Krug i elipsa

Ivica Gusić[1], Jelena Gusić[2] i Matea Gusić[3]

1. Uvod

Površina i opseg kruga obrađuju se već u osnovnoj školi. U srednjoškolskoj nastavi matematike obrađuje se elipsa, njena osnovna svojstva i jednadžba. Iako bi to za nastavu fizike bilo važno zbog Keplerovih zakona o gibanju planeta oko Sunca, ne obrađuju se površina unutar elipse ni opseg elipse[4]. Razlog tome je što je za strogo matematički pristup toj temi potrebno poznavanje određenog integrala. U ovom radu predočit ćemo dio te problematike. Pokazuje se da je problem opsega bitno složeniji od problema površine.

Površina P_r i opseg kruga O_r polumjera r zadane su redom formulama

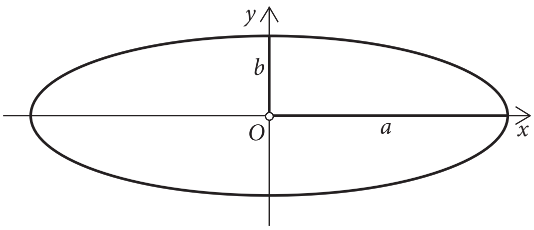
$$P_r = \pi r^2 \tag{1.1}$$

$$O_r = 2\pi r \tag{1.2}$$

Drukčije zapisano, $P_r = \pi r^2 = \pi r \cdot r$ i $O_r = \pi(r + r)$.

Još u starogrčkoj matematici bila je poznata i formula za površinu $P_{a,b}$ unutar elipse s poluosima a, b (sl. 1):

$$P_{a,b} = \pi ab. \tag{1.3}$$



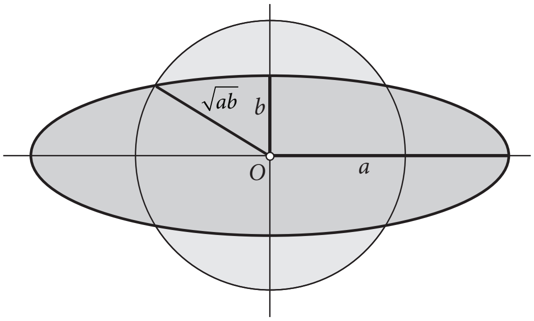
Slika 1.

[1]Ivica Gusić, FKIT Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb
[2]Jelena Gusić, XV. gimnazija, Zagreb
[3]Matea Gusić, Privatna gimnazija s pravom javnosti, Varaždin
[4]Uobičajeno je opseg kruga, površina kruga, a ne opseg kružnice (iako se i tako govori), površina kružnice. Mi smo se ovdje odlučili za pojmove opseg elipse, površina unutar elipse, iako se u praksi pojavljuje i površina elipse što je jednostavnije, iako nije dovoljno opravdano. U hrvatskom matematičkom nazivlju odavno postoji pakružnica za elipsu, pakrug za dio ravnine omeđen elipsom, što je skovano prema kružnica, krug. Uz takvo nazivlje bilo bi jednostavno i skladno opseg pakruga, površina pakruga.

