

Stručni rad

Prihvaćeno 24. 5. 2014.

ANDREJ NOVAK  
ANDRIJA ŠTAJDUHAR

# Primjena linearne i nelinearne jednadžbe provođenja topline u obradi digitalne slike

## Application of Linear and Nonlinear Heat Equation in Digital Image Processing

### ABSTRACT

We will explore the application of partial differential equations on digital images. We will show how to use the heat equation to eliminate noise in an image, highlight important elements and prepare it for possible further processing. We also show known heat equation's theoretical results in a methodical sequence and then derive simple numerical schemes based on the finite differences method. Guided by the idea of image structure preservation, for example edge preservation, the central part of this article introduces Perona-Malik equation as an example of a nonlinear heat equation. We conclude by comparing linear and nonlinear heat equation application on a couple of test images.

**Key words:** heat equation, Perona-Malik equation

**MSC2010:** 68U10

## Primjena linearne i nelinearne jednadžbe provođenja topline u obradi digitalne slike

### SAŽETAK

Istraživat ćemo primjenu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u obradi digitalne slike. Primjenjujemo jednadžbu provođenja topline kako bismo na slici uklonili šum, istaknuli važne elemente i pripremili je za eventualnu daljnju obradu. Metodičkim slijedom dajemo teorijske značajke linearne difuzije, a zatim izvodimo jednostavne numeričke sheme temeljene na metodi konačnih razlika. Vođeni idejom očuvanja struktura na slici, primjerice rubova, u središnjem dijelu članka uvodimo Perona-Malikovu jednadžbu kao primjer nelinearne jednadžbe provođenja topline. Završavamo s usporedbom primjene linearne i nelinearne jednadžbe provođenja topline na testnim slikama.

**Ključne riječi:** jednadžba provođenja topline, Perona-Malikova jednadžba

Parcijalne diferencijalne jednadžbe uvele su novi pogled na obradu digitalne slike. Uspješnost metoda koje ih koriste nije iznenađujuća, budući da su takve jednadžbe polučile uspjeh i u drugim područjima, primjerice fizici, kemiji, elektrotehnici, graditeljstvu i drugdje. Dostupni su opsežni matematički rezultati, što omogućuje stvaranje jednostavnih numeričkih algoritama koje ćemo u ovom članku predstaviti. Metode temeljene na parcijalnim diferencijalnim jednadžbama jedne su od metoda u obradi slike koje imaju najbolje matematičke temelje, a razumijevanje ovih metoda vodilo je otkriću brojnih novih.

## 1 Linearna jednadžba provođenja topline

U nastavku će nam od interesa biti linearna jednadžba provođenja topline,

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (1)$$

uz koju idu i prikladni početni i/ili rubni uvjeti koje ćemo kasnije navesti. Ovdje pretpostavljamo da je vremenska

varijabla  $t > 0$ , a prostorna  $x \in U$ , gdje je  $U \subset \mathbb{R}^n$  otvoren skup. Nepoznata je funkcija  $u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x, t)$ , a operator  $\Delta$  djeluje na  $u$  obzirom na  $x$ , odnosno  $\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ . Ova jednadžba poznata je i pod nazivom *difuzijska jednadžba*.

### 1.1 Fizikalna interpretacija difuzijskog procesa

Poimanje fizikalnih procesa koji izjednačuju koncentraciju između povezanih područja prilično je intuitivno. Ono se može matematički formulirati Fickovim zakonom koji za jednu prostornu dimenziju glasi

$$\mathbf{F} = -A \frac{du}{dx}, \quad (2)$$

gdje je tok  $\mathbf{F}$  količina supstance po jedinici prostora i vremenu (npr. u  $\frac{\text{mol}}{\text{m}^2 \text{s}}$ ),  $A$  je difuzijski koeficijent,  $u$  je koncentracija (npr. u  $\frac{\text{mol}}{\text{s}}$ ) te  $x$  varijabla. Općeniti Fickov zakon glasi

$$\mathbf{F} = -A \nabla u. \quad (3)$$

Tok  $\mathbf{F}$  je uzrokovan gradijentom koncentracije  $u$ . Odnos između  $\mathbf{F}$  i  $\nabla u$  opisan je *difuzijskom matricom*  $A$ , koja je pozitivno definitna. Slučaj kada su  $\mathbf{F}$  i  $\nabla u$  paralelni naziva se *izotropan*, a u općem, *neizotropnom* slučaju,  $\mathbf{F}$  i  $\nabla u$  nisu paralelni.

