos.

Siguiendo las ideas propuestas en (Sokaert & Mayne, 1998), en el momento de calcular la acción de control u_{k+q} , tendremos conocimiento de los estados $\{x_k \dots x_{k+q-1}\}$, y por tanto del valor de las funciones de pertenencia correspondientes. Haciendo uso de esta información, y siguiendo con la notación matricial desarrollada con el modelo borroso exacto, desarrollamos dos modelos de predicción borrosos, que se derivan del modelo de predicción borroso original.

Este primer bloque dedicado a los modelos de predicción, concluirá con un desarrollo de los modelos de predicción lineales que se derivan de los modelos borrosos antes mencionados.

El segundo bloque tratará las restricciones sobre las acciones de control y los estados futuros. La primera restricción consiste en asegurar la estabilidad asintótica del modelo. Los principios sobre los que se fundamenta dicha estabilidad, así como los procedimientos para obtener la máxima región estabilizable, se desarrollan en la sección 5.2.

El segundo conjunto de restricciones se refiere a la factibilidad de las acciones de control y estados futuros. En esta sección, plantearemos las ecuaciones con dos enfoques diferenciados. El primer enfoque consiste en aplicar unas restricciones garantistas, basadas en los modelos de predicción exactos, y el segundo enfoque no-garantista, que consiste en aplicar las restricciones a una linealización de dichos modelos.

En el primer enfoque, y puesto que los modelos borrosos contienen no linealidades en sus funciones de pertenencia, plantearémos las ecuaciones de restricción como un conjunto de restricciones sobre los vértices del modelo de predicción borroso. Como ocurre habitualmente en el control borroso TS, esto conduce a un conjunto de restricciones necesarias pero no suficientes, que son más restrictivas que las restricciones originales. Sin embargo, los modelos borrosos con una acción de control que tiene en cuenta en su formulación el conocimiento de los estados anteriores, se les puede aplicar los principios de la programación copositiva Polya para relajar estas condiciones necesarias. Es aquí donde se manifiesta la utilidad de este tipo de modelos.

El segundo enfoque es no-garantista, puesto que se basa en aplicar las restricciones a una linealización del modelo de predicción borroso exacto. Este segundo enfoque se suele combinar con un proceso iterativo, donde la solución del optimizador nos sirve para volver a linealizar el modelo, y volver a obtener otra nueva solución. Si este proceso iterativo converge, entonces este segundo enfoque se vuelve garantista, y las restricciones se cumplirán también para el modelo de predicción borroso exacto.

El segundo bloque concluye con un análisis de las regiones de factibilidad de las restricciones, organizado según el tipo de modelo y enfoque que utilizemos.

El tercer bloque trata sobre el criterio de decisión y sobre el tipo de optimizador que podemos utilizar. El criterio de decisión que vamos a perseguir consiste en minimizar un índice de coste cuadrático. En cuanto al optimizador, utilizaremos un QP con función de Lyapunov contractiva. Sin embargo, en este tercer bloque también se discutirán otras opciones utilizadas en la literatura de control predictivo.

5.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Considérese un modelo borroso Takagi-Sugeno discreto, con $x_k \in \mathbb{R}^n$ y $u_k \in \mathbb{R}^m$:

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k)(A_i x_k + B_i u_k) \quad (5.1)$$

Donde $A_i x_k + B_i u_k$ representa cada vértice del modelo borroso que es un modelo local lineal. Para este modelo, el estado futuro se computa a partir de una combinación de dichos vértices mediante las funciones de interpolación del simplex Δ_r :

$$\Delta_r = \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(x) = 1 \quad \wedge \quad \mu_i(x) > 0 \quad ; \quad \forall i = 1 \dots r \right\} \quad (5.2)$$

Considérese también un conjunto de restricciones politópicas:

$$\Omega = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Rx + Su + s < 0\} \quad (5.3)$$

Con estos elementos, el objetivo es desarrollar una estrategia de control predictivo con la que obtener la acción de control instantánea u_k que garantice la estabilidad del modelo y que intente minimizar un cierto índice de coste cuadrático objetivo:

$$J_\infty = \sum_{q=0}^{\infty} x_{k+q}^T Q x_{k+q} + u_{k+q}^T H u_{k+q} \quad (5.4)$$

5.2 ESTABILIDAD

La estabilidad asintótica de un modelo borroso TS (5.1) se puede asegurar mediante el uso de la teoría de Lyapunov que postula que, si para cierto modelo borroso TS podemos encontrar una función de Lyapunov

asociada, entonces podemos garantizar la existencia de una secuencia de control que haga que el modelo sea asintóticamente estable.

Como se vio en el capítulo 4, para el modelo borroso TS (5.1), podemos garantizar la existencia de una función de Lyapunov $V(x)$ si existe un conjunto λ -contractivo bajo control \mathcal{C}^λ . Esto será λ -contractivo si y solo si para cualquier $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x_k \in \mathcal{C}^\lambda \Rightarrow \exists u_k \in \mathbb{R}^m \setminus x_{k+1} \in \lambda \mathcal{C}^\lambda \quad (5.5)$$

donde $\lambda \mathcal{C}^\lambda$ representa el conjunto \mathcal{C}^λ escalado por λ , con $0 < \lambda < 1$.

El conjunto \mathcal{C}^λ define la región donde podemos garantizar estabilidad asintótica. Por tanto, el primer paso del diseño del controlador consiste en obtener el máximo conjunto λ -contractivo bajo control contenido en el conjunto factible de estados y acciones de control, que denotamos por $\mathcal{C}^{\lambda, \infty}(\Omega)$, con el fin de maximizar la región de estabilidad probable. Nótese que por ser las restricciones Ω un conjunto en (x, u) , su proyección sobre \mathbb{R}^n ($proy_x(\Omega)$) nos da el conjunto factible de estados.

Como hemos analizado en la sección 3.4 y 4.3, para la mayoría de los modelos borrosos, no es posible obtener computacionalmente el conjunto exacto $\mathcal{C}^{\lambda, \infty}(\Omega)$, debido a las no linealidades de las funciones de pertenencia. Sin embargo, hemos descrito cómo obtener una aproximación interior politópica de dicho conjunto, que denotamos por $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda, \infty, d}(\Omega)$, donde d representa el grado de complejidad Polya del conjunto politópico. De hecho, a medida que aumenta el grado de complejidad Polya, el conjunto obtenido converge al máximo conjunto politópico que se puede obtener sin tener en cuenta más información de las funciones de pertenencia que el hecho de pertenecer al simplex (5.2), denotado por $\mathcal{C}^{\lambda, si}(\Omega)$. Este último conjunto es el máximo conjunto para cualquier posible realización de $\mu(x)$.

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda, \infty, d}(\Omega) = \mathcal{C}^{\lambda, si}(\Omega) \quad (5.6)$$

Como se ha visto, $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda, \infty, d}(\Omega)$ es un politopo, y lo podremos expresar como un conjunto de g restricciones:

$$\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda, \infty, d}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus L_l x < 1; l = 1 \dots g\} \quad (5.7)$$

Las cuales nos permiten crear la siguiente candidata a función de Lyapunov:

$$V(x) = \max_l (L_l \cdot x) \quad (5.8)$$

La cual, podremos afirmar que es función de Lyapunov si se cumple la condición de contractibilidad $V(x_{k+1}) < \lambda \cdot V(x_k)$, porque

- $V(0) = 0$ porque son restricciones lineales en x .
- $V(x) \geq 0$ porque las restricciones son politopo cerrado conteniendo al origen.
- Existe una acción de control factible tal que $V(x_{k+1}) < \lambda \cdot V(x_k)$.

Nótese que, $\forall x \in \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda, \infty, d}(\Omega)$, $V(x) \leq 1$, y en la frontera $\forall x \in \partial \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda, \infty, d}(\Omega)$, $V(x) = 1$.

Con esta función de Lyapunov, expresamos la primera restricción a nuestro problema de optimización QP como:

$$V(x_{k+1}) < \lambda \cdot V(x_k) \quad (5.9)$$

Con $0 < \lambda < 1$.

La existencia de una acción de control u_k que cumpla (5.9) garantiza la estabilidad asintótica del modelo. Y, por otra parte, por definición de los conjuntos λ -contractivos bajo control, si x_k pertenece a un conjunto λ -contractivo, podemos garantizar la existencia de una acción de control u_k que cumpla (5.9). Por tanto, la región λ -contractiva nos definirá la región donde tenemos garantizado que podemos obtener una acción de control que garantice la estabilidad asintótica del modelo. Así, cuanto mayor sea el conjunto λ -contractivo que podamos obtener, mayor será la región de validez de nuestro controlador estable.

La idea de usar una función de Lyapunov para garantizar la estabilidad del modelo no es nueva, sin embargo hay que destacar que una función de Lyapunov obtenida a partir del máximo conjunto λ -contractivo bajo control, por ser máximo dicho conjunto, contiene a todos los conjuntos contractivos, y por tanto, siempre tendrá una mayor región de validez que cualquier otra función de Lyapunov.

Una vez garantizada la estabilidad, el control predictivo requiere minimizar el coste cuadrático (5.4). Sin embargo, puesto que éste depende de los estados futuros, necesitamos realizar primero una predicción de dichos estados. En la siguiente sección se describen los posibles modelos de predicción que vamos a utilizar.

Hay que destacar que, a diferencia de otros métodos de control predictivo, no necesitamos obtener un índice de coste exacto con el que poder garantizar la estabilidad, ya que ésta viene garantizada por la restricción (5.9). Por tanto, cualquier técnica de predicción que utilicemos, únicamente servirá para estimar y/o acotar con mayor o menor precisión el coste cuadrático de la trayectoria futura del modelo. Es decir, que por poco precisas o inciertas que sean tanto las restricciones sobre los estados futuros, como la estimación del índice de coste, no afectarán en absoluto a la estabilidad del modelo.

Por otra parte, como la estabilidad ya está garantizada, podemos aplicar cualquier técnica iterativa de estimación de los estados futuros, independientemente de que sean o no convexas, o del coste computacional que ellas conlleven. En otras metodologías de control predictivo, necesitamos que el proceso iterativo concluya en menos de un cierto intervalo de tiempo dado, sin cuya resolución no podríamos garantizar la estabilidad del modelo. Así, en nuestro caso, la aplicación de técnicas iterativas simplemente nos mejorará la estimación del coste, siendo este proceso iterativo interrumpido cuando el intervalo de tiempo entre muestreo y muestreo haya concluido, aunque este proceso iterativo no hubiese convergido en ningún resultado final.

5.3 MODELOS DE PREDICCIÓN

Los modelos de predicción que se van a proponer se basan en el modelo borroso TS (5.1) a un paso. Este modelo es un modelo no lineal, producto de la interpolación de varios modelos lineales, llamados vértices, donde la interpolación entre estos vértices se realiza mediante las funciones de pertenencia $\mu_i(x_k)$.

Así, una primera definición del modelo a N pasos consiste en mantener una estructura similar a los modelos borrosos TS, donde definimos por una parte un conjunto de vértices obtenidos mediante funciones lineales y por otra una función de pertenencia global que interpole estos vértices, como se desarrolla en la sección 5.3.1 y 5.3.2.

La otra posibilidad que vamos a explorar consiste en aplicar la optimización a modelos basados en la linealización el modelo no lineal, y aplicar las técnicas de diseño de control predictivo no lineal descritas en el estado del arte, en la sección 2.5.3.

5.3.1 MODELO DE PREDICCIÓN BORROSO EXACTO

A partir del modelo borroso TS a un paso

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k)(A_i x_k + B_i u_k) \quad (5.10)$$

obtenemos el modelo para los q pasos siguientes:

$$x_{k+q} = \sum_{i_0 \dots i_{q-1}} \mu_{i_0}(x_k) \dots \mu_{i_{q-1}}(x_{k+q-1}) (A_{i_{q-1}} \dots A_{i_0} \cdot x_k + A_{i_{q-2}} \dots A_{i_1} B_{i_0} u_k + \dots + B_{i_{q-1}} u_{k+q-1}) \quad (5.11)$$

donde $0 < q \leq N$ representa el paso q -ésimo del horizonte de predicción. Puesto que cada función de pertenencia depende del valor del estado en cada paso, representaremos las funciones de pertenencia del modelo con los subíndices $i_0 \dots i_{q-1}$, para indicar a qué paso hacen referencia, y donde $A_{i_0} \dots A_{i_{q-1}}$ y $B_{i_0} \dots B_{i_{q-1}}$ representan las matrices del modelo en los correspondientes pasos futuros.

La representación de los modelos borrosos suelen realizarse como una función de unos términos no lineales agrupados en los sumatorios de las funciones de pertenencia, y de unos vértices lineales que representan las dinámicas extremas del modelo. Siguiendo esta filosofía desarrollamos la siguiente notación.

Representamos de forma matricial el modelo a un paso:

$$x_{k+1} = \bar{\mu}(x_k)^T (\bar{A}x_k + \bar{B}u_k) \quad (5.12)$$

$$\bar{\mu}(x_k) = \begin{pmatrix} \mu_1(x_k) \\ \mu_2(x_k) \\ \vdots \\ \mu_r(x_k) \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_r \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Definimos el producto de “Kronecker matricial” como el producto de Kronecker aplicado a matrices donde sus elemento son a su vez otras matrices. Por ejemplo $\bar{A} \otimes \bar{B}$ representa el producto de Kronecker matricial entre \bar{A} y \bar{B} :

$$\bar{A} \otimes \bar{B} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 \\ A_1 B_2 \\ \vdots \\ A_1 B_r \\ A_2 B_1 \\ \vdots \\ A_2 B_r \\ \vdots \\ A_r B_1 \\ \vdots \\ A_r B_r \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Y también agrupamos todos los estados futuros y todas las acciones de control en un vector de estados \bar{x} y en un vector de acciones de control \bar{u} :

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+N} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+N-1} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Haciendo uso de estos conceptos previos, definimos el “modelo de predicción TS exacto” como un conjunto de funciones lineales (denominadas vértices del modelo a N pasos), interpolados por una función de pertenencia global $M(\bar{\mu}(x_k) \dots \bar{\mu}(x_{k+N-1}))$ que es función de las funciones de pertenencia originales para cada uno de los pasos futuros.

$$\bar{x} = M(\bar{\mu}(x_k) \dots \bar{\mu}(x_{k+N-1})) \cdot (\theta \cdot x_k + \Gamma \cdot \bar{u}) \quad (5.19)$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{A} \otimes \bar{A} \\ \vdots \\ \bar{A} \otimes \bar{A} \dots \bar{A} \otimes \bar{A} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \bar{B} & 0_{(n \cdot r \times m)} & 0_{(n \cdot r \times m)} & & \\ \bar{A} \otimes \bar{B} & \bar{B} \otimes \bar{I} & 0_{(n \cdot r^2 \times m)} & & \dots \\ \bar{A} \otimes \bar{A} \otimes \bar{B} & \bar{A} \otimes \bar{B} \otimes \bar{I} & \bar{B} \otimes \bar{I} \otimes \bar{I} & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \bar{A} \otimes \bar{A} \dots \bar{A} \otimes \bar{B} & \dots & & \dots & \bar{B} \otimes \bar{I} \dots \otimes \bar{I} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Donde $0_{(n \cdot r \times m)}$ representa una matriz de ceros de dimensión $n \cdot r \times m$, I_m una matriz identidad de dimensión m y la matriz de matrices \bar{I} de tamaño r

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} I_m \\ \vdots \\ I_m \end{pmatrix}_r \quad (5.22)$$

Por último, la matriz de interpolación se construye como sigue, con I_n una matriz identidad de dimensión n

$$M = \begin{pmatrix} (\bar{\mu}(x_k) \otimes I_n)^T & 0_{n \times n \cdot r^2} & & & \\ 0_{n \times n \cdot r} & (\bar{\mu}(x_{k+1}) \otimes \bar{\mu}(x_k) \otimes I_n)^T & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \vdots & \\ & & & & \dots & (\bar{\mu}(x_{k+q}) \otimes \dots \otimes \bar{\mu}(x_k) \otimes I_n)^T \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

El conjunto de modelos lineales origina un conjunto convexo de vértices de estado futuros:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{k+1}^{(r)} \\ x_{k+2}^{(1,1)} \\ \vdots \\ x_{k+2}^{(r,r)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(1,\dots,1)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(r,\dots,r)} \end{pmatrix} = (\Theta \cdot x_k + \Gamma \cdot \bar{u}) \quad (5.24)$$

Donde $\{x_{k+q}^{(1,\dots,1)} \dots x_{k+q}^{(r,\dots,r)}\}$ denotan los posibles estados a los que puede evolucionar el modelo para cada una de las combinaciones de los modelos lineales.

Esta forma de representación permite representar a cada uno de los N estados futuros del modelo $\{x_k, \dots, x_{k+q}, \dots, x_{k+N}\}$ como un conjunto convexo de posibles valores extremos $x_{k+q} \in \{x_{k+q}^{(1,\dots,1)}, x_{k+q}^{(1,\dots,2)}, \dots, x_{k+q}^{(r,\dots,r)}\}$, llamados vértices del estado $k+q$, los cuales son interpolados por la función global de pertenencia $M(\mu(x_k) \dots \mu(x_{k+N-1}))$.

$$\bar{x} = M \cdot \begin{pmatrix} x_{k+1}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{k+1}^{(r)} \\ x_{k+2}^{(1,1)} \\ \vdots \\ x_{k+2}^{(r,r)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(1,\dots,1)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(r,\dots,r)} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

De esta forma, siguiendo la metodología de diseño típica de los modelos borrosos, podemos expresar las restricciones sobre los estados futuros x_{k+q} , como un conjunto de condiciones suficientes expresadas sobre los vértices $\{x_{k+q}^{(1,\dots,1)}, \dots, x_{k+q}^{(r,\dots,r)}\}$.

Ejemplo: el estado q -ésimo se representa para $q=2$ como

$$x_{k+2} = \sum_{i_0=1}^r \sum_{i_1=1}^r \mu_{i_0}(x_k) \mu_{i_1}(x_k) (A_{i_1} A_{i_0} \cdot x_k + A_{i_1} B_{i_0} u_k + B_{i_1} u_{k+q-1}) \quad (5.26)$$

o en función de sus vértices como

$$x_{k+2} = \sum_{i_0=1}^r \sum_{i_1=1}^r \mu_{i_0}(x_k) \mu_{i_1}(x_k) x_{k+2}^{(i_1, i_0)} \quad (5.27)$$

Por ejemplo, $x_{k+2}^{(2,1)}$ denota el estado al que evolucionaría el modelo en el paso $k + 2$ si aplicamos las ecuaciones del modelo 1 en el primer paso y del modelo 2 en el segundo paso.

$$x_{k+2}^{(2,1)} = A_2(A_1x_k + B_1u_k) + B_2u_{k+1} = A_2A_1x_k + A_2B_1u_k + B_2u_{k+1} \quad (5.28)$$

Y siguiendo con el ejemplo, la representación (5.24) para un modelo de predicción de un modelo borroso con 2 vértices ($r = 2$), para un horizonte de predicción a 2 pasos ($N = 2$), sería como sigue:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^{(1)} \\ x_{k+1}^{(2)} \\ x_{k+2}^{(1,1)} \\ x_{k+2}^{(1,2)} \\ x_{k+2}^{(2,1)} \\ x_{k+2}^{(2,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_1A_1 \\ A_1A_2 \\ A_2A_1 \\ A_2A_2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} B_1 & 0_{n \times m} \\ B_2 & 0_{n \times m} \\ A_1B_1 & B_1 \\ A_1B_2 & B_1 \\ A_2B_1 & B_2 \\ A_2B_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

5.3.1.1 Modelo de predicción borroso con conocimiento de x_k

Cuando posteriormente se utilicen estos modelos de predicción en las restricciones del problema de optimización, se tendrá conocimiento del estado actual x_k , y por tanto del valor exacto de las funciones de pertenencia y de las matrices del modelo exacto en el instante inicial. Así, podemos representar el modelo de predicción, incluyendo esta información, como:

$$\bar{x} = M' \cdot (\Theta' \cdot x_k + \Gamma' \cdot \bar{u}) \quad (5.30)$$

$$M' = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n \times n-r} \\ 0_{n \times n} & (\bar{\mu}(x_{k+1}) \otimes I_n)^T \\ & \ddots \\ & \dots & (\bar{\mu}(x_{k+q}) \otimes \dots \otimes \bar{\mu}(x_{k-1}) \otimes I_n)^T \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

$$\Theta' = \begin{pmatrix} A(x_k) \\ \bar{A} \otimes A(x_k) \\ \vdots \\ \bar{A} \otimes \bar{A} \dots A(x_k) \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} B(x_k) & 0_{n \times m} & 0_{n \times m} & & \\ \bar{A} \otimes B(x_k) & \bar{B} & 0_{n-r \times m} & & \\ \bar{A} \otimes \bar{A} \otimes B(x_k) & \bar{A} \otimes \bar{B} & \bar{B} \otimes \bar{I} & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \bar{A} \otimes \bar{A} \dots \bar{A} \otimes B(x_k) & \dots & & \dots & \bar{B} \otimes \bar{I} \dots \otimes \bar{I} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

$$A(x_k) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k) A_i \quad (5.34)$$

$$B(x_k) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k) B_i \quad (5.35)$$

Y los nuevos vértices del modelo borroso a N pasos se reescriben como

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{k+2}^{(r)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(1,\dots,1)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(r,\dots,r)} \end{pmatrix} = (\Theta' \cdot x_k + \Gamma' \cdot \bar{u}) \quad (5.36)$$

5.3.2 MODELOS DE PREDICCIÓN CON CONOCIMIENTO DE LOS ESTADOS PASADOS

Siguiendo los principios de todo control predictivo, en cada muestreo vamos a ejecutar un algoritmo numérico que optimice cierto criterio de decisión sujeto a ciertas restricciones dentro de un horizonte de predicción. Y puesto que los estados futuros son desconocidos, necesitamos de un modelo de predicción sobre los que aplicar tanto el optimizador del criterio de decisión como las restricciones.

Tal y como se observa en los desarrollos matriciales de los modelos de predicción borrosos exactos (5.19) y (5.30), para calcular los estados futuros exactos $\{x_{k+1} \dots x_{k+N}\}$ necesitamos el valor de las funciones de pertenencia $\{\mu_{i_0}(x_k) \dots \mu_{i_{N-1}}(x_{k+N-1})\}$, que son no lineales y dependen a su vez de los estados futuros. Por tanto, cualquier algoritmo exacto de optimización con restricciones que queramos implementar para este modelo genérico conducirá a un problema numérico intratable excepto para ciertos casos muy particulares. Es por esto que, o bien recurriremos a una linealización del modelo de predicción, o bien aplicaremos las restricciones sólo a los vértices lineales del modelo de predicción borroso, con el fin de implementar un algoritmo que obtenga un subóptimo tratable numéricamente.

Siguiendo las ideas propuestas en (Scokaert & Mayne, 1998), en el momento de calcular la acción de control u_{k+q} , tendremos conocimiento de los estados anteriores $\{x_k \dots x_{k+q-1}\}$, y por tanto del valor de las funciones de pertenencia correspondientes. Así, vamos a expresar la acción de control en función de una interpolación de un conjunto convexo de vértices $u_{k+q,i_0 \dots i_{q-1}}$, donde los subíndices $i_0 \dots i_{q-1}$ representan para cada uno de los $q-1$ pasos futuros, los r elementos sobre los que interpola cada función de pertenencia. De esta forma la acción de control u_{k+q} contiene en su formulación el conocimiento de los estados futuros hasta x_{k+q-1} , y por tanto del valor de las funciones de pertenencia, esto es:

$$u_{k+q} = \sum_{i_0 \dots i_{q-1}} \mu_{i_0}(x_k) \dots \mu_{i_{q-1}}(x_{k+q-1}) [u_{k+q,i_0 \dots i_{q-1}}] \quad (5.37)$$

El tratamiento exacto de los planteamientos de (Scokaert & Mayne, 1998) necesita de una formulación de las funciones de pertenencia futuras en función de los estados anteriores, y por tanto de forma no lineal.

Un caso simplificado del mismo consiste en expresar la acción de control de la forma

$$u_k = \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k) u_{k,j} \quad (5.38)$$

donde la acción de control instantánea u_k depende de un conjunto de vértices $u_{k,j}$ interpolados por las mismas funciones de pertenencia que las que definen al modelo borroso TS original. Esto implica que si bien durante el proceso de cálculo de las acciones de control óptimas $\{u_k \dots u_{k+N-1}\}$ no se conocen el valor exacto de los estados futuros $\{x_k \dots x_{k+N-1}\}$, sí que sabemos que en el momento de aplicar una acción de control futura u_{k+q} , con $0 < q < N$, sí se conocerán dichos estados $\{x_k \dots x_{k+q-1}\}$. Esto permite relajar las

condiciones de cálculo para el optimizador, puesto que en vez de tener que calcular un valor exacto de u_{k+q} , bastará con calcular un conjunto de vértices $\{u_{k,1} \dots u_{k,r}\}$. En este contexto, el término relajar hace referencia a conseguir unas ecuaciones menos restrictivas que las ecuaciones originales, de forma que el optimizador pueda conseguir mejores resultados. A la acción de control presentada en (5.38) la llamaremos “acción de control borrosa”, y al modelo de predicción que derivará del mismo lo llamaremos “modelo de predicción con acción de control borrosa”.

Una mejora de (5.38) consiste en expresar la acción de control de la forma

$$u_k = \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k)(F_j x_k + v_{k,j}) \quad (5.39)$$

Esta forma de expresar la acción de control no hace uso directamente del conocimiento de las funciones de pertenencia futuras, aunque indirectamente sí que lo utiliza, pues expresa el valor de u_{k+q} en función del estado actual x_{k+q} que deriva de la evolución de los estados pasados. Esta acción de control conduce al paradigma en bucle cerrado (ver sección 2.5.4.2) y lo llamaremos “acción de control en bucle cerrado”, y al modelo de predicción asociado “modelo de predicción en bucle cerrado”.

A continuación se desarrollan los modelos de predicción para estos dos casos.

5.3.2.1 Modelo de predicción con acción de control borrosa

Vamos a expresar la acción de control como un conjunto convexo de vértices interpolados por la misma función de pertenencia del modelo borroso TS

$$u_k = \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k) u_{k,j} \quad (5.40)$$

El modelo borroso TS a un paso se expresaría como

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) (A_i x_k + B_i u_{k,j}) \quad (5.41)$$

Este modelo borroso se caracteriza por expresarse como un doble sumatorio de unas mismas funciones de pertenencia. Por analogía con los modelos borrosos TS en bucle cerrado con ley de control de tipo PDC, se pueden aplicar los mismos principios de relajación que en dichos modelos.

Esta es la ventaja de expresar la acción de control de esta forma, pues tal y como se explica en las secciones 2.3, 3.4 y 4.3, el modelo que se deriva de esta acción de control permite aplicar los principios de relajación de las condiciones de copositividad de las restricciones que definen el problema de control.

Siguiendo la notación desarrollada en la sección 2.3.1, y como se definió en (4.16), se expresa el modelo borroso Takagi-Sugeno con expansión de Polya d como:

$$x_{k+1} = \sum_{i \in \mathbb{I}_{z+d}^+} \mu_i n_i \tilde{G}_i(x_k, u_{k,1}, \dots, u_{k,r}) \quad (5.42)$$

De forma que las relajaciones de Polya pueden ser entendidas como una expansión del modelo borroso original, donde los nuevos vértices sobre los que comprobar la copositividad de las restricciones son:

$$\tilde{G}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} (A_{j_1} x_k + B_{j_1} u_{k,j_2}) \quad (5.43)$$

Siendo $n_i = \# \mathcal{P}(i)$ el número de elementos en la permutación. Nótese que si aplicamos el mismo grado de desarrollo Polya a cada paso q , el número de permutaciones n_i es el mismo en cada paso.

A continuación vamos a desarrollar el modelo de predicción.

Denotamos por $c = \#\mathbb{I}_{2+d}^+$ al número de vértices del modelo expandido Polya, y ordenamos arbitrariamente los multi-índices de los vértices como i^1, i^2, \dots, i^c . Así definimos el conjunto de subíndices que definen cada vértice por $\mathbb{I}_{2+d}^+ = \{i^1, i^2, \dots, i^c\}$.

