Kako se čuje dimenzija $\sqrt{3}$?

Sanja Grubeša[1], Maja Resman[2], Tomislav Šikić[3] i Darko Žubrinić[4]

1. Uvod

Baratanje tehnikom deriviranja i integriranja sigurno nije toliko značajan ishod učenja da bi infinitezimalni račun postao jedna od temeljnih sadržajnih domena Nacionalnog okvirnog kurikuluma. Štoviše, u današnje vrijeme kad su neki od matematičkih programskih paketa koji sadrže simbolično računanje postali besplatni i time praktično svima dostupni, općenito je upitna nužnost uvježbavanja prezahtjevnih rutina vezanih uz tehniku deriviranja i integriranja. No, što je onda uistinu svrha infinitezimalnog računa u srednjoškolskom obrazovanju? U 21. stoljeću tehnološke su promjene toliko intenzivne i brze da mladi čovjek može spoznati svijet oko sebe bez osnovnih koncepata infinitezimalnog računa. Sama digitalizacija svih analognih signala koji su nas još do kraja prošlog stoljeća okruživali dovoljan je argument za prethodnu tvrdnju. No, postoji još značajniji argument vezan uz to što zapravo poznavanje osnova infinitezimalnog računa omogućava budućim generacijama. Veliki broj prirodnih pojava te mnogih drugih procesa koje smo stvorili mimo ili uz prirodu, može se opisati jedino pomoću diferencijalnih jednadžbi. Maturantima bi možda bilo važnije da umjesto rutinskog baratanja tehnikom deriviranja tijekom srednjoškolskog obrazovanja spoznaju da se mnoge prirodne pojave mogu opisati prema jednostavnoj zakonitosti da je neka promatrana veličina proporcionalna brzini njene promjene, tj. da znaju riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$y' = \lambda y.$$

Jednako tako nužno je da znaju riješiti diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$y'' = \lambda y,$$

odnosno da je znaju interpretirati kao proporcionalnost neke veličine i njene akceleracije.

No, da bi se ostvario ovakav kvalitativni zaokret u poimanju svrhe infinitezimalnog računa u obrazovnom sustavu, nužno je od malih nogu učenike izlagati

[1] Sanja Grubeša, Sveučilište u Zagrebu FER Zavod za elektroakustiku
[2] Maja Resman, Sveučilište u Zagrebu FER Zavod za primijenjenu matematiku
[3] Tomislav Šikić, Sveučilište u Zagrebu FER Zavod za primijenjenu matematiku
[4] Darko Žubrinić, Sveučilište u Zagrebu FER Zavod za primijenjenu matematiku

zanimljivim primjerima koji će omogućiti da u četvrtom razredu srednje škole budu spremni i motivirani prihvatiti infinitezimalni račun. U ovom ćemo članku prikazati jedan takav primjer koji bi za učenike viših razreda osnovne škole mogao biti fascinantan, za učenike prvih triju razreda srednje škole intrigantan, a za maturante i brucoše inspirativan.

Krenimo od kraja. Za brucoše i maturante bila bi to dolje navedena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s varijabilnim koeficijentima (1), čija su rješenja funkcije oblika

$$y = x^a \sin(x^{-b}). \quad x \in (0,1),\ a,b \in \mathbb{R}$$

Takve funkcije zovu se *chirpovi* (engl. chirp = cvrkut). Maturanti koji su svladali osnove tehnike deriviranja mogu lako provjeriti da su te funkcije upravo rješenja spomenute diferencijalne jednadžbe. Naravno, i brucoši i maturanti mogu shvatiti da je spomenuta diferencijalna jednadžba zapravo matematički model koji opisuje titraje koji proizvode određeni zvuk i time u uvodnom dijelu kolegija iz matematičke analize dobiti trajnu inspiraciju i dugoročnu motivaciju za proučavanje i učenje infinitezimalnog računa.

Učenici trećeg razreda srednje škole mogu u ovisnosti o parametrima a i b crtati grafove spomenutih funkcija i uživati u moduliranju zvuka na taj način. To će zasigurno biti sat matematike koji će svim učenicima ostati u trajnom sjećanju. Takva intrigantna priča, vjerujemo, može samo uroditi prirodnom znatiželjom da se spozna zašto je to tako.

