Pitagorine trojke i programska podrška

Mario Krnić[1] i Petra Zadro[2]

1. Uvod

Već u višim razredima osnovne škole učenici se na dodatnoj nastavi i natjecanjima iz matematike susreću s problemom određivanja cjelobrojnih rješenja jednadžbi. Jednadžbe takve vrste razmatrao je već starogrčki matematičar Diofant (Diofant iz Aleksandrije, oko 250. g.). Njemu u čast takve se jednadžbe nazivaju **diofantske jednadžbe**. Najjednostavnije su, naravno, linearne diofantske jednadžbe s kojima se u pravilu učenici susreću na dodatnoj nastavi iz matematike. Nelinearne diofantske jednadžbe rješavaju se različitim metodama, primjerice metodom faktorizacije, metodom kvocijenta, metodom kongruencija i metodom nejednakosti.

Jedna od najzanimljivijih nelinearnih diofantskih jednadžbi je jednadžba oblika

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$

Tu jednadžbu često zovemo **Pitagorinom jednadžbom** jer ona predstavlja algebarski zapis Pitagorinog poučka. Već smo u osmom razredu osnovne škole uvidjeli da postoje cjelobrojna rješenja jednadžbe (1) zato jer su trokuti sa stranicama duljina 3, 4, 5 i 5, 12, 13 pravokutni. Prvi od tih trokuta obično se naziva *egipatski*, dok je drugi poznat pod nazivom *indijski* trokut. S druge strane, očito su i trokuti sa stranicama duljina $3k$, $4k$, $5k$ i $5k$, $12k$, $13k$ pravokutni za bilo koji prirodan broj k pa jednadžba (1) ima beskonačno mnogo cjelobrojnih rješenja.

Osnovni cilj ovoga rada je određivanje svih pravokutnih trokuta s cjelobrojnim duljinama stranica ukoliko je zadana duljina jedne stranice. Prvo ćemo navesti osnovni teorem pomoću kojeg se generiraju rješenja jednadžbe (1). Nakon toga ćemo proučiti nekoliko primjera te dati odgovarajuću programsku implementaciju za određivanje svih cjelobrojnih pravokutnih trokuta sa zadanom duljinom stranice. Napomenimo još da ako je x_0, y_0, z_0 cjelobrojno rješenje jednadžbe (1), onda bilo koja kombinacija predznaka rješenja x_0, y_0, z_0 opet daje rješenje od (1). Stoga ćemo se zbog jednostavnosti ograničiti na pronalaženje rješenja jednadžbe (1) u skupu prirodnih brojeva.

[1]Mario Krnić, izvanredni profesor, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb
[2]Petra Zadro, studentica, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb

Poucak 57.indd 5 1.4.2014. 12:03:46

2. Osnovni teorem

U ovoj točki uvest ćemo osnovne pojmove vezane uz Pitagorinu jednadžbu te ćemo iskazati i dokazati osnovni rezultat pomoću kojeg možemo generirati sve Pitagorine trojke.

Definicija 1. Uređenu trojku prirodnih brojeva (x, y, z) zovemo **Pitagorina trojka** ako su x, y duljine kateta, a z duljina hipotenuze nekog pravokutnog trokuta, odnosno ako vrijedi relacija (1). Nadalje, ako su x, y, z relativno prosti, onda kažemo da je (x, y, z) **primitivna** Pitagorina trojka. Takav trokut zovemo **primitivni Pitagorin trokut**.

Uočimo ponajprije kako je u svakoj primitivnoj Pitagorinoj trojki točno jedan od brojeva x, y neparan. Doista, ukoliko bi x i y bili parni, onda bi i z bio paran, pa trojka ne bi bila primitivna. Nadalje, ako bi x i y bili neparni, imali bismo $z^2 \equiv x^2 + y^2 \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod 4$, što nije moguće jer kvadrat prirodnog broja pri dijeljenju brojem 4 daje ostatak 0 ili 1.

