http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6
ISSN: 2254-8351

Educación Matemática en la Infancia

Contenido matemático fundacional para el aprendizaje en los primeros años

National Research Council of the National Academies
Washington, D.C., http://www.nationalacademies.org/nrc/

Trabajo solicitado a los autores [1]
Fecha de publicación: 15-02-2016

RESUMEN

En este capítulo se describe el contenido matemático fundacional accesible para niñas y niños pequeños. El foco en este capítulo está puesto en las propias ideas matemáticas, más que en la enseñanza y el aprendizaje de las mismas. Estas ideas matemáticas se dan por sentadas por los adultos, pero son sorprendentemente profundas y complejas. Hay dos áreas fundamentales en las matemáticas para la primera infancia: (1) el número y (2) la geometría y la medición, tal como identifican los Focos Curriculares del NCTM y subraya este comité. También hay importantes procesos de razonamiento matemático en que los niños deben implicarse. Este capítulo también describe algunas de las conexiones más importantes de las matemáticas infantiles con las matemáticas posteriores.

En el área del número, una idea fundamental es la conexión entre los números de contar como secuencia y en la descripción de cuántos objetos hay en un conjunto. Podemos representar números de contar arbitrariamente grandes de una manera eficiente y sistemática, mediante el notable sistema decimal de numeración (de base 10). Podemos utilizar los números para comparar cantidades sin emparejarlas directamente (sin usar la correspondencia uno a uno). Las operaciones de adición y sustracción nos permiten describir cómo se relacionan las cantidades antes y después de combinarlas o quitar una de otra, cómo se relacionan las partes y el todo, y expresar con precisión la comparación de dos cantidades.

En el ámbito de la geometría y la medición, una idea fundamental es que las formas geométricas tienen diferentes partes y aspectos que pueden describirse, y que pueden componerse y descomponerse. Para medir el tamaño de algo, primero se elige un atributo medible específico del objeto, y luego se considera el objeto como composición de un determinado número de unidades. Las formas de la geometría se pueden ver como aproximaciones idealizadas y simplificadas de objetos del mundo. El espacio tiene una estructura que deriva del movimiento a través del espacio y de la posición relativa dentro del espacio. Una forma importante de pensar en la estructura del espacio bidimensional y tridimensional proviene de considerar los rectángulos compuestos de filas y columnas de cuadrados y visualizar la forma de una caja como compuesta de capas formadas por filas y columnas de cubos.

Palabras clave: Educación infantil, matemáticas, número, geometría, medición, procesos matemáticos, conexiones.

[1] This is a translation of a chapter from *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity* by Committee on Early Childhood Mathematics; Center for Education; Division of Behavioral and Social Sciences and Education; National Research Council © 2009. First published in English by the National Academies Press. All rights reserved. This edition published under agreement with the National Academy of Sciences. Traducción realizada por Carlos de Castro Hernández.

Foundational mathematics content for the learning in the early childhood

ABSTRACT
This chapter describes the foundational and achievable mathematics content for young children. The focus of this chapter is on the mathematical ideas themselves rather than on the teaching or learning of these ideas. These mathematical ideas are often taken for granted by adults, but they are surprisingly deep and complex. There are two fundamental areas of mathematics for young children: (1) number and (2) geometry and measurement as identified in NCTM's Curriculum Focal Points and outlined by this committee. There are also important mathematical reasoning processes that children must engage in. This chapter also describes some of the most important connections of the mathematics for young children to later mathematics.

In the area of number, a fundamental idea is the connection between the counting numbers as a list and for describing how many objects are in a set. We can represent arbitrarily large counting numbers in an efficient, systematic way by means of the remarkable decimal system (base 10). We can use numbers to compare quantities without matching the quantities directly. The operations of addition and subtraction allow us to describe how amounts are related before and after combining or taking away, how parts and totals are related, and to say precisely how two amounts compare.

In the area of geometry and measurement, a fundamental idea is that geometric shapes have different parts and aspects that can be described, and they can be composed and decomposed. To measure the size of something, one first selects a specific measurable attribute of the thing, and then views the thing as composed of some number of units. The shapes of geometry can be viewed as idealized and simplified approximations of objects in the world. Space has structure that derives from movement through space and from relative location within space. An important way to think about the structure of 2-D and 3-D space comes from viewing rectangles as composed of rows and columns of squares and viewing box shapes as composed of layers of rows and columns of cubes.

Keywords: Mathematics, early childhood education, number, geometry, measurement, mathematical processes, conections.

1. Introducción

Las matemáticas ofrecen un medio poderoso para comprender y analizar el mundo. Las formas matemáticas de describir y representar las cantidades, las formas, el espacio y los patrones ayudan a organizar las intuiciones e ideas que la gente tiene sobre el mundo de forma sistemática. Algunos de estos sistemas matemáticos se han convertido en una parte tan fundamental de la vida diaria de las personas –por ejemplo, los sistemas para contar y los métodos de medir– que estas pueden no llegar a reconocer la complejidad de las ideas que los sustentan. De hecho, las ideas matemáticas adecuadas para la educación infantil y los primeros cursos de educación primaria revelan una sorprendente complejidad y resultan complicadas cuando se examinan en profundidad. En los niveles más profundos, constituyen los fundamentos de las matemáticas que han sido estudiados extensivamente por los matemáticos durante siglos (por ejemplo, véase Grattan-Guinness, 2000) y continúan siendo un tema de investigación actual en matemáticas.

En este capítulo, facilitamos un resumen de las ideas matemáticas apropiadas para la educación infantil y los primeros años de escolaridad y examinamos algunas de las ideas matemáticas más complejas basadas en ellas. Estas ideas fundacionales suelen darse por sabidas por muchos adultos y no suelen abordarse en las clases de matemáticas de la educación secundaria o la universidad. Debido a esto, muchas personas con interés en la educación infantil pueden no haber tenido oportunidades adecuadas en su formación para examinar estas ideas. Los capítulos 5 y 6 analizan de nuevo estas ideas con más detalle, desde la perspectiva de cómo los niños llegan a comprenderlas y de las conexiones conceptuales que establecen al hacerlo.

Este artículo consta de cuatro secciones. Las dos primeras describen las matemáticas para niños pequeños en dos áreas principales: (1) número y (2) geometría y medición. Estas ideas, que constituyen una importante preparación para la escuela y para la vida, también son genuinamente matemáticas, con importancia desde la perspectiva de un matemático. Por otra parte, son interesantes para niñas y niños, que disfrutan implicándose en ellas y explorándolas.

La tercera sección describe los objetivos relativos a los procesos matemáticos, tanto los generales como los específicos. Los objetivos de los procesos generales aparecen en toda la matemática, en todas sus áreas y en todos los niveles, incluso en las matemáticas para las primeras edades. Los objetivos de procesos específicos son comunes a diversos temas en matemáticas. Estos objetivos de procesos deben tenerse en cuenta al considerar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con los niños.

La cuarta sección aborda las conexiones entre los contenidos descritos en las dos primeras secciones, así como con las matemáticas importantes que los niños estudian más adelante en la escuela primaria. Estas conexiones ayudan a mostrar la naturaleza fundacional de las matemáticas descritas en las dos primeras secciones.

2. Contenidos sobre el número

El número es un medio fundamental para describir el mundo. Los números son abstracciones que se aplican a una amplia gama de situaciones reales o imaginadas –cinco niños, cinco en el dado, cinco caramelos, cinco dedos, cinco años, cinco pulgadas, cinco ideas. Debido a que son abstractos, los números constituyen maneras increíblemente versátiles de explicar el mundo. "Sin embargo, a fin de usar los números para comunicarnos, las personas necesitan representaciones –algunas físicas, orales o escritas" (National Research Council, 2001, p. 72). La comprensión del número y los conceptos relativos al mismo incluye la comprensión de los conceptos de cantidad y cantidad relativa, la agilidad con el conteo, y la capacidad de realizar operaciones sencillas. Agrupamos estos importantes conceptos en tres áreas básicas: números, relaciones y operaciones. El recuadro 1 resume las principales ideas de cada uno de estos núcleos. El desarrollo de la comprensión del número, las operaciones, y cómo representarlas son algunas de las principales tareas matemáticas para niñas y niños durante sus primeros años.

2.1. El núcleo del número

El núcleo del número tiene que ver con la lista de los números de contar 1, 2, 3, 4, 5,... y su uso para indicar cuántas cosas hay en colecciones. Hay dos formas claramente diferentes de pensar acerca de los números de contar: por un lado, forman una lista ordenada, y, por otra parte, describen la cardinalidad, es decir, cuántas cosas hay en un conjunto. La noción de correspondencia uno a uno establece un puente entre estos dos puntos de vista sobre los números de contar y juega también un papel central para la propia noción de cardinalidad. Otro aspecto sutil e importante de los números es la forma en que se escriben (y dicen) utilizando el sistema de base 10. La parte superior del recuadro 1 proporciona una visión general del núcleo del número desde la perspectiva del aprendizaje infantil; esto se explica con mayor detalle en el capítulo 5. Aquí nos centramos en el núcleo del número desde una perspectiva matemática, como fundamento para la reflexión sobre el aprendizaje infantil.

