Rolleova kaskadna metoda

Helena Frančešević[1], Danka Pažanin[2] i Igor Pažanin[3]

Sažetak: Rolleov teorem jedan je od osnovnih teorema diferencijalnog računa i kao takav prezentiran

je većini studenata prve godine preddiplomskih studija. Cilj ovoga rada upoznati je čitatelje s nekim zanimljivim detaljima iz života Michela Rollea te posebno s tzv. kaskadnom metodom koja je dovela do teorema koji nosi Rolleovo ime.

1. Uvod

Michel Rolle rođen je 21. travnja 1652. godine u malom gradiću Ambertu, u regiji Basse-Auvergne u središnjoj Francuskoj. Tijekom svog odrastanja primio je vrlo malo formalnog obrazovanja, završivši samo osnovnu školu. Nakon toga uglavnom je bio samouk, što njegovim rezultatima dodatno daje na značaju. U početku je Rolle radio kao asistent nekolicini odvjetnika u svojoj regiji, a 1675. godine seli u Pariz gdje radi kao pisar. Nedugo potom ženi se i zasniva obitelj. Kako bi je uzdržavao, morao je pronaći način kako povećati svoje prihode, a upravo mu je njegovo znanje iz više matematike (koje je sam stekao) to omogućilo.

Sedam godina nakon dolaska u Pariz, Rolle je riješio problem koji je postavio poznati francuski matematičar Jacques Ozanam (1640. – 1718.) u jednome od izdanja *Journal des savants* 1682. godine. Formalno zapisan, problem je glasio:

Odrediti brojeve x, y, z, w, $x < y < w < z$ tako da sljedeće jednakosti budu zadovoljene:

$$z - w = a^2,\ w - y = b^2,\ y - x = c^2,\ z - w = d^2,\ z - x = e^2,\ w - x = f^2,\ x + y + w = g^2,$$

za neke cijele brojeve a, b, c, d, e, f i *g.*

Na prvi pogled, jasno je da je riječ o nimalo lakom problemu iz teorije brojeva. Ozanam je bio uvjerenja da bi najmanji od brojeva koji zadovoljava gornji problem

[1]Helena Frančešević, studentica PMF-Matematičkog odsjeka, Sveučilište u Zagrebu
[2]Danka Pažanin, učiteljica matematike i fizike, OŠ Ivana Filipovića, Zagreb
[3]Igor Pažanin, izvanredni profesor, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu

trebao sadržavati barem 50 znamenaka. Rolle je uspio odrediti četvorku (x, y, z, w) sedmeroznamenkastih brojeva. Riješivši Ozanamov problem, Rolle je stekao matematičku reputaciju nakon čega ga je zamijetio utjecajni političar Jean-Baptiste Colbert koji je u to vrijeme bio ministar financija u francuskoj vladi pod kraljem Lujem XIV. („kralj sunce"). Colbert je osigurao Rolleu stalni prihod koji mu je omogućio neometan rad na vlastitom usavršavanju iz područja matematike. Osim toga, Rollea je angažirao i Markiz de Louvois, tadašnji francuski ministar rata. Poučavao je jednoga od njegovih sinova te čak dobio i administrativni posao u Louvoisovom ministarstvu, no tamo mu se nije svidjelo pa uskoro daje otkaz. Usprkos tome, zadivljen njegovim iznimnim matematičkim sposobnostima, Louvois snažno podupire izbor Rollea u *Academie Royale des Sciences*. Godine 1685., postavši članom prestižne Akademije, Rolle se mogao posvetiti svojim istraživanjima u još većoj mjeri nego dotad.

Rolleovi doprinosi dotiču se raznih područja matematike. Gledajući ukupno, može se ustvrditi da se najviše posvetio tzv. diofantskoj analizi. Diofantska analiza bavi se proučavanjem diofantskih jednadžbi, tj. algebarskih (polinomijalnih) jednadžbi s jednom ili više nepoznanica s cjelobrojnim koeficijentima, kojoj se traže cjelobrojna ili racionalna rješenja. Napomenimo da u Hrvatskoj postoji vrlo jaka škola koja se bavi diofantskim jednadžbama, a koju predvodi akademik Andrej Dujella s PMF-Matematičkog odsjeka u Zagrebu. Zainteresiranog čitatelja upućujemo na [3].