Moglo bi se pomisliti da prema analogiji za opseg $O_{a,b}$ elipse vrijedi $O_{a,b} = \pi(a + b)$, ali to nije istina. Kepler je 1609. predložio približnu formulu $O_{a,b} \approx \pi(a + b)$, a Euler 1773. približnu formulu $O_{a,b} \approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Uočimo da je $\pi\left(a+b\right) = 2\pi\frac{a+b}{2}$ opseg kruga kojemu je polumjer jednak aritmetičkoj sredini poluosi a, b, dok je $2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ opseg kruga kojemu je polumjer jednak kvadratnoj sredini poluosi a, b. Kako je aritmetička sredina manja ili jednaka kvadratnoj, tj. $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, Keplerova procjena manja je od Eulerove, osim ako je elipsa kružnica, kad se te dvije aproksimacije poklapaju. Opseg elipse uvijek je između tih dviju procjena, tj. $2\pi\frac{a+b}{2} \le O_{a,b} \le 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Štoviše, Keplerova procjena strogo je manja, a Eulerova strogo veća od opsega, osim ako je elipsa kružnica kad su i jedna i druga procjena točne. Ima više dokaza ovih nejednakosti, vidi na primjer [3], [4] i [5]. Ovdje ćemo predočiti jedan koji se djelomično oslanja na [2] i čini se primjerenijim za učenike srednjih škola. Nažalost, ni ovaj dokaz nije elementaran već se zasniva na formuli za duljinu luka krivulje pomoću određenog integrala.

Formula (1.3) može se zapisati kao $P_{a,b} = \pi\left(\sqrt{ab}\right)^2$, što znači da je površina unutar elipse s poluosima a, b jednaka površini kruga s polumjerom $\sqrt{ab}$, geometrijskom sredinom od a, b (sl. 2). Nasuprot tome, nema takve jednostavne veze niti jednostavne formule za opseg elipse.



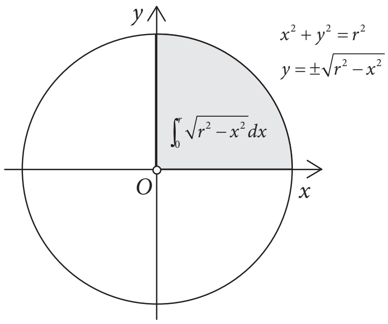
Slika 2.

U [1] opisan je vrlo brz algoritam za približno određivanje opsega elipse koji se zasniva na jednoj Gaussovoj formuli. Taj ćemo algoritam ilustrirati primjerima. Ilustrirat ćemo i komentirati i neke druge dostupne izvore za računanje opsega elipse.

Napomenimo usput da se slično ponavlja s kuglom i elipsoidom. Za obujam V_r kugle polumjera r vrijedi $V_r = \frac{4\pi}{3} r^3$, što se može zapisati kao $\frac{4\pi}{3} r \cdot r \cdot r$. Za obujam elipsoida s poluosima a, b, c vrijedi analogno $V_{a,b,c} = \frac{4\pi}{3} a \cdot b \cdot c$. Dok za oplošje kugle postoji jednostavna formula $O_r = 4\pi r^2$, nema jednostavne formule za oplošje elipsoida.

2. Formula za površinu unutar elipse

Formule (1.1) i (1.2) za površinu i opseg kruga mogu se elementarno obrazložiti. Relativno lako dobije se da je površina kruga razmjerna kvadratu polumjera, tj. $P_r = k_1 r^2$ i da je opseg kruga razmjeran promjeru, tj. $O_r = k_2 \cdot 2r$, ali nije jasno da su koeficijenti razmjernosti jednaki, tj. da je $k_1 = k_2 = \pi$. To su u starogrčkoj matematici dokazali upisujući u krug i opisujući oko njega pravilne mnogokute sa sve više stranica. Taj postupak u temelju je metode iscrpljivanja (ekshaustije) kojom je izvedena i formula za površinu unutar elipse. U metodi iscrpljivanja začetak je integriranja. Bitna prednost integriranja u tome je što ono daje opću metodu za računanje površine, dok se metoda iscrpljivanja u svakom konkretnom problemu vraća na tehničke postupke i računanja koja su kod integrala jednom zauvijek provedena. Zato ćemo formulu (1.3) za površinu unutar elipse, koju smo spomenuli u Uvodu, dokazati koristeći se određenim integralom. Najprije navedimo integralnu formulu za površinu kruga polumjera r (sl. 3.)



Slika 3.