Osnovni rezultat kojim su dane sve Pitagorine trojke sadržan je u sljedećem teoremu.

Teorem 1. *Sve primitivne Pitagorine trojke* (x, y, z) *u kojima je* y *paran, dane su formulama*

$$x = m^2 - n^2, \qquad y = 2mn, \qquad z = m^2 + n^2 \tag{2}$$

pri čemu je $m > n$ *, a* m i n *su relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti.*

Dokaz. Jednakost (1) možemo zapisati u obliku $y^2 = (z + x)(z - x)$. Nadalje, neka je $y = 2c$. Uočimo da su brojevi $z + x$ i $z - x$ iste parnosti. Kako je y paran, slijedi da su $z + x$ i $z - x$ parni, odnosno $z + x = 2a$ i $z - x = 2b$ za neke prirodne brojeve a i b. Stoga je $c^2 = ab$. S druge strane, kako je $z = a + b$ i $x = a - b$, slijedi da su a i b relativno prosti jer u suprotnom z i x ne bi bili relativno prosti. Zbog toga postoje relativno prosti prirodni brojevi m i n takvi da je $a = m^2$ i $b = n^2$. Odavde je $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$. Očito su brojevi m i n različite parnosti jer je broj x neparan. Nadalje, brojevi x, y, z zadovoljavaju relaciju (1) zato jer je $\left(m^2 - n^2\right)^2 + \left(2mn\right)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = \left(m^2 + n^2\right)^2$.

Potrebno je još provjeriti da su brojevi x, y, z relativno prosti. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $d > 1$ najveći zajednički djelitelj od x i z. Tada je d neparan, $d \mid z + x = 2m^2$ i $d \mid z - x = 2n^2$. No, tada brojevi m i n ne bi bili relativno prosti, što je kontradikcija. □

Uočimo kako egipatski trokut odnosno trojku (3, 4, 5) dobivamo za $m = 2$ i $n = 1$, dok indijski trokut tj. trojku (5, 12, 13) dobivamo za $m = 3$ i $n = 2$.

Poucak 57.indd 6 1.4.2014. 12:03:47

Iz Teorema 1 slijedi da su sve Pitagorine trojke dane identitetom

$$\left[d\left(m^2-n^2\right)\right]^2+\left(2dmn\right)^2=\left[d\left(m^2+n^2\right)\right]^2 \tag{3}$$

Prethodni identitet će nam biti ključan prilikom određivanja svih Pitagorinih trokuta sa stranicom zadane duljine.

Prilikom proučavanja Pitagorinih trojki često se promatraju problemi postojanja trokuta koji posjeduju još neka dodatna svojstva. Ilustracije radi, navest ćemo nekoliko poznatih činjenica:

- Jednadžba $x^4+y^4=z^2$ nema rješenja u prirodnim brojevima. Drugim riječima, ne postoji Pitagorin trokut kojemu su duljine kateta kvadrati prirodnih brojeva.
- Ne postoji Pitagorin trokut u kojemu su hipotenuza i jedna kateta kvadrati prirodnih brojeva.
- Ne postoji Pitagorin trokut čija je površina potpun kvadrat.

U dokaze navedenih činjenica nećemo se upuštati, a zainteresirani čitatelj može ih pronaći u [1] ili [2]. No, navedimo jednu zanimljivost vezanu uz prvu navedenu činjenicu. Naime, ona povlači da jednadžba $x^4 + y^4 = z^4$ nema rješenja u prirodnim brojevima. To je specijalni slučaj tzv. velikog Fermatovog teorema koji kaže da jednadžba $x^n+y^n=z^n$ nema rješenja u prirodnim brojevima za $n \geq 3$. Taj teorem dokazao je Andrew Wiles 1995. godine.

3. Primjeri

U ovoj točki određujemo Pitagorine trokute sa zadanom duljinom stranice. Pogledajmo prvo ovaj jednostavni primjer.