Los números cuantifican: Describen la cardinalidad

Los números indican "cuántos" o "cuánto". En otras palabras, los números comunican cuántas cosas hay o cuánto hay de algo. Los números pueden utilizarse para dar una información específica y detallada sobre colecciones de cosas y sobre cantidades de materia. En un principio, unos cuantos osos de juguete en una cesta pueden verse como "algunos osos" sin más, pero si sabemos que hay siete osos en la cesta, tenemos una información más detallada y precisa sobre la colección de osos.

Recuadro 1

Visión general sobre el núcleo del número, relaciones y operaciones

El núcleo del número: Percibir, decir, describir/hablar de, y construir números
Cardinalidad: asignar una palabra número a la numerosidad de un conjunto obtenida por subitización perceptiva (reconocimiento inmediato de 1 a 3 objetos), subitización conceptual (utilizando composiciones o descomposiciones de numerosidades mayores), correspondencia uno a uno o conteo.
Lista de palabras numéricas (o palabras número): saber recitar la secuencia de las palabras número.
Correspondencias uno a uno en el conteo: contar objetos estableciendo las correspondencias espacial y temporal que conectan la palabra número pronunciada en un instante preciso con un objeto localizado en el espacio.
Símbolos numéricos escritos: lectura, escritura y comprensión de símbolos numéricos escritos (1, 2, 3, etc.).
Coordinaciones de todo lo anterior, tales como el uso de la lista de palabras número para contar y contar para hallar la cardinalidad de un conjunto.

El núcleo de relaciones: Percibir, decir, describir/hablar de, construir las relaciones "más que", "menos que", e "igual a" entre dos conjuntos mediante
El uso de estrategias generales de percepción de longitudes y densidades para determinar qué conjunto es mayor, menor, o igual a otro conjunto, para después:
Utilizar estrategias de unitización y conteo y emparejamiento (correspondencia uno a uno) para determinar qué conjunto es mayor, menor, o igual a otro conjunto, para después:
Detectar la diferencia entre los dos conjuntos, de modo que la situación se convierta en la comparación aditiva listada más abajo.

El núcleo de operaciones: Percibir, decir, describir/hablar de, y construir las diferentes operaciones de adición y sustracción (composiciones/descomposiciones de números)
Situaciones de cambio: Situaciones de cambio creciente (cantidad inicial + cantidad de cambio dan la cantidad final) y situaciones de cambio decreciente (cantidad inicial – cantidad de cambio dan la cantidad final).
Juntar/separar: juntar dos conjuntos para formar un total; separar un número para formar dos sumandos.
Composición/descomposición de números: Moverse hacia atrás y adelante entre el total y sus sumandos componentes: "Veo 3. Veo que 2 y 1 son 3."
Ternas numéricas anidadas: Experimentar un total y los sumandos "ocultos en su interior" como una terna en la que los sumandos están anidados en el total.
Situaciones de comparación aditiva: Comparación de dos cantidades para calcular cuánto más o cuánto menos es una que la otra (el núcleo de relaciones precede a esta situación).

Los números son, en sí mismos, una abstracción de la noción de cantidad, porque cualquier número dado cuantifica una interminable variedad de situaciones. Utilizamos el número 3 para describir la cantidad de tres patos, tres dinosaurios de juguete, tres personas, tres golpes de tambor, y así sucesivamente. Podemos pensar en el número 3 como un rasgo común abstracto que comparten todos los ejemplos ilimitados de conjuntos de tres cosas.

¿Cómo puede captarse este rasgo común que todos los conjuntos de tres cosas comparten? En el corazón de esta característica subyace la noción de correspondencia 1 a 1. Entre dos colecciones cualesquiera de tres cosas siempre se puede establecer una correspondencia 1 a 1. Esto significa que los miembros de la primera colección pueden emparejarse con los miembros de la segunda colección, de tal modo que cada miembro de la primera colección está emparejado con exactamente un miembro de la segunda colección, y cada miembro de la segunda colección está emparejado con exactamente un miembro de la primera colección. Por ejemplo, cada pato en un conjunto de tres patos puede emparejarse con un único huevo, de un conjunto de tres huevos, de modo que no hay dos patos que estén emparejados con el mismo huevo, no hay dos huevos que estén emparejados con el mismo pato, y no hay patos ni huevos que permanezcan sin pareja.

La secuencia numérica

Los números de contar pueden verse como una lista ordenada e infinitamente larga de números distintos. La lista de los números de contar empieza con el 1, y cada número en la lista tiene un único sucesor. Esto crea un orden particular para los números de contar, a saber, 1, 2, 3, 4, 5, 6,... No sería correcto saltarse un número de la lista, ni cambiar el orden en que se recita la lista. Además, cada número aparece una sola vez en la lista de números de contar, por lo que sería un error repetir cualquiera de los números de la lista.

La lista de números es muy útil porque puede utilizarse como parte del conteo de objetos uno a uno para indicar cuántos objetos hay en una colección. Aunque el número de objetos en colecciones pequeñas (hasta 3 o 4) puede reconocerse inmediatamente –esto se llama subitización– en general, se utiliza la lista de los números para determinar el número de objetos de un conjunto contándolos. El conteo permite cuantificar exactamente colecciones mayores de las que se pueden reconocer inmediatamente. Contar implica utilizar la lista de los números de contar en orden, por lo general a partir de 1, pero a veces a partir de otro número, como en 5, 6, 7,... (Otras formas de conteo incluyen el "conteo a saltos", en el que se cuenta de dos en dos, de tres en tres, o de cuatro en cuatro, como en 2, 4, 6,..., y el conteo regresivo (hacia atrás), como en 10, 9, 8, 7,...).

Aunque los adultos lo dan por sentado, por ser algo familiar, la conexión entre la lista de los números de contar y el número de elementos de un conjunto es profunda y sutil. Es una conexión clave que los niños deben establecer. También hay sutilezas e ideas profundas implicadas al recitar y al escribir la lista, que los adultos también dan por sabidas, por lo habitual de su uso. Debido a la profundidad y sutileza de las ideas que intervienen en el uso de la lista de números y en su conexión con la cardinalidad, y dado que estas ideas son centrales para toda la matemática, resulta esencial que los niños alcancen un dominio fluido en el uso de la lista de los números (ver Recuadro 2).

Recuadro 2

La importancia de la fluidez con la lista de los números

Todo el trabajo en el núcleo de relaciones/operaciones en 5-6 años sirve a un doble propósito. Ayuda a los pequeños a resolver problemas con números mayores y a conseguir mayor fluidez en sus métodos de resolución de Nivel 1. También les ayuda a alcanzar fluidez en el uso de la lista de palabras número en situaciones de adición y sustracción, por lo que la lista de palabras número puede convertirse en una herramienta de representación para su uso en el Nivel 2 de métodos de resolución de conteo. Para hacernos una idea de este proceso, podemos tratar de sumar o restar utilizando la lista del alfabeto en lugar de la secuencia de las palabras número. Para contar a partir de un número, se debe comenzar el conteo con el primer sumando y llevar la cuenta de cuántas palabras se va avanzando. Muchos adultos no son capaces de comenzar a contar en el alfabeto desde la letra D o la J porque no tienen fluidez con esta lista. Tampoco saben poner las letras con dedos (¿cuántos dedos son F?), así que no pueden calcular D + F diciendo D y después levantando un dedo por cada letra pronunciada después de D hasta que tengan levantados F dedos. Son estos requisitos previos para contar a partir del primer número los que los niños de 5-6 años aprenden a medida que cuentan, suman y restan muchas, muchas veces. Por supuesto, a medida que lo van haciendo, irán también comenzando a recordar ciertas sumas y restas como ternas de composición/descomposición (como hechos numéricos).

Conexión de la lista de los números con la cardinalidad. En esencia, contar es una forma de hacer una correspondencia uno a uno entre cada objeto (donde los objetos pueden ser cualquier cosa discreta, desde una muñeca, a un golpe de tambor, hasta la idea de un unicornio) y un conjunto prototípico, como el de las palabras numéricas. Por ejemplo, cuando un niño cuenta un conjunto de siete osos, establece una correspondencia uno a uno entre la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y la colección de los osos. Para contar los osos, el niño recita la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 mientras señala un nuevo oso por cada número recitado. Como resultado, cada oso queda emparejado con un número, cada número queda emparejado con un oso, y no hay números ni osos sin pareja una vez concluido el conteo. El emparejamiento puede llevarse a cabo de muchas maneras diferentes (empezando por cualquiera de los osos y continuando con cualquier otro oso como el siguiente, y así sucesivamente), pero cada modo particular de hacer la correspondencia uno a uno en el conteo conduce a establecer que hay siete osos en el conjunto.

Una característica clave del conteo de objetos es que la última palabra número tiene un estatus especial, pues especifica el número total de elementos de una colección. Por ejemplo, cuando un niño cuenta un conjunto de siete osos, el niño cuenta 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, señalando un oso por cada número. El último número pronunciado, 7, no es sólo el último número de la lista, sino que también indica que hay siete osos en el conjunto (es decir, la cardinalidad del conjunto). Así, al contar los 7 osos, el que está contando pasa de utilizar 7 como una referencia en el conteo (7 como el último oso contado) a referirse a 7 en un sentido cardinal cuando se refiere a 7 como el número total de osos. Por tanto, el conteo proporciona otra forma de captar la idea abstracta de que todos los conjuntos de un número fijo de cosas comparten una característica común –que cuando se cuentan dos conjuntos que tienen el mismo número de objetos, la última palabra número recitada será la misma para ambos.