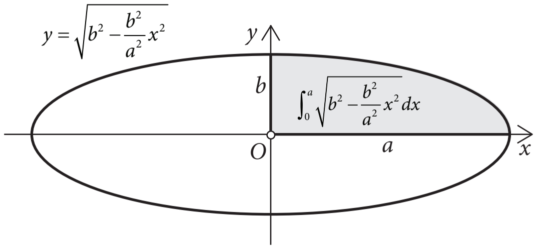
$$P_r = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \tag{2.1}$$

Elipsa s poluosima a, b zadana je jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Gornji luk elipse ima jednadžbu $y=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}$ (sl. 4) pa je površina unutar elipse

$$P_{a,b}=4\int_0^a\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}\,dx\,.$$



Slika 4.

Ovaj se integral može izračunati uvođenjem zamjene $x=a\sin t$, $dx=a\cos t dt$ za $0\le t\le\frac{\pi}{2}$, što prepuštamo čitateljima. Mi ćemo postupiti drukčije i svesti problem na računanje površine kruga. Time ćemo ilustrirati činjenicu da integral nosi informacije o površini ispod grafa funkcije čak ako ga i ne računamo ili ne znamo izračunati.

Zamjenom $x=\sqrt{\frac{a}{b}}t$, $dx=\sqrt{\frac{a}{b}}dt$, $t=0$ za $x=0$, $t=\sqrt{ab}$ za $x=a$, dobije se dalje $P_{a,b}=4\int_0^a\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}\,dx=4\int_0^{\sqrt{ab}}\sqrt{ab-t^2}\,dt$, što je, prema formuli (2.1), površina kruga polumjera $r=\sqrt{ab}$. Zaključujemo da je površina unutar elipse s poluosima a, b jednaka površini kruga polumjera $\sqrt{ab}$. To smo dobili iako nismo izračunali integral nego smo ga samo drukčije zapisali. Sad, koristeći formulu za površinu kruga, lako dobijemo formulu za površinu unutar elipse: $P_{a,b}=\pi(\sqrt{ab})^2=\pi ab$.

3. Opseg elipse

Nema elementarne metode za računanje opsega elipse. Zato ćemo primijeniti formulu za duljinu luka

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \tag{3.1}$$

Tu je L duljina grafa funkcije f od točke $(\alpha, f(\alpha))$ do točke $(\beta, f(\beta))$. Primijenimo formulu na elipsu, tj. na funkciju $f(x) := \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}$. Kako je $f'(x) = -\frac{}{\sqrt{a^2 \quad x^2}}$, dobije se

$$O_{a,b} = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - x^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2}{a^2 - x^2}}dx. \tag{3.2}$$

Problem s ovim integralom u tome je što primitivna funkcija podintegralne funkcije nije elementarna osim ako je $a = b$. Tu činjenicu nećemo obrazlagati. Recimo tek da je gornji integral za $b \neq a$ primjer tzv. potpunog eliptičkog integrala druge vrste. S eliptičkim integralima započinje jedna od najljepših teorija u matematici, teorija eliptičkih krivulja. Nakon zamjene $x = a\sin t$, $dx = a\cos t dt$ za $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $t = 0$ za $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ za $x = a$ integral (3.2) postaje

$$O_{a,b} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt \tag{3.3}$$

Odmah se vidi da se za $b = a = r$ dobije $O_{r,r} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r dt = 2\pi r$, što je poznata formula za opseg kruga.