Difuzija premješta masu bez gubitaka postojeće ili stvaranja nove. Ta činjenica može se opisati jednadžbom kontinuiteta

$$u_t = -\operatorname{div} \mathbf{F}.$$

Ako (3) umetnemo u jednadžbu kontinuiteta dobivamo *difuzijsku jednadžbu*

$$u_t = \operatorname{div}(A\nabla u),$$

što je upravo linearna jednadžba provođenja topline ako je  $A = I$  jedinična matrica. U obradi slika koncentraciju iz ovih razmatranja možemo poistovjetiti s intenzitetom boje na određenom mjestu na slici (piksel).

## 1.2 Početno-rubni problem

Neka je  $T > 0$ , definiramo parabolčki cilindar

$$U_T = U \times \langle 0, T \rangle,$$

i parabolčki rub

$$\Gamma_T = \bar{U}_T - U_T.$$

U nastavku želimo riješiti početno-rubni problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{na } U_T \\ u = g & \text{na } \Gamma_T. \end{cases} \quad (4)$$

Iz klasične teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi [2] poznat je sljedeći rezultat.

### **Teorem 1** (Jedinstvenost na ograničenim domenama)

Neka je  $g \in C(\Gamma_T)$ . Tada postoji najviše jedno rješenje  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$  problema (4).

Valja napomenuti da je rješenje na neograničenim domenama, uz uvjet da je funkcija  $g$  neprekidna i ograničena, također jedinstveno ali i glatko zato što je dobiveno konvolucijom

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \quad (5)$$

Vidimo da rješavanje jednadžbe provođenja topline zapravo znači konvoluiranje početne temperaturne distribucije, odnosno početnog uvjeta s Gaussovom funkcijom s

parametrom standardne devijacije  $\sigma = 2t$ . Vrlo je zanimljivo te bismo to ovdje htjeli posebno istaknuti, da iz toga slijedi da je primjena jednadžbe provođenja topline ekvivalentna poznatoj tehnici Gaussovog izgladivanja digitalne slike. Takav postupak poznati je filter koji se koristi za izgladivanje slika težinskim usrednjavanjem vrijednosti unutar određenog područja (npr. konvolucijom). Upravo iz toga dolazi ideja korištenja difuzije u obradi slike.

Zaključujemo uvodni teorijski dio, a u nastavku ćemo prethodna teorijska saznanja primjeniti u obradi digitalne slike.

## 1.3 Rješenje metodom konačnih razlika

Želimo početni problem (4) riješiti numerički. S obzirom na to da je slika zapravo matrica, u nastavku uzimamo da je  $U_T = [0, p] \times [0, q] \times \langle 0, T \rangle$ . Tada (4) ima oblik

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} & \text{na } U_T \\ u = g & \text{na } \Gamma_T. \end{cases} \quad (6)$$

Početnu diferencijalnu jednadžbu ćemo primjenom Taylorovog teorema zamijeniti s diferencijskom jednadžbom. Diskretiziramo pravokutnik  $[0, p] \times [0, q]$ , gdje su  $p$  i  $q$  dimenzije slike, s ciljem uspostavljanja odnosa između čvorova u diskretnoj mreži i piksela na slici, između kojih je u obje prostorne dimenzije jedinična udaljenost. Primjenom Taylorovog teorema parcijalne derivacije zamjenjujemo konačnim razlikama

$$\begin{aligned} u_t &\approx \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t}, \\ u_{xx} &\approx \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{\Delta x^2}, \\ u_{yy} &\approx \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{\Delta y^2}, \end{aligned}$$