De forma matricial, el modelo borroso expandido Polya se expresa como:

$$x_{k+q+1} = \tilde{\mu}(x_{k+q})^T (\tilde{A}x_{k+q} + \tilde{B}U_{k+q}) \quad (5.44)$$

Donde $\tilde{\mu}(x_{k+q})$ denota el vector de monomios diferentes.

$$\tilde{\mu}(x_{k+q}) = \begin{pmatrix} \prod_{j \in \mathcal{P}(i^1)} \mu_{j_1}(x_{k+q}) \\ \prod_{j \in \mathcal{P}(i^2)} \mu_{j_1}(x_{k+q}) \\ \vdots \\ \prod_{j \in \mathcal{P}(i^c)} \mu_{j_1}(x_{k+q}) \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

U_{k+q} denota al vector de acciones de control para el paso $k+q$

$$U_{k+q} = \begin{pmatrix} u_{k+q,1} \\ u_{k+q,2} \\ \vdots \\ u_{k+q,r} \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

Y las matrices \tilde{A} y \tilde{B} :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_{i^1}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^1)} A_{j_1} \\ \frac{1}{n_{i^2}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^2)} A_{j_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{n_{i^c}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^c)} A_{j_1} \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_{i^1}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^1)} B_{j_1} \cdot e_{j_2} \\ \frac{1}{n_{i^2}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^2)} B_{j_1} \cdot e_{j_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n_{i^c}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^c)} B_{j_1} \cdot e_{j_2} \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

Con e_{j_2} representando la base canónica matricial de índice j_2 .

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0_{m \times m} & & \\ 0_{m \times m} & I_m & & \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \dots & I_m \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

De forma matricial, definimos el modelo de predicción borroso con acción de control borrosa como

$$\bar{x} = \tilde{M} \cdot (\tilde{\Theta} \cdot x_k + \tilde{\Gamma} \cdot \bar{U}) \quad (5.50)$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} (\tilde{\mu}(x_k) \otimes I_n)^T & 0_{n \times n \cdot c^2} & & \\ 0_{n \times n \cdot c} & (\tilde{\mu}(x_{k+1}) \otimes \tilde{\mu}(x_k) \otimes I_n)^T & & \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \dots & (\tilde{\mu}(x_{k+q}) \otimes \dots \otimes \tilde{\mu}(x_k) \otimes I_n)^T \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

$$\tilde{\Theta} = \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{A} \otimes \tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{A} \otimes \tilde{A} \dots \otimes \tilde{A} \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \tilde{B} & 0_{n \cdot c \times m \cdot c} & 0_{n \cdot c \times m \cdot c} & & \\ \tilde{A} \otimes \tilde{B} & \tilde{B} \otimes \tilde{I} & 0_{n \cdot c^2 \times m \cdot c} & & \\ \tilde{A} \otimes \tilde{A} \otimes \tilde{B} & \tilde{A} \otimes \tilde{B} \otimes \tilde{I} & \tilde{B} \otimes \tilde{I} \otimes \tilde{I} & & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A} \otimes \tilde{A} \dots \tilde{A} \otimes \tilde{B} & \dots & \dots & \dots & \tilde{B} \otimes \tilde{I} \dots \otimes \tilde{I} \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_m \\ \vdots \\ I_m \end{pmatrix}_c \quad (5.55)$$

Así como sus vértices asociados:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{k+1}^{(c_i)} \\ x_{k+2}^{(1,1)} \\ \vdots \\ x_{k+2}^{(c_i, c_i)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(1, \dots, 1)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(c_i, \dots, c_i)} \end{pmatrix} = (\tilde{\Theta} \cdot x_k + \tilde{\Gamma} \cdot \bar{U}) \quad (5.56)$$

Ejemplo de expansión Polya: Sea un modelo borroso TS con $r=2$ vértices, $n=2$ estados y $m=1$ acción de control, vamos a desarrollar el modelo Polya expandido para un grado de complejidad Polya $d=1$.

Puesto que $r=2$ y $d=1$, el modelo expandido Polya tiene $c = 4$ vértices. Cada vértice i viene indexado por un multi-índice de dimensión 3. El conjunto de los multi-índices de cada vértice se define como:

$$\mathbb{I}_{2+d}^+ = \{i^1, i^2, i^3, i^4\} = \{111, 112, 122, 222\} \quad (5.57)$$

A cada multi-índice le corresponde las siguientes permutaciones, $n_{i_1} = 1, n_{i_2} = 3, n_{i_3} = 3$ y $n_{i_4} = 1$.

$$\mathcal{P}(i^1) = \{111\} \quad (5.58)$$

$$\mathcal{P}(i^2) = \{112, 121, 211\} \quad (5.59)$$

$$\mathcal{P}(i^3) = \{122, 212, 222\} \quad (5.60)$$

$$\mathcal{P}(i^4) = \{222\} \quad (5.61)$$

Estas permutaciones tienen la particularidad de englobar a los productos de las funciones de pertenencia asociadas a cada índice que dan el mismo resultado. Esto es, que $\mu_1\mu_1\mu_2 = \mu_1\mu_2\mu_1 = \mu_2\mu_1\mu_1$.

Una vez tenemos definidas las permutaciones Polya, construimos el modelo borroso expandido a un paso, utilizando la nomenclatura matricial desarrollada en (5.42). El modelo borroso expandido tiene una estructura similar al modelo borroso original, donde por un lado tenemos los vértices del modelo borroso expandido, que son modelos lineales, y por otro las funciones de pertenencia asociadas.

Los vértices del modelo borroso expandido se resumen como sigue:

$$\tilde{T}_{i^1} = \tilde{T}_{111} = A_1 x_k + B_1 u_{k,1} \quad (5.62)$$

$$\tilde{T}_{i^2} = \tilde{T}_{112} = \frac{1}{3} [(A_1 x_k + B_1 u_{k,1}) + (A_1 x_k + B_1 u_{k,2}) + (A_2 x_k + B_2 u_{k,1})] \quad (5.63)$$

$$\tilde{T}_{i^3} = \tilde{T}_{122} = \frac{1}{3} [(A_1 x_k + B_1 u_{k,2}) + (A_2 x_k + B_2 u_{k,2}) + (A_2 x_k + B_2 u_{k,2})] \quad (5.64)$$

$$\tilde{T}_{i^4} = \tilde{T}_{222} = A_2 x_k + B_2 u_{k,2} \quad (5.65)$$

Y las funciones de pertenencia asociadas a cada vértice son:

$$\mu_{i^1} = \mu_{111} = \mu_1 \mu_1 \mu_1 \quad (5.66)$$

$$\mu_{i^2} = \mu_{112} = \mu_1 \mu_1 \mu_2 \quad (5.67)$$

$$\mu_{i^3} = \mu_{122} = \mu_1 \mu_2 \mu_2 \quad (5.68)$$

$$\mu_{i^4} = \mu_{222} = \mu_2 \mu_2 \mu_2 \quad (5.69)$$

Y a continuación, construimos el modelo borroso expandido:

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{i^1} \\ \mu_{i^2} \\ \mu_{i^3} \\ \mu_{i^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{111} \\ \mu_{112} \\ \mu_{122} \\ \mu_{222} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \mu_1 \mu_1 \\ \mu_1 \mu_1 \mu_2 \\ \mu_1 \mu_2 \mu_2 \\ \mu_2 \mu_2 \mu_2 \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \frac{A_1 + A_1 + A_2}{3} \\ \frac{A_1 + A_2 + A_2}{3} \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (5.71)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 e_1 \\ \frac{1}{3} [B_1 e_1 + B_1 e_2 + B_2 e_1] \\ \frac{1}{3} [B_1 e_2 + B_2 e_1 + B_2 e_2] \\ B_2 e_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \cdot B_1 & 0_{n \times m} \\ B_1 + B_2 & B_1 \\ B_2 & B_1 + B_2 \\ 0_{n \times m} & 3 \cdot B_2 \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

$$e_1 = (1 \ 0) \quad (5.73)$$

$$e_2 = (0 \ 1) \quad (5.74)$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_{k,1} \\ u_{k,2} \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

5.3.2.1.1 Modelo de predicción borroso con acción de control borrosa con conocimiento de x_k

De forma análoga al procedimiento utilizado para el modelo predicción borroso exacto, puesto que se tiene conocimiento del estado actual x_k , se puede utilizar el valor exacto de las funciones de pertenencia y de las matrices del modelo exacto:

$$A(x_k) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k) A_i \quad (5.76)$$

$$B(x_k) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k) B_i \quad (5.77)$$

Y así obtener el modelo de predicción con acción de control borrosa con conocimiento de x_k

$$\bar{x} = \tilde{M}' \cdot (\tilde{\theta}' \cdot x_k + \tilde{\Gamma}' \cdot \bar{U}) \quad (5.78)$$

con

$$\tilde{M}' = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n \times n-c} & & & & \\ 0_{n \times n} & (\tilde{\mu}(x_{k+1}) \otimes I_n)^T & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & (\tilde{\mu}(x_{k+q}) \otimes \dots \otimes \tilde{\mu}(x_{k+1}) \otimes I_n)^T \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

$$\tilde{\theta}' = \begin{pmatrix} A(x_k) \\ \tilde{A} \otimes A(x_k) \\ \vdots \\ \tilde{A} \otimes \tilde{A} \dots A(x_k) \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

$$\tilde{\Gamma}' = \begin{pmatrix} \bar{B}(x_k) & 0_{n \times m} & 0_{n \times m} & & & \\ \tilde{A} \otimes \bar{B}(x_k) & \bar{B} & 0_{n \times m} & & & \\ \tilde{A} \otimes \tilde{A} \otimes \bar{B}(x_k) & \tilde{A} \otimes \bar{B} & \bar{B} \otimes \tilde{I} & & & \\ \vdots & & & & & \\ \tilde{A} \otimes \tilde{A} \dots \tilde{A} \otimes \bar{B}(x_k) & \dots & & & \dots & \bar{B} \otimes \tilde{I} \dots \otimes \tilde{I} \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

$$\bar{B}(x_k) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k) \mu_i(x_k) B_i e_j \quad (5.82)$$

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} U_{k+1} \\ U_{k+2} \\ \vdots \\ U_{k+N-1} \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

Siendo los vértices del modelo de predicción con acción de control borrosa.

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{k+2}^{(c)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(1, \dots, 1)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(c, \dots, c)} \end{pmatrix} = (\tilde{\theta}' \cdot x_k + \tilde{\Gamma}' \cdot \bar{U}) \quad (5.84)$$

5.3.2.2 Modelo de predicción borroso en bucle cerrado

La denominación “predicción en bucle cerrado” hace referencia a una técnica de control donde la acción de control tiene la forma $u = h(x) + v$, que se obtiene como la suma de una ley de control de tipo $u^h = h(x)$ y un término independiente. Por oposición a esta denominación, nos referiremos mediante “predicción en bucle abierto”, al conjunto de técnicas expuesta hasta ahora en este capítulo.

Sea un modelo (5.1), con restricciones (5.3) y un índice de coste cuadrático (5.4), vamos a proponer un controlador borroso de la forma:

$$u_k = \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k)(F_j x_k + v_{k,j}) \quad (5.85)$$

Este controlador es la suma de un controlador de tipo PDC y de una secuencia de control que se calcula en línea y de la que se aplica sólo la primera acción de control.

El modelo en bucle cerrado a un paso se expresa como

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) \left((A_i + B_i F_j) x_k + B_i v_{k,j} \right) \quad (5.86)$$

Para definir la ley de control tipo PDC que forme parte del controlador, desarrollamos el modelo resultante en bucle cerrado únicamente con esa ley de control

$$x_{k+1}^h = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) (A_i + B_i F_j) x_k \quad (5.87)$$

Las ganancias F_i de la ley de control las elegiremos para que minimice el índice de coste infinito.

Este modelo borroso se caracteriza por expresarse como un doble sumatorio de unas mismas funciones de pertenencia. Siguiendo la metodología empleada con el modelo en bucle abierto, podemos aplicar, los principios de la programación copositiva y desarrollar el modelo mediante la expansión Polya d como:

$$x_{k+1} = \sum_{i \in \mathbb{I}_{2+d}^+} \mu_i n_i \tilde{T}_i^{bc}(x_k, v_{k,1} \dots v_{k,r}) \quad (5.88)$$

Con

$$\tilde{T}_i^{bc} = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} \left((A_{j_1} + B_{j_1} F_{j_2}) x_k + B_{j_1} v_{k,j_2} \right) \quad (5.89)$$

Y el modelo expandido a N pasos se desarrolla análogamente a (5.44) como

$$x_{k+q+1} = \tilde{\mu}(x_{k+q})^T (\tilde{G} x_{k+q} + \tilde{B} \tilde{v}_{k+q}) \quad (5.90)$$

Donde $\tilde{\mu}(x_{k+q})$ denota el conjunto de monomios diferentes

$$\tilde{\mu}(x_{k+q}) = \begin{pmatrix} \prod_{j \in \mathcal{P}(i^1)} \mu_{j_1}(x_{k+q}) \\ \prod_{j \in \mathcal{P}(i^2)} \mu_{j_1}(x_{k+q}) \\ \vdots \\ \prod_{j \in \mathcal{P}(i^c)} \mu_{j_1}(x_{k+q}) \end{pmatrix} \quad (5.91)$$

y

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_{i^1}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^1)} (A_{j_1} + B_{j_1} F_{j_2}) \\ \frac{1}{n_{i^2}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^2)} (A_{j_1} + B_{j_1} F_{j_2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{n_{i^c}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^c)} (A_{j_1} + B_{j_1} F_{j_2}) \end{pmatrix} \quad (5.92)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_{i^1}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^1)} B_{j_1} e_{j_2} \\ \frac{1}{n_{i^2}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^2)} B_{j_1} e_{j_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n_{i^c}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^c)} B_{j_1} e_{j_2} \end{pmatrix} \quad (5.93)$$

$$\bar{v}_{k+q} = \begin{pmatrix} v_{k+q,1} \\ v_{k+q,2} \\ \vdots \\ v_{k+q,r} \end{pmatrix} \quad (5.94)$$

De nuevo, de forma análoga a (5.50) obtenemos el modelo de predicción borroso en bucle cerrado.

$$\bar{x} = \tilde{M} \cdot (\tilde{\theta}_{bc} \cdot x_k + \tilde{\Gamma}_{bc} \cdot \bar{V}) \quad (5.95)$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} (\tilde{\mu}(x_k) \otimes I_n)^T & 0_{n \times n \cdot c^2} & & & & & \\ 0_{n \times n \cdot c} & (\tilde{\mu}(x_{k+1}) \otimes \tilde{\mu}(x_k) \otimes I_n)^T & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & (\tilde{\mu}(x_{k+q}) \otimes \dots \otimes \tilde{\mu}(x_k) \otimes I_n)^T & \end{pmatrix} \quad (5.96)$$

Y sus vértices asociados

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{k+1}^{(c)} \\ x_{k+2}^{(1,1)} \\ \vdots \\ x_{k+2}^{(c,c)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(1,\dots,1)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(c,\dots,c)} \end{pmatrix} = (\tilde{\theta}_{bc} \cdot x_k + \tilde{\Gamma}_{bc} \cdot \bar{V}) \quad (5.97)$$

$$\tilde{\theta}_{bc} = \begin{pmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{G} \otimes \tilde{G} \\ \vdots \\ \tilde{G} \otimes \tilde{G} \dots \tilde{G} \end{pmatrix} \quad (5.98)$$

$$\tilde{\Gamma}_{bc} = \begin{pmatrix} \tilde{B} & 0_{n \cdot c \times m \cdot c} & 0_{n \cdot c \times m \cdot c} & & \\ \tilde{G} \otimes \tilde{B} & \tilde{B} \otimes \tilde{I} & 0_{n \cdot c^2 \times m \cdot c} & & \\ \tilde{G} \otimes \tilde{G} \otimes \tilde{B} & \tilde{G} \otimes \tilde{B} \otimes \tilde{I} & \tilde{B} \otimes \tilde{I} \otimes \tilde{I} & & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{G} \otimes \dots \tilde{G} \otimes \tilde{B} & \dots & \dots & \dots & \tilde{B} \otimes \tilde{I} \dots \otimes \tilde{I} \end{pmatrix} \quad (5.99)$$

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \vdots \\ \bar{v}_{k+N-1} \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

5.3.2.2.1 Modelo de predicción borroso en bucle cerrado con conocimiento de x_k

En caso de tener conocimiento del estado actual x_k , expresamos los vértices del modelo de predicción en bucle cerrado como

$$\bar{x} = \tilde{M}' \cdot (\tilde{\theta}_{bc}' \cdot x_k + \tilde{\Gamma}_{bc}' \cdot \bar{V}) \quad (5.101)$$

$$\tilde{M}' = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n \times n \cdot c} & & & \\ 0_{n \times n} & (\tilde{\mu}(x_{k+1}) \otimes I_n)^T & & & \\ & \vdots & & \vdots & \\ & \dots & (\tilde{\mu}(x_{k+q}) \otimes \dots \otimes \tilde{\mu}(x_{k+1}) \otimes I_n)^T & & \end{pmatrix} \quad (5.102)$$

$$\tilde{\theta}_{bc}' = \begin{pmatrix} G(x_k) \\ \tilde{G} \otimes G(x_k) \\ \vdots \\ \tilde{G} \otimes \dots \tilde{G} \otimes G(x_k) \end{pmatrix} \quad (5.103)$$

$$\tilde{\Gamma}_{bc}' = \begin{pmatrix} \tilde{B}(x_k) & 0 & 0 & & \\ \tilde{G} \otimes \tilde{B}(x_k) & \tilde{B} & 0 & & \\ \tilde{G} \otimes \tilde{G} \otimes \tilde{B}(x_k) & \tilde{G} \otimes \tilde{B} & \tilde{B} \otimes \tilde{I} & & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{G} \otimes \dots \tilde{G} \otimes \tilde{B}(x_k) & \dots & \dots & \dots & \tilde{B} \otimes \tilde{I} \dots \otimes \tilde{I} \end{pmatrix} \quad (5.104)$$

$$G(x_k) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) (A_i + B_i F_j) \quad (5.105)$$

$$\bar{B}(x_k) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k) \mu_i(x_k) B_i e_j \quad (5.106)$$

Quedando los vértices del nuevo modelo como

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{k+2}^{(c)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(1,\dots,1)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(c,\dots,c)} \end{pmatrix} = (\tilde{\Theta}_{bc}' \cdot x_k + \tilde{\Gamma}_{bc}' \cdot \bar{V}) \quad (5.107)$$

5.3.2.2.2 Diseño de la ley de control PDC

Las condiciones de diseño de la ley de control PDC que vamos a utilizar en el diseño del control predictivo en bucle cerrado, vamos a aprovechar los desarrollos realizados en el campo del diseño de controladores mediante desigualdades matriciales lineales (LMIs).

Como condición básica de diseño, debemos plantear un controlador PDC que establezca el modelo borroso en bucle cerrado y que minimice el índice de coste infinito. Así, vamos utilizar un criterio de diseño que consiga un controlador PDC que minimice el coste garantizado.

El problema de optimización que minimiza el coste garantizado queda como sigue:

$$\begin{cases} \min: & \vartheta \\ \text{sujeto a:} & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q_{ij} > 0 \\ & \begin{pmatrix} \vartheta & x_0^T \\ x_0 & X \end{pmatrix} > 0 \end{cases} \quad (5.108)$$

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} X & (A_i X + B_i M_j)^T & X & M_j^T \\ A_i X + B_i M_j & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ M_j & 0 & 0 & H^{-1} \end{pmatrix}$$

Esto no es directamente una LMI, pero puede ser convertida mediante cualquier método que garantice la copositividad del problema.

5.3.3 MODELO DE PREDICCIÓN LINEAL

Hasta ahora, hemos extraído del modelo predictivo borroso exacto (5.19) sus vértices lineales con el fin de poder plantear las restricciones borrosas de nuestro problema de optimización, sin embargo, con el fin de poder para minimizar el índice de coste objetivo mediante un algoritmo de optimización tratable en un tiempo de nuestro costo, necesitamos plantear una aproximación del modelo predictivo borroso a un modelo de predicción lineal de la forma:

$$\hat{x} = \hat{F}(x_k, \bar{u}) \quad (5.109)$$

Donde $\hat{F}: (x_k, \bar{u}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal en \bar{u} , y $\hat{x} = [\hat{x}_{k+1} \dots \hat{x}_{k+N}]^T$ representan los estados futuros aproximados con esta función.

5.3.3.1 Modelos de predicción borrosos linealizados

A partir de los modelos de predicción borrosos exactos (5.19), (5.50) y (5.95), desarrollamos los siguientes modelos de predicción borrosos linealizados.

Dado un estado inicial x_k y una secuencia de control con un horizonte de predicción N , sobre la que linealizar $\bar{u}^0 = [u_k^0 \dots u_{k+N-2}^0]^T$, obtenemos la predicción exacta de los estados futuros, que las llamaremos $\bar{x}^0 = [x_k^0 \dots x_{k+N-1}^0]^T$.

Para obtener esta predicción exacta, bastará con aplicar el conocimiento exacto de las funciones de pertenencia, así $x_k^0 = x_k$ y

$$x_{k+q}^0 = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_{k+q-1}^0) (A_i x_{k+q-1}^0 + B_i u_{k+q-1}^0) \quad q = 1 \dots N \quad (5.110)$$

A partir de esta predicción exacta \bar{x}^0 basada en un punto de linealización \bar{u}^0 , obtenemos el siguiente modelo de predicción lineal como:

$$\hat{x} = M(\mu(x_k^0) \dots \mu(x_{k+N-1}^0)) (\theta \cdot x_k + \Gamma \cdot \bar{u}) \quad (5.111)$$

que por ser una función lineal en (x_k, \bar{u}) , podemos expresarla como

$$\hat{x} = \theta^0 \cdot x_k + \Gamma^0 \cdot \bar{u} \quad (5.112)$$

Con θ^0 y Γ^0 matrices de valores numéricos conocidos.

A partir del modelo de predicción en bucle abierto con acción de control borrosa, y del modelo de predicción en bucle cerrado, se obtiene de forma análoga los modelos de predicción lineal correspondientes como:

- Modelo de predicción en bucle abierto con acción de control borrosa:

$$\hat{x} = \tilde{M}(\tilde{\mu}(x_k^0) \dots \tilde{\mu}(x_{k+N-1}^0)) (\tilde{\theta} \cdot x_k + \tilde{\Gamma} \cdot \bar{U}) = \tilde{\theta}^0 \cdot x_k + \tilde{\Gamma}^0 \cdot \bar{U} \quad (5.113)$$

- Modelo de predicción en bucle cerrado:

$$\hat{x} = \tilde{M}(\tilde{\mu}(x_k^0) \dots \tilde{\mu}(x_{k+N-1}^0)) (\tilde{\theta}_{bc} \cdot x_k + \tilde{\Gamma}_{bc} \cdot \bar{V}) = \tilde{\theta}_{bc}^0 \cdot x_k + \tilde{\Gamma}_{bc}^0 \cdot \bar{V} \quad (5.114)$$

5.3.3.2 Modelo de predicción lineal de Taylor

A continuación planteamos una alternativa para la obtención del modelo de predicción lineal basado en los procedimientos de linealización de Taylor.

Dado un modelo de predicción no lineal de la forma

$$\bar{x} = f(x_k, \bar{u}) = M \cdot (\theta \cdot x_k + \Gamma \cdot \bar{u}) \quad (5.115)$$

Obtenemos el modelo de predicción no lineal exacto:

$$\bar{x} = F(x_k, \bar{u}) \quad (5.116)$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+N} \end{pmatrix} \quad (5.117)$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+N-1} \end{pmatrix} \quad (5.118)$$

Y como conocemos el estado actual x_k , podemos obtener el modelo linealizado alrededor del punto de funcionamiento (x_k, \bar{u}_0) como:

$$\hat{x}_{Taylor} = \hat{F}(x_k, \bar{u}) = F(x_k, \bar{u}_0) + \nabla F(x_k, \bar{u}_0) \cdot (\bar{u} - \bar{u}_0) \quad (5.119)$$

donde $\nabla F(x_k, \bar{u}_0)$ representa el gradiente de $F(x_k, \bar{u}_0)$ y $\bar{u}_0 = [u_k^0 \dots u_{k+N-1}^0]^T$ y $\hat{x} = [\hat{x}_{k+1} \dots \hat{x}_{k+N}]^T$ representan los estados futuros y las acciones de control futuras aproximados con esta función linealizada.

Nótese que, en el contexto del control predictivo, e un primer punto de funcionamiento (x_k, \bar{u}_0) sobre el que linealizar se puede obtener de la solución \bar{u} obtenida del proceso de optimización que se haya realizado para el instante de muestreo anterior $k-1$.

5.3.3.3 Comparativa de modelos de predicción linealizados

En principio, la bondad de un modelo de predicción linealizado se mide en función de la discrepancia entre los estados que predice el modelo lineal frente a los estados del modelo exacto no lineal.

En siguiente ejemplo se realiza una comparativa de los diferentes modelos de predicción lineales expuestos, donde se utiliza un criterio de medición de discrepancia cuadrático.

Sea un modelo borroso TS de la forma (5.1), definido por

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (5.120)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5.121)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \quad (5.122)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (5.123)$$

con sus funciones de pertenencias definidas por

$$\mu_1(x) = (1/20 - 0)x + 1/2 \quad (5.124)$$

$$\mu_2(x) = 1 - \mu_1(x) \quad (5.125)$$

Las restricciones en (x, u) se definen como en (5.3), con

$$x_{max} = 10 \quad (5.126)$$

$$u_{max} = 3 \quad (5.127)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.128)$$

$$S = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1)^T \quad (5.129)$$

$$s = (x_{max} x_{max} x_{max} x_{max} u_{max} u_{max})^T \quad (5.130)$$

Consideramos un estado inicial x_k y una secuencia de acciones de control $\bar{u}^0 = [u_k^0 \dots u_{k+N-1}^0]^T$ con la que vamos a obtener los modelos de predicción lineal. Sobre estos modelos lineales, vamos a aplicar una secuencia de acciones de control $\bar{u} = [u_k \dots u_{k+N-1}]^T$ y los vamos a comparar con la evolución del modelo borroso no lineal exacto.

