Primljen: 09.04.2015. Pregledni rad
Prihvaćen: 28.04.2015. UDK 519.2

Zakon razdiobe slučajne varijable kod bacanja jednog ili više simetričnih tijela

Law of random variable when throwing one or more dice

[1] Tibor Rodiger, [2] Tamara Srnec
[1] Međimursko veleučilište u Čakovcu, Bana Josipa Jelačića 22a, Čakovec, Hrvatska
[2] Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Vladimira Nazora 34, Čakovec, Hrvatska
e-mail: [1] trodiger@mev.hr

Sažetak: *U radu se promatraju zakoni razdiobe slučajne varijable kod bacanja jedne ili više igraćih kockica, događaji kada se računa veći broj, događaji kada se računa zbroj brojeva, te očekivanje, varijanca i standardna devijacija diskretne slučajne varijable. Posebno se izračunavaju vrijednosti za simetrična tijela sa 4, 6, 8, 10, 12 i 100 strana, s obzirom na to da su ona i dostupna u raznim igrama.*

Ključne riječi: *zakon razdiobe slučajne varijable, simetrična igraća kocka, simetrično tijelo, očekivanje, varijanca i standardna devijacija diskretne slučajne varijable.*

Abstract: *This paper studies the laws of distribution of random variables when throwing one or more dice,* the *events when higher number is calculated, the events when the sum of the numbers is calculated*, *as well as expectation*, *variance and standard deviation of a discrete random variable*. *Particular values are calculated for symmetric bodies with 4*, *6*, *8*, *10*, *12 and 100 sides*, *since they are available in various games*.

Key words: *Law of random variable, throwing dice, expected value of a random variable, variance and standard deviation of a random variable.*

1. Uvod

Igre u kojima se baca igraća kocka ili neko drugo tijelo prisutne su od samih početaka civilizacija. Popularne su među djecom, ali i u svim životnim dobima. Osim kocke, sve su popularniji i drugi oblici pravilnih geometrijskih tijela, tj. tetraedar, oktaedar, dodekaedar, ikosaedar i još neki oblici nepravilnih geometrijskih tijela pod uvjetom da su simetrični.

U igrama se danas najčešće koriste simetrična tijela koja imaju četiri, šest, osam, deset, dvanaest, dvadeset i sto strana.

Slika 1. Igraća tijela.

Izvor: vlastita fotografija

2. Bacanje jednog simetričnog tijela

Pojam događaja najjednostavnije se dovodi u vezu sa stohastičkim pokusom. Tako se naziva svaki pokus koji nije unaprijed određen. Ishod pokusa naziva se elemantarni događaj. Elementarni događaji označavaju se s ω. Skup svih elementarnih događaja označava se s Ω. (Elezović, 2013.) Jednom kad se odredi prostor elementarnih događaja slučajnog pokusa, potrebno je izraziti stupanj vjerovanja da se neki događaj dogodi. U praksi se često susreću primjeri pokusa u kojima je prostor elementarnih događaja konačan i svaki je pojedini ishod jednako moguć. Velik broj klasičnih igara na sreću odgovara tim pretpostavkama (Benšić, Čuvak, 2014.).

Klasičan način računanja vjerojatnosti:

Pretpostavke na pokus: konačan prostor elementarnih događaja, svi su ishodi pokusa jednako mogući

Događaj: $A \subseteq \Omega$

Vjerojatnost događaja A kvocijent broja elemenata skupa A i broja elemenata skupa Ω (Benšić, Čuvak, 2014.)

$$\mathcal{P}(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}$$

Vjerojatnost je preslikavanje $\mathcal{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ definirano na algebri događaja $\mathcal{F}$ na prostoru elementanih događaja Ω, koja ima svojstva:

1. $\mathcal{P}(\Omega) = 1, \mathcal{P}(\emptyset) = 0$
2. Ako je $A \subset B$, onda vrijedi $\mathcal{P}(\mathrm{A}) \leq \mathcal{P}(\mathrm{B})$
3. Ako su A i B disjunktni događaji, onda je $\mathcal{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathcal{P}(\mathrm{A}) + \mathcal{P}(\mathrm{B})$

Vjerojatnosni prostor Ω, koji posjeduje samo konačno mnogo elementarnih događaja nazivamo konačni vjerojatnosni prostor (Elezović, 2013.).

Preslikavanje $X: \Omega \to S$ je diskretna slučajna varijabla ako je za svaki $x_k \in S$ skup $A_k := \{\omega \in \Omega : \mathrm{X}(\omega) = x_k\}$ događaj. Označimo $p_k := \mathcal{P}(A_k) = \mathcal{P}(X = x_k)$.