što uvrštavanjem u (6) daje

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{\Delta y^2}.$$

Želimo promatrati evoluciju slike kroz vrijeme u diskretnim vremenskim koracima, što znači da nas za danu sliku zanima vrijednost piksela na istom mjestu u idućem vremenskom koraku. S obzirom na to da je  $\Delta x = \Delta y = 1$  dobivamo,

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \Delta t \left[ -4u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k \right].$$

Prethodna razmatranja možemo i jednostavno implementirati u programskom paketu SCILAB<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>SCILAB je besplatni program otvorenog koda za znanstveno računanje i numeričke simulacije koji se koristi u znanosti i industriji. SCILAB ima gotovo istu sintaksu kao i MATLAB, a više o programu se može pronaći na [www.scilab.org](http://www.scilab.org)



Slika 1: Otapanje početne slike (a) s vremenskim korakom  $\Delta t = 0.1$ . Na slikama (b), (c), (d), (e) i (f)  $T$  predstavlja proteklo vrijeme.

## 1.4 Simulacije

Posljednji dio ovog odjeljka prikazuje korištenje dosad izvedenih zaključaka na testnoj slici Lena. U programskom kôdu učitavamo sliku i zatim primjenjujemo izvedenu shemu.

```

u0 = imread('Lena.eps');
[p,q]=size(u0);

for t = 0:dt:T
    for i=2:(p-1)
        for j=2:(q-1)
            u_xx =
                (u0(i+1,j)-2*u0(i,j)+u0(i-1,j));
            u_yy =
                (u0(i,j+1)-2*u0(i,j)+u0(i,j-1));
            u(i,j) = u0(i,j) + dt*(u_xx+u_yy);
        end
    end
    u0=u;
end

```

## 2 Nelinearna difuzija

Unatoč tome što je linearna difuzija jednostavna i primjenjiva, ima nekoliko mana. Očiti problem kod takvog, Gaussovog izgladivanja nalazi se u tome što ne samo da izgladuje šum, već zamućuje važne elemente slike poput rubova, čineći ih tako težim za pronalaženje i analiziranje. Željeli bismo razviti alat koji nam omogućuje uklanjanje šuma na način koji bi zatim olakšao pronalaženje rubova i ostalih elemenata slike. To znači da se difuzija treba odvijati samo unutar zasebnih područja koja se nalaze na slici, „poštujući“ njihove postojeće rubove. Potrebno je difuziju prilagoditi tako da njeno djelovanje nije jednoliko na cijeloj slici, već ovisi o pojedinim pikselima i njihovim okolinama.

### 2.1 Perona-Malikova jednadžba

Ideja koju su prvi uveli Perona i Malik u [4] je prilagodba jednadžbe provođenja topline tako da difuzivnost ovisi o promjenama na slici. Prisjetimo se difuzijske jednadžbe iz prethodnog odjeljka. Za difuzivnost  $A$  uzeli smo jediničnu

matricu i time dobili jednadžbu provođenja topline. No,  $A$  ne mora biti jedinična, čak niti konstantna. Vidjet ćemo da će nam upravo odabir prikladne difuzivnosti  $A$  omogućiti postizanje traženih svojstava difuzije. Kao što je spomenuto, želimo potaknuti izgladivanje unutar područja, za razliku od izgladivanja preko granica područja. To bismo mogli postići tako da vrijednost difuzivnosti bude 1 unutar područja, a 0 (ili barem blizu 0) na granicama. Difuzija će se tada odvijati unutar svakog od područja zasebno, ne prelazeći granice. Na žalost, ne možemo unaprijed znati gdje se na slici nalaze rubovi. Jedino što možemo jest ocijeniti koliko se, s obzirom na zadani piksel, njegova okolina mijenja.

Neka je funkcija  $E = E(x, y)$  jedna takva ocjena definirana na slici. Bilo bi poželjno da  $E$  ima svojstva:

1.  $E(x, y) = 0$  unutar svakog zasebnog područja
2.  $E(x, y) = Ke(x, y)$  u svakoj rubnoj točki područja, gdje je  $e$  jedinični vektor normale na rub u točki  $(x, y)$ , a  $K$  lokalni kontrast, odnosno razlika između intenziteta sive slijeva i zdesna od ruba.