Primjer 1. *Odredimo sve primitivne Pitagorine trokute s katetom duljine* 15.

Rješenje. Kako je zadana kateta neparne duljine, prema Teoremu 1 mora vrijediti $m^2-n^2=15$. Odavde je $(m-n)(m+n)=15$. Broj 15 možemo faktorizirati na dva načina, tj. $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$. Kako je $m - n < m + n$, imamo dva sustava jednadžbi, odnosno $m-n=1$, $m+n=15$ ili $m-n=3$, $m+n=5$. Rješenje prvog sustava je $m = 8$, $n = 7$, dok je rješenje drugog sustava $m = 4$, $n = 1$. Konačno, uvrštavajući parametre m i n u (2), dobivamo primitivne Pitagorine trojke (15, 112, 113) i (15, 8, 17). □

Uočimo kako smo u prethodnom primjeru našli ujedno i sve primitivne Pitagorine trojke sa stranicom duljine 15 zato jer jednadžba $m^2+n^2=15$ nema rješenja u prirodnim brojevima.

U sljedećem primjeru tražimo sve Pitagorine trokute sa zadanom duljinom stranice. U tom slučaju koristimo identitet (3) kojim su opisane sve Pitagorine trojke.

Poucak 57.indd 7 1.4.2014. 12:03:47

Primjer 2. *Odredimo sve Pitagorine trokute sa stranicom duljine* 116.

Rješenje. Nađimo prvo sve djelitelje d broja 116. Kako je $d \in \{1, 2, 4, 29, 58, 116\}$, moramo promotriti šest slučajeva.

Ako je $d = 1$, onda je duljina stranice primitivne Pitagorine trojke jednaka $\frac{116}{d} = 116$. Jedina mogućnost u ovom slučaju je $2mn = 116$, tj. $mn = 58$, što daje dva para relativno prostih brojeva m i n, odnosno $m = 58$, $n = 1$ i $m = 29$, $n = 2$. Sada, uvrštavanjem u identitet (3), dobivamo Pitagorine trojke $(3363, 116, 3365)$ i $(837, 116, 845)$.

Ako je $d = 2$, onda je $\frac{116}{d} = 58$, pa je jedina mogućnost $2mn = 58$, tj. $mn = 29$. No, kako m i n moraju biti različite parnosti, taj slučaj ne razmatramo jer ćemo odgovarajuće rješenje dobiti poslije.

Za $d = 4$ imamo da je $\frac{116}{d} = 29$, pa imamo dvije mogućnosti: $m^2 + n^2 = 29$ ili $m^2 - n^2 = 29$. Prva jednadžba daje $m = 5$, $n = 2$, odakle dobivamo Pitagorinu trojku (84, 80, 116). Iz druge jednadžbe slijedi da je $(m - n)(m + n) = 1 \cdot 29$, pa mora biti $m - n = 1$ i $m + n = 29$. Rješenje ovog sustava je $m = 15$, $n = 14$, odakle dobivamo trojku $(116, 1680, 1684)$.

U slučaju $d = 29$ je $\frac{116}{d} = 4$, što daje jedinu mogućnost $2mn = 4$ koja daje rješenja $m = 2$, $n = 1$, odnosno Pitagorinu trojku (87, 116, 145).

Za $d = 58$ je $\frac{116}{d} = 2$, no lako provjeravamo da ne postoji Pitagorin trokut sa stranicom duljine 2. Slično, slučaj $d = 116$ također nema rješenja jer ne postoji Pitagorin trokut sa stranicom duljine 1. Prema tome, imamo ukupno pet Pitagorinih trojki sa stranicom duljine116. □

Prilikom određivanja svih Pitagorinih trojki sa zadanom duljinom stranice, od koristi nam mogu biti sljedeće činjenice:

- Neparan prirodan broj k može se prikazati kao zbroj kvadrata dvaju relativno prostih brojeva m i n, tj. $k = m^2 + n^2$ ako i samo ako svi prosti faktori p broja k zadovoljavaj u $p \equiv 1 \pmod 4$. Nadalje, broj takvih prikaza jednak je 2^{r-1}, gdje je r broj različitih prostih faktora od k. Posebno, ako je $p \equiv 1 \pmod 4$ prost broj, onda je taj rastav jedinstven. Dokazi ovih činjenica prelaze okvire srednjoškolske matematike, a čitatelj ih može naći u [2].
- Prirodan broj k može se prikazati kao razlika dvaju kvadrata, tj. $k = m^2 - n^2$ ako i samo ako je $k \neq 2 \pmod 4$. Jedan smjer ove tvrdnje je trivijalan. Dokažite ga!

Poucak 57.indd 8 1.4.2014. 12:03:48

U nastavku promatramo Pitagorine trokute kod kojih su uključeni još neki elementi trokuta.

Primjer 3. *Postoji li Pitagorin trokut površine* 90?

Rješenje. Kako je površina pravokutnog trokuta jednaka polovini umnoška kateta, iz relacije (3) imamo da $d^2mn\left(m^2-n^2\right)=d^2mn(m-n)(m+n)=90$. Očito, d mora biti neparan jer bi u suprotnome lijeva strana jednakosti bila djeljiva brojem 4, a desna ne budući da je $90 = 2 \cdot 45$. No, s druge strane, kako je $m + n = (m - n) + 2n$, slijedi da su brojevi $m - n$ i $m + n$ iste parnosti. Ako su $m - n$ i $m + n$ neparni, onda je lijeva strana gornje jednakosti neparan broj, a desna paran, što je kontradikcija. U drugom slučaju, ako su ti brojevi parni, lijeva je strana djeljiva s 4, dok je desna djeljiva samo s 2, pa opet imamo kontradikciju. Dakle, ne postoji Pitagorin trokut površine 90. □

Primjer 4. *Odredimo sve Pitagorine trokute opsega* 60.

Rješenje. Neka su $d\left(m^2+n^2\right)$, $2dmn$ i $d(m^2 - n^2)$ duljine stranica Pitagorinog trokuta. Prema uvjetu zadatka mora vrijediti $d\left(m^2+n^2\right)+2dmn+d\left(m^2-n^2\right)=60$, odakle je dm(m + n) = 30. Kako d dijeli 30, slijedi da je $d\in\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. S druge strane, kako su m i n, $m > n$, relativno prosti brojevi različite parnosti, mora biti $m + n \geq 3$ i $m \geq 2$, tj. $m(m + n) \geq 6$. Zbog toga je $d \leq 5$, pa moramo razmotriti četiri slučaja.

Ako je $d = 1$, mora biti $m(m + n) = 30$. Direktno provjeravamo da ne postoje relativno prosti prirodni brojevi m i n, $m > n$, različite parnosti koji zadovoljavaju tu jednakost.

Za $d = 2$ imamo da je $m(m + n) = 15$. Brojevi $m = 3$ i $n = 2$ jedini su brojevi koji istovremeno zadovoljavaju ovu jednakost i uvjete Teorema 1. Prema tome, dobivamo Pitagorinu trojku (10, 24, 26).

U slučaju $d = 3$ je $m(m + n) = 10$, no niti jedno rješenje ne zadovoljava uvjete Teorema 1.

Konačno, ako je $d = 5$, onda je $m(m + n) = 6$, što daje rješenja $m = 2$ i $n = 1$, koja zadovoljavaju uvjete Teorema 1. Tako dobivamo još jednu trojku (15, 20, 25). □

4. Programska podrška za Pitagorine trojke

Konačno, u ovoj točki dajemo programsku implementaciju za određivanje svih Pitagorinih trokuta sa zadanom duljinom stranice. U nastavku ćemo se osvrnuti na ključne točke programa čiji je izvorni kôd pisan u Javi. Isto tako ćemo dati primjer rada aplikacije kao smjernicu za korištenje.