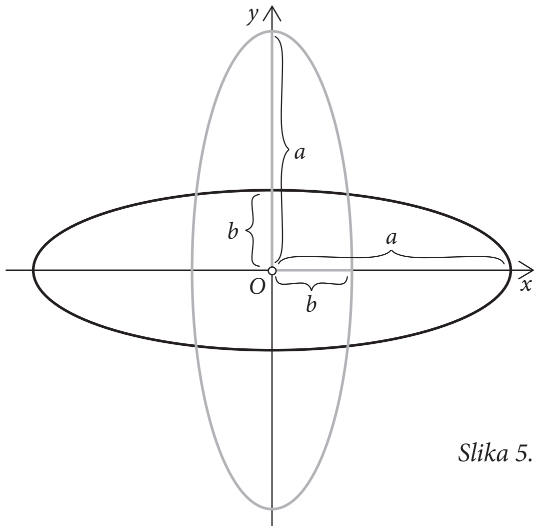
Sada ćemo dokazati da vrijedi

$$2\pi\frac{a+b}{2} \leq O_{a,b} \leq 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{3.4}$$

s jednakostima ako i samo ako je $b = a$.

To ćemo dokazati iako ne znamo računati integral (3.3).

Kako je $O_{a,b} = O_{b,a}$ (sl. 5), vrijedi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt$.



Slika 5.

To znači da je

$$O_{a,b}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\right)dt.$$

Dokaz prve nejednakosti u (3.4). Razmotrimo niz jednakosti

$$\begin{aligned}(a\cos^2 t+b\sin^2 t)^2&=a^2\cos^4 t+b^2\sin^4 t+2ab\cos^2 t\sin^2 t\\&=a^2\cos^2 t(1-\sin^2 t)+b^2\sin^2 t(1-\cos^2 t)+2ab\cos^2 t\sin^2 t\\&=a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t-(a-b)^2\cos^2 t\sin^2 t,\end{aligned}$$

odakle dobijemo

$$a\cos^2 t+b\sin^2 t\le\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t},\ \text{a odatle}$$

(R1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos^2 t+b\sin^2 t)dt\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt.$

Sad se integriranjem lako dođe do tražene nejednakosti. Integriranje funkcija $\cos^2$ i $\sin^2$ možemo izbjeći tako da (R1) napišemo još jednom, ali da zamijenimo a i b. Dobijemo:

(R2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^2 t+b\cos^2 t)dt\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt.$

Nakon toga zbrojimo nejednakosti u (R1) i (R2) i iskoristimo da je

$$(a\cos^2 t+b\sin^2 t)+(a\sin^2 t+b\cos^2 t)=a(\cos^2 t+\sin^2 t)+b(\cos^2 t+\sin^2 t)=a+b,$$

pa dobijemo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a+b)dt\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\right)dt\,.$$

Kako je $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a+b)dt=\frac{\pi}{2}(a+b)$ (što ne moramo ni računati jer je to površina pravokutnika), iz gornje nejednakosti zaključujemo da je

$$\pi(a+b)\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\right)dt,$$

tj. da je $\pi(a+b)\le O_{a,b}$, kako smo i tvrdili.

Dokaz druge nejednakosti u (3.4). Iskoristit ćemo činjenicu da je $(a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t)+(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)=a^2+b^2$ i nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine koju smo naveli u Uvodu.

Dobijemo

$$\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\le 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

pa se integriranjem potvrđuje da je

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t})dt \le 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}dt = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

tj. da je $O_{a,b} \le 2\pi\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, što smo i trebali.

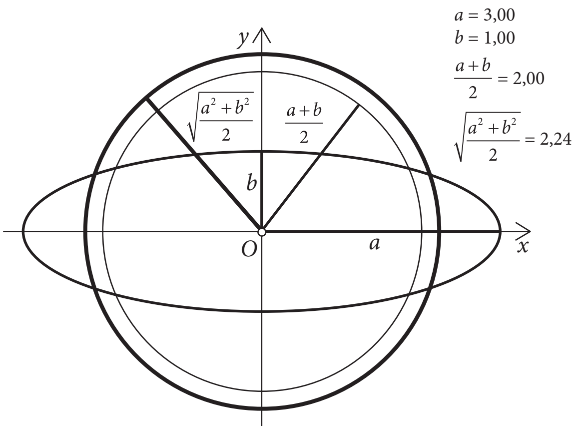
Analizirajući dokaze zaključujemo da se u svakoj nejednakosti jednakost postiže ako i samo ako je $b = a$. To znači da je u (3.4) jednakost ako i samo ako je $b = a$, tj. ako i samo ako je elipsa kružnica.