Difuzivnost  $A$  možemo odabrati tako da bude funkcija koja ovisi o ocjeni koju smo upravo naveli, odnosno neka je  $A = f(\|E\|_2)$ . Prema dosadašnjim razmatranjima,  $A$  bi trebala biti nenegativna padajuća funkcija takva da je  $f(0) = 1$ . Na taj način difuzija će se odvijati uglavnom unutar područja i neće imati utjecaja na rubovima gdje je ocjena  $E$  velika. Srećom, vidjet ćemo da upravo najjednostavnija ocjena, gradijent  $E = \nabla u$  daje izvrsne rezultate. Uzevši u obzir prethodno došli smo do Perona-Malikove jednadžbe,

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(f(|\nabla u|^2)\nabla u) & \text{na } U_T \\ u = g & \text{na } \Gamma_T \end{cases} \quad (7)$$

Zbog traženih svojstava funkcije difuzivnosti koje se najčešće koriste su

$$f(s^2) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}} \quad (8)$$

i

$$f(s^2) = e^{-\frac{s^2}{2\lambda^2}}, \quad (9)$$

gdje je  $\lambda > 0$ . Obje funkcije su monotono padajuće i  $f(s^2) = 1$  za  $s = 0$ , i  $f(s^2) = 0$  kada  $s \rightarrow \infty$ .

## 2.2 Teorijski rezultati za jednodimenzionalni model

Promotrimo sada jednodimenzionalni problem

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(f(u_x^2)u_x) & \text{na } U \times \langle 0, \infty \rangle \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{na } \partial U \times \langle 0, \infty \rangle \\ u = g & \text{na } U \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (10)$$

Za  $f$  uzmimo funkciju

$$f(s^2) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}.$$

Neka je funkcija toka dana s

$$\Phi(s) = s \cdot f(s^2) = s \cdot \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}} = \frac{\lambda^2 s}{\lambda^2 + s^2}.$$

Derivacija ove funkcije je

$$\Phi'(s) = \frac{\lambda^2(s^2 - \lambda^2)}{(\lambda^2 + s^2)^2}.$$

Dakle, ova funkcija postiže ekstrem kada je  $s^2 = \lambda^2$ . Kako je  $\lambda > 0$  imamo

$$\Phi'(s) < 0, \quad |s| > \lambda,$$

$$\Phi'(s) > 0, \quad |s| < \lambda.$$

Perona-Malikova jednadžba za jednu dimenziju glasi

$$\begin{aligned} u_t &= \left( f(s^2) \cdot u_x \right)_x \\ &= f'(u_x^2) \cdot 2u_x u_{xx} u_x + f(u_x^2) \cdot u_{xx} \\ &= \left( f(u_x^2) + f'(u_x^2) \cdot 2u_x \right) \cdot u_{xx} \\ &= \Phi'(u_x) \cdot u_{xx}. \end{aligned}$$

Za velike vrijednosti koeficijent  $\Phi'(u_x)$  očito postaje negativan, što vodi na difuziju *unatrag*. U dvodimenzionalnom slučaju bismo, kao u [1], dobili

$$u_t = \Phi'(|\nabla u|^2)u_{\eta\eta} + f(|\nabla u|^2)u_{\xi\xi}.$$

Ovdje su  $\eta$  i  $\xi$  koordinate paralelne s  $\nabla u$  i okomite na  $\nabla u$ , redom, što znači da je difuzija *unaprijed* duž tangenti na rješenje  $u$ , a *unaprijed-unatrag* duž smjera  $\nabla u$ . Očekujemo da će blizu ruba na slici  $\nabla u$  biti velik, što znači difuziju unatrag u smjeru gradijenta, rezultat čega je izoštravanje rubova umjesto njihova zamućenja. Prethodno navedeno objašnjava kako Perona-Malikova jednadžba ne samo da čuva rubove, već ih i dodatno ističe.

