ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE TAREAS DE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

Juan D. Godino – Belén Giacomone
jgodino@ugr.es – giacomone@correo.ugr.es
Universidad de Granada

Tema: Formación de profesores y maestros
Modalidad: Mini – curso (MC)
Nivel: No específico
Palabras clave: enfoque ontosemiótico, formación de profesores, visualización

Resumen

El reconocimiento explícito de los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas es una competencia que el profesor debe desarrollar. Esta competencia permite al docente comprender los procesos de aprendizaje matemático, diseñar y gestionar tales procesos y valorarlos con estándares de idoneidad previamente fijados. En consecuencia, se deben diseñar procesos formativos orientados al desarrollo de la competencia profesional mencionada. Este curso está focalizado en la implementación de un diseño formativo orientado al desarrollo de la competencia de los profesores de matemáticas para realizar el análisis epistémico y cognitivo de tareas escolares. Se pretende en primer lugar, reflexionar sobre las características de la visualización y del razonamiento diagramático, y su papel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; en segundo lugar, reconocer la diversidad de objetos y procesos implicados en tareas matemáticas realizadas mediante la aplicación de visualizaciones y razonamiento diagramático.

1. Introducción

Diversos autores, desde las investigaciones en educación matemática, describen modelos para intentar responder a la pregunta ¿cuáles son los conocimientos didáctico – matemáticos que debería tener el profesor de matemáticas para desarrollar una enseñanza idónea?

Godino (2009) incluye como categorías de conocimientos las relativas a las facetas *epistémica* (conocimientos institucionales) y *cognitivas* (conocimientos personales), como componentes del conocimiento especializado del contenido matemático. Seleccionado un problema o tarea matemática, el profesor debe ser capaz de prever posibles soluciones de la misma, distinguiendo la secuencia de prácticas operativas y discursivas que el resolutor debe implementar en cada caso. También debe poder identificar la trama de objetos *ostensivos* (lenguajes y artefactos) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) imbricados en las prácticas matemáticas, así como las relaciones potencialmente conflictivas entre los diversos tipos de lenguajes puestos en juego y los procesos matemáticos involucrados. Este análisis es complejo y requiere el desarrollo de una competencia específica en los profesores, mediante intervenciones formativas específicas.

En este curso, presentaremos ejemplos de análisis de las prácticas, objetos y procesos implicados en la solución de tareas matemáticas propias de la educación primaria y secundaria. A continuación, en la sección 2, describimos los fundamentos y el marco teórico que sustenta este trabajo. Seguidamente, presentamos el diseño formativo con los objetivos y metodología de implementación; mostramos también, el análisis a priori de una de las tareas propuestas. Finalmente, razonamos sobre la importancia de este tipo de intervenciones formativas y su implicación para la práctica docente.

2. Marco teórico y antecedentes

El planteamiento de la acción formativa está apoyada en el modelo de conocimiento del profesor de matemáticas descrito en Godino (2009) como "conocimiento didáctico - matemático" (CDM), el cual desarrolla otros modelos existentes, en particular el MKT (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008), mediante la aplicación de las herramientas conceptuales y metodológicas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013).

En el EOS se ha introducido la herramienta configuración de objetos y procesos para hacer un análisis pormenorizado de las prácticas matemáticas puestas en juego en la resolución de tareas. En la realización de dichas prácticas intervienen y emergen objetos matemáticos de diversa naturaleza, agrupándose en las siguientes categorías: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos. Todos los objetos están interconectados entre sí mediante funciones semióticas referenciales y operacionales (Godino et al., 2007, p. 130).

2.1. Competencia de análisis epistémico y cognitivo

Las competencias específicas que debe tener el profesor para una enseñanza idónea de las matemáticas se pueden concretar en el "diseño y análisis didáctico", esto es, la competencia para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para sintetizar los conocimientos didácticos existentes sobre el diseño, implementación y evaluación de la práctica docente (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012).