Zakon razdiobe slučajne varijable X sastoji se od područja vrijednosti koje ona poprima i odgovarajućih vjerojatnosti (Elezović, 2013.). Zapisuje se:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

Očekivanje slučajne varijable X definira se kao zbroj

$$E(X) = \sum_k x_k p_k$$

Varijanca slučajne varijable X definira se kao

$$D(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Varijanca se često označava i σ^2

Standardna devijacija slučajne varijable X definira se kao $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Kod bacanja jednog simetričnog tijela od n strana konačni vjerojatnosni prostor je

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Svi elementarni događaji imaju jednake vjerojatnosti, a vjerojatnost da padne pojedini broj je:

$$\mathcal{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

Zakon razdiobe slučajne varijable X je

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Očekivanje diskretne slučajne varijable može se izračunati tako da se zbroj svih vrijednosti podijeli s n.

$$E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Kako bi se dobila potpunija slika zakona razdiobe, osim zakona razdiobe slučajne varijable X i očekivanja diskretne slučajne varijable izračunava se i varijanca i standardna devijacija diskretne slučajne varijable, te se uspoređuju standardna devijacija i očekivanje:

$$\sigma^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\sigma^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\sigma^2 = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$$

$$\sigma^2 = \frac{(n+1)[2(2n+1) - 3(n+1)]}{12}$$

$$\sigma^2 = \frac{(n+1)[4n + 2 - 3n - 3]}{12}$$

$$\sigma^2 = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Određuju se formule za standardnu devijaciju i koeficijent varijacije, tj. omjer standardne devijacije i očekivanja:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$$

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$V = \frac{\sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}}{\frac{n+1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{n^2 - 1}{12}}{\frac{(n+1)^2}{4}}} = \sqrt{\frac{\frac{(n-1)(n+1)}{12}}{\frac{(n+1)^2}{4}}}$$

$$V = \sqrt{\frac{n-1}{3(n+1)}}$$

Što je n veći to su i očekivanje i standardna devijacija veći. Za razliku od očekivanja i standardne devijacije, koeficijent varijacije teži ka $\frac{\sqrt{3}}{3}$ što približno iznosi 0.577. Izračunate vrijednosti prikazane su u tablici.

Tablica 1. Izačuni očekivanja i standardne devijacije za bacanje jednog simetričnog tijela.

Broj strana simetričnog tijela	Vjerojatnost da padne pojedini broj k	Očekivanje	Standardna devijacija	Koeficijent varijacije
Formula	$\mathcal{P}(X = k) = \frac{1}{n}$	$E(X) = \frac{n+1}{2}$	$\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$	$V = \sqrt{\frac{n-1}{3(n+1)}}$
4	0.25	2.5	1.118	0.447
6	0.1667	3.5	1.708	0.488
8	0.125	4.5	2.291	0.509
10	0.1	5.5	2.872	0.522
12	0.0833	6.5	3.452	0.531
20	0.05	10.5	5.766	0.549
100	0.01	50.5	28.866	0.572

Izvor: vlastiti izračun.

3. Bacanje dva simetrična tijela i računanje većeg broja

U nekim igrama dopušteno je da igrač baci dva simetrična tijela i da koristi veći dobiveni broj. Vjerojatnosti da se dobije određeni broj više nisu jednake, a samim time se mijenjaju i očekivanja, standardne devijacije i koeficijenti varijacije.

Ako se bacaju dva simetrična tijela od n strana postoji n^2 mogućnosti, točnije postoji n^2 uređenih parova. Ukoliko se to raspiše dobije se:

$$(1,1)\ (1,2)\ (1,3) \dots (1,j) \dots (1,n)$$
$$(2,1)\ (2,2)\ (2,3) \dots (2,j) \dots (2,n)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$(i,1)\ (i,2)\ (i,3) \dots (i,j) \dots (i,n)$$

$$(n,1)\ (n,2)\ (n,3) \dots (n,j) \dots (n,n)$$

Povoljni uređeni parovi da bi se dobio broj k nalaze se u k-tom retku i k-tom stupcu.
Ti parovi u k-tom retku su $(k,1),(k,2),(k,3),\dots,(k-1,k),(k,k)$, a u k-tom stupcu $(1,k),(2,k),(3,k),\dots,(k,k-1),(k,k)$.
Ukupno ih je $2k-1$.

Ako se bace dva simetrična tijela i uzme veća vrijednost, dobiva se vjerojatnost da padne broj k:

$$\mathcal{P}(X=k)=\frac{2k-1}{n^2}$$

Vjerojatnost da padne najmanja vrijednost je:

$$\mathcal{P}(X=1)=\frac{1}{n^2}$$

Vjerojatnost da padne najveća vrijednost je:

$$\mathcal{P}(X=n)=\frac{2n-1}{n^2}$$

Zakon razdiobe slučajne varijable X je:

$$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ \frac{1}{n^2} & \frac{3}{n^2} & \dots & \frac{2k-1}{n^2} & \dots & \frac{2n-1}{n^2} \end{pmatrix}$$

Isto kao i kod događaja dok se baca jedno simetrično tijelo, izračunava se očekivanje i mjere raspršenosti.