### Definicija 1 ([9])

*Problem je dobro uvjetovan ako ima jedinstveno rješenje koje neprekidno ovisi o početnim uvjetima. Za problem koji nije dobro uvjetovan kažemo da je loše uvjetovan.*

Poznato je da je difuzija unatrag loše uvjetovana. Prema tome, postojanje difuzije unatrag u Perona-Malikovoj jednadžbi sugerira da bi i ta jednadžba mogla biti loše uvjetovana.

**Definicija 2** (Slabo rješenje za jednodimenzionalni slučaj, [9])

Za lokalno integrabilnu funkciju  $u(x, t)$  kažemo da je slabo rješenje Perona-Malikove jednadžbe ako je  $\int_U (u^2 + u_x^2) dx$  uniformno ograničen za ograničeni  $t$  i ako za svaku funkciju  $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  vrijedi

$$\iint [\phi_t u - \phi_x f(u_x^2) u_x] dx dt = 0.$$

U [3] je pokazano da ako postoji slabo rješenje jednodimenzionalnog problema, početni uvjet mora biti beskonačno puta diferencijabilan u područjima gdje se odvija difuzija unatrag ( $|u_x| > \lambda$ ). To pokazuje da je moguće da slabo rješenje uopće ne postoji. Očito su affine funkcije oblika  $u(x, t) = ax + b$  rješenja, no one su nestabilne u smislu da ako promjenimo početni uvjet proizvoljno malo, rješenje možda neće postojati.

**Teorem 2** (Nepostojanje rješenja za jednodimenzionalni slučaj)

Za dani  $g$  takav da je  $g'(x) = 0$  na  $\partial U$  i  $g'(x) > \lambda$  na samo jednom kompaktnu u  $U$ , na primjer  $g'(x) > \lambda$  na  $Q = \langle x_0, y_0 \rangle \subset \subset U$  i  $|g'(x)| < \lambda$  na  $U \setminus \bar{Q}$ , jednodimenzionalni problem (10) nema globalnog slabog rješenja u  $C^1(U)$ .

**Teorem 3** (Jedinstvenost lokalnog slabog rješenja za jednodimenzionalni slučaj)

Pretpostavimo da su  $u$  i  $v$  lokalna slaba rješenja (10) na  $U_T$  s jednakim početnim uvjetima  $g$ , gdje je  $g$  analitička funkcija,  $(g')^2 - \lambda^2$  ima samo jednostruke nultočke i difuzivnost  $f$  je analitička funkcija. Tada je  $u(x, t) \equiv v(x, t)$  na  $U_T$ .

Kao što vidimo iz prethodnih osnovnih teorijskih rezultata, teorija postaje prilično složena čak i za jednodimenzionalni slučaj, što nije ni čudno s obzirom da se radi o nelinearnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi.

Pogledajmo sada praktičnu primjenu Perona-Malikove jednadžbe, kao što smo učinili i s linearnom jednadžbom.

### 2.3 Rješenje metodom konačnih razlika

Programska implementacija analogna je onoj za linearnu difuziju iz prethodnog odjeljka. Iako nije odmah vidljivo kako ona izgleda, budući da koristimo difuzivnost

koja uključuje funkciju koja je rješenje jednadžbe. Zbog toga je potrebno pojednostavniti izraz iz problema (7).

Računamo:

$$\begin{aligned} u_t &= \operatorname{div} \left( f(|\nabla u|^2) \cdot \nabla u \right) \\ &= \operatorname{div} \left( f(u_x^2 + u_y^2) \cdot [u_x, u_y] \right) \\ &= \left( f(u_x^2 + u_y^2) \cdot u_x \right)_x + \left( f(u_x^2 + u_y^2) \cdot u_y \right)_y. \end{aligned} \quad (11)$$

Računanjem parcijalnih derivacija te primjenom Schwarzovog teorema slijedi

$$\begin{aligned} u_t &= f'(u_x^2 + u_y^2) \left( 2u_x u_{xx} + 2u_y u_{yy} \right) u_x + f(u_x^2 + u_y^2) u_{xx} \\ &\quad + f'(u_x^2 + u_y^2) \left( 2u_x u_{xy} + 2u_y u_{yy} \right) u_y + f(u_x^2 + u_y^2) u_{yy} \\ &= 2f'(u_x^2 + u_y^2) \left( u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} \right) \\ &\quad + f(u_x^2 + u_y^2) (u_{xx} + u_{yy}). \end{aligned}$$

Pojednostavljena Perona-Malikova jednadžba je jednostavna za programsku implementaciju.