Para la enseñanza de las matemáticas, el docente debe tener el nivel de competencia matemática que le permita conocer y ser capaz de llevar a cabo las prácticas matemáticas, operativas y discursivas, necesarias para resolver los tipos de problemas de la etapa donde imparte. Además, el docente debe poder analizar y valorar la actividad matemática de los alumnos al resolver estos problemas, identificando los objetos y significados movilizados, con el fin de enriquecer su desempeño y mejorar su competencia profesional. Este análisis permite al docente prever conflictos de significados, evaluar la competencia matemática de los alumnos y establecer distintas posibilidades de institucionalización de los conocimientos matemáticos implicados (Godino et al., 2007), valorando su eficacia y su coste.

La tarea de análisis que proponemos a los profesores en formación en este diseño instruccional supone una evolución en la técnica de análisis ontosemiótico descrita en Godino et al. (2012).

2.2. Visualización y razonamiento diagramático

En muchas ocasiones, para favorecer el aprendizaje de las matemáticas se propone el uso de diversas representaciones, visualizaciones, diagramas, materiales manipulativos, etc., con la presunción de que tales materializaciones constituyen modelos de los conceptos matemáticos y de las estructuras en las cuales se organizan. Se supone que el uso de representaciones materiales es necesario no solo para comunicar las ideas matemáticas sino también para su propia construcción.

Arcavi (2003) considera que la matemática, como creación humana y cultural que trata con objetos y entidades muy diferentes de cualquier fenómeno físico, se apoya fuertemente sobre la visualización en sus diferentes formas y niveles, no solo en el campo de la geometría. Duval (2006) atribuye un papel esencial al tratamiento de los signos dentro de cada sistema y la conversión entre diferentes sistemas de representación semiótica. Dörfler (2003, p. 41) sostiene que un amplio "inventario" de diagramas, sus propiedades y relaciones apoya y ocasiona su uso creativo.

Consideramos que el profesor de matemáticas debe ser consciente de las relaciones entre las representaciones visuales, diagramáticas o de cualquier otro tipo, y los objetos matemáticos no ostensivos que les acompañan necesariamente. También debe conocer los usos y limitaciones de los distintos lenguajes, reconociendo las posibilidades epistémicas y cognitivas de los medios visuales de expresión. Esta hipótesis de trabajo condiciona el diseño instruccional que se muestra a continuación.

3. Diseño instruccional

3.1. Objetivos y metodología

El diseño instruccional se orienta al logro de los siguientes objetivos: en primer lugar reflexionar sobre las características de la visualización y del razonamiento diagramático y su papel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; en segundo lugar, reconocer la diversidad de objetos y procesos implicados en tareas matemáticas realizadas mediante la aplicación de visualizaciones y razonamiento diagramático.

Se propone la siguiente metodología instruccional:

1) Trabajando en equipos de 3 o 4 estudiantes realizar las siguientes actividades:
   a) Resuelve las tareas propuestas (como la que se muestra en la sección 3.2.)
   b) Describe el procedimiento seguido, indicando las acciones que se deben realizar y las explicaciones necesarias que justifican las respuestas.
   c) Identifica los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y cada una de las prácticas elementales, completando la tabla incluida a continuación (añade las filas necesarias).

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas*
…	…	…

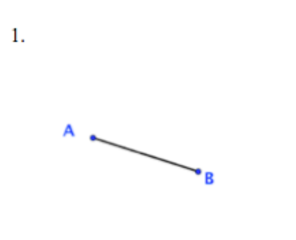
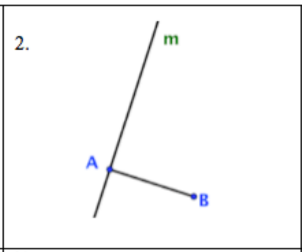
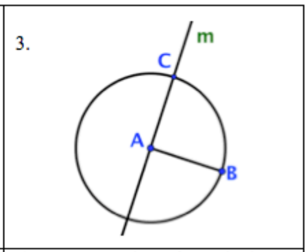
2) Presentación y discusión de resultados

A continuación, presentamos el análisis a priori de una de las tareas usadas en el proceso formativo, el cual servirá de base para orientar las interacciones formador – estudiantes, tanto en la fase de trabajo en equipo como en la discusión y sistematización de los conocimientos y competencias pretendidas.