Otra observación clave sobre el conteo es que, dado cualquier número de la lista de números de contar, el siguiente número de la lista indica cuántos objetos hay en un conjunto que tiene un objeto más que los que tienen los conjuntos correspondientes al número dado. Por ejemplo, si hay cinco pegatinas en una caja y se mete una pegatina más en la caja, entonces es posible saber, incluso sin contarlas todas de nuevo, que ahora habrá 6 pegatinas en la caja, porque 6 es el número siguiente en la lista de contar. En general, el siguiente a un número en la lista de contar describe una cantidad que es uno más que la cantidad descrita por el número anterior.

En cierto sentido, entonces, el conteo es una suma: Cada número añade (suma) uno más a la colección anterior (Figura 1). Por supuesto, si se cuenta hacia atrás, entonces se está restando. Estas observaciones resultan esenciales para comprender los métodos que inicialmente usan niñas y niños para resolver problemas de adición y sustracción. Además, cada paso en el proceso de conteo podría pensarse como la descripción del número de objetos que han sido contados hasta entonces.

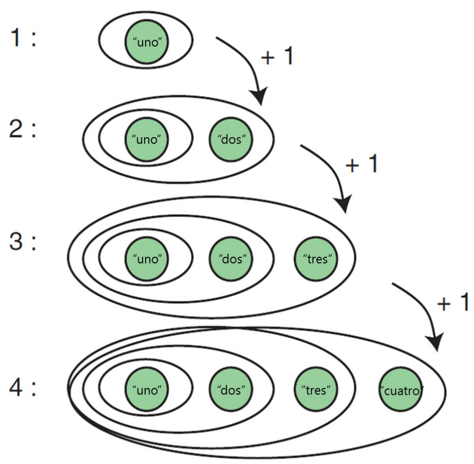

Figura 1. Cada número de contar describe una cantidad que es uno más de la que describe el número anterior

La lista de las palabras número y los símbolos numéricos escritos en el sistema decimal de valor posicional. Cada número de la secuencia numérica tiene un único nombre hablado y puede ser representado por un único símbolo escrito. Los nombres y símbolos de los primeros números de la lista provienen de la tradición, pero los nombres en inglés de los primeros 10 (más o menos) números de contar y los símbolos para las cifras (de 0 a 9) son arbitrarios y podrían haber sido diferentes. Por ejemplo, en lugar de la palabra inglesa “three” ("tres"), se podría estar utilizando "bik" o "Russell" o cualquier otra palabra, como las palabras que se utilizan para "tres" en otros idiomas. En lugar del símbolo 3, se podría usar un símbolo de apariencia completamente diferente.

La lista de los números de contar debe avanzar cada vez más y más, a fin de poder contar conjuntos cada vez mayores. Así que el problema es cómo dar un único nombre a cada número. Diferentes culturas han adoptado muchas soluciones diferentes para este problema (ver, por ejemplo, Menninger, 1958/1969; ver, en el capítulo 4 de este libro[2], una discusión acerca de las palabras que se utilizan para contar en distintos idiomas). La solución actual a este problema resulta muy eficiente, pero no fue obvia y, de hecho, constituye un logro significativo en la historia del pensamiento humano (Menninger, 1958/1969). Incluso aunque los nueve primeros números de contar, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, se representan mediante símbolos diferentes, sin relación entre sí, resulta deseable que exista algún mecanismo para continuar la lista de los números sin recurrir a la creación indefinida de símbolos nuevos.

El sistema de numeración decimal (o sistema de base 10) es el ingenioso sistema que se utiliza hoy para escribir (y decir) los números de contar (números naturales). El sistema decimal permite utilizar sólo los 10 dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para escribir cualquier número como una cadena de dígitos (a este tipo de representación escrita del número se le suele llamar “numeral”).

El sistema se llama “sistema de base 10” porque utiliza 10 dígitos distintos y se basa en el uso de agrupamientos repetidos de 10. El uso de 10 únicos dígitos para escribir cualquier número de contar, no importa cómo sea de grande, se logra mediante el uso de valor posicional. Es decir, el significado de un dígito en un número escrito depende (de forma muy específica) de su posición. Los detalles sobre el uso del sistema decimal para escribir la lista de números de contar se dan en el Recuadro 3: Una idea clave es la creación de unidades cada vez mayores, cuyos dígitos ocupan posiciones cada vez más a la izquierda, tomando el valor de cada posición 10 veces el valor del lugar previo a su derecha. Se puede pensar hacer esto formando combinaciones de 10 del valor posicional anterior. Los valores cada vez mayores de cada posición permiten que cualquier número, no importa como sea de grande, sea expresado como una combinación con entre el 0 y 9 en cada posición. De esta manera, todos los números de contar se pueden expresar de una forma única como un numeral formado por una cadena de dígitos. (Ver en Howe, 2008, detalles adicionales sobre el sistema decimal y el valor posicional.)

A pesar de que la mayoría de los países del mundo utilizan ahora este sistema de numeración escrita, todavía usan su propia lista de palabras para contar que tienen una relación cercana, o no tan cercana, con el sistema de los numerales escritos. Las listas de palabras de contar en inglés, y en otros idiomas europeos, tienen varios aspectos que no encajan demasiado bien con el sistema decimal y que crean dificultades en el aprendizaje del sistema. Estas dificultades, y las formas para compensarlas, se discuten en el Capítulo 4.

[2]Publicado como: National Research Council (2014). Variaciones en el desarrollo, influencias socioculturales, y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(2), 1-22.

Recuadro 3

El uso del sistema de numeración decimal para escribir la lista de los números de contar

Cada uno de los nueve primeros números de contar (o palabras número) "uno, dos, tres,... , nueve" requieren un sólo dígito para escribirse, 1, 2, 3,... , 9. Cada dígito está en lugar de (representa) “varias cosas” o, en otras palabras, de varias “unidades”, como se indica en la parte superior de la Figura 2. En ella vemos cada uno de estos dígitos en la “posición de las unidades”.

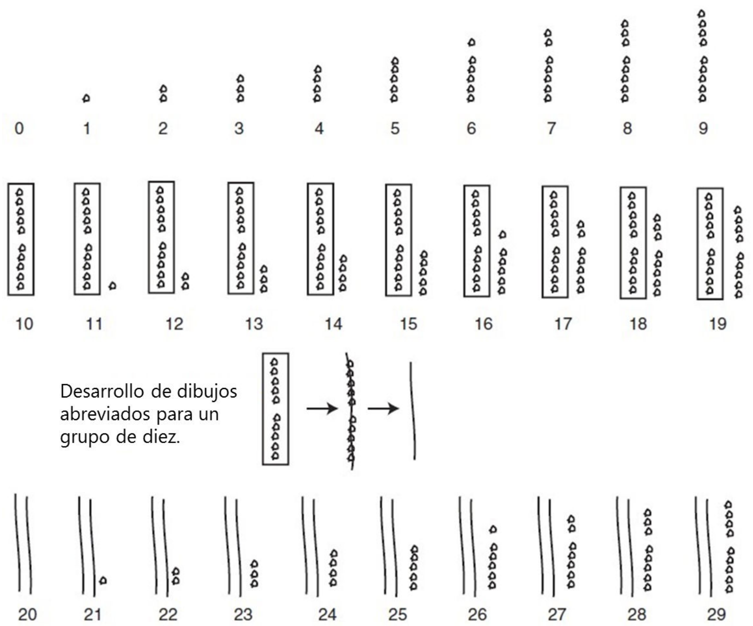

Figura 2. Sistema decimal 1

El siguiente número de contar, el diez, requiere dos dígitos para escribirse. El 1 significa 1 decena y el 0 significa 0 unidades, y el 10 representa la cantidad conjunta de 1 decena y 0 unidades. Esta forma de describir y escribir el número diez requiere pensar en él como un único grupo de diez; en otras palabras, como una nueva entidad por derecho propio, que se crea uniendo 10 cosas separadas para formar un nuevo todo coherente, como se indica en la Figura 2 al mostrar 10 puntos agrupados que forman una nueva unidad de diez (la decena).

En cada uno de los siguientes números de contar de dos dígitos, 11, 12, 13, 14, 15,... , 20, 21, 22,... , 30, 31,... , 97, 98, 99, el dígito de la derecha indica esas mismas unidades, por lo que se dice que este dígito se encuentra en la "posición de las unidades", y el dígito de la izquierda indica esas mismas decenas, por lo que decimos que está en la posición de las decenas; el número representa la cantidad combinada de las decenas y unidades indicadas por cada dígito. Por ejemplo, en 37, el 3 significa 3 decenas, el 7 significa 7 unidades, y 37 representa la cantidad combinada de 3 decenas y 7 unidades. Es importante advertir que a partir del 20 en adelante, la forma de decir las palabras número sigue un patrón regular que encaja con la forma en que estos números se escriben. Sin embargo, la forma en que se dicen del 11 al 15 (en inglés del 11 al 19) no se ajusta a este patrón. De hecho, de 11 al 15 se dice al revés, porque el dígito de las unidades se pronuncia antes que el dígito de las decenas (on-ce, do-ce, tre-ce, cator-ce).