---

```

T = 20;
dt = 0.2;
lambda = 1;
f = @(s) 1/(1+s/lambda^2);
df = @(s) -(1/lambda^2)/((1+s/lambda^2)^2);

for t = 0:dt:T
    for i=2:(p-1)
        for j=2:(q-1)
            ux=(u0(i+1,j)-u0(i-1,j))/2;
            uy=(u0(i,j+1)-u0(i,j-1))/2;
            uxx=(u0(i+1,j)-2*u0(i,j)+u0(i-1,j));
            uyy=(u0(i,j+1)-2*u0(i,j)+u0(i,j-1));
            uxy=(u0(i+1,j+1)-u0(i+1,j-1)-u0(i-1,j+1)
                +u0(i-1,j-1))/4;

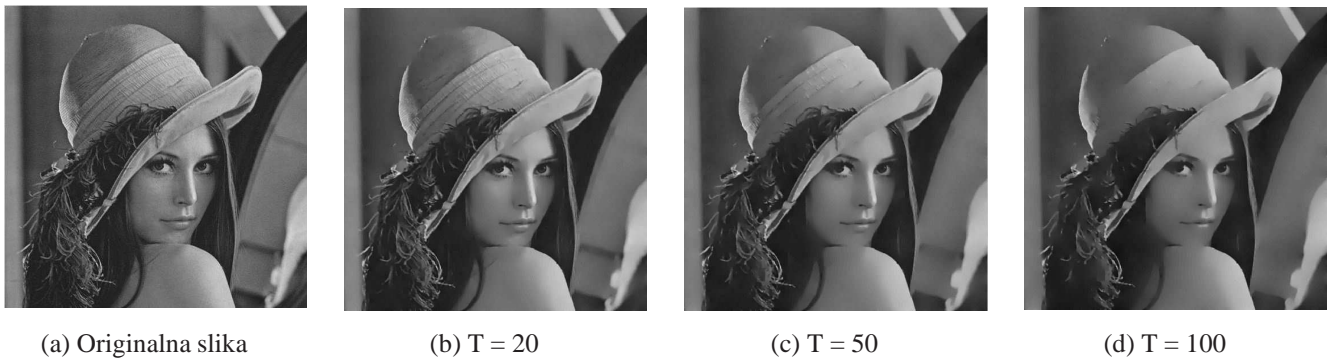
            u(i,j)=u0(i,j)+2*dt*...
                ((df(ux^2+uy^2)*(ux*uxx+ux*uy*uyy+uy+2*ux*uy*uxy))
                 + f(ux^2+uy^2)*(uxx+uyy));
        end
    end
    u0=u;
end

```

---

Uz dulji protok vremena dobivamo jači utjecaj na početnu sliku. Rezultati dobiveni eksperimentima prikazani su na slici 2. Primjećujemo očuvanje rubova i uklanjanje „zrnatih“ elemenata na slici.