Za taj zaključak, a i za izvođenje gornjih nejednakosti, služili smo se sljedećim intuitivno jasnim svojstvom određenog integrala (koje se može i strogo matematički dokazati):

Ako za neprekinute funkcije g, h vrijedi $g(x) \le h(x)$ za sve $x \in [\alpha, \beta]$, onda je $\int_\alpha^\beta g(x)dx \le \int_\alpha^\beta h(x)dx$ uz jednakost ako i samo ako je $g(x) = h(x)$ za sve $x \in [\alpha, \beta]$.

Zaključimo, ako elipsa nije kružnica, tj. ako je $a \ne b$, onda vrijedi (sl. 6)

$$2\pi\frac{a+b}{2} < O_{a,b} < 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$



Slika 6.

4. Algoritam

Kako smo već rekli, eliptički integrali nisu elementarni. Jedna od posljedica je da, iako ima nekoliko formula za računanje opsega elipse pomoću njenih poluosi, svaka je u obliku beskonačnog reda (vidi na primjer [1], section 6). Ipak, za konkretnu elipsu opseg se može odrediti po volji točno, jer se i određeni integrali mogu približno računati s po volji odabranom točnošću. Postoji i algoritam koji se zasniva na aritmetičko-geometrijskoj sredini, kojim se vrlo brzo dolazi do preciznih približnih vrijednosti za opseg elipse.

Aritmetičko-geometrijska sredina $M(a, b)$ različitih pozitivnih brojeva a, b definira se kao

$$M(a,b) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

gdje je $a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = \sqrt{ab}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, n = 1,2,3,\ldots$

Kako je aritmetička sredina veća od geometrijske, za svaki n vrijedi $a_n > b_n$, niz a_n je strogo padajući, dok je niz b_n strogo rastući. Nadalje,

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} < \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})}{2} = \frac{a_n - b_n}{2},$$

pa se indukcijom lako pokaže da je

$$a_n - b_n < \frac{|a-b|}{2^n}, \text{ za sve } n,$$

tj. razlika između a_n i b_n teži k nuli kad n teži u beskonačnost. Zato nizovi (a_n) i (b_n) imaju zajednički limes $M(a, b)$. Slučaj $a = b$ može se uključiti tako da se stavi $M(a, a) = a$.

U nastavku još pretpostavimo da je $a > b$ i dodatno definirajmo $a_0 = a$, $b_0 = b$.

Na primjeru $a = 3$, $b = 1$ pokazujemo kako i jedan i drugi niz brzo konvergiraju (tablica 1). Izračunato je, koristeći se Excelom, pet prvih članova nizova (a_n), (b_n) na 9 decimalnih mjesta. Vidi se kako su a_2, b_2 jednaki na dva decimalna mjesta, a_3, b_3 na pet, dok su a_4, b_4 jednaki na svih 9 decimalnih mjesta (a računajući s većim brojem decimala pokazuje se da su jednaki na 12 decimalnih mjesta). Uočava se da je niz (a_n) padajući, a (b_n) rastući.

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \qquad b \quad \sqrt{ab}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

0	3	1
1	2	1.732050808
2	1.866025404	1.861209718
3	1.863617561	1.863616005
4	1.863616783	1.863616783
5	1.863616783	1.863616783

Tablica 1.