$$E(X)=\frac{1\cdot(2\cdot 1-1)+2\cdot(2\cdot 2-1)+3\cdot(2\cdot 3-1)+\dots+n\cdot(2n-1)}{n^2}$$

$$E(X)=\frac{1\cdot 2\cdot 1-1+2\cdot 2\cdot 2-2+3\cdot 2\cdot 3-3+\dots+n\cdot 2\cdot n-n}{n^2}$$

$$E(X)=\frac{2\cdot 1^2+2\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\dots+2\cdot n^2-1-2-\dots-n}{n^2}$$

$$E(X)=\frac{2\cdot(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-(1+2+\cdots+n)}{n^2}$$

$$E(X)=\frac{2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$E(X)=\frac{\frac{2n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)}{6}}{n^2}$$

$$E(X)=\frac{n(n+1)[2(2n+1)-3]}{6n^2}$$

$$E(X)=\frac{(n+1)[4n+2-3]}{6n}=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$

$$\sigma^2=\frac{1^2\cdot(2\cdot1-1)+2^2\cdot(2\cdot2-1)+3^2\cdot(2\cdot3-1)+\cdots+n^2\cdot(2n-1)}{n^2}-E(X)^2$$

$$\sigma^2=\frac{1^2\cdot2\cdot1-1^2+2^2\cdot2\cdot2-2^2+3^2\cdot2\cdot3-3^2+\cdots+n^2\cdot2\cdot n-n^2}{n^2}-E(X)^2$$

$$\sigma^2=\frac{2\cdot1^3+2\cdot2^3+2\cdot3^3+\cdots+2\cdot n^3-1^2-2^2-\cdots-n^2}{n^2}-E(X)^2$$

$$\sigma^2=\frac{2\cdot(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)-(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{n^2}-E(X)^2$$

$$\sigma^2=\frac{2\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2}-E(X)^2$$

$$\sigma^2=\frac{\frac{3n^2(n+1)^2-n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2}-E(X)^2$$

$$\sigma^2=\frac{n(n+1)[3\,n(n+1)-(2n+1)]}{6n^2}-E(X)^2$$

$$\sigma^2=\frac{(n+1)[3\,n^2+3n-2n-1]}{6n}-E(X)^2$$

$$\sigma^2=\frac{(n+1)(3\,n^2+n-1)}{6n}-\left[\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\right]^2$$

$$\sigma^2=\frac{(n^2-1)(2n^2+1)}{36n^2}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{(n^2-1)(2n^2+1)}{36n^2}}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{(n^2-1)(2n^2+1)}}{6n}$$

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$V = \frac{\frac{\sqrt{(n^2-1)(2n^2+1)}}{6n}}{\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}}$$

$$V = \frac{\sqrt{(n^2-1)(2n^2+1)}}{(n+1)(4n-1)} = \sqrt{\frac{(n-1)(n+1)(2n^2+1)}{(n+1)^2(4n-1)^2}}$$

$$V = \sqrt{\frac{(n-1)(2n^2+1)}{(n+1)(4n-1)^2}}$$

Dobiveni podaci prikazani su u tablici br. 2.

Tablica 2. Izačuni očekivanja i standardne devijacije za bacanje dva simetričnog tijela i računanje većeg broja.

Broj strana	Očekivanje	Standardna devijacija	Koeficijent varijacije
Formula	$E(X) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$	$\sigma = \frac{\sqrt{(n^2-1)(2n^2+1)}}{6n}$	$V = \sqrt{\frac{(n-1)(2n^2+1)}{(n+1)(4n-1)^2}}$
4	3.125	0.927	0,296648
6	4.472	1.404	0,313957
8	5.813	1.878	0,323118
10	7.15	2.351	0,32882
12	8.486	2.823	0,332718
20	13.825	4.711	0,340766
100	67.165	23.57	0,350921

Izvor: vlastiti izračun.

Tablica 3. Izačuni očekivanja i vjerojatnosti da padne najmanja i najveća vrijednost.

Broj strana	Očekivanje	Vjerojatnost da padne najmanja vrijednost	Vjerojatnost da padne najveća vrijednost
Formula	$E(X) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$	$\mathcal{P}(X=1) = \frac{1}{n^2}$	$\mathcal{P}(X=n) = \frac{2n-1}{n^2}$
4	3.125	0,0625	0,4375
6	4.472	0,027778	0,305556

8	5.813	0,015625	0,234375
10	7.15	0,01	0,19
12	8.486	0,006944	0,159722
20	13.825	0,0025	0,0975
100	67.165	0,0001	0,0199

Izvor: vlastiti izračun.

Iz tablice 3. je vidljivo da se očekivanje povećalo u odnosu na bacanje samo jednog simetričnog tijela, dok se standardna devijacija smanjila. Vidljivo je i da se vjerojatnost da padne najmanja vrijednost smanjila n puta, dok se vjerojatnost da padne najveća vrijednost gotovo udvostručila. Izračunavaju se te razlike. Ako se oduzmu očekivanja dobije se:

$$\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}-\frac{n+1}{2}=$$

$$=\frac{(n+1)(4n-1)-3n(n+1)}{6n}=$$

$$=\frac{(n+1)(4n-1-3n)}{6n}=$$

$$=\frac{(n+1)(n-1)}{6n}=$$

$$=\frac{n^2-1}{6n}$$

Ako se oduzmu standardne devijacije dobije se:

$$\frac{\sqrt{(n^2-1)(2n^2+1)}}{6n}-\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(n^2-1)(2n^2+1)}{36n^2}}-\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}=$$

$$=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}\left(\sqrt{\frac{2n^2+1}{3n^2}}-1\right)$$

Vidimo da se kod očekivanja ta razlika povećava, dok se standardna devijacija smanjuje.