Dada un estado inicial

$$x_k = [9, -4]^T \quad (5.131)$$

Y una secuencia de control con un horizonte de predicción $N = 7$, sobre la que linealizar

$$\bar{u}^0 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T \quad (5.132)$$

Obtenemos los siguientes modelos de predicción que se representan en la siguiente tabla

		k+1	k+2	k+3	k+4	k+5	k+6	k+7
<i>Exacto</i>	A_{i_p}	(0.89 0.66)	(0.87 0.51)	(0.86 0.41)	(0.85 0.36)	(0.85 0.34)	(0.85 0.34)	(0.85 0.34)
	$B_{i_p}^T$	(0 0.48)	(0 0.40)	(0 0.35)	(0 0.33)	(0 0.32)	(0 0.32)	(0 0.32)
<i>Borroso</i>	\hat{A}_{i_p}	(0.89 0.66)	(0.87 0.51)	(0.86 0.43)	(0.86 0.39)	(0.85 0.36)	(0.85 0.36)	(0.85 0.35)
	$\hat{B}_{i_p}^T$	(0 -0.85)	(0 -0.31)	(0 0)	(0 0.16)	(0 0.24)	(0 0.27)	(0 0.29)

donde el modelo “Exacto” hace referencia al modelo borroso no lineal original expresado como

$$x_{k+p} = (A_{i_p} x_{k+p-1} + B_{i_p} u_{k+p-1}) \quad (5.133)$$

y el modelo “Borroso” hace referencia al modelo de predicción borroso linealizado en bucle abierto

$$\hat{x}_{k+p} = (\hat{A}_{i_p} x_{k+p-1} + \hat{B}_{i_p} u_{k+p-1}) \quad (5.134)$$

El modelo de “Taylor” se representa como:

$$\hat{x}_{Taylor} = \hat{F}(x_k, \bar{u}) = F(x_0, \bar{u}_0) + \nabla F(x_0, \bar{u}_0) \cdot (\bar{u} - \bar{u}_0) \quad (5.135)$$

$$\nabla F(x_0, \bar{u}_0) = \begin{pmatrix} -0.3471 & -0.3123 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5126 & -0.1351 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0486 & -0.1144 & 0.0022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4555 & -0.1597 & 0.0009 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0655 & -0.0178 & 0.0008 & 0.1623 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3705 & -0.1449 & 0.0010 & 0.0600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0904 & 0.0181 & 0.0001 & 0.0543 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2914 & -0.1202 & 0.0010 & 0.0719 & 0.0862 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0836 & 0.0270 & -0.0001 & 0.0092 & 0.0791 & 0.2778 & 0 & 0 \\ -0.2261 & -0.0959 & 0.0008 & 0.0664 & 0.1037 & 0.0984 & 0 & 0 \\ 0.0690 & 0.0260 & -0.0002 & -0.0073 & 0.0136 & 0.0909 & 0.2969 & 0 \end{pmatrix}$$

También vamos a aplicar el proceso de predicción al modelo de predicción denominado “Congelado”, esto es, donde las funciones de pertenencia $\mu_i(x_{k+p})$ permanecen “congeladas” en su valor inicial $\mu_i(x_k)$. Este modelo congelado se representa por

$$\hat{x}_{k+p} = (\hat{A}_{i_0} x_{k+p-1} + \hat{B}_{i_0} u_{k+p-1}) \tag{5.136}$$

Con los siguientes valores numéricos

$$A_{i_0} = \mu_1(x_k)A_1 + \mu_2(x_k)A_2 = \begin{pmatrix} 0.8950 & 0.6600 \\ 0 & 0.4800 \end{pmatrix} \tag{5.137}$$

$$B_{i_0} = \mu_1(x_k)B_1 + \mu_2(x_k)B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.85 \end{pmatrix} \tag{5.138}$$

Ahora aplicamos una acción de control real

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix} \tag{5.139}$$

Y obtenemos las siguientes secuencias de estados estimados y reales.

	k	k+1	k+2	k+3	k+4	k+5	k+6	k+7
x_{exacta}	9.0000	5.4150	2.8793	1.6158	1.1621	1.1022	1.2016	1.3458
	-4.0000	-3.62	-2.1025	-0.6156	0.3106	0.7518	0.9115	0.9349
$\hat{x}_{congelada}$	9.0000	5.4150	3.3184	2.2511	1.7334	1.4813	1.3540	1.2857
	-4.0000	-2.7700	-1.4432	-0.5265	-0.0193	0.2335	0.3548	0.4129
$\hat{x}_{borrosa}$	9.0000	5.4150	2.8793	1.5853	1.0666	0.9382	0.9841	1.0983
	-4.0000	-3.6200	-2.1025	-0.7658	0.0604	0.5002	0.7205	0.8295
\hat{x}_{Taylor}	9.0000	5.4150	2.8793	1.6034	1.1192	1.0269	1.1015	1.2329
	-4.0000	-3.6200	-2.1025	-0.6873	0.1915	0.6364	0.8314	0.9018

Estos resultados son representados en las siguientes figuras, donde se representan las trayectorias exactas (en azul), y las estimadas (“borrosa” en rojo, “Taylor” en verde y “congelada” en amarillo).

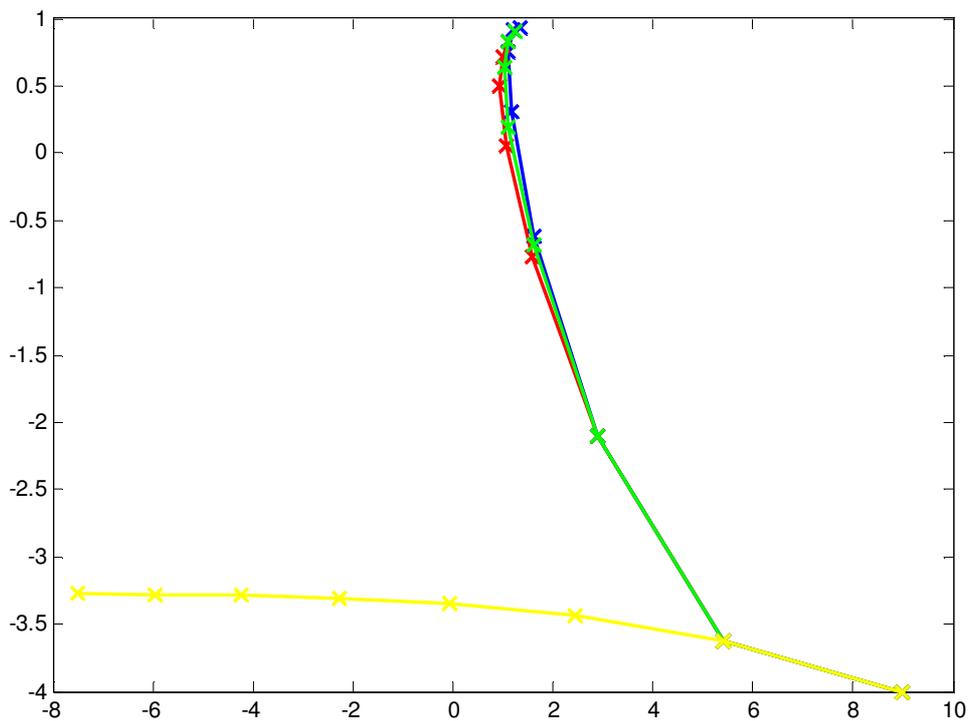


Ilustración 5-1: Evolución temporal del modelo exacto y de las predicciones lineales

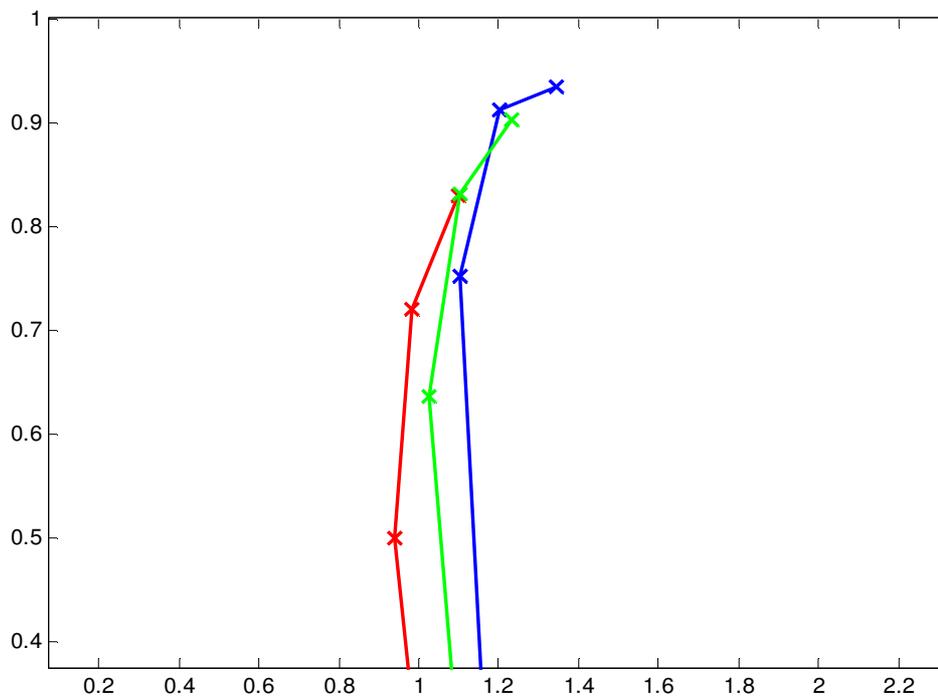


Ilustración 5-2: Evolución temporal del modelo exacto y de las predicciones lineales (ampliado)

Con el fin de poder comparar la bondad de las predicciones, desarrollamos el siguiente criterio cuadrático ponderando exponencialmente las predicciones iniciales frente a las finales, con el fin de darle más importancia al error de las predicciones iniciales frente a las finales.

$$\mathfrak{J} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{p} (\hat{x}_p - x_p)^T (\hat{x}_p - x_p)$$

Con los siguientes resultados:

	\mathfrak{J}
$\hat{x}_{congelada}$	25.4533
$\hat{x}_{borrosa}$	0.0472
\hat{x}_{Taylor}	0.0100

donde se observa que el modelo de predicción “Taylor” a N pasos es ligeramente mejor que el modelo de predicción “borroso”.

Sin embargo, cuando la acción de control sobre la que linealizar \bar{u}^0 difiere mucho de la acción de control real aplicada, entonces el modelo de predicción “borroso” obtiene en general mejores resultados que el modelo de predicción de “Taylor”.

En la figura siguiente se observa las trayectorias exactas (en azul), y las estimadas (“borrosa” en rojo, “Taylor” en verde y “congelada” en amarillo) para una acción de control sobre la que linealizar $\bar{u}^0 = [-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1]^T$ y $\bar{u} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]^T$.

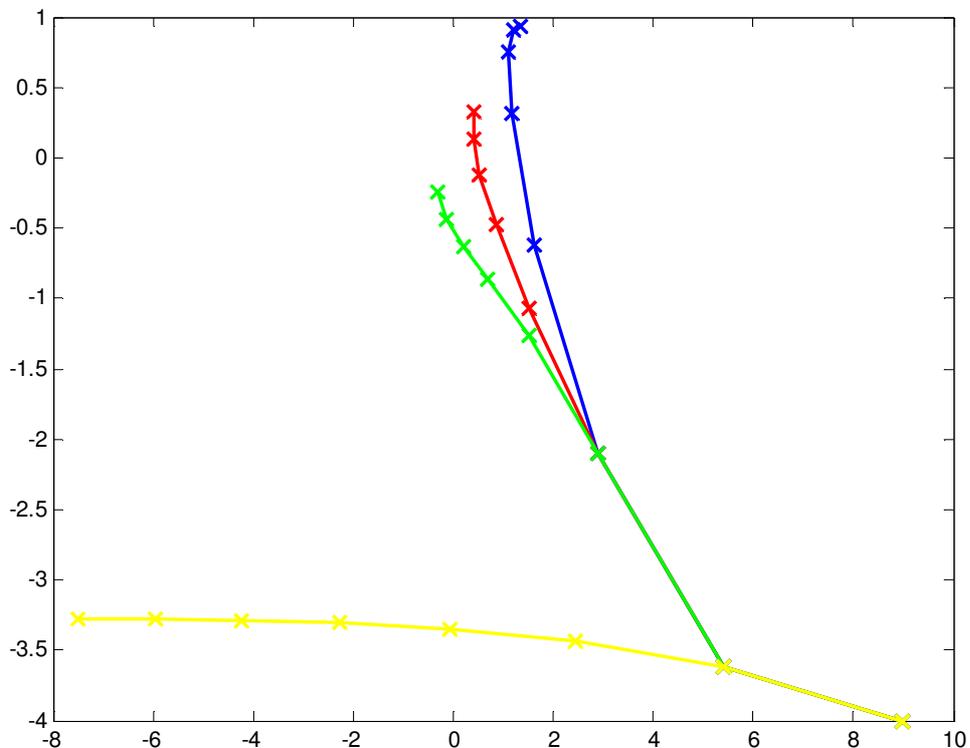


Ilustración 5-3: Evoluciones temporales con acciones de control muy diferentes

Con los siguientes resultados de criterio cuadrático:

	\mathfrak{J}
$\hat{x}_{congelada}$	25.4533
$\hat{x}_{borrosa}$	0.5538
\hat{x}_{Taylor}	1.3987

Donde se observa que el modelo “borroso” se comporta mejor que el modelo de “Taylor”.

De forma experimental, tras realizar otras simulaciones con otros puntos de funcionamiento y otros modelos, se observa que en general, cuando las acciones de control futuras sobre las que vamos a linealizar se aproximan a las acciones de control reales, el modelo de predicción de Taylor obtiene mejores predicciones, sin embargo, cuando éstas difieren bastante, el modelo de Taylor obtiene predicciones mucho peores. Esto se justifica porque el modelo de predicción borroso linealizado es un modelo de predicción que coincide con una realización particular de las funciones de pertenencia. El modelo borroso linealizado está acotado por los vértices del modelo borroso original.

5.3.4 MODELOS BORROSOS OBTENIDOS POR IDENTIFICACIÓN EXPERIMENTAL

Como última posibilidad, si los modelos borrosos han sido obtenidos por identificación experimental, tendremos la posibilidad de obtener un modelo de la forma:

$$x_{k+q} = \sum_{i=1}^{r'} \mu_{iq}(x_k)(A_{iq}x_k + B_{iq}^{(q)}u_{k+q} + \dots + B_{iq}^{(0)}u_k) \quad (5.140)$$

para poder aplicar la condición de contractividad, podemos obtener el modelo a un paso

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{r'} \mu_i(x_k)(A_i x_k + B_i u_k) \quad (5.141)$$

mientras que del modelo (5.140), obtenemos las restricciones para los estados futuros y para la estimación del índice de coste.

5.4 RESTRICCIONES

En este apartado trataremos las restricciones que vamos a exigir a los estados y las acciones futuras, las cuales se resumen en tres tipos.

La primera restricción hace referencia a la estabilidad del modelo. Como se ha discutido en la sección 5.2, en la formación del control predictivo, la estabilidad asintótica se garantiza imponiendo que el estado x_{k+1} pertenezca a cierto conjunto politópico $\tilde{C}^{\lambda,d}(\Omega)$ escalado linealmente por un escalar λ , con $0 < \lambda < 1$.

La segunda restricción hace referencia a la factibilidad de las soluciones $\{u_k \dots u_{k+N}\}$ y de los estados futuros $\{x_k \dots x_{k+N}\}$. En este apartado analizaremos varias posibles restricciones, así como sus ventajas e inconvenientes.

La tercera restricción hace referencia a la restricción terminal, esto es, que el estado x_{k+N} pertenezca al conjunto terminal. Como se verá posteriormente, esta restricción, aunque no es necesaria para garantizar la estabilidad, aporta ciertas ventajas en la optimización.

5.4.1 ESTABILIDAD

Tal y como describimos al principio del presente capítulo, y con el fin de garantizar la estabilidad del modelo en bucle cerrado, imponemos la restricción siguiente:

$$V(x_{k+1}) < \lambda \cdot V(x_k) \quad (5.142)$$

Siendo $V(x)$ una función de Lyapunov, y con $0 < \lambda < 1$.

Como se vio en el capítulo anterior, esta función de Lyapunov puede ser obtenida “a priori” a partir de una aproximación interior politópica del máximo conjunto λ -contractivo en Ω , denominado $\mathcal{C}^{\lambda, \infty}(\Omega)$.

Tal como se ha visto en los capítulos precedentes, este conjunto puede ser maximizado aplicando las relajaciones de Polya, de forma que el conjunto obtenido $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda, d}(\Omega)$ tienda al máximo conjunto politópico existente sin tener más conocimiento de las funciones de pertenencia $\mathcal{C}^{\lambda, si}(\Omega)$. Este conjunto contendrá a todos los estados para los que exista una solución factible contractiva, para cualquier posible realización de las funciones de pertenencia.

Como este conjunto puede ser expresado como un conjunto de restricciones politópicas de la forma

$$\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda, d}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid L_j x \leq 1; j = 1 \dots p\} \quad (5.143)$$

Podemos crear la siguiente candidata a función de Lyapunov:

$$V(x) = \max_j (L_j \cdot x) \quad (5.144)$$

Así, para un estado cualquiera x_k perteneciente a $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda, d}(\Omega)$ sabemos que existirá una acción de control admisible u_k , tal que $V(x_{k+1}) < \lambda \cdot V(x_k)$.

Desarrollando para el modelo borroso exacto TS, obtenemos que:

$$\max_{j_1} (L_{j_1} \cdot x_{k+1}) < \lambda \cdot \max_{j_0} (L_{j_0} \cdot x_k) \quad \forall j_1, j_0 \quad (5.145)$$

$$\max_{j_1} \left(L_{j_1} \cdot \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k)(A_i x_k + B_i u_k) \right) < \lambda \cdot \max_{j_0} (L_{j_0} \cdot x_k) \quad \forall j_1, j_0 \quad (5.146)$$

Observamos que, en el momento de plantear el problema de optimización en el esquema de control predictivo, x_k es conocida, y por tanto el valor exacto de $V(x_k)$. Así, para que el máximo de un conjunto de elementos sea menor que $V(x_k)$, bastará con restringir que cada uno de los elementos de dicho conjunto sea menor que $V(x_k)$, quedando:

$$L_j B(x_k) u_k < \lambda V(x_k) - L_j A(x_k) x_k \quad \forall j \quad (5.147)$$

$$A(x_k) = \sum_{i=1}^r \mu(x_k) A_i$$

$$B(x_k) = \sum_{i=1}^r \mu(x_k) B_i$$

$$V(x_k) = \max_{j_0} (L_{j_0} \cdot x_k)$$

Así, ya tenemos la primera y más importante restricción, la cual sólo afecta a u_k . Además, se observa claramente que es una restricción lineal.

5.4.2 RESTRICCIONES SOBRE LOS ESTADOS Y ACCIONES DE CONTROL FUTURAS

Siguiendo la filosofía de control predictivo, para cada instante de muestreo se debe resolver un problema de optimización basado en un criterio de coste, definido generalmente como una función de los estados y entradas futuras, sujeto a ciertas restricciones.

No obstante, debido a la filosofía de horizonte móvil, la única acción de control que se va a aplicar va a ser la primera de la serie de acciones de control que obtengamos del problema de optimización. Así, como restricción básica impondremos que la primera acción de control u_k sea factible, esto es, que

$$(x_k, u_k) \in \Omega \quad (5.148)$$

Esta primera restricción es necesaria si queremos asegurar de forma garantista que la solución que se obtenga del optimizador sea factible para el modelo no lineal.

Pero, además de esta restricción básica, que afecta sólo a x_k y u_k , tenemos un conjunto de estados y acciones de control futuras que el optimizador va a calcular y estimar. Como acabamos de comentar, y siguiendo el principio de horizonte móvil, sólo se aplicará la primera acción de control u_k , por lo que cualquier restricción extra que impongamos a los estados y acciones futuras, no afectará a la estabilidad.

Por otro lado, el optimizador busca una solución que minimice cierto índice de coste, basado en las estimaciones de los estados y acciones de control futuras. Así, parece necesario exigir que estos estados y acciones futuras también cumplan la restricción

$$(x_k, u_k) \in \Omega \quad (5.149)$$

En cuanto a la condición de factibilidad $(x_k, u_k) \in \Omega$ para la primera acción de control u_k se expresa como:

$$Rx_k + Su_k + s < 0 \quad (5.150)$$

Esta condición no requiere realizar ninguna predicción de los estados futuros, y por tanto se expresará siempre como una restricción exacta y lineal.

Sin embargo, cuando apliquemos esta restricción a los estados y acciones futuras necesitaremos de un modelo de predicción. Como queremos expresar las restricciones de forma lineal, y así lograr un problema de optimización de fácil resolución, y debido al carácter no lineal de los modelos borrosos exactos, no podremos aplicar las restricciones directamente sobre dichos modelos de predicción exactos. Así, se nos plantean dos posibles alternativas. Un primer enfoque garantista consiste en aplicar las restricciones sobre los vértices del modelo de predicción borroso exacto, generando un conjunto de condiciones suficientes. Un segundo enfoque consiste en aplicar las restricciones sobre la linealización de dichos modelos. Por tanto, la formulación de las restricciones dependerá del modelo de predicción que utilicemos.

Las restricciones propuestas para los estados y acciones futuras se resumen en:

- a) Ninguna restricción.
- b) Que los estados y acciones de control futuras sean factibles:

$$(x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall q = 1 \dots N \quad (5.151)$$

c) Que los estados futuros estén contenidos en el máximo conjunto contractivo y que sean factibles:

$$\begin{cases} x_{k+q} \in \tilde{C}^{\lambda,d}(\Omega) & \forall q = 1 \dots N \\ (x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega & \forall q = 1 \dots N \end{cases} \quad (5.152)$$

d) Que los estados futuros hagan converger asintóticamente a cero a su función de Lyapunov, y que sean factibles:

$$\begin{cases} V(x_{k+q}) < \lambda^q \cdot V(x_k) & \forall q = 1 \dots N \\ (x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega & \forall q = 1 \dots N \end{cases} \quad (5.153)$$

La elección de qué restricción nos interesa más aplicar a nuestro problema de optimización resulta de un compromiso entre la exactitud solicitada a la estimación de los estados futuros; y de lo restrictivo que queremos que sea nuestro problema de optimización. Esto es debido a que las restricciones las vamos a expresar o bien como un conjunto de condiciones suficientes, o como una aproximación linealizada.

Obviamente, si no restringimos en absoluto ni los estados ni las acciones de control futuras, el optimizador tendrá libertad para obtener cualquier acción de control, sea o no factible, es decir, que cumpla o no (5.151) para los estados y acciones futuras. Esta es la restricción que da más libertad al optimizador.

En cambio, la restricción d) implica que la trayectoria estimada siga una trayectoria asintóticamente estable en los N siguientes pasos, lo cual hace que sea la condición más restrictiva de todas.

A continuación vamos a expresar primero las restricciones de forma exacta, esto es, para el modelo de predicción borroso exacto. Y posteriormente desarrollaremos y analizaremos cómo expresar las restricciones para el resto de modelos de predicción.

5.4.2.1 Restricciones exactas

Para el modelo de predicción borroso exacto (5.19), las condiciones previas (5.151), (5.152) y (5.153) se desarrollan como:

$$\mathbf{a)} \quad (x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall q = 0 \dots N$$

Que, sustituyendo en las restricciones, queda

$$Rx_{k+q} + Su_{k+q} + s < 0 \quad \forall q = 0 \dots N \quad (5.154)$$

agrupando de forma matricial

$$\begin{pmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \vdots \\ x_{k+N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \end{pmatrix} < 0 \quad (5.155)$$

y, al sustituir

$$\begin{pmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R \end{pmatrix} (M \cdot (\theta \cdot x_k + \Gamma \cdot \bar{u})) + \begin{pmatrix} S & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \end{pmatrix} < 0 \quad (5.156)$$

$$\begin{pmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R \end{pmatrix} (I) x_k + \left[\begin{pmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M\Gamma & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ \vdots \\ s \end{pmatrix} < 0 \quad (5.157)$$

$$b) \quad x_{k+q} \in \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega) \quad \forall q = 1 \dots N$$

Si $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid L_j x \leq 1; j = 1 \dots p\}$, entonces esta condición de pertenencia se expresa como

$$L_j x_{k+q} \leq 1 \quad \forall q > 1 \quad j = 1 \dots p \quad (5.158)$$

agrupando de forma matricial

$$\bar{L}_j \bar{x} \leq 1 \quad j = 1 \dots p \quad (5.159)$$

con \bar{L}_j una matriz diagonal de N matrices L_j :

$$\bar{L}_j = \begin{pmatrix} L_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_j \end{pmatrix}_N$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+N} \end{pmatrix}$$

que al sustituir por $\bar{x} = M \cdot (\theta \cdot x_k + \Gamma \cdot \bar{u})$ se obtiene:

$$\bar{L}_j M \theta \cdot x_k + \bar{L}_j M \Gamma \cdot \bar{u} \leq 1 \quad j = 1 \dots p \quad (5.160)$$

$$c) \quad V(x_{k+q}) < \lambda^q \cdot V(x_k) \quad \forall q = 1 \dots N$$

Que equivale a

$$\max(L_{j_q} x_{k+q}) < \lambda^q \cdot \max(L_{j_0} x_k) \quad \forall q > 1 \quad \forall j_1, \dots, j_q \quad (5.161)$$

agrupando de forma matricial

$$(L_{j_q} x_{k+q}) < \lambda^q \cdot \max(L_{j_0} x_k) \quad \forall q > 1 \quad \forall j_1, \dots, j_q \quad (5.162)$$

Una vez ya tenemos planteadas las restricciones de forma genérica, pasamos a concretarlas para nuestro problema de optimización.

5.4.2.2 Restricciones sobre los vértices

Empezaremos por desarrollar las restricciones aplicadas a los vértices del modelo borroso, dando lugar a un conjunto de condiciones suficientes, garantistas, y lineales.

El conjunto de restricciones que se obtiene, será un conjunto más restrictivo que el conjunto de restricciones original. Este problema es común con cualquier técnica de control borroso. Así, siguiendo la filosofía utilizada en el control borroso, vamos a buscar cómo “relajar” estas condiciones. En este contexto, relajar significa conseguir unas condiciones suficientes que se aproximen lo más posible a las condiciones exactas.

Con esta idea se han desarrollado los modelos de predicción con acción de control borrosa (5.50), y en bucle cerrado(5.101).

Hay que destacar en el momento de plantear las restricciones, x_k es conocido, por lo que todos los términos que contienen a x_k son fáciles de computar, dando lugar a los modelos.

5.4.2.2.1 Modelo de predicción en bucle abierto

En ausencia de más información de las funciones de pertenencia, las restricciones se aplican a todos y cada uno de los vértices del modelo de predicción borroso exacto (5.30). Como se conoce el estado actual x_k , las restricciones se expresan cada uno de los estados futuros o vértices del modelo.

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{k+2}^{(r)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(1,\dots,1)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(r,\dots,r)} \end{pmatrix} = (\theta' \cdot x_k + \Gamma' \cdot \bar{u}) \quad (5.163)$$

Matricialmente se expresa como

$$a) \quad (x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall q = 0 \dots N$$

$$\bar{R} \begin{pmatrix} I \\ \theta' \end{pmatrix} x_k + \left[\bar{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Gamma' & 0 \end{pmatrix} + \bar{S} \right] \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+N} \end{pmatrix} + \bar{s} < 0 \quad (5.164)$$

Donde las matrices \bar{R} , \bar{S} y \bar{s} , son el desarrollo de las restricciones para cada uno de los vértices, y tienen.

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} R & \dots & 0 \\ \vdots & R & \vdots \\ 0 & \dots & R \end{pmatrix}_{1 + \sum_{q=0}^{N-1} r^q} \quad (5.165)$$

con $1 + \sum_{q=0}^{N-1} r^q$ matrices R en la diagonal y

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} S & \dots & 0 \\ \vdots & S_{r^0} & \vdots \\ 0 & \dots & S_{r^{N-1}} \end{pmatrix} \quad (5.166)$$

$$\bar{s} = \begin{pmatrix} s \\ S_{r^0} \\ \vdots \\ S_{r^{N-1}} \end{pmatrix} \quad (5.167)$$

con $S_{r^{q-1}} = (S \dots S)^T$ con r^{q-1} veces S , y $s_{r^{q-1}} = (s \dots s)^T$ con r^{q-1} veces s .

Las dimensiones de estas matrices se deducen puesto que para el paso $k+q$ -ésimo, existen $(q-1) \times r$ vértices de estado $(x_{k+q}^{(1,\dots,1)} \dots x_{k+q}^{(r,\dots,r)})$, y hace falta r^{q-1} matrices R en la diagonal de \bar{R} , y r^{q-1} matrices verticales S y s en la matriz \bar{S} y \bar{s} respectivamente.

$$b) \quad x_{k+q} \in \tilde{C}^{\lambda,d}(\Omega) \quad \forall q = 1 \dots N$$

$$\bar{L}_j \theta' \cdot x_k + \bar{L}_j \Gamma' \cdot \bar{u} \leq 1 \quad j = 1 \dots p \quad (5.168)$$

con \bar{L}_j una matriz diagonal de $\sum_{q=0}^{N-1} r^q$ matrices L_j

$$\bar{L}_j = \begin{pmatrix} L_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_j \end{pmatrix}_{\sum_{q=0}^{N-1} r^q}$$

$$c) \quad V(x_{k+q}) < \lambda^q \cdot V(x_k) \quad q = 1 \dots N$$

$$\bar{L}_j \theta' \cdot x_k + \bar{L}_j \Gamma' \cdot \bar{u} < \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}^N \end{pmatrix} \cdot V_0 \quad (5.169)$$

con $\bar{\lambda}^q$ una matriz $\bar{\lambda}^q = [\lambda^q \dots \lambda^q]^T$ de r^{q-1} elementos.