Za algoritam približnog računanja opsega elipse s poluosima a, b (gdje je $a > b$) definiramo

$$c_n^2 = a_n^2 - b_n^2,\ S_n = \frac{1}{2}(c_0^2 + 2c_1^2 + 4c_2^2 + \ldots + 2^n c_n^2),\ S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Može se pokazati da vrijedi (vidi [1], Theorem 4)

$$O_{a,b} = 2\pi \frac{a^2 - S}{M(a,b)}.$$

U tablici 2 ilustrirana je ta formula za $a = 3$, $b = 1$ tako što su izračunate vrijednosti izraza $2\pi \frac{a^2 - S_n}{a_n}$ i $2\pi \frac{a^2 - S_n}{b_n}$ do $n = 5$. Te su vrijednosti aproksimacije stvarnog opsega $2\pi \frac{a^2 - S}{M(a,b)}$, prva uvijek manja, a druga veća. Konačni rezultati zapisani su na 8 decimala.

$a_1 = \frac{a+b}{2}$ $\qquad b_1 = \sqrt{ab}$

	$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$	$c_n^2 = a_n^2 - b_n^2$	$2^n c_n^2$	S_n	$2\pi \frac{a^2 - S_n}{a_n}$	$2\pi \frac{a^2 - S_n}{b_n}$
0	3	1	8	8	4	10.47197551	31.41592654
1	2	1.732050808	1	2	5	12.56637061	14.51039491
2	1.866025404	1.861209718	0.017949192	0.07179677	5.035898385	13.34772023	13.38225606
3	1.863617561	1.863616005	5.79771E-06	4.63817E-05	5.035921576	13.36488764	13.3648988
4	1.863616783	1.863616783	6.06182E-13	9.69891E-12	5.035921576	13.36489322	13.36489322
5	1.863616783	1.863616783	0	0	5.035921576	13.36489322	13.36489322

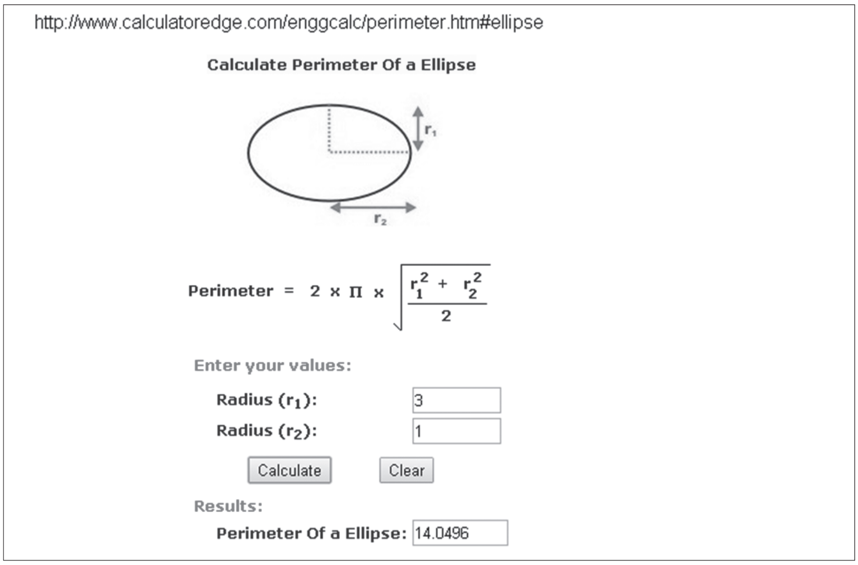
Tablica 2.

Najprije uočimo da nizovi (c_n^2) i $(2^n c_n^2)$ brzo konvergiraju prema nuli pa S_n brzo konvergira prema S. Vidi se da se aproksimacije $2\pi \frac{a^2 - S_n}{a_n}$ i $2\pi \frac{a^2 - S_n}{b_n}$ za $n = 0$ bitno razlikuju, za $n = 1$ razlika je još uvijek oko 2, za $n = 2$ one su jednake na jednu decimalu, za $n = 3$ na četiri, dok su za $n = 4$ jednake na svih 8 decimalnih mjesta. Zato je opseg elipse s poluosima $a = 3$, $b = 1$ približno jednak 13.36489322 i taj je rezultat točan na svih osam decimala. Keplerova aproksimacija daje $4\pi = 12.56637$, što je manje, a Eulerova $2\pi\sqrt{5} \approx 14.04963$, što je veće od opsega. Eulerova je aproksimacija nešto bolja od Keplerove, što vrijedi općenito, a ne samo u ovome primjeru.