Razlika da padne najveća vrijednost je:

$$\frac{2n-1}{n^2}-\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{2n-1-n}{n^2}=$$

$$=\frac{n-1}{n^2}$$

Te razlike se mogu promotriti u sljedećoj tablici.

Tablica 4. Usporedba bacanja jednog simetričnog tijela i bacanja dva simetrična tijela i računanje većeg broja.

Broj strana	Vj. da padne najveći broj (1d)	Vj. da padne najveći broj (max)	Razlika vj. $\frac{n-1}{n^2}$	$E(X)$ 1 s. tijelo	$E(X)$ max	Razlika $\frac{n^2-1}{6n}$	St. Dev. (1d)	St. Dev. (max)	Razlika stand. Devija-cija
4	0.25	0,4375	0,1875	2.5	3.125	0,625	1.118	0.927	0.191
6	0.1667	0,305556	0,138889	3.5	4.472	0,972	1.708	1.404	0.304
8	0.125	0,234375	0,109375	4.5	5.813	1,3125	2.291	1.878	0.413
10	0.1	0,19	0,09	5.5	7.15	1,65	2.872	2.351	0.521
12	0.0833	0,159722	0,076389	6.5	8.486	1,986	3.452	2.823	0.629
20	0.05	0,0975	0,0475	10.5	13.825	3,325	5.766	4.711	1.055
100	0.01	0,0199	0,0099	50.5	67.165	16,665	28.866	23.57	5.296

Izvor: vlastiti izračun.

4. Bacanje dva simetrična tijela i njihov zbroj

Promatra se slučaj gdje se bacaju dva simetrična tijela i dobiveni se brojevi zbrajaju. Ukupno je n^2 mogućnosti, najmanja vrijednost koja se može dobiti je 2, a najveća $2n$, tj. konačni vjerojatnosni prostor je:

$$\Omega = \{2, 3, \dots, 2n\}$$

Ako se pogleda raspis u prethodnom primjeru, vidljivo je da se na dijagonalama nalaze uređeni parovi kojima je zbroj jednak.

Može se zaključiti da ima najviše uređenih parova kojimaje zbroj $n+1$ i da ih ima n.

Tablica 5. Broj mogućnosti da padne određeni zbroj.

Zbroj	Broj mogućnosti
2	1
3	2
4	3
...	...
n	$n-1$
$n+1$	n

$n+2$	$n-1$
...	...
$2n-2$	3
$2n-1$	2
$2n$	1

Izvor: vlastiti izračun.

Vjerojatnost da se dobije najmanja i najveća vrijednost je:

$$\mathcal{P}(X=2)=\frac{1}{n^2}$$

$$\mathcal{P}(X=2n)=\frac{1}{n^2}$$

Vjerojatnost da se dobije srednja vrijednost je:

$$\mathcal{P}(X=n+1)=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$$

Zakon razdiobe slučajne varijable X je:

$$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ \frac{1}{n^2} & \frac{2}{n^2} & \dots & \frac{n-1}{n^2} & \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n^2} & \dots & \frac{2}{n^2} & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

Izračunava se očekivanje i mjere raspršenosti:

$$E(X)=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+(n-1)\cdot n+n\cdot(n+1)+(n-1)\cdot(n+2)+\dots+2\cdot(2n-1)+1\cdot 2n}{n^2}$$

$$E(X)=\frac{1\cdot(2+2n)+2\cdot(3+2n-1)+\dots+(n-1)\cdot(n+n+2)+n\cdot(n+1)}{n^2}$$

$$E(X)=\frac{1\cdot(2+2n)+2\cdot(2n+2)+\dots+(n-1)\cdot(2n+2)+n\cdot(n+1)}{n^2}$$

$$E(X)=\frac{(2+2n)(1+2+\dots+(n-1))+n\cdot(n+1)}{n^2}$$

$$E(X)=\frac{2(1+n)\left(\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right)+n\cdot(n+1)}{n^2}$$

$$E(X)=\frac{(1+n)(n-1)\cdot n+n\cdot(n+1)}{n^2}$$

$$E(X)=\frac{n\cdot(n+1)(n-1+1)}{n^2}$$

$$E(X)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot n}{n^2}$$

$$E(X)=n+1$$

S obzirom na to da je zakon razdiobe slučajne varijable X simetričan, može se zaključiti:

$$\sigma^2 = \frac{(n+1-2)^2 \cdot 1 + (n+1-3)^2 \cdot 2 + \cdots + (n+1-n)^2 \cdot (n-1)}{n^2} \cdot 2$$

$$\sigma^2 = \frac{(n-1)^2 \cdot 1 + (n-2)^2 \cdot 2 + \cdots + (n-(n-1))^2 \cdot (n-1)}{n^2} \cdot 2$$

$$\sigma^2 = \frac{(n^2 - 2n \cdot 1 + 1^2)1 + (n^2 - 2n \cdot 2 + 2^2)2 + \cdots + (n^2 - 2n \cdot (n-1) + (n-1)^2)(n-1)}{n^2} \cdot 2$$

$$\sigma^2 = \frac{n^2\big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big) - 2n(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3}{n^2} \cdot 2$$

$$\sigma^2 = \frac{n^2 \frac{(n-1)n}{2} - 2n \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)^2 n^2}{4}}{n^2} \cdot 2$$

$$\sigma^2 = \frac{\frac{6n^3(n-1) - 4n(n-1)n(2n-1) + 3(n-1)^2 n^2}{6}}{n^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{n^2(n-1)(6n - 4(2n-1) + 3(n-1))}{6n^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(n-1)(n+1)}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{n^2-1}{6}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{6}}$$