5.4.2.2.2 Modelo de predicción con acción de control borrosa

De forma análoga, se va a desarrollar el caso cuando la acción de control es de la forma

$$u_k = \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k) u_{k,j} \quad (5.170)$$

Como las restricciones politópicas Ω vienen expresadas para las acciones de control u_k , para aplicar las restricciones al modelo de predicción con acción de control borrosa, primero convertimos las restricciones sobre u_k en restricciones sobre las acciones de control $u_{k,j}$, que serán nuestras variables de decisión del problema de optimización. Desarrollamos:

$$\Omega(x, u) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus Rx + Su + s < 0\} \quad (5.171)$$

$$\Omega(x, u_1, \dots, u_r) = \left\{ (x, u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus Rx + S \sum_{j=1}^r \mu_j(x) u_j + s < 0 \right\} \quad (5.172)$$

Las cuales contienen posibles términos no lineales debido a las funciones de pertenencia. Puesto que $\sum_{j=1}^r \mu_j(x) = 1$, entonces

$$Rx + S \sum_{j=1}^r \mu_j(x) u_j + s = R \sum_{j=1}^r \mu_j(x) x + S \sum_{j=1}^r \mu_j(x) u_j + \sum_{j=1}^r \mu_j(x) s < 0 \quad (5.173)$$

Así, en ausencia de más información de las mismas, obtenemos el siguiente conjunto politópico, independiente de la forma de las funciones de pertenencia (“shape independent”), obtenido de aplicar las restricciones a cada uno de los vértices:

$$\Omega^{si}(x, u_1, \dots, u_r) = \{(x, u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus Rx + S u_j + s < 0 \quad j = 1 \dots r\} \quad (5.174)$$

Que a su vez puede ser expresado de forma simplificada como

$$\Omega^{si}(x, u_1, \dots, u_r) = \{(x, u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus R^{si}x + S^{si}(u_1 \dots u_r)^T + s^{si} < 0\} \quad (5.175)$$

con R^{si} , S^{si} y s^{si} matrices de r elementos.

$$R^{si} = \begin{pmatrix} R \\ \vdots \\ R \end{pmatrix}_r \quad (5.176)$$

$$S^{si} = \begin{pmatrix} S & \dots & 0 \\ \vdots & S & \vdots \\ 0 & \dots & S \end{pmatrix}_r \quad (5.177)$$

$$s^{si} = \begin{pmatrix} s \\ \vdots \\ s \end{pmatrix}_r \quad (5.178)$$

Y la factibilidad de la primera acción de control $(x, u_1, \dots, u_r) \in \Omega^{si}$ se expresa como

$$R^{si}x_k + S^{si}(u_{k,1} \dots u_{k,r})^T + s^{si} < 0 \quad (5.179)$$

Para comparar el nuevo conjunto de restricciones $\Omega^{si}(x, u_1, \dots, u_r)$ con respecto al conjunto de restricciones original $\Omega(x, u)$, pueden proyectarse ambos sobre el espacio de estados \mathbb{R}^n . Al hacerlo, observamos que ambos espacios son idénticos. Es decir, que el nuevo conjunto de restricciones no aporta ninguna ventaja sobre el conjunto de restricciones original. Esto es así porque en su expresión sólo contiene un único sumatorio borroso, y sin más conocimiento de sus funciones de pertenencia, las restricciones se tienen que aplicar a todos y cada uno de sus vértices.

Sin embargo, a la hora de aplicar las restricciones sobre los estados y acciones futuras vamos a utilizar un modelo de predicción borroso que contienen en su expresión dobles sumatorios borrosos. Y, por tanto, vamos a poder aplicar los principios de la programación copositiva y de este modo relajar las restricciones para el modelo expandido Polya (5.84), obteniendo unas condiciones menos restrictivas.

Como los vértices del modelo de predicción con acción de control borrosa son

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{k+2}^{(c)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(1, \dots, 1)} \\ \vdots \\ x_{k+N}^{(c, \dots, c)} \end{pmatrix} = (\tilde{\theta}' \cdot x_k + \tilde{\Gamma}' \cdot \bar{U}) \quad (5.180)$$

con

$$\tilde{\theta}' = \begin{pmatrix} A(x_k) \\ \tilde{A} \otimes A(x_k) \\ \vdots \\ \tilde{A} \otimes \tilde{A} \dots A(x_k) \end{pmatrix} \quad (5.181)$$

$$\tilde{\Gamma}' = \begin{pmatrix} \bar{B}(x_k) & 0_{n \times m} & 0_{n \times m} & & \\ \tilde{A} \otimes \bar{B}(x_k) & \tilde{B} & 0_{n \cdot c \times m} & & \dots \\ \tilde{A} \otimes \tilde{A} \otimes \bar{B}(x_k) & \tilde{A} \otimes \tilde{B} & \tilde{B} \otimes \tilde{I} & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \tilde{A} \otimes \tilde{A} \dots \tilde{A} \otimes \bar{B}(x_k) & \dots & & \dots & \tilde{B} \otimes \tilde{I} \dots \otimes \tilde{I} \end{pmatrix} \quad (5.182)$$

desarrollamos las restricciones como sigue:

a) $(x_{k+q}, u_{k+q,1} \dots u_{k+q,r}) \in \Omega^{si}; \forall q = 0 \dots N$

$$\tilde{R} \begin{pmatrix} I \\ \tilde{\theta}' \end{pmatrix} x_k + \left[\tilde{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{\Gamma}' & 0 \end{pmatrix} + \tilde{S} \right] \begin{pmatrix} (u_{k1} \dots u_{kr})^T \\ \vdots \\ (u_{(k+N)1} \dots u_{(k+N)r})^T \end{pmatrix} + \tilde{s} < 0 \quad (5.183)$$

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} R^{si} & \dots & 0 \\ \vdots & R^{si} & \\ 0 & \dots & R^{si} \end{pmatrix}_{1 + \sum_{q=0}^{N-1} c^q} \quad (5.184)$$

con $1 + \sum_{q=0}^{N-1} c^q$ matrices R^{si} en la diagonal, donde c es el número de vértices del modelo expandido Polya y

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} S^{si} & \dots & 0 \\ \vdots & S_{c^0}^{si} & \\ 0 & \dots & S_{c^{(N-1)}}^{si} \end{pmatrix} \quad (5.185)$$

$$\tilde{s} = \begin{pmatrix} S^{si} \\ S_{c^0}^{si} \\ \vdots \\ S_{c^{(N-1)}}^{si} \end{pmatrix} \quad (5.186)$$

b) $x_{k+q} \in \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega) \quad \forall q = 1 \dots N$

$$\bar{L}_j \tilde{\theta}' \cdot x_k + \bar{L}_j \tilde{\Gamma}' \cdot \bar{U} \leq 1 \quad \forall j = 1 \dots p \quad (5.187)$$

con \bar{L}_j una matriz de $\sum_{q=0}^{N-1} c^q$ matrices L_j

c) $V(x_{k+q}) < \lambda^q \cdot V(x_k) \quad \forall q = 1 \dots N$

$$\bar{L}_j \tilde{\theta}' \cdot x_k + \bar{L}_j \tilde{\Gamma}' \cdot \bar{U} < \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}^N \end{pmatrix} \cdot V_0 \quad (5.188)$$

con $\bar{\lambda}^q$ una matriz $\bar{\lambda}^q = [\lambda^q \dots \lambda^q]^T$ de c^{q-1} elementos.

5.4.2.2.3 Modelo de predicción en bucle cerrado

Para un modelo de predicción en bucle cerrado (5.107) tenemos una acción de control

$$u_k = \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k)(F_j x_k + v_{k,j}) \quad (5.189)$$

Como éstas dependen de $v_{k,j}$ y las restricciones de u_k , hay que redefinir las restricciones en bucle cerrado para convertirlas en restricciones sobre las acciones de control aditivas $v_{k,j}$, que serán nuestras variables de decisión del problema de optimización.

$$\Omega(x, u) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Rx + Su + s < 0\} \quad (5.190)$$

$$\Omega(x, v_1, \dots, v_r) = \left\{ (x, v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}^{n+r \cdot m} \mid Rx + S \left(\sum_{i=1}^r \mu_i F_i x + v_i \right) + s < 0 \right\} \quad (5.191)$$

Debido a la no linealidad de las funciones de pertenencia $\mu_i(x)$, las restricciones resultantes son no lineales. Para poder aplicar las restricciones a un problema de optimización con restricciones lineales, utilizaremos su máximo subconjunto politópico para cualquier posible realización de las funciones de pertenencia, definido como

$$\Omega_{bc}^{si}(x, v_1, \dots, v_r) = \{(x, v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}^{n+r \cdot m} \mid (R + SF_i)x + Sv_i + s < 0; \forall i\} \quad (5.192)$$

Este conjunto se puede representar como

$$\Omega_{bc}^{si} = \left\{ (x, v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}^{n+r \cdot m} \mid R_{bc}^{si}x + S_{bc}^{si}(v_{k,1} \dots v_{k,r})^T + s_{bc}^{si} < 0 \right\} \quad (5.193)$$

Y la factibilidad de la primera acción de control se resume como

$$R_{bc}^{si}x_k + S_{bc}^{si}(v_{k,1} \dots v_{k,r})^T + s_{bc}^{si} < 0 \quad (5.194)$$

R_{bc}^{si} una matriz con $1 + \sum_{q=0}^N c^q$ matrices R^{si} en la diagonal, donde c es el número de vértices del modelo expandido Polya

$$\tilde{R}_{bc} = \begin{pmatrix} R_{bc}^{si} & \dots & 0 \\ \vdots & R_{bc}^{si} & \vdots \\ 0 & \dots & R_{bc}^{si} \end{pmatrix}_{1 + \sum_{q=0}^N c^q} \quad (5.195)$$

$$\tilde{S}_{bc} = \begin{pmatrix} S_{bc}^{si} & \dots & 0 \\ \vdots & S_{bc,c^0}^{si} & \vdots \\ 0 & \dots & S_{bc,c^{(N-1)}}^{si} \end{pmatrix} \quad (5.196)$$

$$\tilde{s}_{bc} = \begin{pmatrix} s_{bc}^{si} \\ S_{bc,c^0}^{si} \\ \vdots \\ S_{bc,c^{(N-1)}}^{si} \end{pmatrix} \quad (5.197)$$

Las restricciones para los estados y acciones de control futuras para el modelo en bucle cerrado quedan:

$$a) (x_{k+q}, v_{k+q,1} \dots v_{k+q,r}) \in \Omega_{bc}^{si}; \quad \forall q = 0 \dots N$$

$$\tilde{R}_{bc} \begin{pmatrix} I \\ \tilde{\theta}_{bc}' \end{pmatrix} x_k + \left[\tilde{R}_{bc} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{f}_{bc}' & 0 \end{pmatrix} + \tilde{S}_{bc} \right] \begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \vdots \\ \bar{v}_{k+N} \end{pmatrix} + \tilde{s}_{bc} < 0 \quad (5.198)$$

$$b) x_{k+q} \in \tilde{C}^{\lambda,d}(\Omega) \quad \forall q = 1 \dots N$$

$$\bar{L}_j \tilde{\theta}_{bc}' \cdot x_k + \bar{L}_j \tilde{f}_{bc}' \cdot \bar{V} \leq 1 \quad \forall j = 1 \dots p \quad (5.199)$$

con \bar{L}_j una matriz de $\sum_{q=0}^{N-1} c^q$ matrices L_j

$$c) V(x_{k+q}) < \lambda^q \cdot V(x_k) \quad \forall q = 1 \dots N$$

$$\bar{L}_j \tilde{\theta}_{bc}' \cdot x_k + \bar{L}_j \tilde{f}_{bc}' \cdot \bar{V} < \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}^N \end{pmatrix} \cdot V_0 \quad (5.200)$$

con $\bar{\lambda}^q$ una matriz $\bar{\lambda}^q = [\lambda^q \dots \lambda^q]^T$ de c^{q-1} elementos.

5.4.2.3 Modelos de predicción lineal

Para un modelo de predicción lineal, las restricciones se van a aplicar directamente a las predicciones de los estados y entradas futuras, en vez de a cada uno de los vértices del modelo borroso.

El hecho de aplicar las restricciones sobre un modelo linealizado, no permite garantizar que los estados y acciones futuras del modelo de predicción exacto cumplirán las restricciones, es decir, no son condición suficiente. Sin embargo, mediante un proceso de cálculo iterativo basado en un modelo de predicción lineal, podemos llegar a obtener la solución exacta del modelo de predicción borroso, y por tanto afirmar que los estados y acciones futuras del modelo exacto sí que cumplen con las restricciones Ω , siempre y cuando este proceso de cálculo iterativo haya convergido con una duración menor al tiempo de muestreo del sistema real.

Por otro lado, así como el numero de restricciones sobre los vértices lineales se expanden exponencialmente con el número de pasos o profundidad N del modelo de predicción, esto no ocurre cuando aplicamos un modelo linealizado, lo que supone una ventaja desde el punto de vista del coste computacional.

Y por último, hay que resaltar que gracias a que estamos garantizando la estabilidad del modelo mediante una función de Lyapunov "a priori", en teoría podremos aplicar las restricciones a un modelo u otro indistintamente, que no afectará en absoluto a la estabilidad, sino solo a la precisión de la estimación del índice de coste objetivo. En la práctica, esto será cierto siempre y cuando el optimizador sea capaz de computar al menos una primera solución en un tiempo menor que el tiempo de muestreo.

A continuación resumimos las ecuaciones que resultan de aplicar a las restricciones la linealización de cada uno de los modelos de predicción descritos.

La estimación de los estados se obtiene a partir de

$$\hat{x} = \theta^0 \cdot x_k + \Gamma^0 \cdot \bar{u} \quad (5.201)$$

Y por tanto, las restricciones son expresadas como:

$$a) \quad (\hat{x}_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall q = 0 \dots N$$

$$\begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ \theta^0 \end{pmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Gamma^0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ \vdots \\ S \end{pmatrix} < 0 \quad (5.202)$$

$$b) \quad \hat{x}_{k+q} \in \tilde{C}^{\lambda,d}(\Omega) \quad \forall q = 1 \dots N$$

$$\bar{L}_j \cdot \left[\theta^0 \cdot x_k + \Gamma^0 \cdot \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+N} \end{pmatrix} \right] \leq 1 \quad j = 1 \dots p \quad (5.203)$$

$$c) \quad V(\hat{x}_{k+q}) < \lambda^q \cdot V(x_k) \quad q = 1 \dots N$$

$$\bar{L}_j \cdot \left[\theta^0 \cdot x_k + \Gamma^0 \cdot \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+N} \end{pmatrix} \right] \leq \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^q \end{pmatrix} \cdot V_0 \quad (5.204)$$

5.4.3 RESTRICCIÓN TERMINAL

En la literatura de control predictivo es frecuente utilizar un conjunto terminal de restricciones sobre los estados $T \in \mathbb{R}^n$ con un doble objetivo: por un lado, poder garantizar la estabilidad cuando aplicamos un algoritmo de control basado en la filosofía de horizonte móvil; y por otro, acotar la cola del índice de coste, es decir, los términos de éste a partir de que el estado alcanza dicha región terminal, como se detalla en la sección 2.5.1.

En nuestro caso, puesto que vamos a garantizar la estabilidad mediante una función de Lyapunov obtenida a partir del máximo conjunto contractivo computable, no necesitaremos de ningún conjunto terminal para garantizar la estabilidad en bucle cerrado. Sin embargo, un índice de coste que contenga en su expresión una cota de la cola de coste infinito, dará una estimación más precisa del coste real que un índice de coste con horizonte finito, y por lo tanto, unas mejores prestaciones al control en bucle cerrado.

Idealmente, la función objetivo propuesta en la definición del problema (sección 5.1) es una función cuadrática dependiente de los infinitos estados y acciones de control futuras.

$$J_\infty = \sum_{q=0}^{\infty} (x_{k+q}^T Q x_{k+q} + u_{k+q}^T H u_{k+q}) \quad (5.205)$$

Sin embargo, esta función no es tratable numéricamente para modelos no lineales debido a su horizonte de predicción infinito. Así, con el fin de solucionar este problema, vamos a introducir una función de coste con horizonte finito

$$J_N = \sum_{q=0}^{N-1} (x_{k+q}^T Q x_{k+q} + u_{k+q}^T H u_{k+q}) + x_{k+N}^T P x_{k+N} \quad (5.206)$$

Por cuestiones de prestaciones y de estabilidad, es interesante que nuestra función de coste con horizonte finito acote a la función de coste óptima ($J_\infty \leq J_N$) a la vez que se aproxime lo más posible a ésta. En este sentido, la matriz P debe ser tal que acote el término del coste de horizonte infinito $J_{N \rightarrow \infty}$

$$J_{N \rightarrow \infty} = \sum_{q=N}^{\infty} (x_{k+q}^T Q x_{k+q} + u_{k+q}^T H u_{k+q}) \quad (5.207)$$

tal que

$$J_{N \rightarrow \infty} \leq x_{k+N}^T P x_{k+N} \quad (5.208)$$

Para conseguir esta cota superior, vamos a imponer la condición de diseño

$$x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k < -(x_k^T Q x_k + u_k^T H u_k) \quad (5.209)$$

De hecho, si esta condición se cumple, sumando desde $k + N$ hasta ∞ y asumiendo que el controlador resultante será capaz de estabilizar el modelo en $x_\infty = 0$, entonces, el índice de coste está acotado por $x_{k+N}^T P x_{k+N}$

$$\sum_{q=N}^{\infty} (x_{k+q}^T Q x_{k+q} + u_{k+q}^T H u_{k+q}) < x_{k+N}^T P x_{k+N} \quad (5.210)$$

Con el fin de acotar el término de coste infinito, utilizaremos una ley de control PDC

$$u_k = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k) F_i x_k \quad (5.211)$$

Cuyas ganancias las obtendremos a priori mediante metodologías LMI con coste garantizado. El diseño de controlador PDC con coste garantizado fue desarrollado por (Tanaka & Wang, Fuzzy control systems design and analysis, 2001).

Mediante(5.210) (5.211) y realizando el cambio de variable

$$X = P^{-1}$$

$$M_j = F_j X$$

y aplicando complemento de Schur, convertimos la condición de diseño en las desigualdades siguientes:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q_{ij} > 0 \quad (5.212)$$

con

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} X & (A_i X + B_i M_j)^T & X & M_j^T \\ A_i X + B_i M_j & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ M_j & 0 & 0 & H^{-1} \end{pmatrix}$$

La cota superior del índice de coste se minimiza maximizando los autovalores de X . Así, el problema de optimización, que minimiza el coste garantizado queda como sigue:

$$\begin{cases} \max: \vartheta \\ \text{sujeto a: } \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q_{ij} > 0 \\ X > \vartheta \end{cases} \quad (5.213)$$

el cual no es directamente un problema LMI, pero puede ser convertido mediante las metodologías expuestas en la sección 2.4.8.

La resolución de este problema LMI, si tiene solución, nos devuelve las ganancias del controlador PDC, y la matriz P que acota el coste.

Ahora, el siguiente paso lógico consiste en obtener la máxima región de validez del controlador PDC, el cual nos conducirá a la región terminal \mathbb{T} que buscamos. Para ello hacemos uso de los procedimientos desarrollados en la sección 3, y calculamos la mejor aproximación interior politópica del máximo conjunto invariante contenido en las restricciones $\mathcal{O}^{h,\infty}(\Omega)$. Esto lo realizamos aplicando las relajaciones de Polya para obtener el conjunto $\tilde{\mathcal{O}}^{h,d}(\Omega)$, donde d representa el grado de complejidad Polya de nuestra aproximación interior politópica.

Esta región terminal \mathbb{T} , que determina la validez del controlador PDC, estará contenida en la región contractiva bajo control $\mathcal{C}^{\lambda,\infty}(\Omega)$ que garantiza la estabilidad asintótica del modelo, y será por regla general mucho más reducida que $\mathcal{C}^{\lambda,\infty}(\Omega)$. De aquí la necesidad de desarrollar otro tipo de control con validez para todo la región $\mathcal{C}^{\lambda,\infty}(\Omega)$, como el control predictivo que se propone en esta tesis.

Nuestro conjunto terminal puede ser expresado de forma politópica como:

$$\mathbb{T} = \tilde{\mathcal{O}}^{h,d}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Tx + r < 0\} \quad (5.214)$$

con lo que la formulación de la restricción terminal será: $x_{k+N} \in \mathbb{T}$.

A continuación analizaremos la formulación que presenta esta restricción terminal, según el modelo de predicción utilizado. Por su similitud con el desarrollo realizado para las restricciones de factibilidad de los estados y acciones de control futura de la sección anterior, vamos a exponer solamente la formulación de la restricción terminal para el modelo borroso en bucle cerrado, y su linealización correspondiente.

Para el modelo de predicción borroso exacto en bucle cerrado

$$x_{k+N} = (\tilde{\mu}(x_{k+q}) \otimes \dots \otimes \tilde{\mu}(x_k) \otimes I_n)^T \left((\tilde{G} \otimes \tilde{G} \dots \otimes \tilde{G}) \cdot x_k + (\tilde{G} \otimes \dots \otimes \tilde{G} \otimes \tilde{B} \dots \tilde{B} \otimes \tilde{I} \dots \otimes \tilde{I}) \cdot \tilde{V} \right) \quad (5.215)$$

Y la restricción terminal $x_{k+N} \in \mathbb{T}$ se expresa como:

$$T \cdot \left((\tilde{\mu}(x_{k+q}) \otimes \dots \otimes \tilde{\mu}(x_k) \otimes I_n)^T \left((\tilde{G} \otimes \tilde{G} \dots \otimes \tilde{G}) \cdot x_k + (\tilde{G} \otimes \dots \otimes \tilde{G} \otimes \tilde{B} \dots \tilde{B} \otimes \tilde{I} \dots \otimes \tilde{I}) \cdot \tilde{V} \right) \right) + r < 0 \quad (5.216)$$

Esta restricción es no lineal, por la presencia de las funciones de pertenencia. Por tanto, vamos a aplicar dos enfoques distintos.

El primer enfoque será garantista, y consiste en aplicar la restricción terminal a cada uno de sus vértices del modelo de predicción borroso. Puesto que conocemos el estado inicial x_k , las restricciones se expresan como:

$$\bar{T} \left((\tilde{G} \otimes \tilde{G} \dots \otimes \tilde{G}) \cdot x_k + (\tilde{G} \otimes \dots \otimes \tilde{G} \otimes \tilde{B}(x_k) \dots \tilde{B} \otimes \tilde{I} \dots \otimes \tilde{I}) \cdot \tilde{V} \right) + \bar{r} < 0 \quad (5.217)$$

con \bar{T} una matriz diagonal con c^{N-1} elementos

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T \end{pmatrix}_{c^{N-1}} \quad (5.218)$$

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} r \\ \vdots \\ r \end{pmatrix}_{c^{N-1}} \quad (5.219)$$

El otro enfoque consiste en utilizar la linealización del modelo borroso en bucle cerrado. La formulación de la restricción terminal se formulará como:

$$T \left((\bar{\mu}(x_{k+q}^0) \otimes \dots \otimes \bar{\mu}(x_k^0) \otimes 1_{n \times 1})^T \left((\tilde{G} \otimes \tilde{G} \dots \otimes \tilde{G}) \cdot x_k + (\tilde{G} \otimes \dots \otimes \tilde{G} \otimes \tilde{B} \dots \tilde{B} \otimes \tilde{I} \dots \otimes \tilde{I}) \cdot \bar{V} \right) \right) + r < 0 \quad (5.220)$$

5.5 REGIÓN DE FACTIBILIDAD

A continuación vamos a realizar un análisis de las regiones de factibilidad de los problemas de optimización que resultan de aplicar las restricciones descritas en las secciones anteriores. Las regiones de factibilidad hacen referencia al conjunto que defino todos los estados para los que podemos aplicar algoritmo de optimización correspondiente.

Nótese que en cualquier caso, se desconoce el valor del estado actual x_k . Nótese también que la región de factibilidad resultante del problema de optimización será la intersección de las regiones de factibilidad asociadas a cada tipo de restricción aplicada.

De entre las distintas restricciones que vamos a aplicar, la restricción que garantiza la estabilidad asintótica del modelo veremos que conduce a la máxima región contractiva en Ω calculable numéricamente, esto es $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$. Puesto que esta restricción no requiere de ningún modelo de predicción, el presente análisis de las regiones de factibilidad se va a realizar comparándolo con el conjunto $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, es decir, que nos bastará con comprobar si la región de factibilidad asociada a cada restricción y modelo de predicción, contiene o es contenido por el conjunto $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$. Además, tal como se definió en los objetivos de esta tesis, el control predictivo propuesto se basa en los conjuntos contractivos.

Para aplicar las restricciones a los estados y acciones de control presentes y futuras, deberemos utilizar algún modelo de predicción de dichos estados y acciones futuras. En el caso de utilizar un modelo de predicción exacto, las restricciones se formularán como expresiones no lineales, difíciles de tratar a la hora de computar el algoritmo de optimización en línea. Sin embargo, tiene especial interés analizar las regiones de factibilidad de cada restricción para un modelo de predicción exacto, pues nos permite estimar la máxima región de factibilidad que podremos obtener con los modelos de predicción no-exactos.

A partir de los desarrollos de la sección 5.3, utilizaremos dos enfoques diferenciados para tratar estas restricciones y convertirlas en restricciones lineales. El primer enfoque consiste en aplicar las restricciones a todos los vértices del modelo de predicción borroso, y el segundo enfoque consiste en aplicar las restricciones a una predicción linealizada del modelo borroso original.

5.5.1 REGIONES DE FACTIBILIDAD EXACTAS

La formulación de las regiones de factibilidad de las restricciones serán por regla general no lineales, y conducirán a conjuntos no politópicos. De hecho, su computación exacta será muchas veces imposible, y sólo tendrá utilidad desde el punto de vista teórico, como el máximo conjunto no lineal. Sin embargo, sí que es interesante comparar las regiones de factibilidad con el máximo conjunto contractivo bajo control calculado $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, y así poder o no garantizar la factibilidad del optimizador en dicho conjunto. Como veremos de inmediato, siempre y cuando el horizonte de predicción N sea igual o superior al número de

pasos requerido en el algoritmo recursivo para obtener el conjunto $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, podemos afirmar que existirá solución factible en $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$.

Por otro lado, hay que destacar que, si el horizonte de predicción del modelo N es inferior al número de iteraciones del algoritmo necesarias para obtener el máximo conjunto contractivo $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, entonces podemos obtener estados iniciales que sí cumplan con las restricciones propuestas (por ejemplo, que garantice que el modelo sea λ -contractivo y permanecerá en $proy_x(\Omega)$ durante los siguientes N pasos) y sin embargo no pertenezcan al máximo conjunto λ -contractivo (por ejemplo, que se salga de $proy_x(\Omega)$ en el paso $N+1$). Para evitar que esto ocurra, deberemos incluir en las restricciones que x_{k+N} pertenezca a cierto conjunto terminal.

Vamos a analizar el conjunto de factibilidad que resulta de cada restricción.

5.5.1.1 Estabilidad

Como se discutió en la sección 5.4.1, la restricción de estabilidad se expresa como $V(x_{k+1}) < \lambda \cdot V(x_k)$, donde $V(x) = \max_j (L_j \cdot x)$ es una función de Lyapunov obtenida de la aproximación interior politópica del máximo conjunto λ -contractivo en Ω , expresado como $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid L_j x \leq 1; j = 1 \dots p\}$.

Por definición, $\mathcal{C}^{\lambda,\infty}(\Omega)$ es la región que contiene todos los estados para los que existe una acción de control que hace que la trayectoria del modelo converja asintóticamente al origen (con ratio de convergencia λ), y $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ es un politopo contenido en $\mathcal{C}^{\lambda,\infty}(\Omega)$. Así, obviamente, cualquier $x \in \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,\infty}(\Omega)$ pertenece a la región de factibilidad de la restricción de estabilidad para el modelo borroso exacto.

Sin embargo, los estados $x \in \mathcal{C}^{\lambda,\infty}(\Omega)$ y no pertenecen a $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, también pertenecerán a la región de factibilidad. Pero debido al desconocimiento del conjunto exacto $\mathcal{C}^{\lambda,\infty}(\Omega)$, la región de factibilidad probable de las restricciones de estabilidad será sólo el conjunto politópico $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$.

5.5.1.2 Restricciones sobre los estados y acciones futuras

Las regiones de factibilidad derivan de aplicar directamente las restricciones a los modelos de predicción. Por ser dicho modelo de predicción exacto, vamos a expresar únicamente dichas regiones para el modelo de predicción borroso en bucle abierto.