Na internetskim stranicama nude se kalkulatori za računanje opsega elipse. Njih treba oprezno koristiti. Navodimo nekoliko primjera.

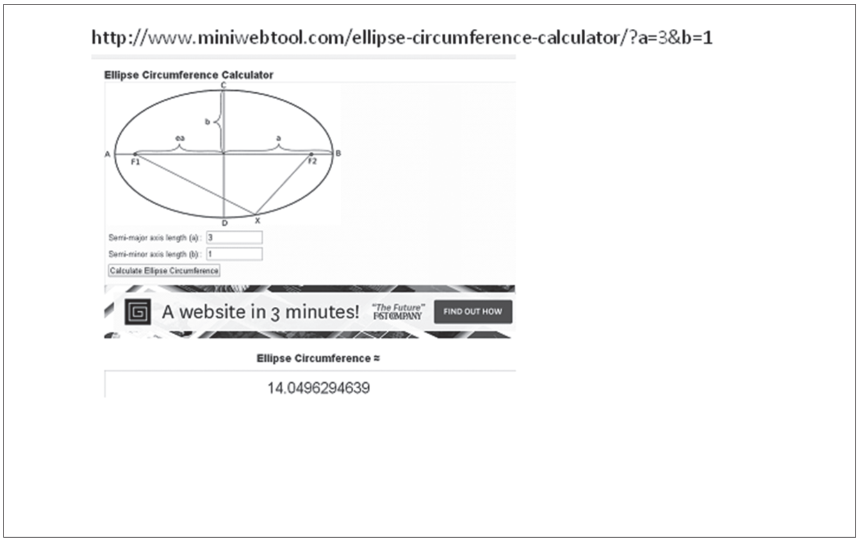
1. http://www.calculatoredge.com/enggcalc/perimeter.htm

daje približnu vrijednost opsega prema Eulerovoj aproksimaciji. Ta je formula i navedena kao da je točna, a ne približna, što može zavarati (sl. 7).



Slika 7.

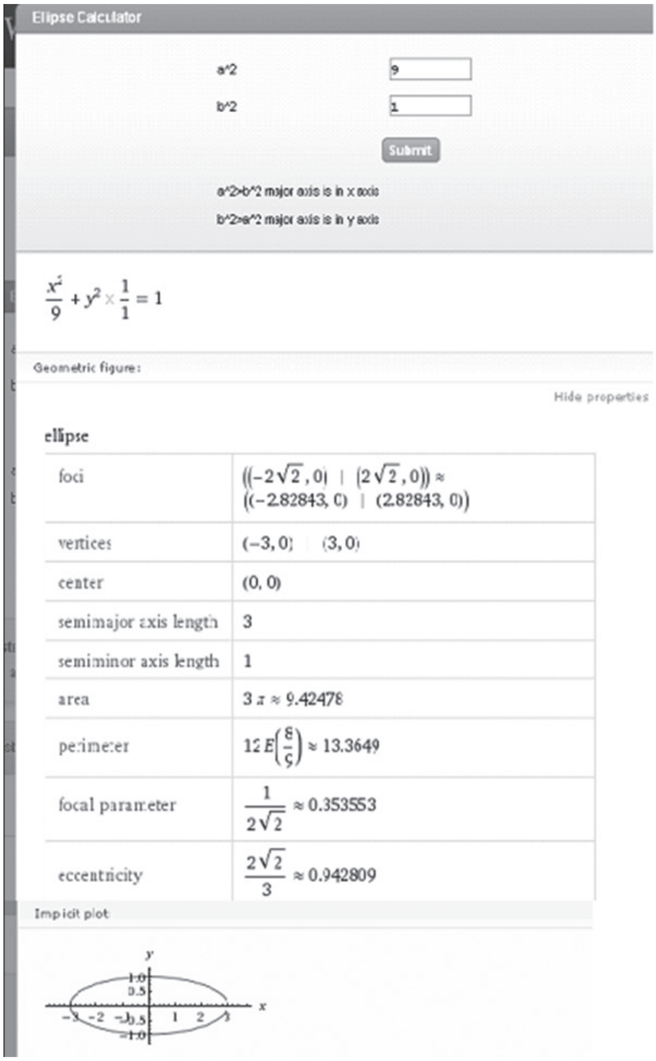
2. na http://www.miniwebtool.com/ellipse-circumference-calculator/ također se koristi Eulerova aproksimacija, ali je u popratnom tekstu navedeno da je to približna formula (sl. 8).