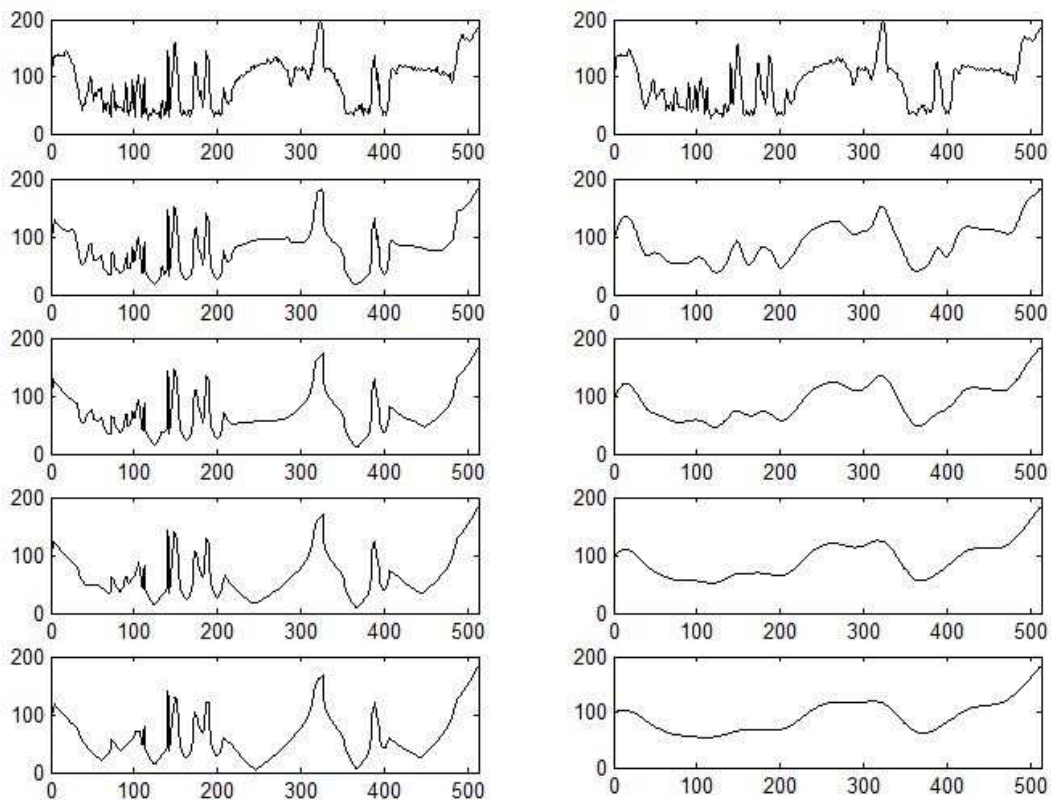
Slika 2: Otapanje početne slike (a) koristeći Perona-Malikovu jednadžbu s vremenskim korakom  $\Delta t = 0.2$ . Na slikama (b), (c) i (d)  $T$  predstavlja proteklo vrijeme,  $\lambda = 1$ .

Unatoč tome što je algoritam osjetljiv na rubove, nakon dovoljno vremena neki rubovi, inače nedovoljno jasni, nestaju u stapanju s okolinom.

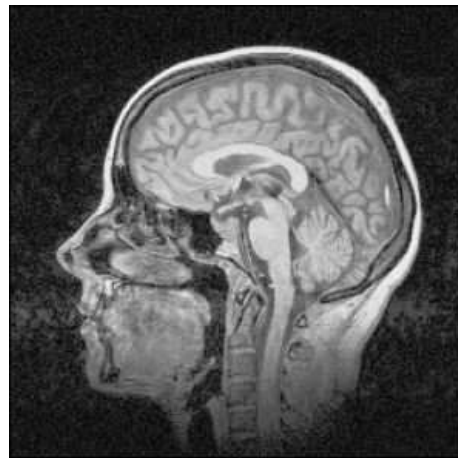
## 2.4 Usporedba s linearnom difuzijom

Za kraj dajemo usporedbu djelovanja linearne i nelinearne difuzije. Prvo koristimo jednodimenzionalne podatke da