I na kraju (ili pak na početku) je crta koja svira. I što je ta crta gušće iscrtana, to će taj zvuk duže trajati i biti viši. Učenicima osnovne škole ne treba ništa osim te fascinantne pojave i, naravno, prihvaćanja činjenice da će vrlo skoro na satima nastave matematike otkriti sve tajne koje se skrivaju iza tog cvrkuta.

No, kakve to sve ima veze s dimenzijom $\sqrt{3}$? Taj je primjer ujedno primjer za apsolvente, prije svega matematike, da vide i čuju fraktalnu dimenziju koja nije prirodan broj i da intuitivno shvate da između jedne i dvije dimenzije nije skok nego kontinuirani proces.

2. Matematički model

Promotrimo *linearnu* diferencijalnu jednadžbu 2. reda *s varijabilnim koeficijentima*:

$$(1) \qquad y''(x) + \frac{b-2a+1}{x} y'(x) + \left(\frac{b^2}{x^{2b+2}} - \frac{a(b-a)}{x^2} \right) y(x) = 0, \quad x \in (0,1),\ a,b \in \mathbb{R}.$$

Istaknimo, koeficijenti kojima množimo $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ su varijabilni jer se u njima pojavljuje varijabla x, te se mijenjaju duž intervala $(0,1)$. Jednadžbu određuju dva parametra, a i b.

Deriviranjem i uvrštavanjem lako se provjeri da su funkcije

$$y_1(x) = x^a \sin(x^{-b}),\ y_2(x) = x^a \cos(x^{-b}),\ x \in (0,1), \tag{2}$$

rješenja gornje jednadžbe. Te funkcije nazivamo *chirp-funkcijama* (od engleske riječi *chirp,* što znači, kako smo rekli, *cvrkut*). Odakle to ime? Pričekajmo Poglavlje 3.

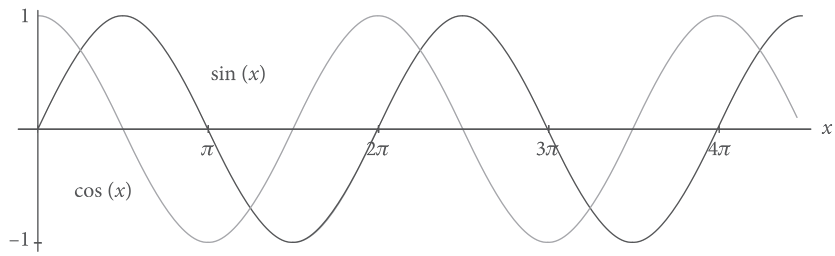
Ovdje se nećemo baviti načinom rješavanja gornje jednadžbe i pitanjem kako dolazimo do navedenih funkcija. Jednadžbe s varijabilnim koeficijentima su komplicirane i ne postoji neka jedinstvena tehnika za njihovo rješavanje, nego se razvijaju razne tehnike, ovisno o jednadžbi. Za one koje zanima kako riješiti jednadžbu, citiramo npr. knjigu [1] sa 6200 raznih diferencijalnih jednadžbi i njihovih rješenja.

Također, mnogi će se ovdje zapitati: *Odakle gornja jednadžba? Koje procese u prirodi ona modelira?* Svi smo još iz osnovnoškolske fizike upoznati s temeljnim zakonima gibanja. Naša jednadžba zasniva se na drugom Newtonovom zakonu za sustav s prigušenjem. Član $y''(x)$ predstavlja akceleraciju. Član uz $y'(x)$ odnosi se na prigušenje sustava, a član uz $y(x)$ na elastičnost sustava. Slična jednadžba (iako s nešto drugačijim koeficijentima) opisuje u prirodi titranje strune učvršćene na dva kraja (npr. glasnice, žice instrumenata). Chirp-funkcijama se u prirodi modelira cvrkut ptica, glasanje životinja, koriste se u optici, akustici, medicini, geofizici [2]...