Slika 8.

3. Na http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=5e7264477cf9b6b237a0d254cf0324e2

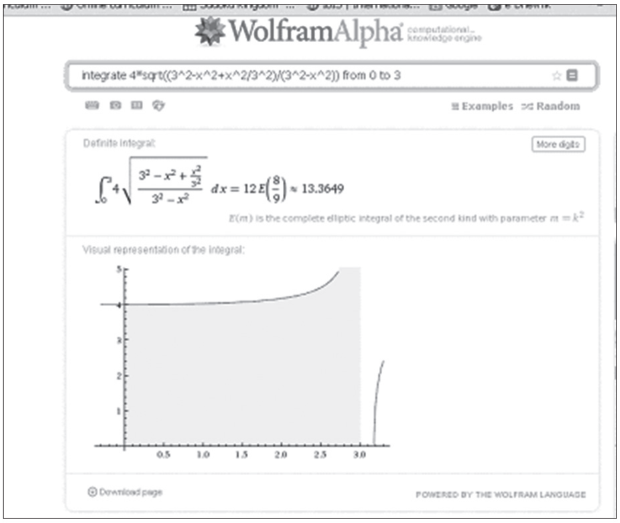
računaju se razni elementi elipse. Za opseg se daje korektna aproksimacija na osnovi računanja eliptičkog integrala. Za ulazne podatke traže se kvadrati poluosi, što je često jednostavnije (sl. 9).



Slika 9.

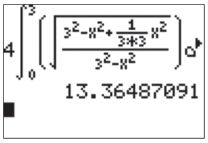
4. Ako opseg elipse znamo prikazati u obliku određenog integrala, onda za računanje možemo koristiti metode dostupne na webu, primjerice na

   http://www.wolframalpha.com/calculators/integral-calculator/ (sl. 10).



Slika 10.

5. Danas mnoga grafička i znanstvena džepna računala imaju aplikaciju za računanje određenih integrala. Na sl. 11 izračun je grafičkog računala TI- 84.



Slika 11.

Literatura

1. G. Almkvist i B. Berndt, *Gauss, Landen, Ramanujan, the Arithmetic-Geometric Mean, Ellipses, π, and the Ladies Diary*, Amer. Math. Monthly, Vol. 95, No. 7 (1988.), 585–608
2. I. Gusić, *On the bounds for the perimeter of an ellipse*, prihvaćeno za objavljivanje u Mathematical Gazette
3. M. S. Klamkin, *Elementary Approximations to the Area of N – Dimensional Ellipsoids*, The Amer. Math. Monthly, Vol. 78, No. 3 (Mar., 1971.), pp. 280–283
4. R. E. Pfiefer, *Bounds on the Perimeter of an Ellipse via Minkowski Sums*, The College Mathematics Journal, Vol. 19, No. 4 (Sep., 1988.), pp. 348–350
5. G.J.O. Jameson, *Inequalities for the perimeter of an ellipse*, Math. Gazette 98 (2014.)