Rolle je također istraživao i u području algebre. Njegov najznačajniji rad iz tog područja, *Traite d'algebre*, objavljen je 1690. i u njemu je po prvi put uvedena oznaka $\sqrt[n]{x}$. U radu pod naslovom *Démonstration d'une methode pour résoudre les egalitez de tous les degrez* (kraće: *Démonstration*), objavljenom 1691. godine, Rolle uvodi dotad nepoznatu činjenicu da $a > b$ povlači $-a < -b$. U istom radu, Rolle u velikoj mjeri popularizira notaciju = za jednakost, koju je prethodno uveo velški fizičar i matematičar Robert Recorde (1512. – 1558.).

Međutim, najvažniji Rolleov doprinos razvoju matematike (sadržan u radu *Traite d'algebre* i dokazan u potpunosti godinu dana kasnije u *Démonstration*) zapravo je njegova *kaskadna metoda* koju se smatra pretečom osnovnog teorema diferencijalnog računa koji nosi njegovo ime. U sljedećem poglavlju detaljno ćemo prezentirati tu metodu slijedeći članke [6, 7].

Za kraj Uvoda, napomenimo da je Michel Rolle u 56. godini života doživio srčani udar nakon kojeg nije zabilježen niti jedan njegov matematički rezultat. Jedanaest godina kasnije, 1719., Rolle je doživio još jedan infarkt od kojeg je preminuo.

2. Rolleova kaskadna metoda

Cilj metode odrediti je korijene jednadžbe oblika

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n+1} x + a_n = 0. \tag{1.1}$$

Osnovni princip metode ilustrirat ćemo na primjeru

$$f(x) = x^4 + 5x^3 - 25x^2 - 65x + 84 = 0 \qquad (1.2)$$

i to u tri koraka:

1. korak. U prvom koraku ideja je transformirati jednadžbu (1.2) tako da koeficijenti 1, a_1, a_2, a_3, ... polinoma alterniraju u predznaku. Naime, tada *Descartesovo pravilo predznaka* (vidi npr. [5]) jamči da su svi realni korijeni polinoma $f(x)$ pozitivni. Rolle također definira tri pojma:

a) veliku hipotezu (franc. *grande hipothèse)* kao gornju među svih korijena polinoma; Rolle je tu vrijednost računao koristeći formulu $\left(\frac{a}{c}+1\right)$, pri čemu je a apsolutna vrijednost najmanjeg negativnog koeficijenta polinoma, a c vodeći koeficijent. U našem je slučaju $a = |-65| = 65,\ c = 1$.

b) malu hipotezu (franc. *petite hipothèse*) kao donju među svih korijena polinoma;

c) međuhipoteze (franc. *hipothèses moyennes*) kao unutarnje međe, tj. korijene prethodne kaskade (vidi *3. korak*).

Kako bi transformirao jednadžbu, Rolle uvodi zamjenu varijabli:

$$x = \left(\frac{a}{c}+1\right) - y = 66 - y. \qquad (1.3)$$

Iz (1.2.) tada dobivamo

$$g(y) = f(66-y) = y^4 - 269y^3 + 27\,101y^2 - 1\,211\,959y + 20\,299\,110. \qquad (1.4)$$

Primijetimo da koeficijenti 1, –269, 27101, –1 211 959, 20 299 110 polinoma g alterniraju u predznaku, tj. imamo 4 promjene u predznaku. Prema Descartesovu pravilu predznaka, zaključujemo da g može imati 4, 2 ili niti jedan pozitivni realni korijen. No, kako su svi koeficijenti polinoma $g(-y)$ pozitivnog predznaka, zaključujemo da nema negativnih korijena, što znači da je mala hipoteza jednaka 0. Koristeći a), lako je izračunati da velika hipoteza iznosi 1 211 960, što znači da niti jedan korijen od g nije veći od 1 211 960.

2. korak. U ovom koraku Rolle formira tzv. *kaskade* prema sljedećoj proceduri:

i. Pomnoži svaki član jednadžbe s eksponentom varijable y pa dobiveni član podijeli s y.

ii. Učini isto s tako dobivenom jednadžbom. Ponavljaj postupak dok ne dobiješ polinom 1. stupnja.