- a) $(x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall q = 0 \dots N$
- b) $x_{k+q} \in \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega) \quad \forall q = 1 \dots N$
- c) $V(x_{k+q}) < \lambda^q \cdot V(x_k) \quad q = 1 \dots N$

Por definición, el conjunto a N pasos $\mathbb{K}_N(\Omega, \mathbb{D})$ es el máximo conjunto para el que existe una secuencia de acciones de control admisibles que lleve al modelo a $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$ en N pasos y mantenga el modelo en Ω en los $N-1$ pasos anteriores.

$$\mathbb{K}_i(\Omega, \mathbb{D}) = \{x_k \in \mathbb{R}^n \mid \exists \{u_{k+i}\}_0^{i-1}: \{(x_{k+i}, u_{k+i}) \in \Omega\}_0^{i-1}, x_{k+i} \in \mathbb{D}\} \quad (5.221)$$

Así, la región $\mathbb{K}_N(\Omega, proy_x \Omega)$ define la región de factibilidad de la restricción a). De la cual podemos afirmar que contiene al máximo conjunto invariante bajo control, esto es:

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \subset \mathbb{K}_N(\Omega, proy_x \Omega) \quad (5.222)$$

$\mathbb{K}_N(\Omega, proy_x \Omega)$ converge a $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a medida que el horizonte de predicción N se iguale al número de pasos requerido en el algoritmo recursivo no lineal para obtener el máximo conjunto invariante bajo control.

De forma análoga definimos la región de factibilidad de la restricción b) como $\mathbb{K}_N(\Omega, \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega))$, la cual contiene a $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ y sólo será idéntico a $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ cuando el horizonte de predicción N sea igual o superior al número de pasos requerido en el algoritmo recursivo.

En el caso de la restricción c), la región de factibilidad se obtiene como $\mathbb{K}_N(\Omega, \lambda^N \cdot \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega))$, donde $\lambda^N \cdot \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ es el conjunto contractivo escalado por λ^N , y vuelve a coincidir con a $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ cuando el horizonte de predicción N sea igual o superior al número de pasos requerido en el algoritmo recursivo.

En resumen, para cualquiera de las restricciones, cuando el número de pasos utilizado para la predicción del modelo sea igual al número de pasos requerido en el algoritmo recursivo del máximo conjunto invariante, podemos afirmar que la región de factibilidad contiene al conjunto contractivo.

5.5.1.3 Restricción terminal

La restricción terminal se resume con \mathbb{T} el conjunto terminal como

$$x_{k+N} \in \mathbb{T} \quad (5.223)$$

Por tanto, su región de factibilidad se define como $\mathbb{K}_N(\Omega, \mathbb{T})$. Ésta región converge al máximo conjunto invariante bajo control $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ cuando $N \rightarrow \infty$, y por tanto contendrá a $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$. Sin embargo, para un número de pasos de predicción finito N , el conjunto $\mathbb{K}_N(\Omega, \mathbb{T})$ no tiene porqué contener a $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$.

De esto se deduce que la inclusión de una restricción terminal, si bien tiene ciertos beneficios sobre la estabilidad y precisión de la estimación en el índice de coste infinito, también reduce la región de factibilidad del problema de optimización, siendo esta restricción la que tiene asociada una región de factibilidad más reducida.

5.5.2 REGIONES DE FACTIBILIDAD SOBRE LOS VÉRTICES DEL MODELO DE PREDICCIÓN

Las regiones de factibilidad se derivan de aplicar las restricciones a los vértices de los modelos de predicción borrosos. Por sencillez, vamos a expresar únicamente dichas regiones para el modelo de predicción borroso en bucle abierto, obteniéndose de forma análoga dichas regiones de factibilidad para los otros modelos.

Desarrollando la restricción de estabilidad para el modelo borroso exacto TS (5.1), obtenemos que:

$$\max_{j_1} (L_{j_1} \cdot x_{k+1}) < \lambda \cdot \max_{j_0} (L_{j_0} \cdot x_k) \quad \forall j_1, j_0 \quad (5.224)$$

$$\max_{j_1} \left(L_{j_1} \cdot \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k) (A_i x_k + B_i u_k) \right) < \lambda \cdot \max_{j_0} (L_{j_0} \cdot x_k) \quad \forall j_1, j_0 \quad (5.225)$$

Y para cualquier realización de las funciones de pertenencia, tendremos que calcular la región de difícil computación, tal que

$$\max_{j_1} \left(L_{j_1} \cdot (A_i x_k + B_i u_k) \right) < \lambda \cdot \max_{j_0} (L_{j_0} \cdot x_k) \quad \forall i, j_1, j_0 \quad (5.226)$$

Sin embargo, por definición del conjunto $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, cualquier estado contenido en el mismo cumplirá esta restricción de estabilidad.

Las restricciones sobre los estados y acciones futuras se obtienen como:

$$a) \quad (x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall q = 0 \dots N$$

$$\bar{R} \begin{pmatrix} I \\ \theta \end{pmatrix} x_k + \left[\bar{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Gamma & 0 \end{pmatrix} + \bar{S} \right] \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+N} \end{pmatrix} + \bar{s} < 0 \quad (5.227)$$

con

$$\theta = \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{A} \otimes \bar{A} \\ \vdots \\ \bar{A} \otimes \bar{A} \dots \bar{A} \otimes \bar{A} \end{pmatrix} \quad (5.228)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \bar{B} & 0_{(n \cdot r \times m)} & 0_{(n \cdot r \times m)} & & \\ \bar{A} \otimes \bar{B} & \bar{B} \otimes \bar{I} & 0_{(n \cdot r^2 \times m)} & & \dots \\ \bar{A} \otimes \bar{A} \otimes \bar{B} & \bar{A} \otimes \bar{B} \otimes \bar{I} & \bar{B} \otimes \bar{I} \otimes \bar{I} & & \\ \vdots & & & & \ddots \\ \bar{A} \otimes \bar{A} \dots \bar{A} \otimes \bar{B} & \dots & & & \dots \bar{B} \otimes \bar{I} \dots \otimes \bar{I} \end{pmatrix} \quad (5.229)$$

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} R & \dots & 0 \\ \vdots & R & \vdots \\ 0 & \dots & R \end{pmatrix}_{1 + \sum_{q=1}^N r^q} \quad (5.230)$$

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} S & \dots & 0 \\ \vdots & S_{r^1} & \vdots \\ 0 & \dots & S_{r^N} \end{pmatrix} \quad (5.231)$$

$$\bar{s} = \begin{pmatrix} s \\ s_{r^1} \\ \vdots \\ s_{r^N} \end{pmatrix} \quad (5.232)$$

b) $x_{k+q} \in \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda, d}(\Omega) \quad \forall q = 1 \dots N$

$$\bar{L}_j \theta \cdot x_k + \bar{L}_j \Gamma \cdot \bar{u} \leq 1 \quad j = 1 \dots p \quad (5.233)$$

con \bar{L}_j una matriz diagonal de $\sum_{q=1}^N r^q$ matrices L_j

$$\bar{L}_j = \begin{pmatrix} L_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_j \end{pmatrix}_{\sum_{q=1}^N r^q}$$

c) $V(x_{k+q}) < \lambda^q \cdot V(x_k) \quad q = 1 \dots N$

$$\bar{L}_j \theta \cdot x_k + \bar{L}_j \Gamma \cdot \bar{u} < \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}^N \end{pmatrix} \cdot V_0 \quad (5.234)$$

con $\bar{\lambda}^q$ una matriz $\bar{\lambda}^q = [\lambda^q \dots \lambda^q]^T$ de r^{q-1} elementos.

Esta condición es equivalente a

$$\max(L_j \cdot x_{k+q}) < \lambda^q \cdot \max(L_i \cdot x_k) \quad (5.235)$$

y

$$\lambda^q \cdot \max(L_i \cdot x_k) < L_j \cdot x_{k+q} \quad \forall j \quad (5.236)$$

y a la unión del siguiente conjunto de regiones:

$$\text{Si el máximo es } L_1 \cdot x_k \left\{ \begin{array}{l} \lambda^q \cdot \max(L_{j_0} x_k) > L_1 x_{k+q} \quad \forall j \\ L_1 x_{k+q} > L_2 x_{k+q} \\ \vdots \\ L_1 x_{k+q} > L_p x_{k+q} \end{array} \right.$$

$$\text{Si el máximo es } L_2 \cdot x_k \left\{ \begin{array}{l} \lambda^q \cdot \max(L_{j_0} x_k) > L_2 x_{k+q} \quad \forall j \\ L_2 x_{k+q} > L_1 x_{k+q} \\ \vdots \\ L_2 x_{k+q} > L_p x_{k+q} \end{array} \right.$$

Etcétera.

Como esta última restricción puede tener un alto coste computacional, proponemos el siguiente teorema que simplifica la obtención del espacio de factibilidad asociado a esta restricción.

Teorema 5-1

Sea un $x_k \in \partial \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, con $V(x_k) = 1$, si el espacio de factibilidad del problema planteado

$$Z = \{x_k \in \mathbb{R}^n \mid \bar{L}_j \theta \cdot x_k + \bar{L}_j \Gamma \cdot \bar{u} < \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}^N \end{pmatrix} \cdot 1\} \quad (5.237)$$

con $(x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall 1 \leq q \leq N$, es igual a $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, entonces, el espacio de factibilidad $\forall x_k \in \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ es $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$.

Demostración: Si para cualquier punto de la frontera de $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$ se cumple que el espacio de factibilidad del problema es $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, entonces, por escalabilidad, también lo será para cualquier punto interior. ■

En cuanto a la inclusión de la restricción terminal $\hat{x}_{k+N} \in \mathbb{T}$, se puede expresar de forma independiente al resto de restricciones a partir de la definición del conjunto $\mathbb{T} = \tilde{\mathcal{O}}^{h,d}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Tx + r < 0\}$

$$\bar{T}[(\bar{A} \otimes \bar{A} \dots \bar{A} \otimes \bar{A})x_k + (\bar{A} \otimes \bar{A} \dots \bar{A} \otimes \bar{B} \quad \dots \quad \bar{B} \otimes \bar{I} \dots \otimes \bar{I})u_k] + \bar{r} < 0 \quad (5.238)$$

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} T & \dots & 0 \\ \vdots & T & \vdots \\ 0 & \dots & T \end{pmatrix}_{r^q} \quad (5.239)$$

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} r & \dots & 0 \\ \vdots & r & \vdots \\ 0 & \dots & r \end{pmatrix}_{r^q} \quad (5.240)$$

Aunque de forma habitual, puesto que combinaremos esta restricción terminal con la restricción a), bastará con sustituir en las matrices \bar{R} , \bar{S} y \bar{s} , los términos que hacen referencia a la restricción terminal \bar{T} y \bar{r} en los elementos que multiplican a la predicción de estado \hat{x}_{k+N} .

De forma análoga se calculan las regiones de factibilidad para el resto de modelos de predicción.

Como resumen de esta sección, y puesto que las restricciones las estamos aplicando directamente a ciertas combinaciones de los vértices lineales del modelo de predicción borroso exacto, podemos afirmar que siempre obtendremos aproximaciones interiores de las regiones analizadas en la sección anterior para modelos exactos.

Por otra parte, si desarrollamos los modelos de predicción con un N y un coeficiente Polya d suficientemente grande, la región de factibilidad del problema de optimización coincidirá con el conjunto contractivo previamente calculado $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$.

5.5.3 RESTRICCIONES DE FACTIBILIDAD SOBRE MODELOS LINEALIZADOS

Por último, también hay que resaltar que el uso de modelos de predicción linealizados como los expuestos en la sección 5.3.3.2 no son garantistas en su predicción.

Sin embargo, podemos afirmar que para cualquier estado inicial contenido en el máximo conjunto contractivo $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, este estado inicial cumplirá cualquiera de las restricciones descritas para cualquiera de los modelos de predicción borrosos linealizados. Esto se demuestra porque cualquier linealización del modelo de predicción borroso coincide con una realización particular de las funciones de pertenencia, y por tanto, como $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega) \in \mathcal{C}^{\lambda,si}(\Omega)$, por definición es válido para cualquier realización de las funciones de pertenencia. Es decir, que para cualquier estado inicial $x_k \in \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega)$, el problema de optimización tendrá solución factible.

Por otro lado, hay que recordar que las restricciones aplicadas a estos modelos no son garantistas, esto es, que dado un estado y secuencia de acciones $(x_k, u_k, \dots, u_{k+N})$, el hecho de que cumplan las restricciones para un modelo linealizado no implica que vayan a cumplir las restricciones para el modelo borroso exacto. Sin embargo, mediante una técnica de control predictivo secuencial, esto es, que utilizando la solución del optimizador vuelva a linealizar el modelo y vuelva a ejecutar el optimizador sucesivamente, y siempre que el algoritmo converja a una solución, sí que podemos garantizar que las restricciones propuestas también se cumplirán para el modelo borroso exacto.

5.5.4 EJEMPLOS DE REGIONES DE FACTIBILIDAD

Sea un modelo borroso TS de la forma (5.1), definido por

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.241)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5.242)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.243)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (5.244)$$

Las restricciones en (x, u) se definen como en (5.3), con

$$x_{max} = 10 \quad (5.245)$$

$$u_{max} = 3 \quad (5.246)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.247)$$

$$S = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1)^T \quad (5.248)$$

$$s = (x_{max} \ x_{max} \ x_{max} \ x_{max} \ u_{max} \ u_{max})^T \quad (5.249)$$

Y un ratio de convergencia dado “a priori” $\lambda = 0,6$.

De entre las posibles restricciones planteadas en 5.4, se consideran para este ejemplo las siguientes

$$\text{restricciones: } \begin{cases} (x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall q = 0 \dots N \\ V(x_{k+q}) < \lambda^q \cdot V(x_k) \end{cases}$$

Con el fin de aplicar el Teorema 5-1, primero calculamos el espacio de factibilidad para $V(x_k) = 1$, con un horizonte de predicción a 7 pasos, y lo vamos a comparar con el máximo conjunto contractivo $\tilde{C}^{\lambda,d}(\Omega)$. En la figura siguiente se muestra la diferencia entre ambos, donde los diferentes colores hacen referencia al espacio de factibilidad para cada uno de los pasos.

La diferencia de tamaños de ambas regiones es del 7.27 % en volumen. Como no coinciden, no podemos aplicar el Teorema 5-1, así que tendremos que recurrir al proceso exacto para calcular la región de factibilidad de las restricciones, que es más costoso computacionalmente. Otra posibilidad sería aumentar el horizonte de predicción hasta el número de pasos requeridos en el proceso iterativo.

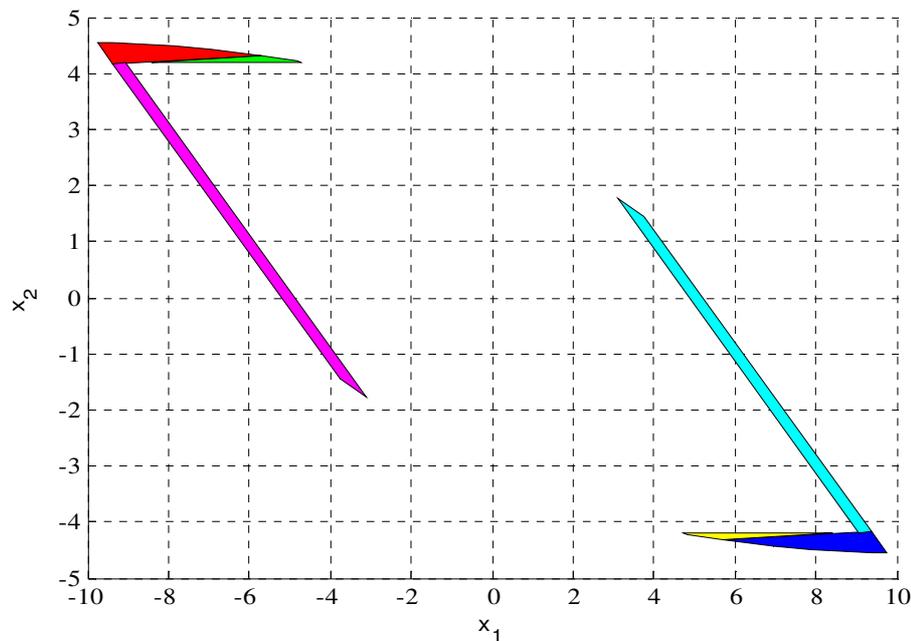


Ilustración 5-4: Región resultante de sustraer la región contractiva a la región de factibilidad

Para el mismo modelo del ejemplo anterior y las mismas restricciones, pero con un ratio de convergencia de $\lambda = 0.8$, y aplicando el procedimiento descrito en la sección 5.4.1, obtenemos para el modelo de predicción en bucle abierto sin acción de control borrosa, el máximo conjunto contractivo politópico $\mathcal{C}^{\lambda, si}(\Omega)$ en Ω . Recordamos que para este modelo de predicción no cabe la posibilidad de reducir el conservativismo mediante el teorema de Polya. El espacio obtenido se muestra en la Ilustración 5-5, tras 6 iteraciones de dicho algoritmo. En los ejemplos del capítulo anterior ya se mostró que se puede obtenerse un mayor espacio contractivo utilizando el modelo de predicción en bucle abierto con acción de control borrosa, y aplicando el teorema de Polya.

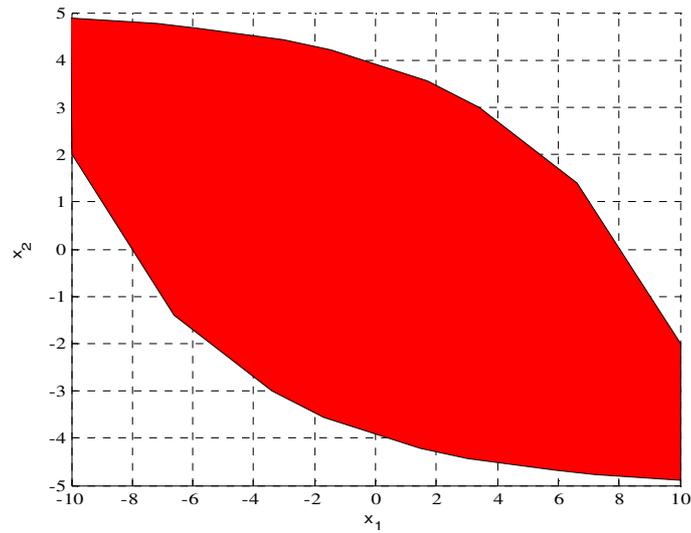


Ilustración 5-5: Máxima región contractiva con $\lambda = 0.8$.

La función de Lyapunov contractiva se define como $V(x) = \max(L_i \cdot x)$ con:

$$L = \begin{pmatrix} -0.1505 & -0.3011 \\ -0.1923 & -0.1923 \\ 0.1923 & 0.1923 \\ 0.0601 & 0.3003 \\ -0.0240 & -0.2640 \\ -0.0404 & -0.2828 \\ 0.0404 & 0.2828 \\ 0.0240 & 0.2640 \\ -0.0105 & -0.2417 \\ -0.0169 & -0.2528 \\ 0.0169 & 0.2528 \\ 0.0105 & 0.2417 \\ -0.0076 & -0.2357 \\ 0.0076 & 0.2357 \end{pmatrix}$$

Y en la siguiente figura mostramos la región de factibilidad con ese horizonte de predicción.

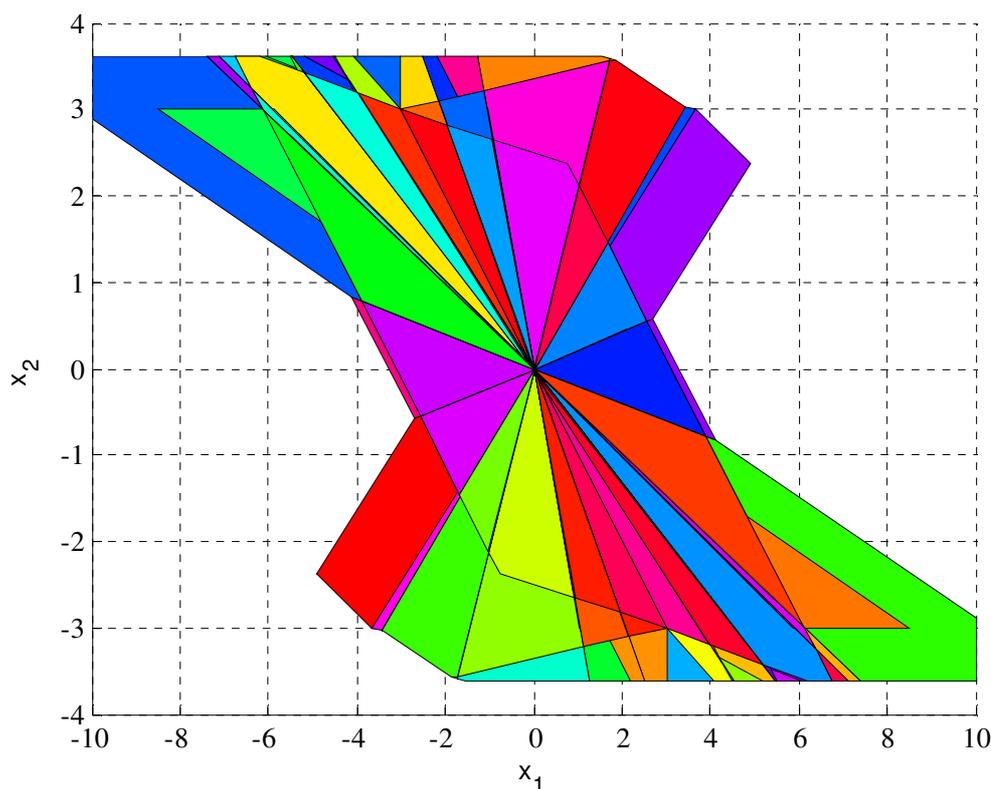


Ilustración 5-6: Región de factibilidad con N=7 pasos.

El cual está obviamente contenido en $\mathcal{C}^{\lambda, si}(\Omega)$.

Si en vez de aplicar las restricciones $\begin{cases} (x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall q = 0 \dots N \\ V(x_{k+q}) < \lambda^q \cdot V(x_k) \end{cases}$

aplicamos las restricciones $\begin{cases} (x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall q = 0 \dots N, x_{k+q} \in \mathcal{C}^{\lambda, si}(\Omega) \text{ y } V_{k+1} = \lambda \cdot V_k \\ (x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \text{ y } V_{k+q} = \lambda^q \cdot V_k \quad \forall q = 0 \dots N \end{cases}$

obtenemos conjuntos vacíos como espacio de factibilidad.

Esto sirve para ejemplificar que puede que no podamos aumentar la precisión de la predicción, pues tendremos que recurrir a condiciones más restrictivas, que a su vez pueden reducir el espacio de factibilidad del problema.

Ahora vamos a ejemplificar el problema expuesto con respecto la utilización de modelos de predicción con pocos pasos. Representamos la región de factibilidad que se ha obtenido para un horizonte de predicción $N=3$ inferior a las iteraciones necesarias para obtener $\mathcal{C}^{\lambda, si}(\Omega)$. Puesto que para obtener el máximo conjunto contractivo tuvimos que iterar 6 veces, observamos que algunas zonas de la región de factibilidad se encuentran fuera del máximo conjunto contractivo. Esto significa que si bien los $N=3$ siguientes pasos del modelo de predicción cumplirán las restricciones Ω , los siguientes pasos no tienen porqué cumplirlas. En la Ilustración 5-7 se muestra este ejemplo.

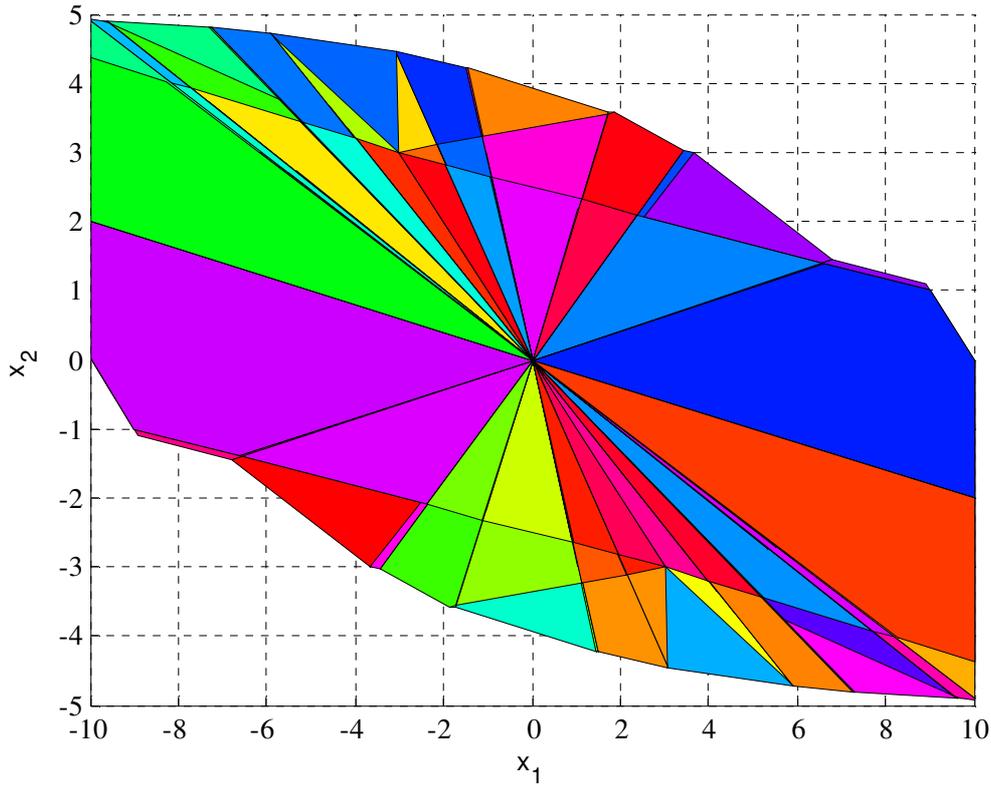


Ilustración 5-7: Región de factibilidad con N=3

5.6 ÍNDICE DE COSTE Y OPTIMIZADOR

En esta sección se discutirá otro de los componentes básicos del control predictivo: el criterio de decisión que sigue el controlador predictivo para obtener la acción de control que se rige por un proceso de optimización.

Siguiendo el planteamiento del problema definido en la sección 5.1, el índice de coste ideal sería un índice de coste infinito y cuadrático de la forma:

$$J_{\infty} = \sum_{q=0}^{\infty} (x_{k+q}^T Q x_{k+q} + u_{k+q}^T H u_{k+q}) \quad (5.250)$$

Pero como esta función no es tratable numéricamente por tener un horizonte de predicción infinito, vamos a introducir una función de coste con horizonte finito

$$J_N = \sum_{q=0}^{N-1} (x_{k+q}^T Q x_{k+q} + u_{k+q}^T H u_{k+q}) + x_{k+N}^T P x_{k+N} \quad (5.251)$$

que acote a la función de coste óptima ($J_{\infty} \leq J_N$) a la vez que se aproxime lo más posible a ésta. En este sentido, la matriz P debe ser tal que

$$\sum_{q=N}^{\infty} (x_{k+q}^T Q x_{k+q} + u_{k+q}^T H u_{k+q}) \leq x_{k+N}^T P x_{k+N} \quad (5.252)$$

Para obtener P , hemos recurrido a un controlador terminal de tipo PDC que garantice la estabilidad minimizando índice de coste garantizado. Así, una vez el estado del modelo se encuentre dentro de la región de validez del controlador PDC, el coste de la trayectoria del modelo hasta el origen estará acotado por $x_{k+N}^T P x_{k+N}$, como refleja la ecuación (5.255).

En cuanto al tipo de optimizador, un primer planteamiento consiste en usar un optimizador que obtenga una solución factible de la forma

$$\min_{\bar{u}} \max_{\mu \in \Delta_r} J_N(\bar{u}, \mu) \quad (5.253)$$

Un optimizador de este tipo persigue obtener la secuencia \bar{u} que minimice el valor de una función de coste objetivo $J(\bar{u}, \mu)$ para los valores de función de pertenencia μ más desfavorables.

Puesto que el método Min Max es un proceso costoso computacionalmente y además sólo obtiene el mínimo para la función de pertenencia μ más desfavorable, vamos a descartarlo para esta tesis.

Otra forma de proceder que se denota como QP secuencial (SQP), consiste en linealizar un modelo de predicción sobre el que aplicar restricciones lineales y un índice de coste cuadrático, con el que resolver de forma iterativa un problema de optimización cuadrática. Una vez el algoritmo iterativo ha convergido a una solución óptima que minimiza el índice de coste, la estabilidad del modelo está garantizada.

Los algoritmos QP son una herramienta muy útil para resolver problemas de optimización, debido a que son poco costosos computacionalmente, y permiten el tratamiento de funciones de coste cuadráticas.