Ako se malo poigramo parametrima, pa u gornju jednadžbu uvrstimo specijalne parametre $a = 0$, $b = -1$, elastičnost postaje konstantna, a prigušenje nestaje. Jednadžba prelazi u jednadžbu spomenutu u Uvodu,

$$y''(x) = -y(x),$$

s rješenjima $y_1 = \sin(x)$, $y_2 = \cos(x)$. To su nepromjenjivi sinusoidalni valovi s konstantnom amplitudom i frekvencijom:



Slika 1. $y_1 = \sin(x)$, $y_2 = \cos(x)$

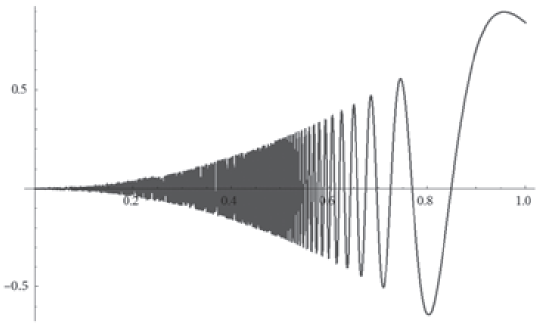
Ipak, ta je situacija suviše idealizirana. U prirodi uvijek postoji neko prigušenje gibanja (otpor gibanju, trenje), a elastičnost materijala nije konstantna kao posljedica zagrijavanja i neidealnih svojstava materijala. Kako će se to manifestirati na rješenjima naše jednadžbe i po čemu će se ona razlikovati od „običnih” sinusoida? To ćemo vidjeti u idućem poglavlju.

3. Cvrkut

3.1. Analiza parametara

U ovom ćemo poglavlju objasniti ulogu parametara a i b. Promatrat ćemo slučajeve kada su $a \geq 0$, $b > 0$. U samoj jednadžbi (1) promjenom tih parametara mijenjaju se elastičnost i prigušenje. Promotrimo kako promjena parametara utječe na chirp-funkcije koje su rješenja jednadžbe. Varijablu $x \in \left(0, 1\right)$ u rješenjima zamišljamo kao vremensku varijablu.

Pokušajte sami skicirati chirp-funkciju, npr. $y(x) = x^2 \sin(x^{-7})$.



Slika 2. Graf funkcije $y(x) = x^2 \sin(x^{-7})$.

Usporedbom Slike 1. i Slike 2. primjećujemo da naše funkcije ostaju sinusoidalne, ali s promjenjivim *amplitudama i periodima*. Uočavamo zanimljive promjene grafa u blizini ishodišta. Kako se amplitude i periodi vala mijenjaju kad zdesna prilazimo ishodištu, ovisi o parametrima a i b:

Uloga parametra *a*

Parametar $a \geq 0$ određuje **ponašanje amplitude**. Amplituda funkcije $y(x) = x^a \sin(x^{-b})$, zbog titranja funkcije sinus unutar intervala [-1, 1], za male x oko 0 „prati" ponašanje funkcije x^a. Funkcija x^a *prigušuje* amplitudu:

i. ***a* = 1**: Linearno prigušenje; amplituda trne po pravcu $y = x$. (Slika 3.f)

ii. ***a* > 1**: Amplitude slijede parabolu (kubnu parabolu,...) koja pada u 0 s nagibom nula – vodoravnim tangencijalnim smjerom (npr. x^2, x^3). (Slike 3.c, d, e)

iii. 0 < *a* < 1: Amplitude slijede graf funkcije korijena koja pada u 0 s beskonačnim nagibom – okomitim tangencijalnim smjerom (npr. $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$). (Slike 3.a, b)

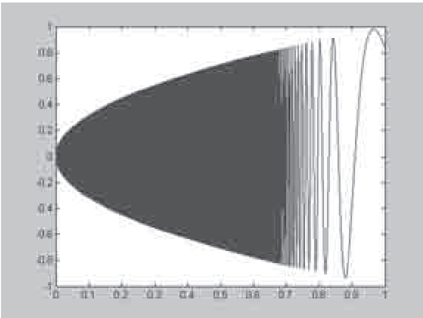
iv. ***a* = 0**: Amplituda je nepromjenjiva i jednaka 1. (Slika 3.g)

Prigušenje amplitude u $x = 0$ je to jače što je parametar a veći.

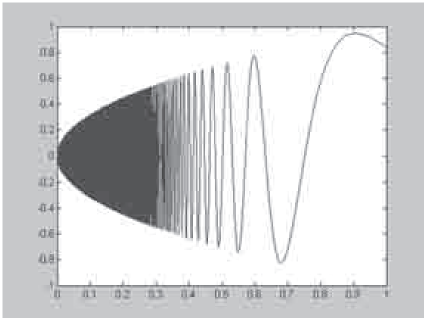
Uloga parametra *b*

Parametar $b > 0$ određuje kojom **brzinom duljina perioda vala (valna duljina) trne** kad se približavamo ishodištu zdesna, tj. kojom brzinom njemu recipročna vrijednost (tj. frekvencija) raste u beskonačnost. Naime, što je parametar b veći, to je promjena sporija, pa je zacrnjenje grafa blizu ishodišta jače. Usporedimo Sliku 3.a s 3.b, te Sliku 3.c s 3.d. Važno je primijetiti i da se ovdje radi o *graničnom procesu* u okolini ishodišta – valna duljina trne u 0, ali je nikada ne dostiže. Kako se to matematički vidi?