El número 99 es el último número de contar de dos dígitos, y representa la cantidad combinada de 9 decenas y 9 unidades (ver Figura 3). El siguiente número de contar será el número de puntos que hay cuando se añade un punto más a los puntos que hay a la izquierda de la Figura 3. Este punto adicional "completa" un grupo de diez, tal como aparece en el medio de la Figura. Ahora hay 10 decenas, pero no existe una cifra que pueda mostrar tantas decenas en la posición de las decenas. Así que las 10 decenas se agrupan para formar un nuevo todo coherente, como se indica a la derecha de la Figura 3, que se llama una centena. De 0 a 9 centenas pueden marcarse en la posición que hay a la izquierda de la posición de las decenas, que se llama posición de las centenas. Así que el siguiente número de contar, que viene después de 99, se escribe como 100, en el que el 1 significa 1 centena, y los ceros representan 0 decenas y 0 unidades.

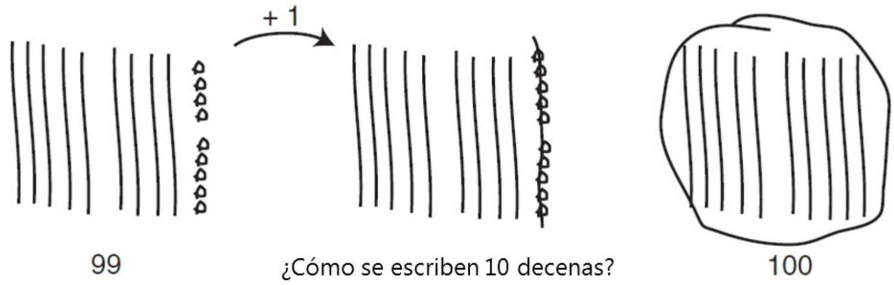

Figura 3. Sistema decimal 2

El sistema de numeración decimal tiene una modo sistemático de formar nuevas unidades más grandes mediante el agrupamiento de cada 10 unidades de la posición anterior y el registro de la nueva unidad en una posición más a la izquierda a la posición correspondiente a las diez unidades agrupadas. Así como 10 unidades forman una nueva unidad de 10 (la decena), que se apunta a la izquierda de la posición de las unidades, 10 decenas forman una nueva unidad de cien (la centena), que se registra a la izquierda de la posición de las decenas, y 10 centenas forman una nueva unidad de 1000, que se apunta a la izquierda de la posición de las centenas. Este patrón se puede extender cuanto deseemos a nuevos lugares a la izquierda.

2.2. El núcleo de relaciones y operaciones

Los números no existen de manera aislada. Forman un sistema coherente en que los números se pueden comparar, sumar, restar, multiplicar y dividir. Del mismo modo que los números son abstracciones de la noción de cantidad, las relaciones "menor que", "mayor que" e "igual que" y las operaciones de suma, resta, multiplicación y división son abstracciones de la comparación, combinación y separación de cantidades. Estas relaciones y operaciones se aplican a una amplia variedad de problemas. Las partes media y final del Recuadro 2 resumen el núcleo relaciones y operaciones para niños pequeños (que sólo afecta a la suma y la resta, y no a la multiplicación o la división).

Comparación

En algunos casos, resulta evidente visualmente que hay más cosas en una colección que en otra, como en el caso de los dos conjuntos de cuentas que se muestran en la parte superior de la Figura 4. Pero en otros casos no es claro de inmediato qué colección tiene más elementos (o si tienen igual número).

Una forma básica de comparar dos colecciones de objetos es por emparejamiento (correspondencia uno a uno, como en el centro de la Figura 4). Si un niño tiene una colección de cuentas negras y otra colección de cuentas blancas, y si estas colecciones están próximas una de la otra, el niño puede colocar cada cuenta de color negro con una única perla blanca. Si hay al menos una cuenta blanca de sobra, entonces hay más blancas; si por lo menos hay una negra de más, entonces hay más negras. Y si no sobra ninguna cuenta, entonces los dos grupos tienen el mismo número de cuentas (aunque es posible que no se sepa, y tampoco es necesario saber, de qué número se trata exactamente).

Cuando el emparejamiento no es posible, se puede contar el número de cuentas de dos colecciones para determinar qué colección tiene más cuentas o si ambas tienen el mismo número. Una observación clave sobre el uso del conteo para comparar es que una palabra número recitada después en la lista de palabras de contar corresponde a una colección que tiene un mayor número de objetos que una colección correspondiente a una palabra número anterior en la secuencia. Por ejemplo, se sabe que hay más cuentas en una colección de ocho cuentas negros que en una colección de siete cuentas blancas, porque "ocho" aparece después de "siete" en la lista de palabras de contar (ver la parte inferior de la Figura 4). Contar, en consecuencia, proporciona un método más avanzado de comparar *conjuntos de cosas* que el emparejamiento, porque se basa en el conocimiento que tenemos sobre cómo se comparan *los números*. Contar es también una forma más efectiva de comparar conjuntos de cosas que el emparejamiento, porque permite comparar conjuntos que no están cerca.

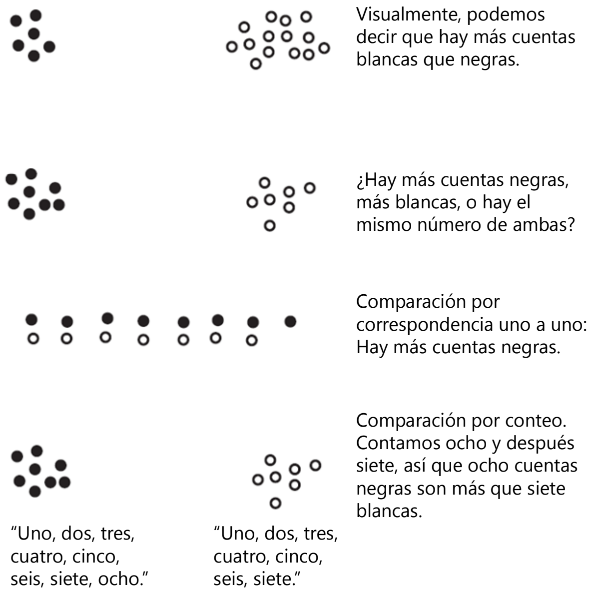

Figura 4. Comparación

Un punto clave sobre la comparación de colecciones de objetos es que el conteo se puede utilizar para hacerlo, y que esta posibilidad se basa en la relación que hay entre la lista de los números de contar y la cardinalidad: Los números más avanzados en la lista describen mayores cardinalidades que los números previos de la lista. Averiguar qué colección es mayor que otra colección es más fácil que determinar exactamente cuántos elementos más tiene una colección que la otra, lo que puede formularse como un problema de suma o resta. Esta versión más específica de la comparación se discutirá en el siguiente apartado.

Los problemas verbales y las situaciones de adición y sustracción

La adición y la sustracción se utilizan para relacionar cantidades antes y después de combinarlas, quitar una a la otra, establecer relaciones entre las partes o el total de una cantidad, o indicar con precisión cuál es la diferencia al comparar dos cantidades. Los problemas verbales y las situaciones que pueden formularse con la adición o la sustracción aparecen en una amplia variedad, que no se reduce a los problemas verbales más sencillos y habituales de "añadir" y "quitar". Las estrategias que los niños pequeños pueden usar para resolver los problemas verbales de adición y sustracción, de nuevo, se basan en una relación fluida entre la lista de palabras número y la cardinalidad. Más adelante (más o menos en primero de primaria) surgen también métodos basados en la descomposición de números y en una comprensión inicial del sistema de base 10, a saber, que los números del 11 a 19 pueden verse como una decena y algunas unidades.

El Recuadro 4 describe los diferentes tipos de problemas verbales o situaciones que se pueden formular con la adición o la sustracción. Visto desde una perspectiva más avanzada, la mayoría de estas situaciones se pueden formular de forma natural con una ecuación de la forma

$$A + B = C \text{ o } A - B = C$$

en las que se conocen dos de los tres números en la ecuación y el problema consiste en determinar el otro número que hace que la ecuación sea verdadera. Los tipos de situaciones que se formulan naturalmente con estas ecuaciones son las situaciones de cambio creciente y cambio decreciente, las de combinación y las de comparación.

Recuadro 4

Tipos de situaciones de adición y sustracción

Situaciones de cambio creciente y decreciente

Las situaciones de cambio presentan la evolución de una cantidad a través de tres etapas en el tiempo: inicial, cambio y final. La mayoría de los niños, antes de primer curso de primaria, resuelven solo problemas en los que la cantidad desconocida es la final. En primero de primaria, cualquier cantidad puede ser la incógnita. Los problemas con la cantidad inicial desconocida son más difíciles que los que tienen la cantidad de cambio desconocida, más difíciles a su vez que los problemas con la incógnita en la cantidad final.

> *Cambio creciente:* cantidad inicial + cantidad de cambio = cantidad final: "Había dos conejitos sentados en la hierba. Otro conejito saltó hacia allí. ¿Cuántos conejos hay en la hierba ahora?"
> *Cambio decreciente:* cantidad inicial – cantidad de cambio = cantidad final: "Había cuatro manzanas en la mesa. Me comí dos manzanas. ¿Cuántas manzanas hay en la mesa ahora?"