Esta forma de proceder presenta dos inconvenientes importantes:

- El problema SQP es no-convexo, dando lugar a soluciones sub-óptimas, puesto que trabaja con linealizaciones del coste y de las restricciones.
- La estabilidad del modelo viene condicionada por un tiempo de muestreo largo que permita completar el cálculo del procedimiento secuencial.
- La región de factibilidad no es garantista.

El planteamiento que proponemos de optimización es utilizar un QP que minimice

$$J_N = \sum_{q=0}^{N-1} (x_{k+q}^T Q x_{k+q} + u_{k+q}^T H u_{k+q}) + x_{k+N}^T P x_{k+N}$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{cases} V(x_{k+1}) < \lambda \cdot V(x_k) \\ (x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall q = 1 \dots N \\ x_{k+N} \in \mathbb{T} \end{cases} \quad (5.254)$$

De esta forma, la formulación del problema de optimización implica la estabilidad del modelo, así como la factibilidad de las soluciones y la convergencia en N pasos al conjunto terminal.

Puesto que el criterio de optimización viene expresado como una función de coste dependiente de los estados y entradas presentes y futuros, tendremos que recurrir a algún tipo de modelo de predicción para poder estimar el coste de la evolución temporal del modelo.

Evidentemente, el modelo de predicción borroso exacto, al ser en general no lineal, no será válido para plantear un problema de optimización cuadrático QP, por lo tanto recurriremos a alguno de los modelos de predicción lineal expuestos en la sección 5.3.

En cuanto a la acción de control \bar{u}^0 , a partir de la cual vamos a linealizar, podemos optar por las siguientes opciones:

- darle un valor arbitrario (por ejemplo, un vector de ceros $\bar{u}^0 = [0 \dots 0]^T$).
- resolver previamente otro problema de optimización que nos estime \bar{u}^0 .
- recurrir al resultado obtenido en el problema de optimización del muestreo anterior, desplazando la solución una posición.

En caso de disponer un modelo de predicción por identificación experimental, podremos estimar los estados futuros a partir únicamente del estado actual, sin necesidad de linealizar. Sin embargo, en la mayoría de los procesos, no disponemos de un modelo experimental de predicción fiable, por lo que tendremos que recurrir a cualquiera de los otros modelos linealizados. También hay que destacar que no dejan de ser una predicción linealizada del modelo no lineal exacto, y por tanto una aproximación del coste real de la trayectoria real del modelo.

Según el modelo de predicción que utilicemos, tendremos una formulación diferente de la función de coste objetivo.

5.6.1 MODELO DE PREDICCIÓN LINEALIZADO EN BUCLE ABIERTO

Para el modelo de predicción linealizado en bucle abierto, el modelo de predicción estimará, para un estado inicial conocido x_k y una secuencia de control estimada $\bar{u}^0 = [u_k^0, u_{k+1}^0, \dots, u_{k+N-1}^0]^T$, una función lineal de predicción de los estados futuros $\hat{x} = [\hat{x}_{k+1} \dots \hat{x}_{k+N}]^T$ del modelo en los N siguientes pasos.

$$\hat{x} = \hat{F}(x_k, \bar{u}) = \theta^0 \cdot x_k + \Gamma^0 \cdot \bar{u} \quad (5.255)$$

Con θ^0 y Γ^0 definidas en la sección 5.3.3

Con estos estados futuros, proponemos un planteamiento inicial donde la función objetivo tiene la siguiente forma lineal:

$$\hat{J} = \sum_{q=0}^{N-1} (\hat{x}_{k+q}^T Q \hat{x}_{k+q} + u_{k+q-1}^T H u_{k+q-1}) + (\hat{x}_{k+N}^T P \hat{x}_{k+N} + u_{k+N-1}^T H u_{k+N-1}) \quad (5.256)$$

Este índice de coste utiliza la estimación de los N siguientes estados futuros, a partir de la linealización del modelo de predicción en bucle abierto. De forma matricial lo expresamos como:

$$\hat{J} = (\theta^0 x_k)^T \bar{Q} (\theta^0 x_k) + (\theta^0 x_k)^T \bar{Q} (\Gamma^0 \bar{u}) + (\Gamma^0 \bar{u})^T \bar{Q} (\theta^0 x_k) + (\Gamma^0 \bar{u})^T \bar{Q} (\Gamma^0 \bar{u}) + \bar{u}^T \bar{H} \bar{u} \quad (5.257)$$

Con \bar{Q} una matriz diagonal de N matrices Q y una matriz P en su esquina inferior derecha.

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P \end{pmatrix}_{N+1} \quad (5.258)$$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} H & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H \end{pmatrix}_{N+1} \quad (5.259)$$

Desarrollando (5.257), y puesto que las variables de decisión son las acciones de control \bar{u} , eliminamos los términos que no contienen \bar{u} , y resumimos la función de coste estimada como:

$$\hat{J} = \left(2x_k^T \theta^{0T} \bar{Q} \Gamma^0 \right) \bar{u} + \bar{u}^T \left(\Gamma^{0T} \bar{Q} \Gamma^0 + \bar{H} \right) \bar{u} \quad (5.260)$$

5.6.2 MODELO DE PREDICCIÓN LINEALIZADO CON ACCIÓN DE CONTROL BORROSA

Para el modelo de predicción en bucle abierto con acción de control borrosa, la formulación es muy similar, salvo que no sólo tenemos que estimar los estados futuros, sino también las acciones de control.

$$\hat{x} = \hat{F}(x_k, \bar{U}) = \tilde{\theta}^0 \cdot x_k + \tilde{\Gamma}^0 \cdot \bar{U} \quad (5.261)$$

$$\hat{u} = \hat{F}_u(x_k, \bar{U}) = \bar{M}^0 \cdot \bar{U} \quad (5.262)$$

Con $\tilde{\theta}^0$ y $\tilde{\Gamma}^0$ definidas en la sección 5.3.2, y

$$\bar{M}^0 = \begin{pmatrix} \bar{\mu}(x_k^0)^T & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{\mu}(x_{k+N-1}^0)^T \end{pmatrix} \quad (5.263)$$

$$\bar{\mu}(x_{k+q}^0) = \begin{pmatrix} \mu_1(x_{k+q}^0) \\ \mu_2(x_{k+q}^0) \\ \vdots \\ \mu_r(x_{k+q}^0) \end{pmatrix} \quad (5.264)$$

El índice de coste se representa matricialmente como:

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \hat{x}^T Q \hat{x} + \hat{u}^T H \hat{u} = \\ &= \left(\tilde{\theta}^0 x_k + \tilde{\Gamma}^0 \bar{U} \right)^T \bar{Q} \left(\tilde{\theta}^0 x_k + \tilde{\Gamma}^0 \bar{U} \right) + \left(\bar{M}^0 \bar{U} \right)^T \bar{H} \left(\bar{M}^0 \bar{U} \right) \end{aligned} \quad (5.265)$$

Tras eliminar los términos que no dependen de las variables de decisión, y el criterio a minimizar se expresa como

$$\hat{J}(\bar{U}) = \left(2x_k^T \tilde{\theta}^{0T} \bar{Q} \tilde{\Gamma}^0 \right) \bar{U} + \bar{U}^T \left(\tilde{\Gamma}^{0T} \bar{Q} \tilde{\Gamma}^0 + \bar{M}^{0T} \bar{H} \bar{M}^0 \right) \bar{U} \quad (5.266)$$

5.6.3 MODELO DE PREDICCIÓN LINEALIZADO EN BUCLE CERRADO

Para el modelo de predicción en bucle cerrado,

$$\hat{x} = \tilde{\theta}_{bc}^0 \cdot x_k + \tilde{\Gamma}_{bc}^0 \cdot \bar{V} \quad (5.267)$$

$$\hat{u} = \bar{F}^0 \cdot x_k + \bar{M}^0 \cdot \bar{V} \quad (5.268)$$

Con $\bar{\theta}_{bc}^0$, $\bar{\Gamma}_{bc}^0$, \bar{M}^0 definidas en 5.3.2 y

$$\bar{F}^0 = (F(x_k^0) \quad \dots \quad F(x_{k+N-1}^0))^T \quad (5.269)$$

El índice de coste se representa matricialmente como:

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \hat{x}^T Q \hat{x} + \hat{u}^T H \hat{u} = \\ &= (\bar{\theta}_{bc}^0 x_k + \bar{\Gamma}_{bc}^0 \bar{V})^T \bar{Q} (\bar{\theta}_{bc}^0 x_k + \bar{\Gamma}_{bc}^0 \bar{V}) + (\bar{F}^0 x_k + \bar{M}^0 \bar{V})^T \bar{H} (\bar{F}^0 x_k + \bar{M}^0 \bar{V}) \end{aligned} \quad (5.270)$$

Tras eliminar los términos que no dependen de las variables de decisión, y el criterio a minimizar se expresa como

$$\hat{J}(\bar{V}) = (2x_k^T \bar{\theta}_{bc}^0 \bar{Q} \bar{\Gamma}_{bc}^0 + 2x_k^T \bar{F}^0 \bar{H} \bar{M}^0) \bar{V} + \bar{V}^T (\bar{\Gamma}_{bc}^0 \bar{Q} \bar{\Gamma}_{bc}^0 + \bar{M}^0 \bar{H} \bar{M}^0) \bar{V} \quad (5.271)$$

5.6.4 ALGORITMOS SECUENCIALES

Como hemos comentado al principio de esta sección 5.6, la solución de un QP es la solución óptima para un modelo de predicción lineal, el cual no deja de ser una aproximación del modelo de predicción no lineal original. Así, una estrategia frecuente en el control predictivo no lineal consiste en utilizar la solución obtenida del optimizador para volver a linealizar y volver a ejecutar el optimizador. Este proceso secuencial concluye cuando la solución obtenida en la última ejecución del optimizador coincide con la solución anterior.

Los algoritmos secuenciales suelen basar la estabilidad del modelo en la convergencia del problema de optimización, lo cual puede ser un problema puesto que estamos ejecutando este algoritmo en línea, y el tiempo de ejecución puede superar el tiempo de muestreo. Sin embargo, en nuestro caso, como la estabilidad ya está garantizada mediante los conjuntos contractivos, no es necesario que el algoritmo converja.

Aún así, una vez se ha realizado una primera ejecución del optimizador, y si todavía resta tiempo de ejecución hasta el siguiente muestreo, es aconsejable continuar el proceso secuencial antes descrito, con el fin de aproximar la solución óptima al óptimo para el modelo borroso original. Así, si el procedimiento no ha concluido antes del periodo de tiempo que tiene el optimizador en línea para calcular la siguiente acción de control, nos quedaremos con la última acción de control calculada en la última iteración.

Nótese que no necesitamos que el algoritmo concluya para garantizar estabilidad, y esta viene garantizada por la condición

$$V(x_{k+1}) < \lambda \cdot V(x_k) \quad (5.272)$$

5.6.4.1 Modelo de predicción borroso

En el caso de usar un método secuencial para el modelo de predicción borroso lineal en bucle abierto de la sección 5.3.1, el proceso consiste en:

Algoritmo 5.1

- 1) Sea $\bar{u}^0 = [u_k^0 \dots u_{k+N-1}^0]^T$ y un punto inicial x_k .
- 2) Obtener la predicción exacta $x_{k+q}^0 = \sum_{i=1}^q \mu_i(x_{k+q-1}^0)(A_i x_{k+q-1}^0 + B_i u_{k+q-1}^0)$ $q = 1 \dots N$
- 3) Resolver un QP, donde obtenemos $\bar{u} = [u_k \dots u_{k+N-1}]^T$.
- 4) Mientras $[u_k \dots u_{k+N-1}]^T \neq \bar{u}^0$, hacer $\bar{u}^0 = [u_k \dots u_{k+N-1}]^T$ y volver al paso 2)

5.6.4.2 Modelo de predicción de Taylor

En el caso de usar el modelo de Taylor, la secuencia de acciones de control $\{u_k\}$ nos sirve como punto donde volver a linealizar $\bar{u}^0 = [u_k \dots u_{k+N-1}]^T$.

El algoritmo secuencial propuesto sería el siguiente:

Algoritmo 5.2

- 1) Sea $\bar{u}^0 = [u_k^0 \dots u_{k+N-1}^0]^T$ y un punto inicial x_k .
- 2) Linealizar $F(x_k, \bar{u})$ en $\bar{u}_0 \rightarrow \nabla F(x_k, \bar{u}^0)$
- 3) Resolver el QP, donde obtenemos \bar{u} .
- 4) Mientras $\bar{u} \neq \bar{u}^0$, hacer $\bar{u}^0 = \bar{u}$ y volver al paso 2)

donde $\nabla F(x_k, \bar{u}^0)$ es el gradiente de $F(x_k, \bar{u}^0)$, como se explica en la sección 5.3.4

Nótese que el modelo de predicción de Taylor, necesita un valor de u_{k+N-1}^0 para realizar la linealización, así, asignamos un valor arbitrario u_{arb} a u_{k+N-1}^0 , es decir:

$$[u_k^0 \dots u_{k+N-1}^0]^T = [u_{k+1}, \dots, u_{k+N-2}, u_{arb}]^T \quad (5.273)$$

5.7 SÍNTESIS DE SOLUCIONES

Tras haber presentado en las secciones precedentes algunas de las distintas casuísticas que permiten plantear los fundamentos de cualquier controlador predictivo, esto es:

- Un modelo de predicción
- Unas restricciones sobre los estados, entradas y/o salidas
- Un criterio de decisión
- Un horizonte móvil de aplicación

vamos a justificar la técnica más adecuada desde nuestro punto de vista.

Queremos que el controlador en línea utilice en cada muestreo un algoritmo de optimización de tipo QP. Así, las restricciones deberán ser lineales y el criterio de decisión cuadrático.

El modelo de predicción escogido se basa en el modelo borroso en bucle cerrado (5.86), cuya acción de control es de tipo borrosa con realimentación de estados (5.85). Por su estructura con doble sumatorio borroso, podremos aplicar los principios de copositividad de Polya para relajar las condiciones de las restricciones, dando lugar al modelo de predicción borroso expandido Polya (5.95).

Por otro lado, vamos a contemplar una restricción de estados terminal con la que acotar el índice de coste infinito, basado en una ley de control terminal de tipo PDC. Las ganancias F_i de este control terminal van a ser también utilizadas como ganancias del modelo de predicción en bucle cerrado. El diseño de las ganancias se realiza mediante técnicas LMI's de diseño para un controlador estable que minimice el coste garantizado (5.108).

Las restricciones impuestas al optimizador en línea servirán para cumplir ciertos criterios de diseño. Estas restricciones queremos que sean lineales y que garanticen que la solución del optimizador aplicada al modelo borroso exacto cumple con las restricciones impuestas.

La primera restricción asegura la estabilidad asintótica y se resume en asegurar que $V(x_{k+1}) < \lambda \cdot V(x_k)$ con cierto escalar $0 < \lambda < 1$ que define la tasa de decrecimiento. La función $V(x) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \max_l (L_l \cdot x)\}$ es una función de Lyapunov politópica (y por tanto lineal). Esta función se obtiene a partir de la mejor aproximación interior politópica del máximo conjunto contractivo bajo control en Ω , expresado

como $\tilde{C}^{\lambda, \infty, d}(\Omega)$. En este conjunto, para todos los estados existe una acción de control factible que hace que el modelo sea asintóticamente estable. Como se conoce el estado actual x_k , la restricción será exacta.

La segunda restricción se refiere a la factibilidad de las soluciones dentro del horizonte de predicción finito, y se resume como $(x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall q = 1 \dots N$. En este caso recurriremos a nuestro modelo de predicción y plantearemos las restricciones únicamente sobre los vértices, dando lugar a un conjunto de condiciones suficientes.

La tercera restricción hace referencia a que la trayectoria del modelo converja al conjunto terminal \mathbb{T} en el horizonte de predicción N , expresado como $x_N \in \mathbb{T}$. Este conjunto terminal se obtiene a priori a partir de la mejor aproximación interior politópica del máximo conjunto invariante del modelo con la ley de control PDC diseñada. En esta restricción se usaremos el mismo modelo de predicción que en la segunda restricción, y se aplicará sobre sus vértices.

En cuanto al criterio de decisión, aplicaremos el índice de coste finito cuadrático (5.251). La cota del coste de la cola viene garantizada por las condiciones de diseño del control terminal PDC, y de su región de validez (que conduce a la región terminal). Puesto que los estados futuros son desconocidos y difíciles de computar de forma exacta, recurrimos al modelo de predicción linealizado (5.112), lo que conduce a una estimación de dicho índice de coste.

Hay que resaltar que aunque el índice de coste sea aproximado, la solución aplicada al modelo borroso exacto cumplirá las condiciones de diseño, esto es, que sea asintóticamente estable, factible y convergente a \mathbb{T} en N pasos.

Opcionalmente, proponemos utilizar las soluciones del optimizador para volver a linealizar y ejecutar el optimizador, bien hasta que converja, o bien hasta que se agote el tiempo entre muestreos. De la última solución obtenida se calcula la secuencia de acciones de control $\{u_k \dots u_{k+N-1}\}$. Y siguiendo la filosofía del horizonte móvil, se aplicará solo la primera acción de control.

A continuación pasamos a detallar cada uno de los componentes del algoritmo propuesto.

5.7.1 LEY DE CONTROL TERMINAL Y EN BUCLE CERRADO

El primer paso consiste en obtener las ganancias de tipo PDC de la acción de control terminal

$$u = h(x) = \sum_{j=1}^r \mu_j(x) (F_j x) \quad (5.274)$$

para que estabilice asintóticamente el modelo y minimice el coste infinito garantizado

$$J_\infty = \sum_{q=0}^{\infty} (x_{k+q}^T Q x_{k+q} + u_{k+q}^T H u_{k+q}) \quad (5.275)$$

Esto se consigue resolviendo el siguiente problema de optimización LMI:

$$\begin{cases} \min: & -\vartheta \\ \text{sujeto a:} & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j Q_{ij} > 0 \\ & X > \vartheta \end{cases} \quad (5.276)$$

con

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} X & (A_i X + B_i M_j)^T & X & M_j^T \\ A_i X + B_i M_j & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ M_j & 0 & 0 & H^{-1} \end{pmatrix}$$

Con X simétrica y definida positiva. El cual no es directamente una LMI, pero puede ser convertida mediante cualquier método que garantice la copositividad del problema.

De la solución de éste, se obtienen las ganancias del PDC como

$$F_j = X M_j \quad (5.277)$$

y la cota del coste terminal $J_{N \rightarrow \infty} \leq x_N^T P x_N$, con $P = X^{-1}$.

La región terminal \mathbb{T} coincide con la región de factibilidad probable de nuestro problema de optimización LMI, esto es, la máxima región politópica donde el control PDC es aplicable, y la calcularemos como la mejor aproximación interior politópica del máximo conjunto invariante en Ω , con acción de control PDC, mediante el Algoritmo 5.3.

Primeramente, puesto que el espacio de restricciones viene representado como un conjunto no lineal, y por tanto, no-politópico

$$\Omega^h = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \left(R + S \sum_{i=1}^r \mu_i(x_k) F_i \right) x + s < 0 \right\} \quad (5.278)$$

obtenemos mediante el siguiente algoritmo 5.3, la siguiente aproximación interior politópica, válida para cualquier realización de μ_i

$$\tilde{\Omega}^h = \{ x \in \mathbb{R}^n \setminus (R + S F_i) x + s < 0 \forall i \} \quad (5.279)$$

que por simplicidad representamos como

$$\tilde{\Omega}^h = \{ x \in \mathbb{R}^n \setminus R^{s_i} x + s^{s_i} < 0 \forall i \} \quad (5.280)$$

Algoritmo 5.3

- 1) Hacer $i = 0$, $\mathbb{K}_1 = \emptyset$, $\mathbb{K}_0 = \Omega^h$.
- 2) Mientras $\mathbb{K}_{i+1} \neq \mathbb{K}_i$ repetir
 - a) $\mathbb{K}_{i+1} = (\tilde{Q}^d(\mathbb{K}_i) \cap \Omega^h)$
 - b) $i = i + 1$
- 3) $\tilde{\mathcal{O}}^{h,d}(\Omega) = \mathbb{K}_i$.

con

$$\tilde{Q}^d(\Omega) = \{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{Q}_i > 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}_{p+d}^+ \} \quad (5.281)$$

$$\tilde{Q}_i = \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} \left(R^{s_i} \left((A_{j_1} + B_{j_1} F_{j_2}) x \right) + s^{s_i} \right) < 0 \quad (5.282)$$

Este conjunto invariante nos define el conjunto terminal, que por ser politópico, se puede expresar como:

$$\mathbb{T} = \tilde{\mathcal{O}}^{h,d}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus Tx + r < 0\} \quad (5.283)$$

En cuanto a la acción de control en línea que vamos a utilizar, será de la forma

$$u_k = \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k)(F_j x_k + v_{k,j}) \quad (5.284)$$

con las mismas ganancias que las utilizadas en la ley de control PDC, y las mismas funciones de pertenencia que las utilizadas en el modelo borroso TS. A los términos $v_{k,j}$ los denominamos vértices de la acción de control.

5.7.2 CONDICIÓN DE ESTABILIDAD

La condición de estabilidad del modelo en bucle cerrado se garantiza por cumplir

$$V(x_{k+1}) < \lambda \cdot V(x_k) \quad (5.285)$$

Con $0 < \lambda < 1$

Para lo cual, calculamos primero el máximo conjunto contractivo. Éste lo obtenemos de fijar un índice de contracción $0 < \lambda < 1$ y aplicar el siguiente algoritmo 5.4. En la sección 5.2 se explica con más detalle el procedimiento.

Algoritmo 5.4

- 1) Hacer $i = 0$, $\mathbb{K}_1 = \emptyset$, $\mathbb{K}_0 = \text{proy}_x(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n)$.
- 2) Mientras $\mathbb{K}_{i+1} \neq \mathbb{K}_i$ repetir
 - a) $\mathbb{K}_{i+1} = \text{proy}_x(\tilde{\mathcal{Q}}^d(\lambda \cdot \mathbb{K}_i) \cap \Omega)$
 - b) $i = i + 1$
- 3) $\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega) = \mathbb{K}_i$.

con

$$\tilde{\mathcal{Q}}^d(\Omega) = \{(x, v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}^{n+r \cdot m} \setminus \tilde{Q}_i > 0 \quad \forall i \in \mathbb{I}_{p+d}^+\} \quad (5.286)$$

$$\tilde{Q}_i = \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} \left(R \left((A_{j_1} + B_{j_1} F_{j_2})x + B_{j_1} v_{j_2} \right) + S v_{j_2} + r \right) < 0 \quad (5.287)$$

Si se expresa el conjunto politópico contractivo como un conjunto de n_v restricciones lineales

$$\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus L_j x < 1; j = 1 \dots n_v\} \quad (5.288)$$

se obtiene la función de Lyapunov

$$V(x) = \max_j (L_j \cdot x) \quad (5.289)$$

Puesto que el objetivo del algoritmo es obtener el conjunto contractivo más grande posible, que nos permita maximizar la región donde podamos garantizar la existencia de solución factible que establezca asintóticamente el modelo, parece lógico tomar un índice de contracción λ muy próximo a 1. Nótese que este índice de contracción λ no será la tasa de decrecimiento real del modelo.

5.7.3 RESTRICCIONES SOBRE LOS ESTADOS Y ACCIONES DE CONTROL FUTURAS

A continuación vamos a desarrollar las restricciones de diseño.

En cuanto a la restricción de estabilidad, como podemos medir el estado actual x_k , el valor de la función de Lyapunov $V(x_k) = \max_j(L_j \cdot x_k)$ es conocida, al igual que el índice de contracción λ .

Por otra parte, como conocemos el valor de las funciones de pertenencia en x_k

$$V(x_{k+1}) = \max_j(L_j \cdot x_{k+1}) = \max_j(L_j \cdot (G(x_k)x_k + \bar{B}(x_k)v_k)) \quad (5.290)$$

Con

$$G(x_k) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) (A_i + B_i F_j) \quad (5.291)$$

$$\bar{B}(x_k) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k) \mu_i(x_k) B_i e_j \quad (5.292)$$

$$\bar{v}_k = \begin{pmatrix} v_{k,1} \\ v_{k,2} \\ \vdots \\ v_{k,r} \end{pmatrix} \quad (5.293)$$

Resumiendo, la condición de estabilidad asintótica $V(x_{k+1}) < \lambda \cdot V(x_k)$ se formula como un conjunto de restricciones lineales

$$L_j \bar{B}(x_k) \bar{v}_k < \lambda \cdot V(x_k) - L_j(G(x_k))x_k \quad \forall j \quad (5.294)$$

En cuanto a las restricciones sobre los estados y acciones futuras, aplicaremos:

$$(x_{k+q}, v_{k+q,1}, \dots, v_{k+q,r}) \in \Omega_{bc}^{si} \quad q = 0 \dots N \quad (5.295)$$

Donde Ω_{bc}^{si} se formula en función de $(x_{k+q}, v_{k+q,1}, \dots, v_{k+q,r})$ como

$$\Omega_{bc}^{si} = \left\{ (x, v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}^{n+r \cdot m} \setminus R_{bc}^{si} x + S_{bc}^{si} (v_{k,1} \dots v_{k,r})^T + s_{bc}^{si} < 0 \right\} \quad (5.296)$$

De forma matricial, expresamos esta restricción como

$$\left[\bar{R}_{bc} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{I}_{bc}' & 0 \end{pmatrix} + \tilde{S}_{bc} \right] \begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \vdots \\ \bar{v}_{k+N} \end{pmatrix} < -\bar{R}_{bc} \begin{pmatrix} I \\ \tilde{\theta}_{bc}' \end{pmatrix} x_k - \tilde{s}_{bc} \quad (5.297)$$

Con

$$\tilde{R}_{bc} = \begin{pmatrix} R_{bc}^{si} & \dots & 0 \\ \vdots & R_{bc}^{si} & \\ 0 & \dots & R_{bc}^{si} \end{pmatrix} \quad (5.298)$$

$$\tilde{S}_{bc} = \begin{pmatrix} S_{bc}^{si} & \dots & 0 \\ \vdots & S_{bc,c^0}^{si} & \\ 0 & \dots & S_{bc,c^{(N-1)}}^{si} \end{pmatrix} \quad (5.299)$$

$$\tilde{s}_{bc} = \begin{pmatrix} S_{bc}^{si} \\ S_{bc,c^0}^{si} \\ \vdots \\ S_{bc,c^{(N-1)}}^{si} \end{pmatrix} \quad (5.300)$$

$$\tilde{\theta}_{bc}' = \begin{pmatrix} G(x_k) \\ \tilde{G} \otimes G(x_k) \\ \vdots \\ \tilde{G} \otimes \tilde{G} \dots \tilde{G} \otimes G(x_k) \end{pmatrix} \quad (5.301)$$

$$\tilde{I}_{bc}' = \begin{pmatrix} \bar{B}(x_k) & 0 & 0 & & \\ \tilde{G} \otimes \bar{B}(x_k) & \tilde{B} & 0 & \dots & \\ \tilde{G} \otimes \tilde{G} \otimes \bar{B}(x_k) & \tilde{G} \otimes \tilde{B} & \tilde{B} \otimes \tilde{I} & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \tilde{G} \otimes \tilde{G} \dots \tilde{G} \otimes \bar{B}(x_k) & \dots & & \dots & \tilde{B} \otimes \tilde{I} \dots \otimes \tilde{I} \end{pmatrix} \quad (5.302)$$

$$G(x_k) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_k) \mu_j(x_k) (A_i + B_i F_j) \quad (5.303)$$

$$\bar{B}(x_k) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k) \mu_i(x_k) B_i e_j \quad (5.304)$$

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_{i^1}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^1)} (A_{j_1} + B_{j_1} F_{j_2}) \\ \frac{1}{n_{i^2}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^2)} (A_{j_1} + B_{j_1} F_{j_2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{n_{i^c}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^c)} (A_{j_1} + B_{j_1} F_{j_2}) \end{pmatrix} \quad (5.305)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_{i^1}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^1)} B_{j_1} e_{j_2} \\ \frac{1}{n_{i^2}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^2)} B_{j_1} e_{j_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n_{i^c}} \sum_{j \in \mathcal{P}(i^c)} B_{j_1} e_{j_2} \end{pmatrix} \quad (5.306)$$

En cuanto a la restricción terminal, y puesto que conocemos el estado inicial x_k , se expresa como:

$$\bar{T} \left((\tilde{G} \otimes \tilde{G} \dots \otimes \tilde{G}) \cdot x_k + (\tilde{G} \otimes \dots \otimes \tilde{G} \otimes \bar{B}(x_k) \dots \tilde{B} \otimes \tilde{I} \dots \otimes \tilde{I}) \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \vdots \\ \bar{v}_{k+N-1} \end{pmatrix} \right) + \bar{r} < 0 \quad (5.307)$$

con

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T \end{pmatrix} \quad (5.308)$$

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} r \\ \vdots \\ r \end{pmatrix} \quad (5.309)$$

donde (T, r) definen las restricciones lineales del politopo

$$\mathbb{T} = \tilde{\mathcal{O}}^{h,d}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Tx + r < 0\} \quad (5.310)$$

5.7.4 CRITERIO DE OPTIMIZACIÓN

El criterio de optimización del QP se basa en minimizar un índice de coste dependiente de los estados y acciones futuras y de un coste terminal.