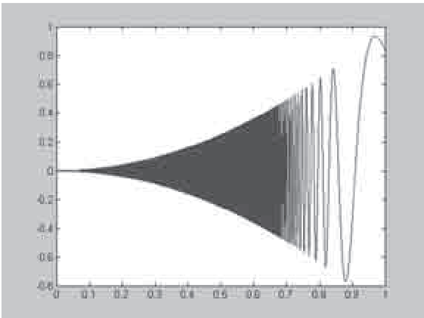
Nultočke funkcije $y(x) = x^a \sin(x^{-b})$ se, u ovisnosti o parametru b, nalaze u točkama $x_k = (k\pi)^{-1/b}$, $k \in \mathbb{N}$. Očito, $x_k \to 0$, kad $k \to \infty$, a brzinu konvergencije daje parametar b. Valna duljina je za sinusoidu dana razmakom nultočaka. Prisjetimo se da je frekvencija vala recipročna vrijednost valne duljine (perioda). Malo dubljom analizom možemo izračunati da, kad prilazimo ishodištu zdesna, valne duljine padaju po zakonu $k^{-1-1/b}$, a frekvencije rastu po zakonu $k^{1+1/b}$ (kad $k \to \infty$). Za veće parametre b, valne duljine padaju sporije u vremenu, što stvara veću gustoću oscilacija. U ovom dijelu protok vremena promatramo u obrnutom smjeru, dakle od 1 prema 0. Naglasimo da se radi o graničnom procesu i da prvih nekoliko valnih duljina može i zavarati: npr. usporedbom Slike 3.a i Slike 3.b, vidimo da su prve tri valne duljine veće za $b = 4$ nego za $b = 12$, no u kasnijim iteracijama $b = 12$ prevlada. Ova analiza bit će nam od koristi za objašnjavanje zvučnih signala u idućem poglavlju.