Situaciones de combinación: juntar y separar

En estas situaciones, la acción suele ser más conceptual que física y puede implicar el uso de un término más general como "animal": "Jaime tiene un caballo y dos perros. ¿Cuántos animales tiene?"
En las situaciones de juntar, dos cantidades se unen (o se consideran conjuntamente) para formar una tercera cantidad: "Hay dos manzanas rojas y una manzana verde en la mesa. ¿Cuántas manzanas hay en la mesa?"
En las situaciones de separar, una cantidad total se "rompe" para formar dos cantidades: "La abuela tenía tres flores. ¿Cuántas puso en el florero rojo y cuántas en el florero azul?"

Estas son situaciones de composición y descomposición de números en las que las niñas y los niños cambian de pensar en el total a pensar en los sumandos (las partes). Trabajar con diferentes números les ayuda a aprender ternas de números ligados por esta relación parte-parte-todo, que pueden aplicar después en la adición y en la sustracción. Se espera que con el tiempo y con la práctica, los alumnos lleguen a pensar en situaciones numéricas "anidadas" en las que se considera al total y a los dos sumandos (compañeros) "escondidos dentro del total" simultáneamente, en lugar de tener que cambiar de un sentido al otro (partes → total o total → partes).

Las igualdades en las que aparece el total solo a la izquierda representan estas situaciones de separar (descomponer): 3 = 2 + 1. Estas igualdades facilitan la comprensión de que el signo igual no siempre significa “da como resultado”, sino que también puede significar “es el mismo número que”, lo que ayuda en la comprensión posterior del álgebra.

Situaciones de comparación

Los niños aprenden primero las relaciones de comparación igual que, mayor, y menor que, para dos grupos de objetos o para dos números. Descubren cuál es el mayor y cuál es menor (o si son iguales), mediante el emparejamiento (correspondencia uno a uno) o el conteo.

En torno a primero de primaria, niñas y niños descubren la tercera cantidad implicada en una situación de “más que”/”menos que”: la cantidad de más o de menos (la diferencia). Los niños pueden entonces resolver problemas de comparación aditiva en los que se compara una cantidad mayor con otra menor para determinar la diferencia entre ambas. Son capaces de escribir diferentes igualdades para mostrar este tipo de comparaciones que pueden seguirse resolviendo por correspondencia uno a uno o conteo. Como en las demás situaciones de adición y sustracción, cualquiera de las tres cantidades puede ser la incógnita. El lenguaje que describe estas situaciones es complejo, porque la expresión comparativa nos da dos tipos de información. "Julia tiene seis más que Lucía" nos dice que "Julia tiene más de Lucía", y que la cantidad de más (la diferencia) es seis. Esta es una estructura lingüística difícil de comprender y de utilizar para los pequeños.

NOTA: Los investigadores utilizan diferentes nombres para este tipo de situaciones de adición y sustracción, y se pueden hacer distinciones más finas dentro de estas categorías. Sin embargo, hay un acuerdo generalizado sobre los tipos básicos de situaciones problemáticas, a pesar del uso de diferentes terminologías.

En las situaciones de cambio creciente y cambio decreciente, hay una cantidad inicial (A), una cantidad en la que esta cantidad inicial cambia (B), y la cantidad resultante (C). Los problemas en los que A y B son las cantidades conocidas y debe determinarse C son los problemas clásicos, más fácilmente reconocibles de adición y sustracción. La inversión de la acción en situaciones de cambio creciente y cambio decreciente muestra la conexión entre la adición y sustracción. Por ejemplo, si Whitney tenía 9 dinosaurios y regaló 3, ¿cuántos dinosaurios le quedaron a Whitney? Este problema puede formularse con la ecuación de sustracción, 9 – 3 = ¿? Si comienza con los dinosaurios que le quedan a Whitney, y luego recupera los 3 dinosaurios regalados, conseguirá sus 9 dinosaurios iniciales, lo que se puede expresar con la ecuación de adición ¿? + 3 = 9. Los problemas de sustracción, por tanto, pueden reformularse en términos de adición, lo que conecta la sustracción con la adición.

En las situaciones de combinación, hay dos partes, A y B, que juntas forman una cantidad total, C. Estas situaciones se formulan de un modo natural con una ecuación de adición, A + B = C.

Los problemas de cambio creciente, cambio decreciente, y combinación en los que A o B (la cantidad inicial, la cantidad de cambio, o una de las dos partes) es la incógnita implican una interesante inversión entre la operación con la que se formula el problema y la operación que se puede utilizar para resolver el problema desde una perspectiva más avanzada. Por ejemplo, considera este problema de "cantidad de cambio desconocida": "Matt tenía 5 cartas. Después de obtener algunas más, tiene 8. ¿Cuántas cartas consiguió Matt?" Este problema se puede formular con la ecuación de adición 5 + ¿? = 8. Aunque los niños pequeños suelen resolver este problema añadiendo a 5 hasta que llegan a 8 (con cartas reales u otros objetos), las niñas y niños mayores y los adultos pueden resolver el problema restando, 8 – 5 = 3, utilizando la operación opuesta a la de la ecuación de adición empleada para formular el problema.

Las situaciones de comparación afectan a comparaciones "afinadas" entre dos cantidades diferentes, A y C en las que, en lugar de decir simplemente que A es mayor que, menor que, o igual a C, la situación consiste en determinar la cantidad exacta en la que las dos cantidades difieren. Si C es B más de A, entonces la situación se puede formular con la ecuación A + B = C. Si C es B menos de A, entonces la situación se puede formular con la ecuación A – B = C. Tomar en consideración la diferencia, B, requiere crear conceptualmente una colección que no existe físicamente separada de otras de la situación. Esta diferencia es, o bien la parte de la colección más grande que no coincide con la colección más pequeña al emparejar ambas colecciones, o esta formada por los objetos que deben ser añadidos a la colección más pequeña para que coincida con la colección más grande. Por supuesto, estos emparejamientos se pueden hacer mediante el conteo y con números en lugar de utilizar la correspondencia uno a uno. Se debe tener en cuenta que estas situaciones se llaman de comparación aditiva incluso cuando se formulan con una ecuación se sustracción (A – B = C, cuando C es B menos que A) para distinguirlas de las situaciones de comparación multiplicativa, que se pueden formular en términos de multiplicación o división. Los alumnos resuelven los problemas de comparación multiplicativa en cursos avanzados de educación primaria.

En las situaciones de separar, hay una cantidad total, C, conocida y el problema consiste en encontrar las maneras de romper la cantidad en dos partes (que no tienen por qué ser iguales). Las situaciones de separar (Nota del tr.: Son situaciones de descomposición aditiva) se expresan de forma más natural si las formulamos con una ecuación de la forma

$$C = A + B$$

en la que C es conocida y deben encontrarse todas las posibles combinaciones de A y B que hacen verdadera la ecuación. Normalmente hay muchos valores diferentes de A y B que hacen que la ecuación sea verdadera.

3. Contenidos de geometría y medición

La geometría y la medición nos proporcionan sistemas adicionales de gran valor para describir, representar y comprender el mundo. Ambas sustentan diversas actividades humanas, como la ciencia, la ingeniería, el arte y la arquitectura. La geometría es el estudio de las formas y el espacio, incluyendo tanto el espacio bidimensional (2-D) como el tridimensional (3-D). La medición consiste en determinar el tamaño de formas, objetos y regiones, las cantidades de materia, o en cuantificar otros atributos. A través del estudio de la geometría y la medición, niñas y niños pueden comenzar a desarrollar formas de estructurar mentalmente el espacio y los objetos a su alrededor. Además, ambas facilitan un contexto para que los alumnos profundicen en el desarrollo de su razonamiento matemático.

Cada objeto 3-D o forma 2-D, incluso los más simples, ofrecen múltiples aspectos en los que fijarse: la forma global, las partes específicas, las características del objeto o la forma, y las relaciones entre estas partes y con la totalidad del objeto o forma. Para determinar el tamaño de una forma u objeto, primero hay que decidir en qué aspecto particular o atributo medible centrarse.

El espacio (tanto el tridimensional, como el bidimensional) podrían verse inicialmente como un todo vacío y no estructurado, pero los objetos que se sitúan o se mueven en el espacio comienzan a estructurarlo. Los inicios de la estructura cartesiana del espacio, una idea central en matemáticas, se ven cuando se colocan cuadrados iguales en disposición de matriz, con filas y columnas que forman rectángulos mayores y cuando los cubos se apilan vertical y horizontalmente creando estructuras con forma de caja de mayor tamaño. Estos son también ejemplos de procesos más generales de composición y descomposición de formas y objetos. Estos procesos son parte del fundamento del razonamiento que se desarrolla más adelante sobre las fracciones y sobre el área y el volumen.

Ver o imaginar un objeto desde diferentes perspectivas en el espacio y mover o imaginar cómo se mueve un objeto a través del espacio hasta situarse en un lugar concreto establece vínculos entre las relaciones espaciales y las partes y características de los objetos y las formas.