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$V = \frac{\sqrt{\frac{n^2-1}{6}}}{n+1}$$

$$V = \sqrt{\frac{\frac{(n-1)(n+1)}{6}}{(n+1)^2}}$$

$$V = \sqrt{\frac{n-1}{6(n+1)}}$$

Dobiveni podaci prikazani su u Tablici 6.

Tablica 6. Izačuni očekivanja i standardne devijacije za bacanje dva simetrična tijela i njihov zbroj.

Broj strana	Očekivanje	Standardna devijacija	Koeficijent varijacije
Formula	$E(X) = n + 1$	$\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{6}}$	$V = \sqrt{\frac{n - 1}{6(n + 1)}}$
4	5	1.581	0.316
6	7	2.415	0,345
8	9	3.24	0,36
10	11	4.062	0,369
12	13	4.881	0,376
20	21	8.155	0,388
100	101	40.823	0,404

Izvor: vlastiti izračun.

Omjer standardne devijacije i očekivanja je manji nego kod bacanja jednog simetričnog tijela, tj. što je n veći to taj omjer teži ka $\frac{\sqrt{6}}{6}$, što približno iznosi 0.408.

4.1. Zbroj više kocaka

Dok smo imali samo jednu kocku svi događaji su imali jednake vjerojatnosti. Dok smo imali dvije kocke i računali zbroj, vjerojatnosti su se bitno promijelile. Što je vrijednost bliža očekivanju, to je vjerojatnost da se dobije ta vrijednost veća. Kad se baca više kocaka i zbroje se brojevi, zakon razdiobe slučajne varijable približava se normalnoj razdiobi.
Kod bacanja i kocki i računanje zbroja konačni vjerojatnosni prostor je

$$\Omega = \{i, i + 1, i + 2 \dots, 6i\}$$

4.1.1. Jedna kocka

Promotre li se sve mogućnosti i njihove vjerojatnosti dobiju se rezultati prikazani u Tablici 7.

Tablica 7. Broj mogućnosti i vjerojatnost za pojedini događaj kod bacanje jedne kocke.

Događaj	Broj mogućnosti	Vjerojatnost
1	1	0.1667
2	1	0.1667
3	1	0.1667

4	1	0.1667
5	1	0.1667
6	1	0.1667

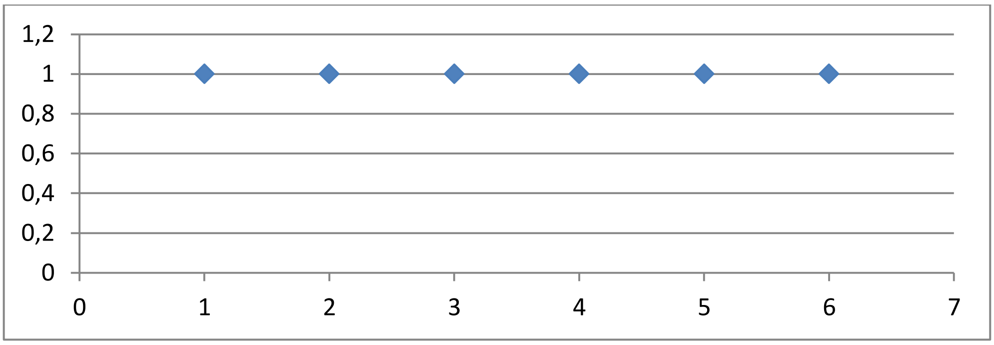
Izvor: vlastiti izračun.

Zakon razdiobe slučajne varijable X je:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Očekivanje je $E(X) = 3.5$ dok je standardna devijacija $\sigma = 1{,}708$.

Slika 2. Broj mogućnosti kod bacanja jedne kocke.



Izvor: vlastiti izračun.

4.1.2. Dvije kocke i njihov zbroj

Promotre li se sve mogućnosti i njihove vjerojatnosti dobiju se rezultati prikazani u Tablici 8.

Tablica 8. Broj mogućnosti i vjerojatnost za pojedini događaj kod bacanje dvije kocke i njihov zbroj.