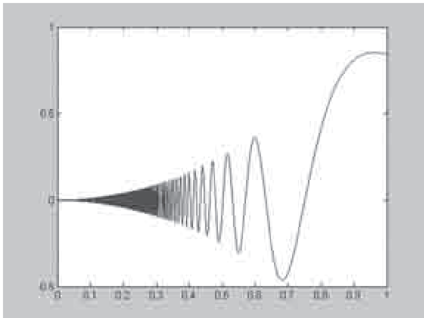
(3.a) $y(x) = x^{1/2} \sin(x^{-12})$



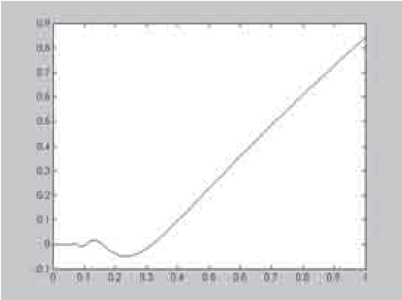
(3.b) $y(x) = x^{1/2} \sin(x^{-4})$



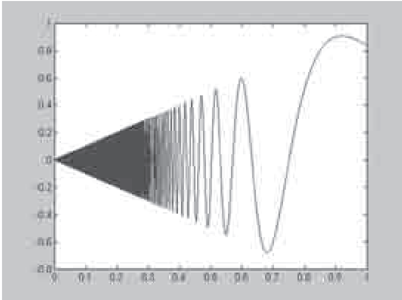
(3.c) $y(x) = x^2 \sin(x^{-12})$



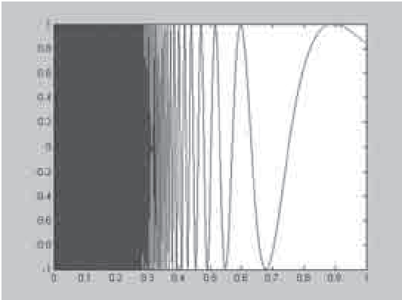
(3.d) $y(x) = x^2 \sin(x^{-4})$



(3.e) $y(x) = x^2 \sin(x^{-1})$



(3.f) $y(x) = x \sin(x^{-4})$



(3.g) $y(x) = x^0 \sin(x^{-4}) = \sin(x^{-4})$

Slika 3. Grafovi chirp-funkcija u ovisnosti o parametrima a, b

Sve gornje slike nacrtane su pomoću programskih paketa *Matlab* ili *Mathematica*. Vrlo ih je lako nacrtati u svakom programskom paketu, pa crtanje chirpova i usporedba grafova za razne izbore parametara postaje zapravo igra.

3.2. Zvuk

U 2. poglavlju spomenuli smo da chirpovima možemo modelirati zvukove iz prirode. Ovdje ćemo čuti kako zapravo *cvrkuću* naši chirpovi. Kako bi stvar bila još zanimljivija, vidjet ćemo kako se promjene parametara a i b čuju u zvuku koji generiraju chirpovi. Zvučni signali generirani su korištenjem programskog paketa *Matlab*. Prisjetimo se: ono što čujemo, zapravo su titraji zraka, i to onih frekvencija koje ulaze u čujno područje ljudskoga uha, između 20 Hz i 20000 Hz. Program jednostavno daje vrijednost amplitude za pojedinu frekvenciju, za svaki pojedini chirp u vremenu x od 0 do 1. Amplituda određuje glasnoću zvuka. Ovdje protok vremena ide u pravom smjeru, dakle od 0 do 1. Tako se proizvodi zvuk koji čujemo sve dok je frekvencija takva da upada u čujno područje.

Zvukove za svaki pojedini primjer sa Slike 3. možete poslušati na web-adresi: http://www.fer.unizg.hr/zea/onama/djelatnici/sg.

Sjetimo se od ranije: kad se približavamo 0 zdesna, frekvencije rastu u beskonačnost (valne duljine padaju u 0). Stoga, kad slušamo primjere cvrkuta, prvo čujemo šum. On se javlja jer u blizini 0 krećemo od vrlo visokih frekvencija koje zvučnik loše reproducira, a i uho lošije čuje. Frekvencije padaju kako vrijeme protječe, pa nakon šuma čujemo lijepi cvrkut, i nakon toga tišinu kad opet izađemo iz čujnog područja.

Proanalizirajmo malo što čujemo u primjerima sa Slike 3. u ovisnosti o parametrima *a* i *b*. Parametar *b* utječe na trajnost, a parametar *a* na glasnoću zvuka:

- Ako je <u>*a* konstantan, a mijenjamo *b*</u> (kao na Slikama 3.a i 3.b), vidimo da, što je *b* veći, imamo sporiji pad frekvencija u vremenu, a u samom chirpu se javlja viša početna maksimalna frekvencija zvuka. Pod pojmom *početna* podrazumijevamo prvo očitanje u desetoj mikro sekundi. Stoga dulje vremena ostajemo u čujnom području, te je trajanje zvuka dulje.
- Ako je <u>*b* konstantan, a mijenjamo *a*</u> (kao na Slikama 3.a i 3.c), s većim *a* čujemo isti zvuk, ali tiši. Zvuk je tiši za veći *a* jer su za veći *a* amplitude chirpa manje (jače prigušenje amplitude oko 0). To znači da *a* utječe na amplitudu (glasnoću), ali ne i na frekvenciju signala, tj. chirpa.
- Na Slici 3.g parametar *b* isti je kao i na Slikama 3.b, 3.d i 3.f, što znači da je zvuk frekvencijski isti, ali su amplitude različite. Kod ovog primjera je $a = 0$, što znači da imamo zvuk najveće (u odnosu na navedene primjere) i konstantne amplitude (glasnoće).
- Na Slici 3.e amplitude signala u čujnom području su premale, pa ne čujemo zvuk.

Sada nam je, nakon svega, valjda jasno odakle ime *chirp*.

No, što smo zapravo naučili u ova dva poglavlja? U glasnicama svake ptičice skriva se u osnovi nego rješavanje jedne diferencijalne jednadžbe! Također, vidjeli smo da iza tog fascinantnog i zanimljivog primjera zapravo leži duboka matematička i fizikalna podloga. Do nje se ne dolazi tek tako, nego su je ljudi gradili kako se znanje produbljivalo kroz povijest, malo po malo, s ciljem da proniknu u tajne prirode. Ali, koliko je toga oko nas što još ne razumijemo?