Del mismo modo que los números son abstracciones de las cantidades, las formas ideales, teóricas (2-D y 3-D) de la geometría son abstracciones de sus versiones físicas aproximadas. Los ángulos en una hoja de papel rectangular no son exactamente ángulos rectos, los bordes de la hoja no son segmentos perfectamente rectos, y el papel, no importa cómo sea de delgado, tiene cierto grosor, lo que convierte a la hoja en un sólido tridimensional más que en una forma bidimensional. Las mediciones de los objetos físicos reales nunca son exactas tampoco. Aun así, los razonamientos válidos sobre formas geométricas ideales y las mediciones teóricas ideales tienen sentido al realizarse con formas y medidas físicas aproximadas.

3.1. Medición

En su forma más básica, la medición es el proceso de determinar el tamaño de un objeto. Pero el tamaño de un objeto puede describirse de diferentes maneras, dependiendo del atributo que se elija. Por ejemplo, el tamaño de una torre de cubos de madera puede describirse como la altura de la torre (una longitud) o en términos del número de cubos que hay en la torre (un volumen). El tamaño del suelo de una habitación cubierto de azulejos cuadrados se puede describir en términos del número de azulejos (un área). Los atributos medibles más importantes en matemáticas son la longitud, el área y el volumen.

Para medir una cantidad (con respecto a un atributo medible dado, como la longitud, área o volumen), debe elegirse una unidad. Una vez que se ha elegido una unidad, el tamaño de un objeto (con respecto al atributo medible dado) es el número de unidades necesarias para formar (el atributo elegido de) el objeto. Para la longitud, podría elegirse como unidad una barra o un palo, por ejemplo, de 1 pie de largo (Nota: 1 pie son 30,48 cm). Con respecto a dicha unidad de longitud, la longitud de un tren de juguete es el número de los palos (todos idénticos) necesarios para poner en fila, juntando los extremos de los palos, a lo largo del tren desde la parte delantera hasta el final.

Para el área, puede elegirse como unidad un azulejo cuadrado de una pulgada de lado (Nota: 1 pulgada son 2,54 cm). Con respecto a dicha unidad de área, el área de una bandeja rectangular sería el número de azulejos (todos idénticos) necesarios para cubrir la bandeja sin huecos ni solapamientos. Aunque no es necesario que se utilicen cuadrados como unidades de área, estos constituyen unidades especialmente útiles porque se alinean formando filas y columnas perfectamente organizadas que permiten rellenar regiones rectangulares por completo sin huecos ni solapamientos.

Para el volumen, puede elegirse como unidad un bloque de madera con forma de cubo, de una pulgada de arista. Con respecto a dicha unidad de volumen, el volumen de una caja sería el número de cubos (todos idénticos) necesarios para llenar la caja sin dejar espacios. Aunque los cubos no tienen por qué ser utilizados como unidades de volumen, constituyen unidades especialmente útiles porque se alinean en filas y columnas y se apilan en capas bien organizadas para rellenar la caja de forma completa y sin dejar huecos.

Una vez se ha elegido una unidad, una medida es un número de esas unidades (por ejemplo, 3 pulgadas, 6 pulgadas cuadradas, 12 pulgadas cúbicas). Así que la medida es una generalización de la cardinalidad, que describe la cantidad de cosas que hay en una colección. Para niñas y niños pequeños, las mediciones generalmente se limitan a números naturales, pero la medición es un contexto natural en el que surgen las fracciones. Para llenar un cubo con arena, un niño puede vaciar 4 tazas llenas de arena en el cubo y otra taza que solo contenga arena hasta la mitad, de modo que el volumen del cubo sea aproximadamente de 4 tazas y media (4 ½ tazas).

Una idea importante pero sutil acerca de las unidades, que los pequeños van aprendiendo poco a poco, es que al medir un objeto, cuanto mayor sea la unidad utilizada para medir, menor será el número total de unidades. Por ejemplo, supongamos que hay dos tamaños de barras para utilizar como unidades de longitud: barras cortas y barras más largas. Se necesitan más barras cortas que barras largas para medir la misma longitud. En otras palabras, hay una relación inversa entre el tamaño de la unidad de medición y el número de unidades necesarias para medir.

También es posible que niñas y niños pequeños no comprendan la importancia del uso de unidades estándar, que permiten comparar objetos muy separados en el espacio o en el tiempo.

3.2. Formas bidimensionales (2-D)

Las formas de la naturaleza, como las flores, las hojas, los troncos de los árboles y las rocas, son complejas, intrincadas, y tridimensionales más que bidimensionales. Por el contrario, las formas 2-D familiares que se estudian en geometría, como los triángulos, rectángulos y círculos, son relativamente simples. En comparación con la mayoría de las formas del mundo natural, estas formas son relativamente fáciles de dibujar o crear y también de describir y analizar. Muchos objetos manufacturados, como las mesas y los electrodomésticos, tienen partes que son aproximadamente triángulos, rectángulos, o círculos. Muchas formas del mundo natural son aproximadamente combinaciones de partes de estas formas geométricas simples. Por ejemplo, una hoja de abedul puede parecerse a un triángulo unido con un semicírculo.

Aunque las formas geométricas pueden describirse y se puede hablar sobre ellas de manera informal y a los niños se les pueden decir solo los nombres de algunos ejemplos prototípicos de estas formas (para saber a cuál nos referimos y hablar de ellas), estas formas también tienen definiciones matemáticas, que los maestros deben conocer.

Partes y características de las formas bidimensionales (2-D)

Las formas geométricas tienen partes y características que pueden observarse y analizarse. Todas las formas tienen una "región interior" y un "borde exterior". Distinguir la región interior de una forma bidimensional de su frontera o borde exterior será un fundamento especialmente importante para la comprensión de la distinción entre el perímetro y el área de una forma en cursos posteriores. A excepción de los círculos, el borde exterior de las formas geométricas bidimensionales comunes consta de lados rectos, y la naturaleza de estos lados y las relaciones entre ellos, son características importantes de una forma. Podemos fijarnos en el número de lados y en la longitud relativa de los lados: ¿Son todos los lados de la misma longitud, o son algunos lados más largos que otros? Dos lados que se juntan, lo hacen en un punto (informalmente, esquina) o vértice. Una observación interesante es que el número de vértices coincide con el número de lados. En este caso, podemos fijarnos en el ángulo formado por los lados que se unen en el vértice. En algunas formas, todos los ángulos son iguales, como en los rectángulos. En algunas formas, algunos ángulos son iguales y otros diferentes, como en un rombo que no es cuadrado (Nota tr.: los cuadrados se consideran como un caso particular de rombo). El estudio de la geometría no consiste solo en ver las formas como totalidades; consiste en la búsqueda y el análisis de sus propiedades y características.

Características adicionales de las formas bidimensionales más allá de sus características definidoras

En el estudio de las formas, los niños pueden dirigir su atención a diversas características y rasgos diferentes de una forma dada. Pero desde un punto de vista más avanzado, los matemáticos han elaborado definiciones precisas sobre las formas seleccionando sólo algunas de las características de una forma como características definitorias. Por ejemplo, la definición de un triángulo como una forma bidimensional con tres lados. Un triángulo también tiene tres vértices y tres ángulos, pero estos no son mencionados en la definición de triángulo. Del mismo modo, los lados opuestos de un rectángulo tienen la misma longitud, pero esto no se menciona en la definición de rectángulo. Los niños, sin embargo, pueden observar y describir estas propiedades adicionales de las formas geométricas. Por ejemplo, si se pliega una hoja de papel (rectangular) doblándola por la mitad, se puede ver que los lados opuestos del rectángulo tienen la misma longitud. El rectángulo no se ha construido con el propósito explícito de hacer los lados opuestos con la misma longitud, sin embargo, el resultado es ese. Del mismo modo, si unimos cuatro palillos por sus extremos formando un cuadrilátero y si hemos elegido los palillos de modo que los lados opuestos tengan la misma longitud, puede verse que los ángulos opuestos son también iguales. Aunque la forma no ha sido construida con la intención explícita de formar ángulos opuestos iguales, no obstante, así resulta.

3.3. Formas tridimensionales (3-D)

Las formas geométricas tridimensionales simples más habituales son los cubos, prismas, cilindros, pirámides, conos y esferas. Muchos objetos comunes son versiones aproximadas de estas formas ideales teóricas. Por ejemplo, un ladrillo es un prisma rectangular, y un gorro de fiesta puede tener la forma de un cono. Al igual que ocurre con las formas bidimensionales, el estudio de las formas tridimensionales no consiste solo en ver estas formas globalmente como totalidades y aprender sus nombres, sino también en buscar y analizar sus propiedades y rasgos distintivos.

Las formas geométricas tridimensionales tienen partes y características observables. Todas las formas tienen un "interior" y una "superficie exterior". La superficie exterior puede constar de varias partes. Por ejemplo, la superficie exterior de un prisma puede tener varios rectángulos. Si la superficie exterior de una forma 3-D consiste en superficies planas, estas suelen a menudo llamarse caras. Por ejemplo, un bloque de construcción de madera alargado (forma de ladrillo) tiene dos caras en cada extremo que son pequeños rectángulos y cuatro caras que las unen que son rectángulos alargados. Las caras están unidas a lo largo de sus lados rectos (las aristas), y las aristas se encuentran en puntos llamados vértices. Los niños pueden observar que algunas formas (como ese bloque de edificios) tienen pares de caras en lados opuestos que son iguales (congruentes). Niñas y niños también pueden observar que algunas formas, como los cilindros (como un poste o una lata), conos (como un gorro de fiesta) y esferas (como una pelota), tienen superficies externas que no son planas.