Poucak 57.indd 9 1.4.2014. 12:03:48

Opis ključnih dijelova programa

U slučaju Pitagorinih trojki korisnik zadaje jednu stranicu, a zadatak programa je pronaći sve Pitagorine trojke sa stranicom te duljine. Dakako, kao i u Primjeru 2, služimo se identitetom (3) kojim su dane sve Pitagorine trojke.

Kako imamo zadanu jednu stranicu, a ne znamo koju, za početak moramo pronaći sve djelitelje za danu duljinu stranice.

```
private ArrayList<Integer> djelitelji(int br) {
      ArrayList<Integer> djel = new ArrayList<Integer>();

      for (int i=1; i<= br/2; i++) {
            if ((br%i) == 0) djel.add(i);
      }
      return djel;

}
```

Nakon što smo pronašli sve djelitelje, za svakog od njih tražimo moguće kombinacije stranica, jer nakon što podijelimo zadanu stranicu djeliteljem, imamo tri moguća izraza koji mogu predstavljati tu stranicu, tj. ona može biti x, y ili z. U programu to izgleda ovako:

```
for (Integer djel:djelitelji) {
           int str = stranica/djel;

           if (str%2 == 0) {
                 parnaY(str, rjesenja, djel);
           } else {
                 if (str%4 !=2) {
                       minusX(str, rjesenja, djel);
                 }
                 ArrayList<Integer> dj = djelitelji(str);
                 dj.add(str);
                 boolean ispravno = true;
                 for(Integer d:dj) {
                       if(d%4 !=1) {
                            if (d%2==1) ispravno = false;
                       }
                 }
                 if (ispravno) plusZ(str, rjesenja, djel);
           }
     }
```

U svakoj od funkcija `parnaY(str, rjesenja, djel)`, `minusX(str, rjesenja, djel)`, `plusZ(str, rjesenja, djel)`, pomoću duljine stranice i izraza koji je opisuje, određujemo sve moguće vrijednosti prirodnih brojeva m i n, zatim

Poucak 57.indd 10 1.4.2014. 12:03:48

pomoću njih računamo i preostale dvije stranice trokuta, te ih upisujemo u rješenja ako takva trojka tamo već ne postoji.

Primjer upotrebe aplikacije

Prilikom pokretanja izvršnog programa otvara se prozor za unos duljine stranice trokuta (*Slika 1*).

Slika 1. Prozor za unos stranice

Slika 2. Ispis svih Pitagorinih trojki sa zadanom stranicom

Nadalje, odabirom opcije „Rješenja" otvara se novi prozor u kojem se ispisuju sve Pitagorine trojke sa zadanom duljinom stranice (*Slika 2*).

5. Zaključak

Ovaj članak, zajedno s programskom implementacijom, dio je završnog rada „Diofantske jednadžbe" studentice Petre Zadro, obranjenog na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu, pod mentorstvom profesora Marija Krnića. Zainteresirani čitatelj može u tom radu (vidi [3]) pronaći programske implementacije za još neke važne diofantske jednadžbe.

Nadamo se kako će ideje predstavljene u ovom radu, zajedno s programskom podrškom, biti od koristi učenicima i njihovim mentorima u sklopu dodatne nastave, kao i svima onima koji vole matematiku i informatiku.

6. Literatura

1. A. Dujella, *Pitagorine trojke*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike mentore, Crikvenica, 1994.
2. A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, skripta, PMF-MO, Zagreb, http://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf, 2009.
3. P. Zadro, *Diofantske jednadžbe*, završni rad, FER, Zagreb, 2010.
4. B. Pavković, B. Dakić, P. Mladinić, *Elementarna teorija brojeva,* Mala matematička biblioteka, Zagreb, HMD-Element, 1994.

Poucak 57.indd 11 1.4.2014. 12:03:49