4. Fraktalna dimenzija

Sada nam je jasno kako *cvrkuću* diferencijalne jednadžbe. Vidjeli smo u prethodnom poglavlju da, ovisno o parametrima jednadžbe, tj. njezinom rješenju, taj cvrkut može biti glasniji ili tiši, dulji ili kraći u trajanju, viši ili niži prema tonalitetu.

No, *kakve to sve skupa ima veze s dimenzijom* $\sqrt{3}$ *iz naslova*?

Do sada smo navikli na euklidske dimenzije iz diskretnog skupa: 1, 2, 3, ... Navikli smo da crte i krivulje opisujemo dimenzijom 1, likove dimenzijom 2, tijela dimenzijom 3. Što bi onda značile dimenzije 1.5, $\sqrt{3}$, 1.999?

Ovdje ćemo na intuitivnoj razini objasniti način definiranja dimenzije, takav da se raspon između jedne dimenzije „crte" i dvije dimenzije nekog ispunjenog lika popuni kontinuumom realnih dimenzija. Objasnit ćemo ideju „na prste" na jednome primjeru.

Krenimo od krivulje konačne duljine, koju svi doživljavamo kao objekt dimenzije 1. Zatim zamislimo krivulje beskonačne duljine koje se namataju spiralno oko neke točke ili oko nekog skupa koji nikada ne dostižu. Svatko bi rekao da one, iako beskonačne, opet mogu biti „dulje" ili „kraće", ovisno o tome je li gustoća namatanja na skup veća ili manja. Gustoću namatanja očitavamo kao zacrnjenje oko skupa na koji se krivulja namata, a opisujemo je dimenzijom između 1 i 2. U graničnom slučaju, gustoća namatanja je potpuna pa naša krivulja popuni čitavu površinu oko skupa te preuzme dimenziju 2. S druge strane, sa stanovišta nama otprije poznate euklidske dimenzije, bez obzira na duljinu i na gustoću namatanja, sve ove krivulje bile bi opisane dimenzijom 1 i na taj način poistovjećene.

Ova nova, tzv. *fraktalna dimenzija* i razni načini njenog definiranja intenzivnije se istražuju od sedamdesetih godina 20. stoljeća (Mandelbrot (1924.-2010.) [3]), a počeci sežu k Minkowskom (1864.-1909.), Hausdorffu (1868.-1942.) i Bouligandu (1889.-1979.) na početak 20. stoljeća. Naime, primijećeno je da u prirodi često postoje vrlo komplicirani skupovi i krivulje s bogatom infinitezimalnom strukturom. Uzmimo samo rub pahulje snijega. Ako sve više i više *zoomiramo* rub, na svakoj novoj skali uočavamo detalje koje prije nismo vidjeli. Svaki mali dio skupa nakon povećanja izgleda slično kao cjelina. Takvi skupovi nazivaju se *fraktalima*, a opisano svojstvo *svojstvom samosličnosti*. Vjerojatno ste čuli za *Kochovu krivulju* (rub pahulje snijega), *trokut Sierpinskog*, beskonačno razvedenu obalu mora...

Intuitivno nam je jasno da takvi skupovi zbog samosličnosti često imaju beskonačnu duljinu. Kako ih onda razlikovati? Kako iskazati da je jedan od njih strukturom bogatiji, a drugi manje bogat? Da je jedan „beskonačniji" i razvedeniji od drugoga? U tu svrhu uvodi se fraktalna dimenzija. Neki fraktalnu dimenziju definiraju kao omjer samosličnosti skupa, drugi pod tim pojmom smatraju njemu blizak pojam *box dimenzije*, ili pak pojam Hausdorffove dimenzije. Nećemo ovdje ulaziti u detalje. Za one koje zanima, dobar uvod u teoriju fraktalnih dimenzija može se naći u knjigama [4], [5] i [6]. Važno je zapamtiti da fraktalnim dimenzijama skupova u ravnini popunjavamo kontinuum između 1 i 2, ovisno o gustoći kojom skup ispunjava prostor.