Aunque la superficie exterior de una forma 3-D suele ser visible, a menos que la forma sea cortada y se mantenga abierta, la forma esté hecha de plástico transparente, o la forma sea hueca y se pueda quitar una cara para ver el interior, por lo general uno debe imaginar y visualizar el interior. Una excepción son las habitaciones, que suelen tener (más o menos) forma de prisma rectangular, y que se experimentan desde el interior. Distinguir el interior de una forma 3-D de su superficie exterior constituye un importante fundamento para la comprensión de la distinción entre el área lateral y el volumen de una forma tridimensional en cursos posteriores.

3.4. Composición y descomposición de formas

Así como 10 unidades pueden componerse para formar una unidad de 10 (la decena), las formas también se pueden componer para crear nuevas formas, más grandes. Y al igual que una decena se puede descomponer en 10 unidades, así también las formas pueden descomponerse para hacer nuevas formas, más pequeñas. La Figura 5 presenta algunos ejemplos de relaciones entre formas obtenidas a través de la composición y descomposición de formas basadas en triángulos equiláteros. La Figura 6 muestra relaciones entre formas obtenidas por composición y descomposición de rectángulos. La composición y descomposición de figuras bidimensionales es una base importante para la comprensión del área en cursos posteriores. En particular, ver los rectángulos como composiciones de filas y columnas de cuadrados, como se muestra en la Figura 6, es clave para la comprensión del área del rectángulo.

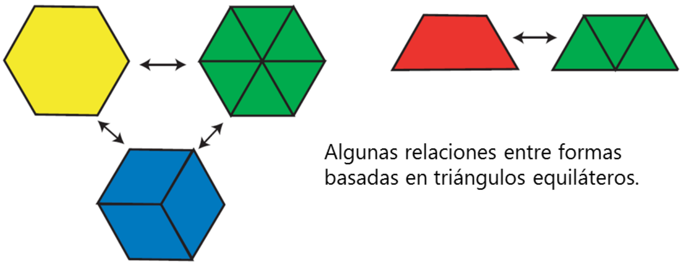

Figura 5. Relaciones entre formas basadas en triángulos equiláteros

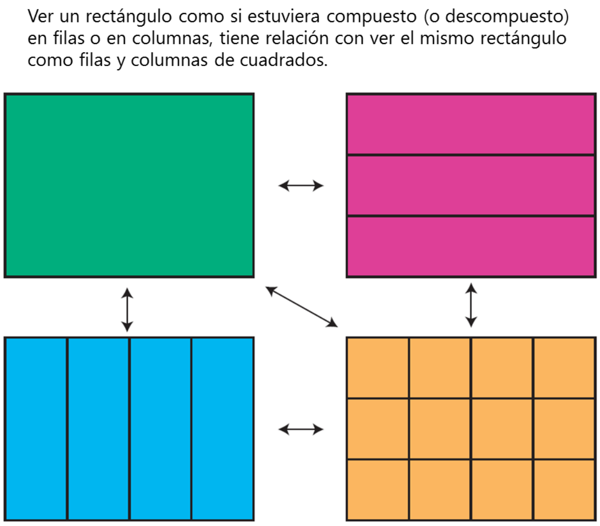

Figura 6. Relaciones entre rectángulos

Del mismo modo, componer y descomponer formas tridimensionales es un importante fundamento para la comprensión del volumen en cursos posteriores. En particular, la visualización de prismas rectangulares como compuestos de capas de filas y columnas de cubos es clave para comprender el volumen de los prismas rectangulares (ver Figura 7). Además, el razonamiento sobre fracciones a menudo se da en un contexto de razonamiento sobre la descomposición de formas en partes. La composición y descomposición se discuten con mayor detalle en la sección sobre conexiones matemáticas a través de las áreas de contenido y con las matemáticas posteriores.

3.5 El movimiento, la posición relativa, y la estructuración espacial

Parte del estudio de la geometría consiste en el análisis del espacio bidimensional y el tridimensional. La tabla plana de una mesa o una hoja de papel (que imaginariamente se extienden infinitamente en todas direcciones) es un modelo para el espacio 2-D. El espacio alrededor nuestro es un modelo para el espacio 3-D. Para los niños pequeños, el estudio del espacio comienza con el movimiento a través del espacio y con la descripción de la posición relativa en el espacio.

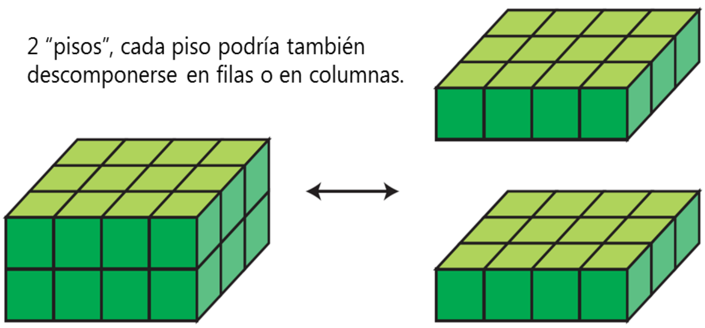

Figura 7. Visualización de una caja rectangular como compuesta de capas de filas y columnas

El espacio está orientado por la posición relativa. Piensa en un objeto en un lugar fijo en el espacio 3-D. Otro objeto puede estar encima o debajo del objeto fijo, que indica una posición relativa a lo largo de un eje vertical (recta). Otro objeto puede estar delante o detrás del objeto fijo, o puede estar a la izquierda o derecha del objeto fijo. Estas dos descripciones indican la posición relativa a lo largo de dos ejes horizontales distintos y perpendiculares (rectas). Una forma equivalente a esta para comenzar a estructurar el espacio es unir cuadrados en matrices de filas y columnas para el espacio 2-D y apilar cubos en capas formadas por filas y columnas para el espacio 3-D.

Aunque los objetos se pueden mover por el espacio de muchas formas diferentes, en el espacio 2-D (piensa en una forma bidimensional en una mesa) hay algunos movimientos especiales, de particular interés en la geometría avanzada, que también son accesibles para niñas y niños pequeños. Utilizando una terminología (más informal) de educación primaria, estos movimientos se llaman deslizamientos, volteos y giros (y en etapas escolares más avanzadas se les llama traslaciones, reflexiones y rotaciones). Un deslizamiento mueve una forma en una sola dirección una distancia especificada sin rotar la forma. Un volteo refleja la forma a través de una línea (de modo que la parte superior e inferior de la forma se invierten). Un giro rota la forma alrededor de un punto fijo con una cantidad específica de rotación (por ejemplo, media vuelta o un cuarto de vuelta). (Técnicamente, el punto que hace de centro de rotación no es necesario que sea el centro de la forma o incluso que esté dentro de la forma, aunque para los niños pequeños suele elegirse de esa manera.)

4. Objetivos de procesos matemáticos

Además de llegar a comprender los conceptos matemáticos específicos tratados hasta ahora, niñas y niños deben desarrollar su competencia en los procesos de razonamiento que se utilizan en matemáticas. En esta sección describimos dos tipos de procesos matemáticos: (1) procesos generales de razonamiento matemático, que ocupan un lugar central en cada área de contenido y en todos los niveles de las matemáticas, y (2) procesos específicos de razonamiento matemático, que forman un entramado a través de varias áreas de contenido diferentes. Debe advertirse que varios de los procesos específicos de razonamiento ya han sido abordados al tratar el número, la geometría, y la medición. De hecho, dichos procesos específicos constituyen ideas transversales muy potentes que conectan múltiples conceptos, procedimientos o problemas y pueden favorecer que los niños comiencen a detectar la coherencia a través de los temas que es propia de las matemáticas. Uno de los principales objetivos de la educación infantil debe ser estimular y fomentar el razonamiento matemático.

4.1. Procesos generales de razonamiento matemático

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) ha identificado cinco estándares de procesos esenciales para un aprendizaje y enseñanza significativos y sustanciales de las matemáticas (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, 2000): (1) Representación (que incluye analizar las representaciones matemáticamente y visualizarlas internamente), (2) resolución de problemas, (3) razonamiento, (4) conexión, y (5) comunicación. Estos procesos son vehiculares para que los niños profundicen, amplíen, elaboren y perfeccionen su pensamiento y para que exploren ideas y líneas de razonamiento. Según el NCTM, estos procesos deben ir continuamente entrelazados a través de la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos, incluso en la educación infantil.

La representación ocupa un lugar central en las matemáticas. Las matemáticas, en todos los niveles educativos, utiliza imágenes simplificadas o diagramas para representar una situación y someterla a un análisis matemático. Por ejemplo, una niña escucha el cuento de los tres osos. Al hacerlo, crea una imagen mental de los tres, con el papá oso de un tamaño mayor, la mamá osa después y, por último, el bebé osezno. Realiza un dibujo de los tres, o quizá utiliza figuras de palo, o incluso líneas. Todas ellas son representaciones –la imagen mental, el dibujo, las figuras de palo y las líneas. Niñas y niños pueden usar las representaciones para razonar sobre los objetos y para explorar ideas acerca del tamaño. ¿Es la mamá osa menor que el papá oso? ¿Es también mayor que el osezno? ¿Cómo puede ser a la vez mayor y menor (grande y pequeña)? Mucho más tarde, el alumno podrá representar esta situación como A>B y B>C y razonar que, en este caso, entonces A>C. Aquí las representaciones son matemáticas en el sentido convencional. Pero cuando se utilizan para comprender una situación cuantitativa o geométricamente, las imágenes y los dibujos esquematizados no son menos matemáticos que las representaciones del tipo de los numerales escritos con cifras o las ecuaciones, universalmente reconocidas como matemáticas.