El valor de los estados y de las acciones futuras se estima mediante la linealización del modelo de predicción en bucle cerrado y se denota respectivamente como \hat{x} y \hat{u} .

$$\hat{J} = \sum_{q=0}^{N-1} (\hat{x}_{k+q}^T Q \hat{x}_{k+q} + \hat{u}_{k+q-1}^T H \hat{u}_{k+q-1}) + (\hat{x}_{k+N}^T P \hat{x}_{k+N} + \hat{u}_{k+N-1}^T H \hat{u}_{k+N-1}) \quad (5.311)$$

$$\hat{x} = \hat{F}_x(x_k, \begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \vdots \\ \bar{v}_{k+N-1} \end{pmatrix}) \quad (5.312)$$

$$\hat{u} = \hat{F}_u(x_k, \begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \vdots \\ \bar{v}_{k+N-1} \end{pmatrix}) \quad (5.313)$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k+N} \end{pmatrix} \quad (5.314)$$

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_k \\ \vdots \\ \hat{u}_{k+N-1} \end{pmatrix} \quad (5.315)$$

Con \hat{F}_x y \hat{F}_u lineales en $\left(x_k, \begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \vdots \\ \bar{v}_{k+N-1} \end{pmatrix} \right)$.

El proceso de obtención de estas funciones lineales es el siguiente:

Dado un punto $(x_k, \bar{v}_k^0 \dots \bar{v}_{k+N-2}^0)$ sobre el que linealizar obtenemos la predicción exacta de los estados $\bar{x}^0 = [x_k^0 \dots x_{k+N-1}^0]^T$ y acciones futuras $\bar{u}^0 = [u_k^0 \dots u_{k+N-1}^0]^T$, tomando $x_k^0 = x_k$ y aplicando las ecuaciones del modelo borroso no lineal, con $q = 0 \dots N - 2$.

$$u_{k+q}^0 = \sum_{j=1}^r \mu_j(x_{k+q}^0) (F_j x_{k+q-1}^0 + v_{k+q,j}^0) \quad (5.316)$$

$$x_{k+q+1}^0 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_{k+q}^0) \mu_j(x_{k+q}^0) (A_i + B_i F_j) x_{k+q}^0 + B_i u_{k+q}^0 \quad (5.317)$$

A partir de esta predicción exacta de estados y acciones futuras, se obtienen los estados y acciones futuras a partir de la linealización del modelo en bucle cerrado como:

$$\hat{x} = \tilde{\Theta}_{bc}^0 \cdot x_k + \tilde{\Gamma}_{bc}^0 \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \vdots \\ \bar{v}_{k+N-1} \end{pmatrix} \quad (5.318)$$

$$\hat{u} = \bar{F}^0 \cdot x_k + \bar{M}^0 \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \vdots \\ \bar{v}_{k+N-1} \end{pmatrix} \quad (5.319)$$

con

$$\tilde{\Theta}_{bc}^0 = \begin{pmatrix} G(x_k) \\ G(x_{k+1}^0)G(x_k) \\ \vdots \\ G(x_{k+N-1}^0)G(x_{k+N-2}^0) \dots G(x_k) \end{pmatrix} \quad (5.320)$$

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^0 = \begin{pmatrix} \bar{B}(x_k) & 0 & 0 & 0 \\ G(x_{k+1}^0)\bar{B}(x_k) & \bar{B}(x_{k+1}^0) & 0 & 0 \dots \\ G(x_{k+2}^0)G(x_{k+1}^0)\bar{B}(x_k) & G(x_{k+2}^0)\bar{B}(x_{k+1}^0) & \bar{B}(x_{k+2}^0) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ G(x_{k+N-1}^0) \dots \bar{B}(x_k) & \dots & \dots & \dots \bar{B}(x_{k+N-1}^0) \end{pmatrix} \quad (5.321)$$

$$G(x_{k+q}^0) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_{k+q}^0) \mu_j(x_{k+q}^0) (A_i + B_i F_j) \quad (5.322)$$

$$\bar{B}(x_{k+q}^0) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_j(x_{k+q}^0) \mu_i(x_{k+q}^0) B_i e_j \quad (5.323)$$

$$\bar{F}^0 = (F(x_k^0) \quad \dots \quad F(x_{k+N-1}^0))^T \quad (5.324)$$

$$\bar{M}^0 = \begin{pmatrix} \bar{\mu}(x_k^0)^T & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{\mu}(x_{k+N-1}^0)^T \end{pmatrix} \quad (5.325)$$

$$\bar{\mu}(x_{k+q}^0) = \begin{pmatrix} \mu_1(x_{k+q}^0) \\ \mu_2(x_{k+q}^0) \\ \vdots \\ \mu_r(x_{k+q}^0) \end{pmatrix} \quad (5.326)$$

El índice de coste se representa como:

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \hat{x}^T \bar{Q} \hat{x} + \hat{u}^T \bar{H} \hat{u} \\ &= (\bar{\theta}_{bc}^0 x_k + \bar{\Gamma}_{bc}^0 \bar{V})^T \bar{Q} (\bar{\theta}_{bc}^0 x_k + \bar{\Gamma}_{bc}^0 \bar{V}) + (\bar{F}^0 x_k + \bar{M}^0 \bar{V})^T \bar{H} (\bar{F}^0 x_k + \bar{M}^0 \bar{V}) \end{aligned} \quad (5.327)$$

con

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \vdots \\ \bar{v}_{k+N-1} \end{pmatrix} \quad (5.328)$$

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} Q & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & P \end{pmatrix}_{N+1} \quad (5.329)$$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} H & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H \end{pmatrix}_{N+1} \quad (5.330)$$

Tras eliminar los términos que no dependen de las variables de decisión, el índice de coste a minimizar se expresa como

$$\hat{J}(\bar{V}) = (2x_k^T \bar{\theta}_{bc}^0{}^T \bar{Q} \bar{\Gamma}_{bc}^0 + 2x_k^T \bar{F}^0{}^T \bar{H} \bar{M}^0) \bar{V} + \bar{V}^T (\bar{\Gamma}_{bc}^0{}^T \bar{Q} \bar{\Gamma}_{bc}^0 + \bar{M}^0{}^T \bar{H} \bar{M}^0) \bar{V} \quad (5.331)$$

A continuación, pasamos a describir el procedimiento secuencial de optimización.

Iniciamos el controlador en línea con un punto de linealización arbitrario (x_k, \bar{V}^0) con x_k el estado actual real.

Calculamos las matrices necesarias para resolver el siguiente QP:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min: \quad (\bar{V})^T \left(\bar{F}_{bc}^0 T \bar{Q} \bar{F}_{bc}^0 + \bar{M}^0 T \bar{H} \bar{M}^0 \right) (\bar{V}) + \left(2x_k^T \bar{\theta}_{bc}^0 T \bar{Q} \bar{F}_{bc}^0 + 2x_k^T \bar{F}^0 T \bar{H} \bar{M}^0 \right) (\bar{V}) \\ \text{sujeto a:} \\ \quad L_j \bar{B}(x_k) \bar{v}_k < \lambda \cdot V(x_k) - L_j(G(x_k))x_k \quad \forall j \\ \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{F}_{bc}^0 & 0 \end{pmatrix} + \bar{S}_{bc} \right] \begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \vdots \\ \bar{v}_{k+N} \end{pmatrix} < -\bar{R}_{bc} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\theta}_{bc}^0 \end{pmatrix} x_k - \bar{s} \\ \quad \bar{T} \left(\left(\bar{G} \otimes \bar{G} \dots \otimes \bar{G} \right) \cdot x_k + \left(\bar{G} \otimes \dots \otimes \bar{G} \otimes \bar{B}(x_k) \quad \dots \quad \bar{B} \otimes \bar{I} \dots \otimes \bar{I} \right) \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \vdots \\ \bar{v}_{k+N-1} \end{pmatrix} \right) + \bar{r} < 0 \end{array} \right. \quad (5.332)$$

Donde \bar{V} es la solución del QP, de la cual, siguiendo el principio de horizonte móvil, sólo aplicaremos la primera acción de control.

Puesto que el tiempo de muestreo suele permitir ejecutar más de una optimización QP, una vez obtenida la primera solución para el muestreo actual, iniciaremos un proceso secuencial QP que, o bien concluye cuando la solución coincide con la obtenida en la secuencia anterior, o bien el tiempo de muestreo finaliza, en cuyo caso aplicaremos la última solución obtenida.

Volvemos a destacar que no es necesaria la obtención de una solución exacta para garantizar estabilidad, pues basta con que se cumpla la restricción (5.9).

En el siguiente muestreo, se vuelve a medir el estado actual x_k , que junto con la solución del muestreo anterior desfasada una posición, nos da el punto sobre el que linealizar el modelo $(x_k, v_k^0, v_{k+1}^0, \dots, v_{k+N-2}^0)$ con $(v_k^0, v_{k+1}^0, \dots, v_{k+N-2}^0)^T = (\bar{v}_{k+1}, \dots, \bar{v}_{k+N-1})^T$, y volvemos a repetir el proceso.

5.8 SIMULACIONES

En los siguientes ejemplos se va a seleccionar un modelo borroso TS, sobre el que se va a simular su evolución temporal cuando se le aplica diferentes técnicas de control.

5.8.1 MODELO BORROSO

En este primer ejemplo, el objetivo es mostrar un procedimiento completo desarrollado para cada tipo de modelo de predicción. Hemos seleccionado un modelo borroso TS sin correspondencia con ningún sistema físico real.

Sea un modelo borroso TS de la forma (5.1), con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.333)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5.334)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.335)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (5.336)$$

Las restricciones en (x, u) se definen como en (5.3), con

$$x_{max} = 10 \quad (5.337)$$

$$u_{max} = 3 \quad (5.338)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.339)$$

$$S = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1)^T \quad (5.340)$$

$$s = (x_{max} \ x_{max} \ x_{max} \ x_{max} \ u_{max} \ u_{max})^T \quad (5.341)$$

Y un ratio de convergencia dado “a priori” $\lambda = 0.99$.

Con un índice de coste definido como en la ecuación (5.4), con

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.342)$$

$$H = 1 \quad (5.343)$$

Ahora obtendremos las acciones de control y las trayectorias del modelo aplicando los procedimientos de control descritos para distintos modelos de predicción. Para todos ellos empezaremos con un punto inicial $x_0 = [0, -4.5]^T$ hasta llegar al origen ($x_k^T \cdot x_k < 0.001$).

La primera trayectoria que vamos a computar la obtenemos realizando el procedimiento de control descrito en la sección 4.5. En la Ilustración 5-8 se observa la evolución temporal asociada. Mediante este procedimiento, tanto las restricciones como el índice de coste a minimizar sólo tienen en cuenta el estado inmediatamente posterior, pues carece de modelo de predicción. El procedimiento garantiza estabilidad con un coste computacional muy reducido (las restricciones y la optimización se aplican sólo a un paso), pero obtiene peores resultados que cualquier otro procedimiento que utilice modelo de predicción, y que por tanto tenga en cuenta los N estados siguientes en la optimización.

La segunda trayectoria calculada se obtiene para un procedimiento que utiliza un modelo de predicción en bucle abierto para un horizonte de predicción a $N=3$ pasos. Las restricciones aplicadas a los vértices del modelo de predicción son

$$(x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall q = 0 \dots N; \quad V(x_{k+1}) < \lambda \cdot V(x_k)$$

y en la optimización estimamos el coste utilizando la linealización de este modelo de predicción. Para cada instante de muestreo realizaremos una única optimización, esto es, no aplicaremos ningún algoritmo secuencial. En la Ilustración 5-12 se observa la evolución temporal asociada. Se observa una mejoría importante en el coste de la trayectoria frente al procedimiento anterior, que carece de modelo de predicción.

La tercera trayectoria calculada se obtiene con un procedimiento análogo al anterior, salvo que el modelo de predicción utiliza una acción de control borrosa, esto es $u_k = \sum_{j=1}^r \mu_j(x_k) u_{k,j}$. Así, podremos “relajar” las restricciones aplicándolas a los vértices del modelo de predicción expandido Poly correspondiente, en vez del modelo de predicción original. En la Ilustración 5-13 se observa la evolución temporal asociada. Se observa una ligera mejoría frente a la utilización de una acción de control no borrosa.

La cuarta trayectoria se obtiene con un procedimiento análogo al anterior, pero esta vez con un modelo de predicción en bucle cerrado, con acción de control borrosa y con un horizonte de predicción de $N = 3$ pasos. Las ganancias del modelo de predicción en bucle cerrado se obtienen mediante un problema LMI que minimice el coste garantizado. En la Ilustración 5-14 se observa la evolución temporal asociada. El paradigma en bucle cerrado motiva utilizar este modelo de predicción, con el fin de reducir la incertidumbre del modelo borroso y facilitar la aplicación de las restricciones sobre los nuevos vértices del modelo de predicción, y así facilitar la optimización. Se observa una mejoría importante frente a la no utilización del paradigma en bucle cerrado.

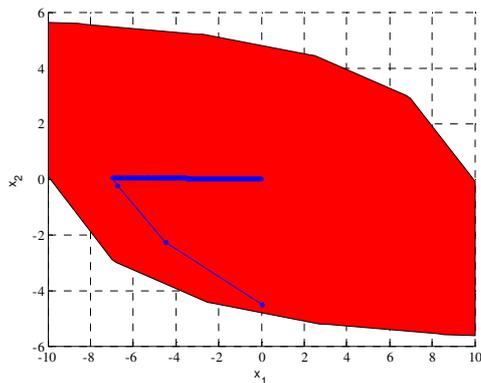


Ilustración 5-8: Evolución sin modelo de predicción

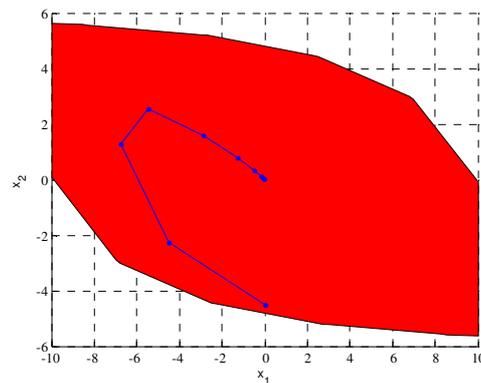


Ilustración 5-9: Evolución temporal en bucle abierto sin acción de control borrosa

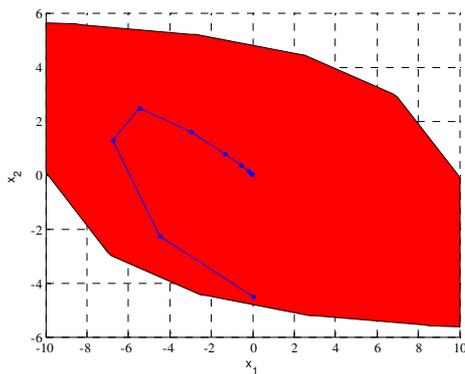


Ilustración 5-10: Evolución temporal en bucle abierto con acción de control borrosa

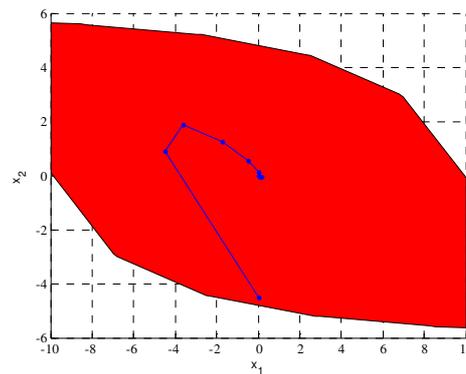


Ilustración 5-11: Evolución temporal en bucle cerrado con acción de control borrosa

Por último, se calcula la trayectoria mediante el procedimiento descrito en la sección 5.7, esto es, utilizando un conjunto terminal, también para un horizonte de predicción $N = 3$ y sin procedimiento secuencial. En la Ilustración 5-14 se observa la evolución temporal asociada, también se han representado además del máximo conjunto contractivo (en azul), el máximo conjunto invariante con ley de control PDC (en verde), y el máximo conjunto estabilizable en N pasos (en rojo).

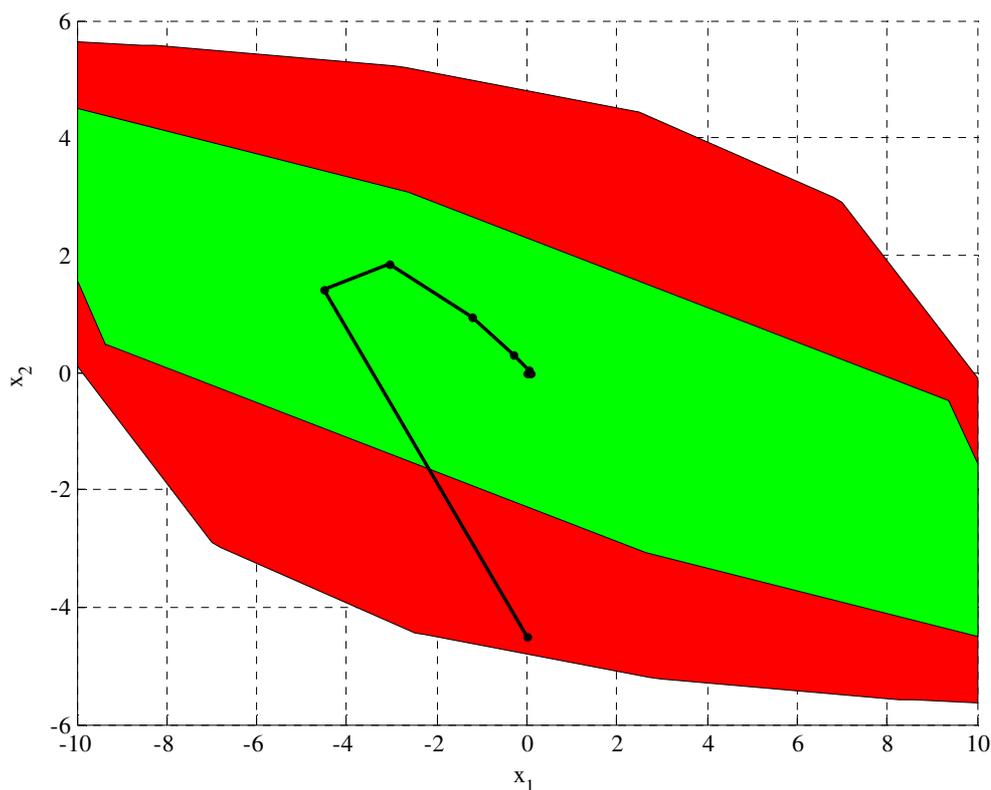


Ilustración 5-12: Evolución temporal en bucle cerrado con conjunto terminal

A continuación se muestra los costes cuadráticos asociados a cada evolución.

Modelo de predicción	Coste cuadrático de la trayectoria
Sin modelo de predicción (1 paso)	2531.7
En bucle abierto sin acción borrosa	147.95
En bucle abierto con acción borrosa	145.08
En bucle cerrado con acción borrosa	70.95
En bucle cerrado con conjunto terminal	68.81

A la vista de los resultados se observa que tanto la utilización de una acción de control borrosa, en bucle cerrado, y con conjunto terminal, mejoran la predicción del modelo, y por tanto la bondad del procedimiento de control predictivo.

5.8.2 PÉNDULO INVERTIDO

En la siguiente simulación vamos a comparar las trayectorias que se obtienen con las técnicas de diseño desarrolladas en el presente capítulo, con las obtenidas con las técnicas clásicas de control borroso.

Sea un modelo de un péndulo invertido (Tanaka & Wang, 2001) como el que se muestra en la figura.

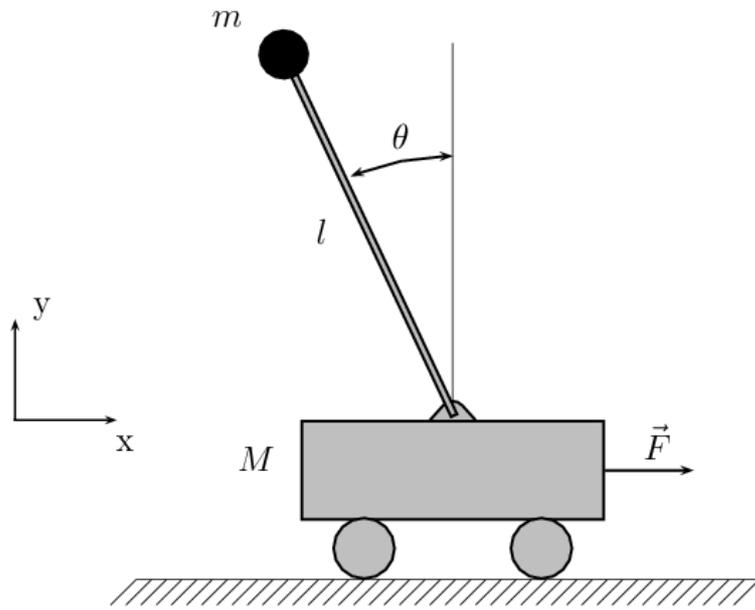


Ilustración 5-16: Esquema físico del péndulo invertido.

Las ecuaciones dinámicas del modelo de un péndulo invertido se definen por:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (5.344)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{g \cdot \sin(x_1(t)) - aml \cdot x_2(t)^2 \cdot \text{sen}(2 \cdot x_2(t))/2 - a \cdot \cos(x_1(t)) \cdot u(t)}{4l/3 - aml \cdot \cos^2(x_1(t))} \quad (5.345)$$

donde $x_1(t) = \theta$ representa la desviación angular respecto a la vertical, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ la gravedad, $m = 2 \text{ kg}$ y $M = 8 \text{ kg}$ son las masas del péndulo y del carro, $l = 0.25 \text{ m}$ es la longitud del péndulo invertido y $u(t) = F$ es la fuerza que ejercemos sobre el carro con la que controlar su evolución.

El modelo borroso lo obtenemos para dos puntos de funcionamiento extremos.

Si $x_1(t) \approx 0$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (5.346)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{gx_1(t) - au(t)}{4l/3 - aml} \quad (5.347)$$

Si $x_1(t) \approx \pm\pi/2$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (5.348)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{2gx_1(t)/\pi - a\beta u(t)}{4l/3 - aml\beta^2} \quad (5.349)$$

con $\beta = \cos(85^\circ)$ y $a = 1/(m + M)$.

Ahora pasamos a discretizar el modelo continuo con un tiempo de discretización $T = 0.01$ segundos.

El modelo borroso TS resultante queda definido por

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1.009 & 0.01 \\ 0.173 & 1.009 \end{pmatrix} \quad (5.350)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -0.0088 \\ -1.7652 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (5.351)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1.005 & 0.01 \\ 0.0937 & 1.005 \end{pmatrix} \quad (5.352)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -0.007 \\ -0.1309 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (5.353)$$

Definimos unas restricciones en (x, u) como en (5.3), con

$$x_{max} = \pi/2 \quad (5.354)$$

$$u_{max} = 800 \quad (5.355)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.356)$$

$$S = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1)^T \quad (5.357)$$

$$s = (x_{max} \ x_{max} \ 10 \ 10 \ u_{max} \ u_{max})^T \quad (5.358)$$

Tomamos un ratio de convergencia “a priori” $\lambda = 0,99$, y un índice de coste definido como en la ecuación (5.4), con

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.359)$$

$$H = 1 \quad (5.360)$$

Iniciaremos la simulación en el punto $x_0 = [1.4, -3.5]^T$.

Con estas premisas, vamos a aplicar el procedimiento descrito en la sección 5.7, y lo vamos a comparar con las técnicas de control LMI para modelos borrosos.

En primer lugar, como solución a comparar, vamos a calcular una ley de control PDC, cuyas ganancias se obtienen a partir de resolver el siguiente problema de optimización convexo, con $F_j = M_j X^{-1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min: \vartheta \\ \text{sujeto a:} \end{array} \left(\begin{array}{cccc} X & G_{ij}^T & X & M_j^T \\ G_{ij} & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ M_j & 0 & 0 & H^{-1} \end{array} \right) > 0 \right. \quad (5.361)$$

$$X < \vartheta$$

$$G_{ij} = \frac{(A_i X + B_i M_j) + (A_j X + B_j M_i)}{2}$$

Tras resolver el problema LMI obtenemos:

$$F_1 = (2115.5 \quad 675.5) \quad (5.362)$$

$$F_2 = (3483.3 \quad 1126.4) \quad (5.363)$$

Con un coste garantizado $J_{N \rightarrow \infty} = x_0^T X^{-1} x_0 = 5.87 \cdot 10^6$

La máxima región de validez de este controlador la obtenemos a partir de resolver el siguiente problema LMI para las siguientes restricciones $\Omega_x = \{x \mid \|a_j^T \cdot x\| < 1\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min: \rho \\ \text{sujeto a:} \end{array} \begin{array}{l} P < \rho \\ \left(\begin{array}{cc} \rho^{-1} & a_j^T \\ a_j & P \end{array} \right) > 0 \quad \forall j \\ \left(\begin{array}{cc} X & G_{ij}^T \\ G_{ij} & X \end{array} \right) > 0 \end{array} \right. \quad (5.364)$$

con

$$a_1 = \left(\frac{\pi}{2} \quad 0 \right)^T \quad (5.365)$$

$$a_2 = F_1^T / u_{max} \quad (5.366)$$

$$a_3 = F_2^T / u_{max} \quad (5.367)$$

Obtenemos

$$P = \begin{pmatrix} 18.9701 & 6.0957 \\ 6.0957 & 2.0923 \end{pmatrix} \quad (5.368)$$

Representamos la región de validez como el máximo equipotencial de Lyapunov

$$\theta = \{a_j^T P^{-1} a_j \leq 1 \ ; \ \forall j\} \quad (5.369)$$

En la Ilustración 5-17 se representa el máximo potencial de Lyapunov como un elipsoide, en azul. También hemos simulado la trayectoria del modelo con esta ley de control PDC teniendo en cuenta la saturación de la acción de control, representada en azul. Como se puede observar, el punto inicial se encuentra fuera de la región elipsoidal, esto es, de la región probable donde esta ley de control garantiza la estabilidad del modelo y el coste máximo garantizado, aun así, esta ley de control consigue que la trayectoria del modelo converja al origen.

Ahora vamos a aplicar el procedimiento descrito en la sección 5.7.

Utilizamos las mismas ganancias tanto para el control terminal como para el control PDC recién calculado. Así, pasamos a calcular primero el máximo conjunto invariante (máxima región de validez) del control terminal, el cual nos define las restricciones terminales \mathbb{T} . Para el cálculo de dicho conjunto utilizamos el proceso iterativo (Algoritmo 5.3) que nos da la aproximación interior politópica para cualquier realización de las funciones de pertenencia con índice Polya $d = 2$.

$$\mathbb{T} = \tilde{\mathcal{O}}^{h,d}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Tx + r < 0\} \quad (5.370)$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0.95149 & 0.30768 \\ -0.95149 & -0.30768 \end{pmatrix} \quad (5.371)$$

$$r = \begin{pmatrix} 1.5708 \\ 1.5708 \\ 0.21852 \\ 0.21852 \end{pmatrix} \quad (5.372)$$

Esta región amplía la región de estabilidad probable para la ley de control PDC que definía el elipsoide (5.369).