3.2. Análisis *a priori* de una tarea

La secuencia de pasos indicados en la Figura 1 es el procedimiento seguido por un estudiante para construir un cuadrado con Geogebra.

I: Justifica que, en efecto, el cuadrilátero ABCD es un cuadrado.
II: Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la construcción y justificación del cuadrado con el Geogebra.

		
a) Represento un segmento AB.	b) Trazo una recta *m* perpendicular al segmento AB por el punto A.	c) Trazo una circunferencia de centro A y radio AB. d) Llamo C al punto de intersección entre la circunferencia trazada y la recta *m*.

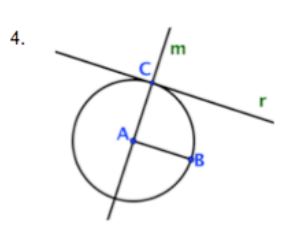
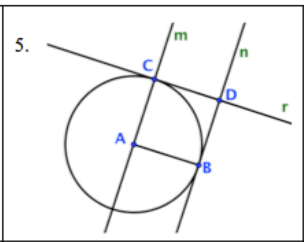
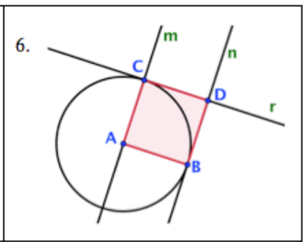
		
e) Trazo una recta *r* paralela al segmento AB haciendo que pase por el punto C.	f) Trazo la recta *n* perpendicular al segmento AB por el punto B. g) Llamo D al punto de intersección de la recta *n* y la recta *r*.	h) El cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

Figura 1. Construcción de un cuadrado con GeoGebra

Las posibles acciones y explicaciones esperadas para resolver la *cuestión I,* se pueden describir en las 8 prácticas matemáticas siguientes:

1) Con el término cuadrado designamos a un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes y sus cuatro ángulos interiores rectos.
2) El ángulo en A es recto porque la recta *m* se ha trazado perpendicular a AB.
3) El lado AC es congruente con AB porque es el radio de la circunferencia con centro A y radio AB.
4) *r* y *m* son perpendiculares porque *r* es paralela a AB y *m* es perpendicular a AB. Por tanto, el ángulo en C es recto.
5) El ángulo en D es recto porque *r* y *n* son perpendiculares.
6) El lado CD es congruente con AB porque *r* y AB son paralelas.
7) DB es congruente con AC porque *m* y *n* son paralelas.

8) ABCD es un cuadrado porque sus cuatro lados son congruentes y los cuatro ángulos interiores son rectos.

Para poder justificar que, en efecto, el cuadrilátero dado es un cuadrado, es necesario partir de la definición de cuadrado, la cual moviliza, determinados conceptos. Sin embargo, es necesario reconocer que, la práctica 1) se puede sustituir por otras definiciones de cuadrado, por ejemplo:

I. Región del plano delimitada por una línea poligonal cerrada formada por cuatro segmentos congruentes y sus ángulos interiores son rectos (o también que son congruentes)

II. Paralelogramo cuyos cuatro lados son congruentes y sus cuatro ángulos interiores rectos.

La respuesta esperada para la *cuestión II* se puede resumir en la Tabla 1, esto es, la identificación de los conocimientos implicados en los pasos a) – h) (enunciado) y en las prácticas 1) – 8) (respuesta).