Čemu uopće ovo poglavlje? Kakve veze imaju grafovi chirpova iz prethodnih poglavlja s fraktalima? Graf chirpa zamislimo kao tanki končić. Da li je duljina končića (grafa) konačna ili beskonačna? Može se pokazati da je za $a > b$ duljina konačna, dok su za $a \leq b$ grafovi chirpova beskonačne duljine koja nastaje akumulacijom oscilacija u ishodištu. Kako se približavamo 0 zdesna, stalno nastaju nove i nove oscilacije koje se gomilaju u ishodištu. Pritom, ako uvećamo koliko god mali interval oko 0, slika će opet nalikovati cjelini. Grafovi chirp-funkcija su, dakle, naš primjer *fraktala*.

Na Slici 3. graf 3.e je konačne duljine, a svi su ostali beskonačne duljine. No, mi ipak uočavamo razliku između npr. primjera 3.a i 3.b, te između 3.c i 3.d; primjeri 3.a i 3.c nam zbog veće gustoće oscilacija izgledaju „beskonačniji", dulji.

Sada već naslućujemo da nam tu informaciju može otkriti fraktalna dimenzija. Jedna takva dimenzija je i *box dimenzija*.

Definicija box dimenzije bilo kojeg nepraznog omeđenog podskupa u ravnini vrlo je jednostavna. Za bilo koji mali pozitivan broj r pogledamo površinu r-okoliša skupa A, tj. površinu skupa svih točaka koje su od A udaljene najviše za r. Ta se površina, u ovisnosti o tom malom broju r, ponaša obično kao r^c za neki $c \in \mathbb{R}$. Box dimenzija D skupa A je broj koji se definira kao $D = 2 - c$. Na primjer, ako je skup A točka, onda je njen r-okoliš krug polumjera r, pa se površina r-okoliša ponaša kao r^2. Dakle, dimenzija točke je nula, jer je $D = 2 - c = 2 - 2 = 0$. U slučaju kad je skup A interval konačne duljine sadržan u ravnini, dimenzija je jednaka 1 ($D = 2 - 1 = 1$). Ako je skup A (puni) kvadrat onda je box dimenzija jednaka 2.

Za krivulje u ravnini konačne duljine box dimenzija jednaka je 1. Obratno, krivulje box dimenzije 1 mogu biti i konačne i beskonačne duljine (npr. graf chirpa za $a = b$). Krivulje box dimenzije strogo veće od 1 su beskonačne duljine. Box dimenzija je za graf chirpa $y(x) = x^a \sin(x^{-b})$ jednaka (Tricot [3], 1993.):

(3)
$$\dim_B \Gamma = \begin{cases} 2 - \dfrac{a+1}{b+1}, & 0 < a < b \\ 1, & a \geq b > 0 \end{cases}$$

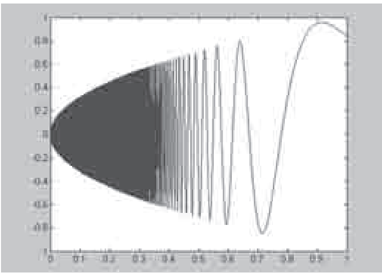
Dimenzija je to veća što je b veći ili što je a manji. To uočavamo kao veće zacrnjenje grafa oko 0. Izračunajmo približno i usporedimo box dimenzije i zacrnjenje za primjere na Slici 3.:

(a) $\dim_B \Gamma = 1.885$ **(b)** $\dim_B \Gamma = 1.7$ **(c)** $\dim_B \Gamma = 1.769$ **(d)** $\dim_B \Gamma = 1.4$
(e) $\dim_B \Gamma = 1$ **(f)** $\dim_B \Gamma = 1.6$ **(g)** $\dim_B \Gamma = 1.8$

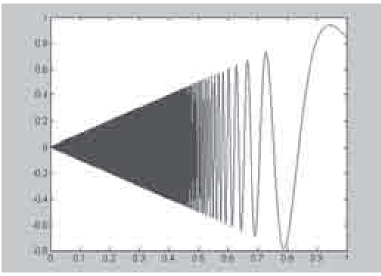
Ponudili smo samo nekoliko ilustrativnih primjera, ali važno je uočiti da mijenjanjem parametara a i b dimenzijama možemo ispuniti čitavi interval [1,2].

Za samostalno daljnje istraživanje zanimljivo je promotriti kako izgleda graf chirpa za neke parametre koji daju dimenziju 1.999, u odnosu na onaj s dimenzijom 1.001. Za iste primjere, ilustrativno je paralelno poslušati zvuk. Ako ste pažljivo čitali ovaj tekst, do sada sami naslućujete razliku.