Na taj način dobivamo

$$g(y) = g_4(y) = y^4 - 269y^3 + 27\,101y^2 - 1\,211\,959y + 20\,299\,110 = 0, \qquad (1.5)$$

$$g_3(y) = 4y^3 - 807y^2 + 54\,202y - 1\,211\,959 = 0, \tag{1.6}$$

$$g_2(y) = 12y^2 - 1\,614y + 54\,202 = 0, \tag{1.7}$$

$$g_1(y) = 24y - 1614 = 0. \tag{1.8}$$

Jednadžbe (1.5) – (1.8) nazivaju se *kaskade*, pri čemu i-tu kaskadu označavamo s g_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Uočimo da formiranje kaskada zapravo odgovara deriviranju polinoma, čega Rolle u to doba nije bio svjestan. Iz tog razloga, ni mi ovdje ne koristimo notaciju za derivaciju.

3. korak. U *Traite d'algebre* Rolle je primijetio da ukoliko su, primjerice, a i b ($a < b$) korijeni kaskade g_i, tada korijen kaskade g_{i+1} mora pripadati intervalu (a, b). Godinu dana kasnije tu je tvrdnju i dokazao u *Demonstration*. Također, važno je uočiti da svaka kaskada ima samo pozitivne korijene (predznaci monoma alterniraju) pa je mala hipoteza svake kaskade jednaka 0. S druge strane, za svaku kaskadu možemo izračunati i veliku hipotezu koristeći formulu $\left(\frac{a}{c}+1\right)$. Kako korijen 1. kaskade možemo direktno izračunati (linearni polinom), ideja je krenuti od (1.7) i koristeći gornje razmatranje izolirati korijene preostalih kaskada. Pretpostavimo da smo to već učinili za prve tri kaskade te ustanovili da su korijeni od g_3 približno jednaki 63, 67 i 71. Ti brojevi predstavljaju međuhipoteze iduće kaskade $g_4 = g$. Kako je mala hipoteza od g jednaka 0, a velika dana s $\frac{|-1\,211\,959|}{1}+1 = 1\,211\,960$, zaključujemo da se po jedan korijen od g nalazi u svakom od intervala (0, 63), (63, 67), (67, 71) i (71, 1 211 960). Sada na svakome od tih intervala odredimo taj korijen koristeći se jednostavnom metodom raspolavljanja (bisekcije). Kako je

$$g(0) = 20\,299\,110 > 0, \quad g(63) = -120 < 0,$$

a za aritmetičku sredinu brojeva 0 i 63 (bez decimala) vrijedi $g(31) = 1\,682\,184 > 0$, to znači da korijen pripada intervalu (31, 63). Sada računamo vrijednost od g u $y = \frac{31+63}{2} = 47$. Jer je $g(47) = 154\,440 > 0$, korijen smo izolirali u (47, 63). Dalje nastavimo analognim zaključivanjem:

$$g(55) = 17640 > 0, \quad g(59) = 176 > 0, \quad g(61) = 384 > 0, \quad g(62) = 0.$$

Prema tome, $y = 62$ traženi je korijen, i to jedini u (0, 63). Na potpuno isti način odredimo korijene u preostala tri intervala (63, 67), (67, 71) i (71, 1 211 960) te dobivamo $y = 65$, $y = 69$, $y = 73$. Konačno, korijene polazne jednadžbe $f(x) = 0$ dobivamo uvažavajući supstituciju (1.3), dakle $x = 4$, $x = 1$, $x = -3$, $x = -7$.