Događaj	Broj mogućnosti	Vjerojatnost
2	1	0,027778
3	2	0,055556
4	3	0,083333
5	4	0,111111
6	5	0,138889
7	6	0,166667
8	5	0,138889
9	4	0,111111

10	3	0,083333
11	2	0,055556
12	1	0,027778

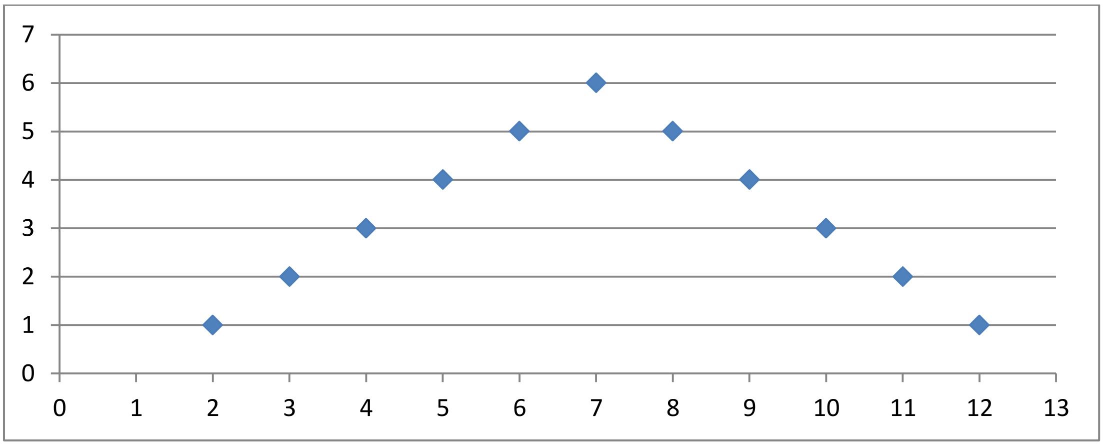
Izvor: vlastiti izračun.

Zakon razdiobe slučajne varijable X je:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

Očekivanje je $E(X) = 7$ dok je standardna devijacija $\sigma = 2.415$.

Slika 3. Broj mogućnosti kod bacanja dvije kocke i njihov zbroj.



Izvor: vlastiti izračun.

4.1.3. Tri kocke i njihov zbroj

Promotre li se sve mogućnosti i njihove vjerojatnosti dobiju se rezultati prikazani u Tablici 9.

Tablica 9. Broj mogućnosti i vjerojatnost za pojedini događaj kod bacanje tri kocke i njihov zbroj.

Događaj	Broj mogućnosti	Vjerojatnost
3	1	0,462963
4	3	1,388889
5	6	2,777778
6	10	4,62963
7	15	6,944444
8	21	9,722222

9	25	11,57407
10	27	12,5
11	27	12,5
12	25	11,57407
13	21	9,722222
14	15	6,944444
15	10	4,62963
16	6	2,777778
17	3	1,388889
18	1	0,462963

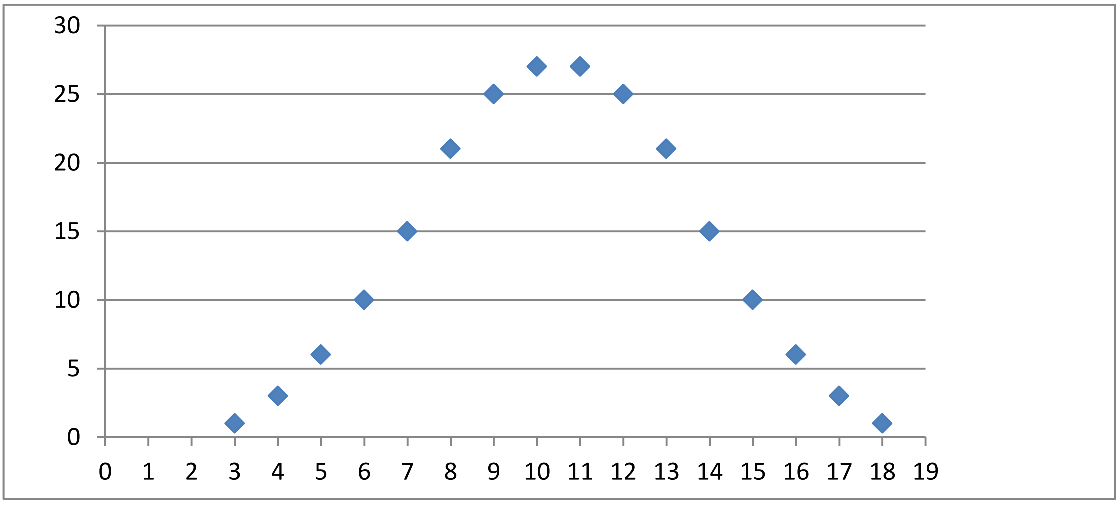
Izvor: vlastiti izračun.

Zakon razdiobe slučajne varijable X je:

$$X \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ \frac{1}{216} & \frac{3}{216} & \frac{6}{216} & \frac{10}{216} & \frac{15}{216} & \frac{21}{216} & \frac{25}{216} & \frac{27}{216} & \frac{27}{216} & \frac{25}{216} & \frac{21}{216} & \frac{15}{216} & \frac{10}{216} & \frac{6}{216} & \frac{3}{216} & \frac{1}{216} \end{pmatrix}$$

Očekivanje je $E(X) = 10.5$ dok je standardna devijacija $\sigma = 2.958$.