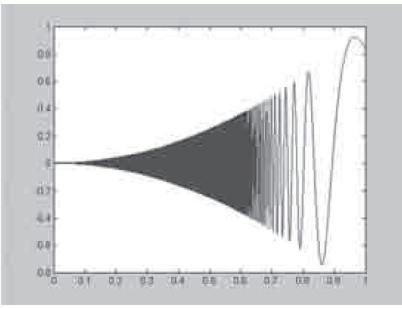
Kao zaključak, povucimo paralelu slike i zvuka: veliki parametar b izazvat će veliku gustoću oscilacija koja će se čuti u duljem trajanju zvuka, a vidjeti u većoj zacrnjenosti, tj. većoj fraktalnoj dimenziji. Iz zvuka tako možemo čuti dimenziju, tj. koliko je naš chirp *gust*. Dolazimo do samog kraja ponavljanjem pitanja iz naslova: *Kako se onda čuje dimenzija* $\sqrt{3}$? Sada svi razumijemo smisao toga pitanja. No, razmislimo malo za koje sve parametre a i b u formuli (3) možemo dobiti dimenziju $\sqrt{3}$? Zapravo, postoji beskonačno načina na koje se može čuti ova dimenzija (proizvoljno biramo a, a b je onda jednoznačno određen dimenzijom). Mi ih ovdje navodimo nekoliko:



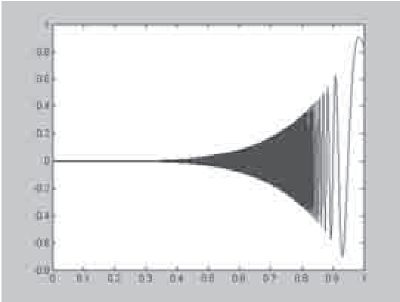
(4.a) $a = 1/5$



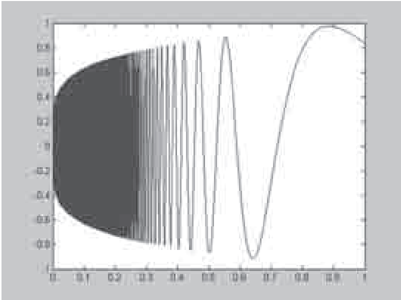
(4.b) $a = 1/2$



(4.c) $a = 1$



(4.d) $a = 2$



(4.e) $a = 5$

Slika 4. Grafovi raznih chirpova iste box dimenzije, $\dim_B \Gamma = \sqrt{3}$

Za svaki takav izbor parametara a i b, osim slike, možete čuti i zvuk na web-stranici http://www.fer.unizg.hr/zea/onama/djelatnici/sg

U Hrvatskoj je fraktalna analiza započela svoj matematički život početkom 2000-tih, na inicijativu profesora Mervana Pašića. Uskoro su mu se u tim pregnućima pridružili Darko Žubrinić, Vesna Županović i Luka Korkut, a nešto kasnije i mladi znanstvenici L. Horvat, S. Miličić, G. Radunović, M. Resman i D. Vlah. Među velikim brojem istaknutih matematičara u svijetu koji se bave sličnom problematikom spomenimo samo četvero: Yves Meyer (jedan od utemeljitelja opće teorije valića), Claude Tricot (nerektifikabilne krivulje i fraktalna dimenzija), Michel Lapidus (teorija fraktalnih struna i kompleksnih dimenzija) i Stephan Jaffard (teorija valića i primjene u teoriji oscilacija).

Literatura:

1. A. D. Polyanin, V.F. Zaitsev, Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. Second edition. *Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL,* 2003.
2. P. Flandrin, Time frequency and chirps, Proc. SPIE 4391, Wavelet Applications VIII, 161 (March 26, 2001)
3. B. B. Mandelbrot, Fractal geometry: what is it, and what does it do? Fractals in the natural sciences. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 423 (1989), no. 1864, 3–16.
4. R. K. Nagle, E. B. Saff, Fundamentals of differential equations and boundary value problems. Second edition. *Addison-Wesley Publishing Company Inc.,* USA, 1996.
5. C. Tricot, Curves and fractal dimension, *Springer-Verlag, New York,* 1995.
6. K. Falconer, Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Second edition. *John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ,* 2003.