Rolleovu kaskadnu metodu možemo koristiti i u slučaju polinoma koji nemaju cjelobrojne korijene. Jedina razlika je u tome što ne odbacujemo decimale pri računanju aritmetičkih sredina. Promotrimo npr. jednadžbu

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0.$$

Primijetimo da je $a = |-6| = 6,\ c = 1$, pa supstitucija $x = 7 - y$ daje polinom g s isključivo pozitivnim korijenima

$$g(y) = f(7-y) = -y^3 + 24y^2 - 187y + 470 = 0.$$

Kaskade su dane sa

$$g(y) = g_3(y) = -y^3 + 24y^2 - 187y + 470 = 0,$$

$$g_2(y) = -3y^2 + 48y - 187 = 0,$$

$$g_1(y) = -6y + 48 = 0.$$

Približni korijeni 2. kaskade su 6 i 9, i to su međuhipoteze od g. Mala hipoteza od g je 0, a velika 188. Stoga se po jedan korijen nalazi u svakome od intervala (0, 6), (6, 9), (9, 188). Aproksimirajmo korijen u intervalu (6, 9). Kako je $g(6) = -4 < 0$, $g(7.5) = -4.375 < 0$, $g(9) = 2 > 0$, to se korijen nalazi u intervalu (7.5, 9). Odredimo li vrijednost od g u aritmetičkoj sredini od 7.5 i 9, dobivamo $g(8.25) = -0.765625 < 0$, stoga računamo $g(8.625) \approx 0.88086 > 0$. To znači da se korijen nalazi u (8.25, 8.625) pa uzimajući aritmetičku sredinu rubova nalazimo $g(8.4375) \approx 0.10376$. Nastavljajući postupak, u svakoj sljedećoj iteraciji sve se više približavamo točnoj vrijednosti korijena od g koji iznosi $y = 7 + \sqrt{2} \approx 8.414213562$. Aproksimaciju korijena polazne jednadžbe $f(x) = 0$ nalazimo vraćajući supstituciju $x = 7 - y$.

3. Rolleov teorem

Osnovni princip kaskadne metode zaslužan je za rezultat koji danas znamo kao *Rolleov teorem*:

Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka su $a, b \in I,\ a < b$ takve da vrijedi $f(a) = f(b) = 0$. Tada postoji točka $c \in (a, b)$ takva da je $f'(c) = 0$.

Standardni dokaz moguće je pronaći npr. u [4]. Napomenimo da je tek 1846. godine gornji rezultat dobio naziv Rolleov teorem, a što je zaslužan talijanski matematičar Giusto Bellavitis (1803. – 1880.). Rolleov teorem osnovni je alat u dokazu *Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti*. Zainteresiranog čitatelja upućujemo na [1,2] (vidi još i [5]) gdje je moguće pronaći različite tipove zadataka riješenih pomoću Rolleovog i Lagrangeovog teorema kao i neke generalizacije tih teorema.

Za kraj, dokažimo tvrdnju koju je Rolle koristio u 3. koraku svoje kaskadne metode, a koju možemo formulirati na sljedeći način:

Ako je g polinom i vrijedi $g'(a) = g'(b) = 0$ *te ako ne postoji* $c \in (a, b)$ *takva da je* $g'(c) = 0$*, onda g ima najviše jedan realni korijen na intervalu* (a, b).

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje $x_1, x_2 \in (a, b)$ $x_1 < x_2$ takvi da $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Prema Rolleovom teoremu (koji možemo primijeniti jer je g polinom), tada postoji točka $x_3 \in (x_1, x_2)$ takva da je $g'(x_3) = 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom same tvrdnje.

Literatura

1. Lj. Arambašić, A. Valent, *Neke primjene Rolleovog teorema i Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti*, Poučak No. 55 (Oct., 2013.), pp. 47-56.
2. Lj. Arambašić, M. Matika, A. Valent, Neke generalizacije Rolleovog teorema i Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti, Poučak 2015. (61), 13-20.
3. A. Dujella, *Materijali s web stranice* http://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/
4. S. Kurepa, Matematička analiza 2, Školska knjiga, 1997., Zagreb.
5. C. Rousseau, *Rolle's theorem: from a simple theorem to an extremely powerful tool*, Université de Montréal, 2011., http://wikis.zum.de/dmuw/images/a/ad/Rolle_Khovanskii.pdf
6. G. Sinkevich, Rolle theorem and Bolzano-Cauchy Theorem from the end of the 17th century to K. Weirestrass' epoch, arXiv:1503.03118v1[math:HO] (2015),
7. C. Washington, *Michel Rolle and his method of cascades*, Georgia College & State University, 2011., https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/46/Washington_Rolle_ed.pdf