Slika 4. Broj mogućnosti kod bacanja tri kocke i njihov zbroj.



Izvor: vlastiti izračun.

4.1.4. Četiri kocke i njihov zbroj

Promotre li se sve mogućnosti i njihove vjerojatnosti dobiju se rezultati prikazani u Tablici 10.

Tablica 10. Broj mogućnosti i vjerojatnost za pojedini događaj kod bacanje četiri kocke i njihov zbroj.

Događaj	Broj mogućnosti	Vjerojatnost
4	1	0,07716
5	4	0,308642
6	10	0,771605
7	20	1,54321
8	35	2,700617
9	56	4,320988
10	80	6,17284
11	104	8,024691
12	125	9,645062
13	140	10,80247
14	146	11,26543
15	140	10,80247
16	125	9,645062
17	104	8,024691
18	80	6,17284
19	56	4,320988
20	35	2,700617
21	20	1,54321
22	10	0,771605
23	4	0,308642
24	1	0,07716

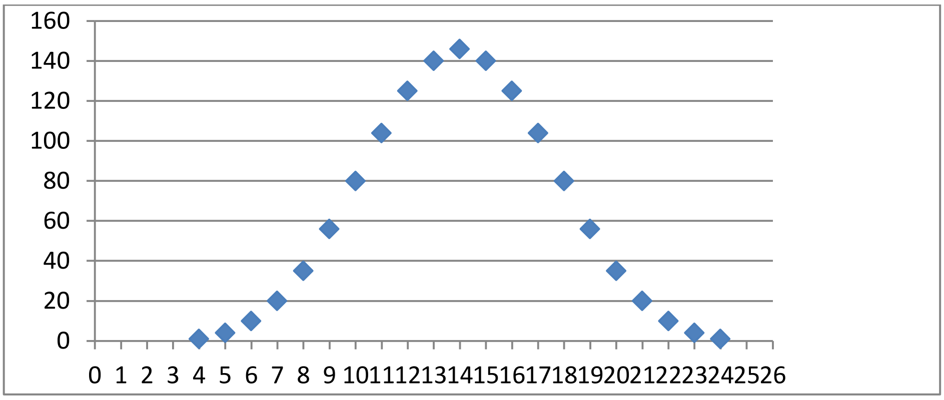
Izvor: vlastiti izračun.

Zakon razdiobe slučajne varijable X je:

$$X \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ \frac{1}{1296} & \frac{4}{1296} & \frac{10}{1296} & \frac{20}{1296} & \frac{35}{1296} & \frac{56}{1296} & \frac{80}{1296} & \frac{104}{1296} & \frac{125}{1296} & \frac{140}{1296} \end{pmatrix.$$
$$\begin{matrix} 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ \frac{146}{1296} & \frac{140}{1296} & \frac{125}{1296} & \frac{104}{1296} & \frac{80}{1296} & \frac{56}{1296} & \frac{35}{1296} & \frac{20}{1296} & \frac{10}{1296} & \frac{4}{1296} & \frac{1}{1296} \end{matrix}\Bigg)$$

Očekivanje je $E(X) = 14$ dok je standardna devijacija $\sigma = 3.416$.

Slika 5. Broj mogućnosti kod bacanja četiri kocke i njihov zbroj.



Izvor: vlastiti izračun.

4.1.5. Pet kocki i njihov zbroj

Promotre li se sve mogućnosti i njihove vjerojatnosti dobiju se rezultati prikazani u Tablici 10.

Tablica 11. Broj mogućnosti i vjerojatnost za pojedini događaj kod bacanja pet kocki i njihov zbroj.

Događaj	Broj mogućnosti	Vjerojatnost
5	1	0,01286
6	5	0,0643
7	15	0,192901
8	35	0,450103
9	70	0,900206
10	126	1,62037
11	205	2,636317
12	305	3,922325
13	420	5,401235
14	540	6,944444
15	651	8,371914
16	735	9,45216
17	780	10,03086
18	780	10,03086
19	735	9,45216
20	651	8,371914
21	540	6,944444
22	420	5,401235
23	305	3,922325
24	205	2,636317

25	126	1,62037
26	70	0,900206
27	35	0,450103
28	15	0,192901
29	5	0,0643
30	1	0,01286

Izvor: vlastiti izračun.