Posteriormente, mediante el procedimiento iterativo (Algoritmo 5.4) obtenemos la aproximación interior politópica del máximo conjunto contractivo bajo control, con $\lambda = 0.99$ y $d = 2$, y su función de Lyapunov asociada.

$$\tilde{\mathcal{C}}^{\lambda,d}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid L_j x < 1; j = 1 \dots n_v\} \quad (5.373)$$

$$L = \begin{pmatrix} -1.1827 & -0.3864 \\ 1.1827 & 0.3864 \\ -0.6366 & 0 \\ 0.6366 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.374)$$

En cuanto a las restricciones, impondremos que

- A) $(x_{k+q}, u_{k+q}) \in \Omega \quad \forall q = 0 \dots N - 1$
- B) $V_{k+1} < \lambda \cdot V_k$
- C) $x_{q+N} \in \mathbb{T}$

Estas restricciones las aplicamos a los vértices del modelo expandido Polya, con $d = 2$.

$$\bar{x} = \tilde{M}' \cdot (\tilde{\theta}_{bc}' \cdot x_k + \tilde{f}_{bc}' \cdot \bar{v}) \quad (5.375)$$

Y en cuanto a la estimación del coste, utilizaremos el modelo de predicción linealizado “borroso”.

$$\hat{x} = \tilde{\theta}_{bc}^0 \cdot x_k + \tilde{\Gamma}_{bc}^0 \cdot \bar{V} \quad (5.376)$$

La figuras siguiente muestra sus trayectorias correspondientes para las simulaciones con el controlador borroso PDC (en azul) y con el controlador predictivo (en rojo), así como las regiones invariantes cuadrática (en negro) y politópica (en verde), y la región contractiva bajo control (en cyan).

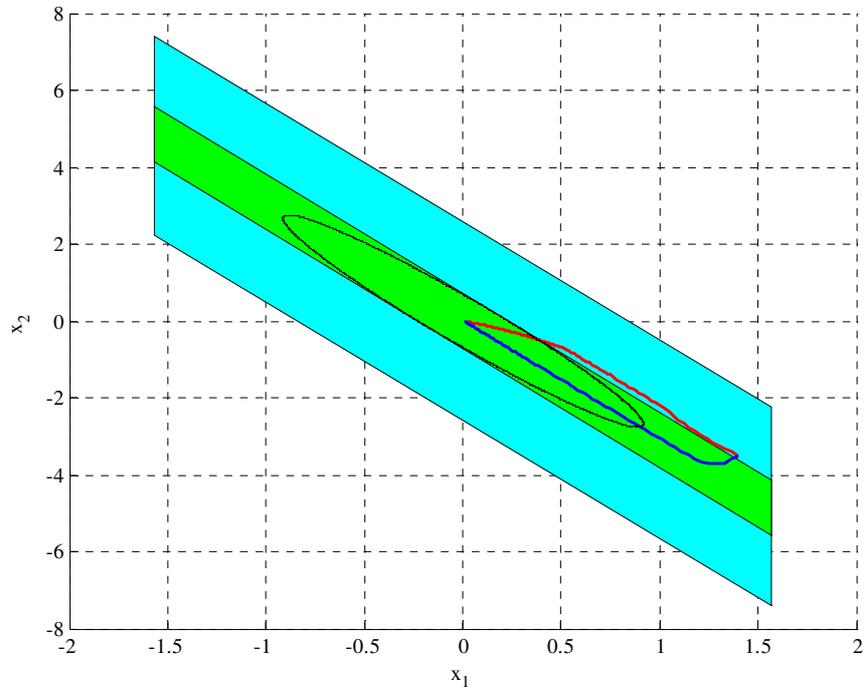


Ilustración 5-17: Evolución temporal del control PDC (en azul) y del predictivo (en negro).

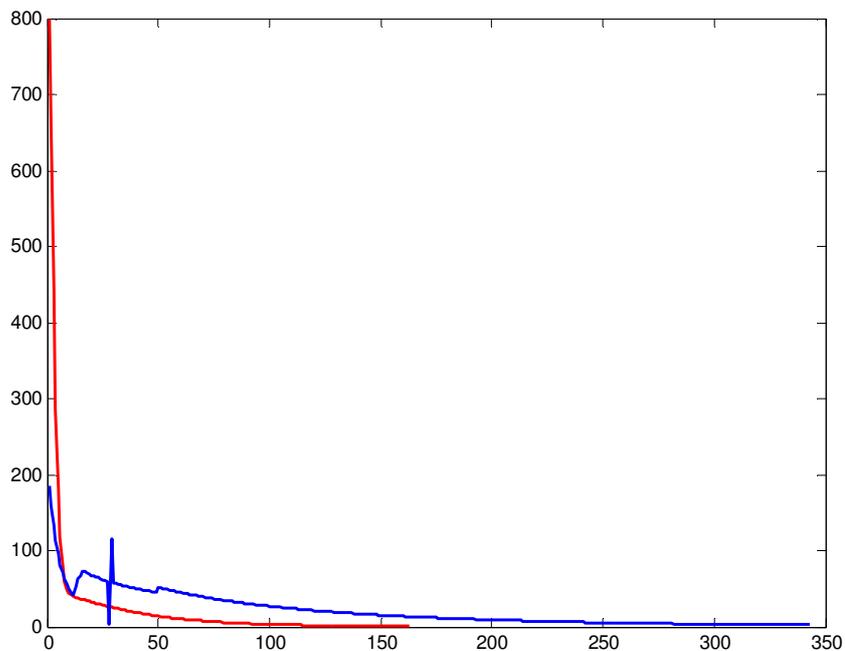


Ilustración 5-18: Acciones de control del control PDC (en azul) y del predictivo (en negro).

En cuanto a los costes de las trayectorias, observamos una mejora del nuestro controlador predictivo frente al control borroso PDC:

Técnica de control	Coste cuadrático de la trayectoria
PDC	$1.4439 \cdot 10^6$
Control predictivo	$5.4684 \cdot 10^5$

Hay que destacar que la trayectoria que sigue nuestro controlador, pese a tener un coste menor, requiere mayor número de pasos que el controlador borroso PDC. Esto es porque el criterio de decisión elegido da un peso importante a la acción de control.

Por último, tras realizar diversas simulaciones con y sin restricción terminal se observa empíricamente que para cualquier combinación de ponderaciones en el índice de coste de las acciones de control y de los estados, la inclusión de la restricción terminal garantiza que nuestro controlador siempre conseguirá al menos una solución igual de eficiente que el control borroso PDC.

5.9 CONCLUSIONES

En el presente capítulo se ha propuesto un conjunto de técnicas de control predictivo para modelos borrosos TS mediante conjuntos contractivos.

El control predictivo define un conjunto de técnicas de control con unos ingredientes comunes (modelo de predicción, restricciones, criterio de decisión y horizonte móvil) que pueden ser combinadas de múltiples formas para desarrollar la técnica de control que mejor se adapta a un problema específico.

En este capítulo se han explorado diversas técnicas para aplicar un modelo borroso TS tanto a las restricciones como al criterio de decisión, dando lugar a un abanico de posibles combinaciones. Sin embargo, todas ellas tienen la característica en común de que la estabilidad del modelo se garantiza mediante un máximo conjunto contractivo politópico obtenido antes de comenzar el muestreo, y también basado en este mismo modelo borroso TS.

Así, el capítulo comienza describiendo el procedimiento para garantizar estabilidad, que sigue el mismo proceso que en el capítulo 4, y se resume como sigue. Primero se calcula la mejor aproximación interior politópica del máximo conjunto contractivo, para cierto ratio de contracción λ , denotado como $\tilde{C}^{\lambda,d}(\Omega)$. A partir de este conjunto, se obtiene una candidata a función de Lyapunov $V(x)$, también politópica. De la cual se genera la primera y fundamental restricción $V_{k+1} < \lambda \cdot V_k$, que garantiza estabilidad sin limitar la factibilidad del optimizador y con un coste computacional muy reducido.

Posteriormente se pasa a desarrollar varios modelos de predicción sobre los que aplicaremos las restricciones y el criterio de decisión. Estos modelos van a expresar los N estados futuros como un conjunto convexo de vértices lineales, interpolados por unas funciones de pertenencia globales que contienen los términos no lineales del modelo de predicción. Esta forma de expresar los modelos de predicción pretende imitar la estructura de los modelos borrosos TS, de forma que los criterios de diseño de control se apliquen únicamente a los vértices, obteniendo una solución conservativa. Sin embargo, esta similitud con los modelos borrosos nos va a permitir aplicar muchas de las técnicas de “relajación” borrosas, entendidas como una forma de aproximar la solución conservativa a la solución que se obtendría para el modelo borroso TS original, que es no lineal. Principalmente usaremos la relajación de Polyá para obtener los correspondientes modelos de expansión asociados.

El desarrollo de los modelos de predicción comienza con el modelo en bucle abierto sin acción de control borrosa, con o sin conocimiento del estado actual x_k . Estos modelos se amplían aplicando una acción de control borrosa, y posteriormente el paradigma en bucle cerrado.

Con estos modelos, planteamos las posibles restricciones que se pueden aplicar a la predicción de los estados y acciones de control. Analizamos las ventajas y desventajas de utilizar cada restricción. Y también

desarrollamos cómo aplicar estas restricciones de forma que se expresen como restricciones lineales. En concreto proponemos limitar las restricciones a que sean factibles, esto es, que cumplan las restricciones de diseño Ω , y aplicarlas a los vértices del modelo de predicción expandido Polyá en bucle cerrado.

En cuanto al criterio de decisión, analizamos distintas formas de aplicar el índice de coste propuesto a nuestros modelos de predicción. Finalmente se propone utilizar un QP, donde la estimación del índice de coste se realiza en base a la linealización del modelo de predicción, y las restricciones se expresan como un conjunto de restricciones lineales.

El desarrollo del control predictivo concluye con la incorporación de un conjunto terminal sobre los estados, que mejora las prestaciones del optimizador.

6 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

6.1 CONCLUSIONES

En la presente tesis se ha desarrollado una estrategia de control que propone una vía para extender el control predictivo basado en modelo (MPC), a los modelos borrosos Takagi-Sugeno.

Las técnicas de modelado borroso de sistemas no lineales han demostrado ser unas herramientas muy eficaces y precisas debido a la simplicidad para conseguir modelos lineales en puntos de funcionamiento extremos. El procedimiento desarrollado en esta tesis consigue aprovechar las virtudes del modelado borroso de sistemas no lineales, pero también consigue aprovechar los avances realizados en el campo del control borroso para reducir al máximo el conservativismo de las soluciones obtenidas, superando uno de los mayores inconvenientes de las técnicas de control borroso.

La aplicación del teorema de Polya y de otras relajaciones típicas del control borroso, nos permite dos ventajas significativas. Por un lado, podemos calcular la mejor aproximación interior politópica del máximo conjunto contractivo bajo control en las restricciones. Esta región nos define la región de factibilidad del problema de optimización cuando utilizamos un horizonte de predicción suficientemente grande. Y además, es la mejor aproximación interior que se puede obtener con esas mismas condiciones particulares. El hecho de que sea politópica permitirá expresar la condición de estabilidad como una restricción lineal, lo cual facilitará la aplicación del optimizador.

Por otro lado, necesitamos de un modelo de predicción con el que estimar los estados y acciones futuras y poder así estimar el coste de la trayectoria futura, y sobre éstos, aplicaremos las restricciones del modelo. Así, mediante el teorema de Polya, podemos expresar estas restricciones no lineales como un conjunto convexo de restricciones lineales, las cuales son asintóticamente convergentes a las restricciones aplicadas al modelo de predicción exacto. Estos procedimientos son calculados fuera de línea, donde la limitación computacional es mucho menor que en el caso de los cálculos en línea.

En cuanto a las virtudes del control predictivo cabe destacar su gran flexibilidad para combinar distintos modelos de predicción, restricciones, criterios de decisión y optimizadores. En concreto, la filosofía de horizonte móvil permite adaptar en línea la acción de control durante el proceso de control. Por otro lado, destacamos sus limitaciones cuando el modelo de predicción tiene fuertes no linealidades, pues los procedimientos desarrollados tienen un alto coste computacional. Mediante los procedimientos de esta tesis utilizamos modelos borroso de predicción (que son de aplicación para los modelos no lineales), pero conservando la gran flexibilidad de los procedimientos de control predictivo. En la presente tesis proponemos unas restricciones politópicas con un optimizador QP para un criterio de coste cuadrático. El motivo fundamental de esta propuesta es que tienen una precisión muy aceptable, pero con un bajo coste computacional que asegura su aplicabilidad a sistemas con tiempos de muestro rápidos. Sin embargo hay que destacar que perfectamente podemos utilizar otros optimizadores, criterios de decisión y/o restricciones, realizando pequeñas modificaciones en los procedimientos expuestos.

También cabe destacar del control predictivo, la problemática asociada a la hora de garantizar la estabilidad de modelo bajo control, que nos obliga a depender de una ley de control terminal, y que a menudo condiciona tanto el optimizador, como las restricciones y el criterio de decisión a utilizar. Mediante el procedimiento de esta tesis, la estabilidad se garantiza mediante función de Lyapunov asociada a una región de atracción sub-máxima, que si bien es obtenida a priori, no condiciona casi las soluciones que podremos obtener en línea, pues como acabamos de resaltar, se aproxima mucho a la máxima región de atracción obtenible para el modelo no lineal.

A continuación pasamos a resumir los contenidos desarrollados en cada capítulo.

En el capítulo 2 se analiza el estado del arte, tanto en las técnicas de control borroso TS basado en metodologías LMI, como en las técnicas de control predictivo. También se analiza los trabajos realizados en la unión de ambas técnicas de control, esto es, el control predictivo borroso.

En el capítulo 3 se describe cómo obtener una aproximación interior politópica del máximo conjunto invariante y contractivo, para un modelo borroso con una ley de control PDC. Para obtener este conjunto utilizamos los principios de Polya. Este conjunto es la mejor aproximación interior que se puede obtener, si se utilizan las mismas condiciones particulares. Además, este conjunto nos permite definir una función de Lyapunov con la que probaremos estabilidad en los capítulos posteriores.

En el capítulo 4 proponemos una primera técnica de control estable para modelos borrosos TS, basada en un conjunto contractivo politópico obtenido mediante procedimientos análogos a los desarrollados en el capítulo anterior.

El capítulo 5 desarrolla las técnicas de control predictivo donde el modelo de predicción utilizado se basa en un modelo borroso TS y la estabilidad del modelo se sigue garantizando mediante un conjunto contractivo.

6.2 TRABAJOS FUTUROS

En cuanto a las futuras líneas de investigación, hay que resaltar que el control predictivo borroso propuesto en esta tesis se centra en un tipo concreto de modelos borrosos, relajaciones, restricciones, criterio de decisión y optimizador.

Una de las futuras líneas de investigación consistiría por tanto en desarrollar procedimientos análogos para casos distintos de los expuestos.

- Aplicar otras relajaciones desarrolladas en la literatura borrosa para conseguir que las condiciones borrosas se aproximen lo más posible a las condiciones no lineales originales.
- Utilizar restricciones no politópicas.
- Aplicar criterios de decisión y optimizadores no cuadráticos.

En la sección 3.5 hemos iniciado el análisis de las relajaciones borrosas, pero éste está pendiente de completarse.

Análogamente, en la sección 3.8 hemos iniciado el análisis frente a perturbaciones politópicas. Sin embargo, falta realizar un análisis extensible al diseño del control que garantice estabilidad y optimice el criterio de decisión cuando estas perturbaciones están presentes.

Por último, debido la similitud de los modelos borrosos TS con los modelos con incertidumbre politópica, se hace necesario un análisis de aplicabilidad de los procedimientos de esta tesis a modelos con este tipo de incertidumbre. De hecho, sería muy interesante tratar el tema de la robustez del control predictivo borroso desarrollado, para distintos tipos de incertidumbres.

6.3 PUBLICACIONES

Ariño, C.V, Pérez, E., Sala, A. & Bedate, F. (2014) *Polytopic invariant and contractive sets for closed-loop discrete fuzzy system*. Journal of the Franklin Institute, Volume 351, Pages 3559–3576.

Ariño, C.V, Pérez, E., Bedate, F. & Sala, A. (2013) *Robust polytopic invariant sets for discrete fuzzy control systems*. Fuzzy Systems (FUZZ), 2013 IEEE International Conference on

Pitarch, J.L., Sala, A., Ariño, C.V. & Bedate, F. (2012) *Estimación del dominio de atracción de sistemas no lineales mediante modelos borrosos polinomiales*. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI, Volume 9, Issue 2, Pages 152-161.

Ariño, C.V., Bedate, F.B. & Sala, A. (2011) *Guaranteed Cost Piecewise Fuzzy Controller Design*. Proceedings of the 18th IFAC World Congress, 2011.

Pitarch, J.L., Ariño, C.V., Bedate, F.B. & Sala, A. (2010) *Local fuzzy modeling: Maximising the basin of attraction*. Fuzzy Systems (FUZZ), 2010 IEEE International Conference on.

Ariño, C.V., Pérez, E., Sala, A., Bedate, F. & Querol, A. (Submitted) *Stabilization of Constrained Discrete Takagi-Sugeno Systems via Contractive Sets*. Transactions on Fuzzy Systems.

7 BIBLIOGRAFÍA

- Antsaklis, P., & Mitchel, A. (1997). *Linear systems*. NY: McBraw-Hill.
- Arahal, M. R., Berenguek, M., & Camacho, E. F. (1998). Neural identification applied to predictive control of a solar plant. *Control engineering practice* , 333-344.
- Ariño, C., & Pérez, E. (2010). Guaranteed cost control analysis and iterative design for constraints Takagi-Sugeno systems. *Enginnering applications of artificial intelligence* , 1420-1427.
- Babuska, R. F. (1996). Improved inference for Takagi-Sugeno models. *Proc. ieee conf. on fuzzy systems*, (págs. 653-664). New Orleans.
- Babuska, R. (1998). *Fuzzy modeling for control*. MA: Kluwer academis publisher Norwell.
- Baranyi, P. (2004). Tp model transformation as a way to LMI-based controller design. *IEEE transactions on Industrial electronics* , 287-400.
- Bemporad, A., & Morari, M. (1999). Control of systems integrating logic, dynamics and constraints. *Automatica* , 407-428.
- Biegler, L. (2000). *Non linear model predictive control*. Birkhäuser.
- Bonnans, J., Gilbert, J., Lemarechal, C., & Sagastizábal, C. (2006). *Numerical optimization. Theoretical and practical aspects*. Universitext.
- Botto, M. A., Boom, T. J., Krijgsman, A., & Costa, J. S. (1999). Predictive control based on neural network models with feedback linearization. *International journal of control* , 1538-1554.
- Boyd, S. E. (1994). *Linear matrix inequalities in control systems and control theory*. Philadelphia: SIAM.
- Camacho, E. F. (2004). *Model predictive control*. Springer.
- Chen, C., & Shaw, L. (1982). On receding horizon feedback control. *Control science and technology for the progress of society* , 377-382.
- Chen, H., & Allgower, F. (1998). Nonlinear model predictive control schemes with guaranteed stability. *Proceedings of the NATO advanced study institute* , 465.
- Chmielewski, D., & Manousiouthakis, V. (1996). *On constrained infinite-time linear quadratic optimal control*. 121-129.
- De Keyser, R. (1998). A gentle introduction to model based predictive control. *EC-PADI2 international conference on control engineering and signal processing* , 18-26.
- De Oliveira, J., & Lemos, J. (1995). Long-range predictive adaptative fuzzy relational control. *Fuzzy sets and systems* .
- Ding, B. (2009). Quadratic boundedness via dynamic output feedback for constraintes nonlinear systems in Takagi Sugeno's form. *Automatica* , 2093-2098.

- Dórea, C., & Hennet, J. (1999). Invariant Polyhedral sets of linear discrete time invariant systems. *Journal of optimization theory and applications* , 521-542.
- Dua, V., & Pistikopoulos, E. N. (2000). An algorithm for the solution of multiparametric mixed integer linear programming problems. *Annals of operations research* , 123-139.
- Feng, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE transactions on fuzzy systems* , 676.
- Fisher, M., Nelles, O., & Isermann, R. (1998). Adaptive predictive control of a heat exchanger based on a fuzzy model. *Control Engineerin Practice* 6 , 259-269.
- Gahinet, P. A. (1995). *LMI control toolbox*. Math works.
- García, S., Martínez, M., & Salcedo, J. V. (2010). *Identificación y control predictivo fuzzy TS en espacio de estados. Una aproximación al control no-lineal*. Valencia.
- Gevers, M., Wertz, V., & Bitmead, R. (1990). *Adaptive optimal control: The thinking man's GPC*. Prentice Hall.
- Gilbert, E., & Tan, K. (1991). Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE transactions on Automatic control* , 1008-1020.
- Goodwin, G., & Seron, M. (2005). *Constrained control and estimation: An optimisation approach*. Springer.
- Guerra, T., & Vermeiren, L. (2004). LMI-based relaxed non-quadratic stabilization conditions for non-linear systems in the Takagi-Sugeno's form. *Automatica* , 823-829.
- Hernandez, E., & Arkun, Y. (1991). A non-linear DMC controller: some modelling and robustness considerations. *Proceedings of the american control conference* .
- Hori, T. T. (2002). A piecewise takagi fuzzy model construction and relaxation of stability conditions. *Proceedings of the 41st ieee conference on decision and control* , 2149-2150.
- Huang, Y., Lou, H., Gong, J., & Edgar, T. (2000). Fuzzy model predictive control. *IEEE Transactions in Fuzzy systems* 8 , 665-677.
- Kalman, R. E. (1960). *Control system analysis and design via the second method of Lyapunov*.
- Kawamoto, S. T. (1992). An approach to stability analysis of second order fuzzy systems. *IEEE international conference on Fuzzy systems* , 1427-1434.
- Keerthi, S. S., & Gilbert, E. G. (1988). Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems: Stability and moving-horizon approximations. *Journal of optimization theory and applications* , 265-293.
- Kerrigan, E. C. (2000). *Robust constraints satisfaction: Invariant sets and predictive control*.
- Kim, E., & Lee, H. (2000). New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE transactions on fuzzy systems* 2 , 1571-1582.
- Kim, S., Kim, E., & Park, M. (1996). A new adaptive fuzzy controller using the parallel structure of fuzzy controller and its applications. *Fuzzy set and systems* 81 , 205-226.
- Kouvaritakis, B., Cannon, M., & Rossiter, J. (1998). *Stability, feasibility, optimality and the number of degrees of freedom in constrained predictive control*.

- Kouvaritakis, B., Rossiter, J., & Chang, A. (1992). Stable generalized predictive control: an algorithm with guaranteed stability. *Proceeding in IEEE* , 262-349.
- Kruszewski, A., Sala, A., Guerra, T., & Ariño, C. (2009). A triangulation approach to asymptotically exact conditions for fuzzy summations. *IEEE Transactions on fuzzy systems* , 985-994.
- Lazar, M., Heemels, W., Weiland, S., & Bemporad, A. (2006). Stabilizing model predictive control of hybrid systems. *IEEE transactions on automatic control* , 1813.
- Liu, X., & Zhang, Q. (2003). New approaches to Hinf controllers designs based on fuzzy observers for T_S fuzzy systems via LMI. *Automatica* , 1571-1582.
- Lu, Y., He, M., & Xu, C. (1996). Fuzzy modeling and expert optimization for industrial processes. *Control systems technology* .
- Magni, L., & Sepulchre, R. (1997). *Systems and control letters*. 241-245.
- Mayne, D. Q., & Michalska, H. (1988). Receding horizon control of nonlinear systems. *Proceedings of the 27th IEEE conference on decision and control* , 464-465.
- Mayne, D., Rawlings, J., Rao, C., & Sokaert, P. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica* , 789-814.
- Meadows, E. (1997). Dynamic programming and model predictive control. *15th american control conference* , 1635-1639.
- Michalska, H., & Q., M. D. (1993). Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE transactions on automatic control* , 1623-1633.
- Mollov, S., Babuska, J., Abonyi, J., & Verbruggen, H. (2004). Effective optimization for fuzzy model predictive control. *IEEE Transactions on fuzzy systems* , 661-675.
- Mollov, S., Boom, T. v., Cuesta, F., Ollero, A., & Babuska, R. (2002). Robust stability constraints for fuzzy model predictive control. *IEEE transactions on fuzzy systems* , 50-65.
- Nicolao, G., Magni, L., & Scattoloni, R. (1996). *Stabilizing nonlinear receding horizon control via a nonquadratic penalty*. Proceedings of the IMACS multiconference CESA: 185-187.
- Pluymers, B., Rossiter, J., Suykens, J., & De Moor, B. (1996). The efficient computation of polyhedral invariant sets for linear systems with polytopic uncertainty. *Proceedings of the american control conference* , 804-809.
- Pòlya, G., & Szegő, G. (1928). Aufgaben un lehrsätze aus der analysis. *Bull. Amer. Math Soc.* , 233-234.
- Primbs, J., & Nevistic, V. (1997). Constrained finite receding horizon linear quadratic control. *IEEE conferencie on decision and control* , 3196-3201.
- Rakovic, S., Kerrigan, E., Mayne, D., & Kouramas, K. (2007). Optimized robust control invariance for linear discrete-time systems: Theoretical foundations. *Automatica* , 831-841.
- Rawlings, J. B., & Muske, K. R. (1993). The stability of constrained receding horizon control. *IEEE transactions on automatic control* , 1512-1516.
- Rossiter, J. A. (2003). *Model-Based predictive control. A practical approach*. CRC Press.
- Roubos, J., Mollov, S., Babuska, R., & Verbruggen, H. (1999). Fuzzy model-based predictive control using Takagi-Sugeno models. *International Journal of approximate reasoning* .

- Sala, A., & Ariño, C. (2007). Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control. *Fuzzy sets and systems* , 2671-2686.
- Sala, A., & Ariño, C. (2007). Relaxed LMI conditions for closed loop systems with tensor product structure. *Eng. Appl. Artificial Intelligence* , 1036-1046.
- Sala, A., & Ariño, C. (2007). Relaxed stability and performance conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems with knowledge on membership functions overlap. *IEEE transactions on man and cybernetics* , 727-732.
- Sarimveis, H., & Bafas, G. (2003). Fuzzy model predictive control of non-linear processes based on genetic algorithms. *Fuzzy sets and systems* .
- Scokaert, P., & Mayne, D. (1998). Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Transactions on automatic control*, vol 43, num 8 , 1136-1142.
- Scokaert, P., & Rawlings, J. (1998). Constrained linear quadratic regulation. *IEEE transactions on automatic control* , 1163-1169.
- Slotine, J., & Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*. New Jersey: Prentice Hall.
- Sousa, J., Babuska, J., Brujin, P., & Verbruggen, H. (1996). Comparison of conventional and fuzzy control. *Proceedings of the 5th IEEE international conference on fuzzy systems* , 1782-1787.
- Sousa, J., Setnes, M., Baptista, M., & Da costa, L. (1999). Model predictive algorithms based on fuzzy discrete alternatives. *Fuzzy systems conference proceedings* , 228-233.
- Sturm, J. (1999). Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software* , 625-653.
- Sugeno, M., & Kang, G. (1988). Structure identification of fuzzy model sets and systems. *Fuzzy set and systems* , 103-113.
- Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control. *IEEE transactions on Systems, Man and Cybernetics* , 116-132.
- Tanaka, K. T. (1998). Fuzzy control based on quadratic performance functions. *37th IEEE conference on decision and control* .
- Tanaka, K., & Sano, M. (1994). A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. *IEEE transactions on fuzzy systems* , 119-134.
- Tanaka, K., & Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Set Syst* , 135-156.
- Tanaka, K., & Wang, H. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis*. New York: John Wiley & Sons.
- Teixeira, M., Assunção, E., & Avellar, R. (2003). On relaxed LMI-based design for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE transactions on fuzzy systems* , 613-623.
- Townsend, S., & Irwin, G. W. (2001). *Nonlinear model based predictive control using multiple local models*.
- Tuan, H. A. (2001). Parametrized linear matrix inequality techniques in fuzzy control systems design. *IEEE transactions on fuzzy systems* , 324-332.

Vidyasagar, M. (2002). *Non-linear systems analysis*.

Vucovic, P. (2001). One step ahead predictive fuzzy controller. *Fuzzy set and systems 122* , 107-115.

Wang, H. T. (1995). Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. *Fuzzy systems international conference* .

Xia, Y., Yang, H., Shi, P., & Fu, M. (2010). Constrained infinite horizon model predictive control for fuzzy discrete time systems. *IEEE Transactions on fuzzy systems* , 429-437.

Zhang, T., Feng, G., & Lu, J. (2007). Fuzzy constrained min-max model predictive control based on piecewise Lyapunov function. *IEEE Transactions on fuzzy systems* , 686-698.

Zheng, A., & Zhang, W. (2001). Nonlinear predictive control. *IEEE Control engineering series* .