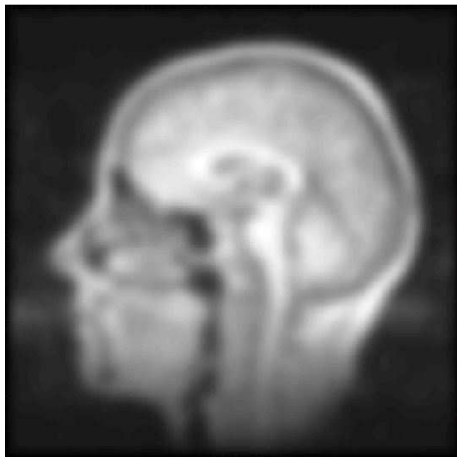
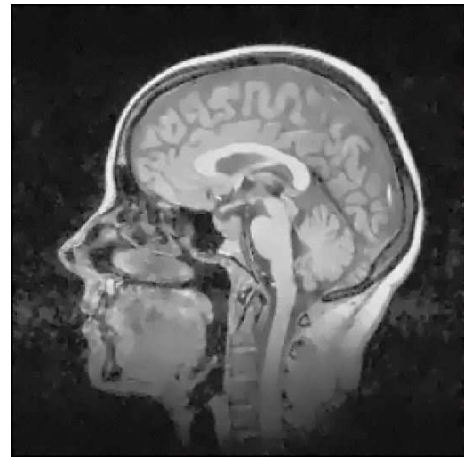
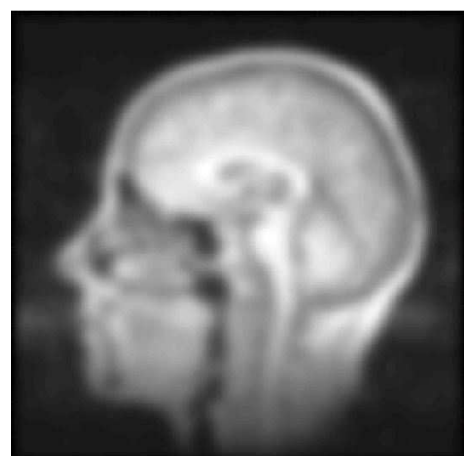
bismo vidjeli kako nelinearna difuzija čuva rubove, za razliku od linearne koja nekritično "otapa" cijelu sliku. Testni podaci dobiveni su presjekom slike Lene u smjeru  $x$  osi, dakle graf predstavlja intenzitet sive duž jedne od horizontalnih linija na testnoj slici. Usporedbu ova dva modela vidimo na slici 3. Na slici 4 dajemo usporedbu modela na dvodimenzionalnim podacima, odnosno na slici glave dobivenoj magnetskom rezonancom.



Slika 3: Usporedba Perona-Malikove jednadžbe (lijevo) i linearnog modela (desno).



(a) Originalna slika

(b) Linearna difuzija,  $T = 10$ (c) Nelinearna difuzija,  $T = 25$ (d) Linearna difuzija,  $T = 200$ (e) Nelinearna difuzija,  $T = 200$ 

Slika 4: Usporedba linearne i nelinearne difuzije na sliku dobivenu magnetskom rezonancom,  $\Delta t = 0.2$ , a  $T$  predstavlja proteklo vrijeme.

## Literatura

- [1] L. ALVAREZ, F. GUICHARD, P. L. LIONS, J. M. MOREL, Axioms and fundamental equations of image processing, *Archive for rational mechanics and analysis* **123** (3) (1993), 199–257.
- [2] L. C. EVANS, Partial Differential Equations, *Providence, RI: American Mathematical Society, Teh. izv.*, ISBN 0-8218-0772-2, 1998.
- [3] S. KICHENASSAMY, The Perona–Malik Paradox, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **57** (5) (1997), 1328–1342.
- [4] P. PERONA, J. MALIK, Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion, *Proceedings of IEEE Computer Society Workshop on Computer Vision*, 16–22, 1987.
- [5] A. QUARTERONI, R. SACCO, F. SALERI, *Numerical Mathematics*, Springer, 2000.
- [6] A. ŠTAJDUHAR, *Primjena parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u obradi digitalne slike*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2013.
- [7] J. WEICKERT, A review of nonlinear diffusion filtering, *Scale-space theory in computer vision*, Springer, 1–128, 1997.
- [8] J. WEICKERT, *Anisotropic diffusion in image processing*, sv. 1, Teubner Stuttgart, 1998.
- [9] M. WIELGUS, *Perona-Malik equation and its numerical properties*, Disertacija, Uniwersytet Warszawski, 2010.

**Andrej Novak**

andrej.novak@unidu.hr

Sveučilište u Dubrovniku

Odjel za elektrotehniku i računarstvo

Ćire Carića 4, 20000 Dubrovnik

**Andrija Štajduhar**

astajd@astajd.com

Sveučilište u Zagrebu

Hrvatski institut za istraživanje mozga

Šalata 12, 10000 Zagreb