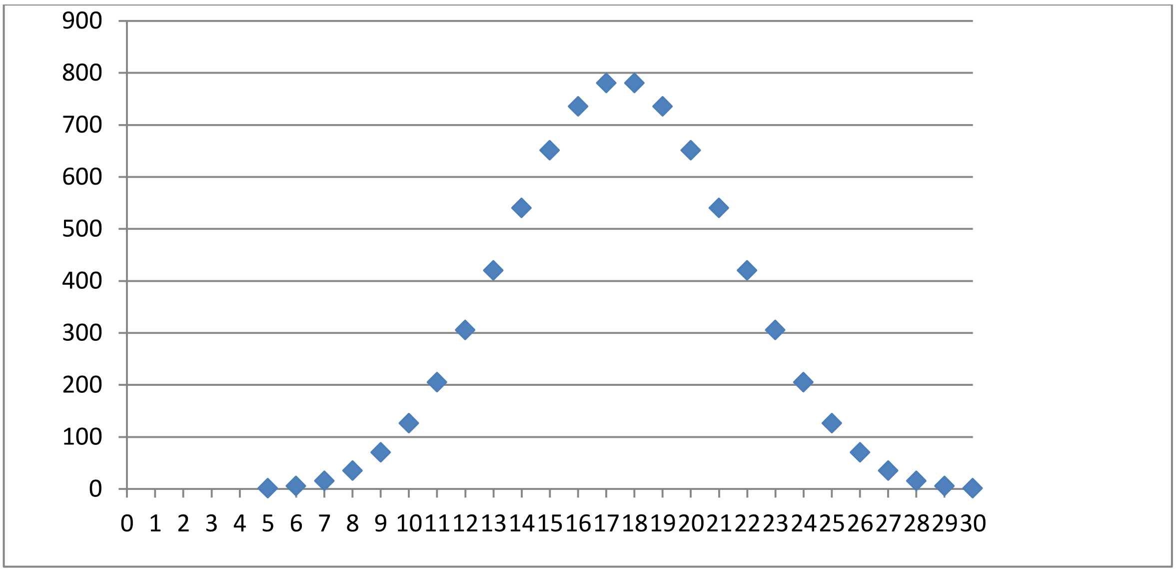
Zakon razdiobe slučajne varijable X je:

$$X \sim \left(\begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ \frac{1}{7776} & \frac{5}{7776} & \frac{15}{7776} & \frac{35}{7776} & \frac{70}{7776} & \frac{126}{7776} & \frac{205}{7776} & \frac{305}{7776} & \frac{420}{7776} & \frac{540}{7776} & \frac{651}{7776} & \frac{735}{7776} & \frac{780}{7776} \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\ \frac{780}{7776} & \frac{735}{7776} & \frac{651}{7776} & \frac{540}{7776} & \frac{420}{7776} & \frac{305}{7776} & \frac{205}{7776} & \frac{126}{7776} & \frac{70}{7776} & \frac{35}{7776} & \frac{15}{7776} & \frac{5}{7776} & \frac{1}{7776} \end{matrix} \right)$$

Očekivanje je $E(X) = 17.5$ dok je standardna devijacija $\sigma = 3.819$.

Slika 6. Broj mogućnosti kod bacanja pet kocki i njihov zbroj.



Izvor: vlastiti izračun

Usporedbom očekivanja i standardne devijacije dobiju se rezultati prikazani u Tablici 12.

Tablica 12. Usporedba očekivanja i standardne devijacije kod bacanja više kockica i njihovog zbroja.

Broj kockica	Očekivanje	Standardna devijacija	Koeficijent Var	Vjerojatnost da padne broj unutar st. Dev.
1	3,5	1,707825	0,48795	0.6667
2	7	2,415229	0,345033	0.6667
3	10,5	2,95804	0,281718	0.6759
4	14	3,41565	0,243975	0.6821
5	17,5	3,818813	0,218218	0.696

Izvor: vlastiti izračun.

Što se povećava broj kocki, to je i veća vjerojatnost da se dobije broj bliži očekivanju. S povećavanjem broja kocki vjerojatnost da se dobije najmanja ili najveća vrijednost je izuzetno mala.

5. Zaključak

Zakoni razdiobe slučajne varijable kod bacanja simetričnih tijela prisutni su u nekom određenom obliku od samih početaka kockanja iako se teorija vjerojatnosti kao matematička disciplina počela razvijati tek u 16. stoljeću.

Ukoliko se baca simetrično tijelo s većim brojem strana, vjerojatnost da padne određeni broj je manja, razlika između najmanje i najveće vrijednosti se povećava, a time je igra i zanimljivija. Kad bacamo dvije kocke i promatramo zbroj dobivenih brojeva, vjerojatnosti se bitno mijenjaju. Očekivana vrijednost ima najveću vjerojatnost dok najmanja i najveća vrijednost imaju najmanje vjerojatnosti. Kod raznih igara u kojima postoje mogućnosti izbora, npr. bacanje dva tetraedra ili jednog oktaedra, tj. dvije mogućnosti kojima je zajednička najveća vrijednost, vidljivo je da kod oktaedra svi brojevi imaju jednake vjerojatnosti a kod dva tetraedra je najveću vjerojatnost ima broj 5. U igrama u kojima se jedna kocka ili jedno simetrično tijelo uzastopno baca više puta vidljivo je da što je veći broj bacanja veća je i vjerojatnost da zbrojevi svih tih bacanja budu vrlo blizu očekivanom broju.

Literatura

1. Benšić, M.; Šuvak, N. (2014). Uvod u vjerojatnost i statistiku. Osijek, Sveučilište J. J. Strossmayera.

2. Elezović, N. (2013). Vjerojatnost i statistika, Diskretna vjerojatnost. 3. izdanje, Zagreb, Element.
3. Papić, M. (2008). Primijenjena statistika u MS Excelu. Zagreb, Naklada Zoro.
4. Šošić, V.; Serdar, I. (2000). Uvod u statistiku. Zagreb, Školska knjiga.