Tabla 1
Configuración de objetos y significados implicados en las prácticas

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas*
Planteamiento de la tarea; interpretación de la secuencia de diagramas a) – h) utilizados para construir un cuadrado con GeoGebra.	La secuencia de pasos indicados a continuación es el procedimiento seguido por un estudiante para construir un cuadrado con Geogebra	Concepto: cuadrado geométrico Lenguajes: natural refiere al gráfico.
Construir uno de los lados del cuadrado que se quiere obtener.	Diagrama Figura 1- a): Represento un segmento AB	Conceptos: segmento (general); puntos extremos de un segmento. Procedimiento: trazado de un segmento genérico con Geogebra.
Construir un ángulo recto del cuadrado.	Diagrama Figura 1- b): Trazo una recta *m* perpendicular al segmento AB por el punto A.	Conceptos: línea recta; punto de un segmento; recta perpendicular a un segmento por un punto; ángulo recto. Procedimiento: trazado de una recta perpendicular a un segmento por uno de sus extremos con el Geogebra.
	...	...
Mostrar la construcción del cuadrado requerido.	Diagrama Figura 1- h): El cuadrilátero ABCD es un cuadrado.	Proposición: ABCD es un cuadrado.
Inducir la elaboración de una	*I.* Justifica que, en efecto,	Concepto: Justificación de la

justificación de la respuesta dada por el estudiante.	ABCD es un cuadrado	proposición anterior. Lenguajes: simbólico (ABCD) que refiere al gráfico (cuadrado)
Evocar la definición de cuadrado para tener en cuenta las condiciones que deben cumplir la secuencia de acciones que realiza el estudiante.	1) Con el término cuadrado designamos a un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes ...	Conceptos: cuadrado; cuadrilátero; lados congruentes; ángulos interiores de un polígono; ángulo recto.
Evocar propiedades de las rectas perpendiculares para justificar que un ángulo del cuadrilátero ABCD es recto.	2) El ángulo en A es recto porque la recta *m* se ha trazado perpendicular a AB.	Proposición: El ángulo A es recto. Argumentación: por la definición de rectas perpendiculares.
	...	...
Responder a la tarea pedida indicando que se cumple la definición de cuadrado.	8) ABCD es un cuadrado porque sus cuatro lados son congruentes y los cuatro ángulos interiores son rectos.	Proposición: tesis que se quería demostrar. Justificación: secuencia de pasos 1) a 7).

Si bien, por limitaciones de espacio, no es posible mostrar un análisis más detallado de los procesos matemáticos que se movilizan en la tarea, la Tabla 1 muestra que existe una estrecha imbricación entre los objetos que intervienen en la actividad matemática; específicamente entre: los lenguajes diagramáticos y secuenciales, los objetos ostensivos y no ostensivos y los objetos extensivos (particulares) y los intensivos (generales).

El uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para argumentar (comunicar, justificar y explicar) el desarrollo de las prácticas operativas y discursivas y el progreso en la tarea. La génesis del conocimiento matemático precisa de la reinterpretación de los lenguajes y del análisis de sus relaciones. Además es preciso observar que los medios de expresión son “artefactos” (Lasa, Wilhelmi y Belletich, 2014) que conllevan el uso implícito de un sistema de objetos no ostensivos que dotan de significado a la actividad matemática concretada en los objetos ostensivos.

4. Consideraciones finales

La actividad de resolución de problemas se complementa con el análisis epistémico – cognitivo provocada por las consignas: ¿Qué matemáticas se pone en juego en la resolución del problema? ¿Qué matemática ha puesto en juego el alumno? La respuesta a estas preguntas es apoyada mediante el uso de las herramientas teóricas del “enfoque ontosemiótico", concretadas en este caso en la noción de configuración de prácticas, objetos y procesos.

El tipo de análisis que hemos descrito en este trabajo debería ser una competencia instrumental del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013- 41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Dörfler, W. (2003). Diagrams as means and objects of mathematical reasoning. Developments in mathematics education in German-speaking countries. *Selected papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics*.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103-131.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN*: *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 7*(2), 1-21.

Hill H. C., Ball D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Lasa, A., Wilhelmi, M. R. y Belletich, O. (2014). Una parcela para Laika. *Educaçao Matematica Pesquisa, 16*(4), 1089-1110.