De acuerdo con los educadores matemáticos, "la resolución de problemas y el razonamiento son el corazón de las matemáticas" (Asociación Nacional para la Educación de los Niños Pequeños y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, 2002, p. 6). De hecho, resolver problemas es tanto un objetivo de aprendizaje de las matemáticas como un mecanismo para lograrlo. Los pequeños necesitan ayuda para formular, enfrentarse a los problemas y resolverlos y para reflexionar sobre el razonamiento que emplean al hacerlo. Mediante el desarrollo de su capacidad de razonar matemáticamente, niñas y niños comienzan a detectar patrones o regularidades en el mundo a través de las ideas matemáticas que se les van presentando. Cada vez se vuelven más sofisticados en su capacidad para reconocer y analizar las matemáticas inherentes en el mundo que les rodea.

La conexión y la comunicación son particularmente importantes en la educación infantil. Niñas y niños deben aprender a describir su pensamiento (razonamiento) y los patrones que descubren, y deben aprender a utilizar el lenguaje de los objetos, las situaciones y notaciones propios de las matemáticas. Las experiencias matemáticas informales infantiles, la resolución de problemas, las exploraciones y el lenguaje proporcionan las bases para la comprensión y el uso del lenguaje matemático formal y la notación matemática. Las representaciones y experiencias informales y formales deben conectarse continuamente en una comunidad de aprendizaje enriquecedora de "diálogo matemático" (*math talk*), que ofrece oportunidades para que todos los niños hablen de su pensamiento matemático y mejoren el uso de su lenguaje matemático y del ordinario. Para los alumnos también es necesario conectar sus ideas a través de diferentes campos de las matemáticas (por ejemplo, la geometría y el número) y entre las matemáticas y otras materias (por ejemplo, el lenguaje) y con aspectos de la vida cotidiana.

La aplicación de los estándares de procesos: la matematización

En conjunto, los procesos matemáticos generales de razonamiento, representación, resolución de problemas, conexión y comunicación son mecanismos mediante los cuales los pequeños recorren caminos de ida y vuelta entre las matemáticas abstractas y las situaciones reales del mundo que les rodea. En otras palabras, son medios tanto para dar sentido a las matemáticas abstractas como para la formulación de situaciones reales en términos matemáticos –es decir, para matematizar las situaciones con las que se encuentran.

El poder de las matemáticas radica en su capacidad de unificar una amplia variedad de situaciones y, de este modo, aplicar una misma estrategia de resolución de problema común a ejemplos aparentemente muy dispares. Por ejemplo, el número 3 no sólo se aplica en situaciones concretas, como tres lápices o tres manzanas, sino también a cualquier colección de tres cosas, reales o imaginadas. Así, la expresión de suma 3 + 2 =? proporciona una formulación abstracta para un gran número de situaciones reales del mundo que nos rodea. La naturaleza abstracta de las matemáticas es parte de su potencial: Debido a su abstracción, puede aplicarse a un número prácticamente ilimitado de situaciones. Pero para que los niños empleen este potencial matemático es necesario que tomen las situaciones y problemas del mundo que les rodea y los formulen en términos matemáticos. En otras palabras, se requiere que los niños matematicen situaciones.

La matematización surge cuando los alumnos consiguen crear un modelo de la situación mediante el uso de objetos matemáticos (como números o formas), acciones matemáticas (como contar o transformar formas), y sus relaciones estructurales, para resolver problemas acerca de la situación. Por ejemplo, los niños pueden utilizar bloques de madera para construir un modelo de la torre de un castillo, colocando los bloques de modo que encajen con una descripción de las relaciones entre las características de la torre, como la puerta de entrada al castillo en la primera planta, una gran sala en la segunda planta, y una torre mirador que sobresale por encima del tejado. La matematización suele implicar la representación de relaciones que se dan en una situación de modo que dichas relaciones se puedan cuantificar.

Por ejemplo, si hay tres dinosaurios de juguete verdes en una caja y cinco dinosaurios de juguete amarillos en otra, los niños podrían emparejar los dinosaurios verdes y los amarillos y después concluir que hay dos dinosaurios amarillos más que verdes, porque hay dos dinosaurios amarillos que no tienen pareja verde. A través de la experiencia y con una orientación adecuada, los pequeños crean representaciones cada vez más abstractas de los aspectos matemáticos de la situación. Por ejemplo, dibujando cinco círculos en lugar de cinco patos amarillos, o un rectángulo para representar una cara de una caja de pañuelos, y después, al escribir una ecuación para modelizar una situación. Los niños se vuelven capaces de visualizar mentalmente estos atributos matemáticos, lo que sirve de ayuda en varias clases de resolución de problemas. También requieren de un tiempo para aprender a leer y escribir la notación matemática formal, como los numerales (1, 2, 6, 10) y otros símbolos (=, +, -) y para usar estos símbolos en situaciones de matematización. Por tanto, la matematización implica reinventar, redescribir, reorganizar, cuantificar, estructurar, abstraer y generalizar lo que antes se ha comprendido en un nivel intuitivo e informal en el contexto de la actividad cotidiana (Clements y Sarama, 2007).

4.2. Procesos específicos de razonamiento matemático

El aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia requiere que los niños empleen varios procesos específicos de razonamiento matemático, también conocidos como "grandes ideas", entre dominios. Estas grandes ideas conectan múltiples conceptos, procedimientos o problemas dentro de un dominio o tema o entre varios de ellos y son un aspecto particularmente importante del proceso de formación de conexiones. Las grandes ideas "invitan a los alumnos a mirar más allá de las características superficiales de los procedimientos y conceptos y detectar que hay diversos aspectos del conocimiento que tienen la misma estructura subyacente" (Baroody, Feil y Johnson, 2007, p. 26).

Unitización

La unitización –el descubrimiento o creación de una unidad matemática– se produce en contextos numéricos, geométricos y espaciales. Cuando los niños cuentan, deben crear unidades mentales de lo que van a contar: gatos, las patas de varios gatos, o parejas de gatos. Para medir longitudes, los niños deben elegir una unidad de medida de longitud (por ejemplo, van a colocar a lo largo de una longitud, y luego contar, una fila de pinturas nuevas, huellas de zapatos, u objetos de una pulgada de longitud). Para crear patrones que se repiten, los pequeños deben elegir y repetir una unidad. Por ejemplo, podrían hacer un collar de cuentas ensartando de forma repetitiva dos cubos y una esfera (la unidad, formada por las tres piezas). Al diseñar una construcción con bloques de madera, se podrían colocar repetidamente un cuadrado, una pieza triangular, repitiendo esa unidad alrededor de la parte superior de la construcción. Al realizar diseños o imágenes con bloques lógicos, los niños pueden unir varias formas para crear una unidad que se repita en el diseño. Para comenzar a comprender el sistema de numeración de base 10 y el valor posicional, los niños deben ser capaces de entender que diez unidades forman una única unidad de diez (la decena). La investigación sugiere que existen vínculos entre la capacidad de ver una colección de formas como una unidad de orden superior y la de ver los números de dos cifras como grupos de decenas y unidades sin agrupar (Clements y otros, 1997; Reynolds y Wheatley, 1996). Debido a que el concepto de unidad subyace a ideas nucleares en el ámbito del número, la geometría y la medición, se ha recomendado considerarlo como un foco central para la educación matemática en la primera infancia (Sophian, 2007).

Descomposición y composición

La descomposición y la composición se utilizan en toda la matemática, en todos los niveles educativos, y en todos los temas. En el ámbito de los números y las operaciones (suma, resta, multiplicación y división), la composición y la descomposición se utilizan para reconocer el número de objetos que hay en una colección, en el significado de las propias operaciones, y en el sistema de numeración decimal (con el valor posicional). A veces los niños pueden determinar súbitamente el número de objetos que hay en una pequeña colección a través de la visualización de la colección como compuesta por dos colecciones inmediatamente reconocibles, como al ver cuatro contadores como compuestos por un conjunto de tres contadores y otro contador. La composición y la descomposición son básicas para las operaciones de suma y resta y después, para las de multiplicación y división. Algunos pasos clave en el desarrollo de competencia en aritmética requieren la descomposición y la composición. Los niños deben ser capaces de descomponer los números del 1 al 10 en todos los pares posibles y de reconocer que los números del 11 al 19 están compuestos por una decena y algunas unidades. El sistema de valor posicional de base 10 se basa en la agrupación repetida en grupos de diez. El dominio de la adición y la sustracción con números de varios dígitos requiere ser capaz de componer diez unidades para formar una decena y descomponer una decena en diez unidades.

En geometría, las formas pueden considerarse compuestas por otras formas, como al visualizar un trapecio como si estuviera hecho con tres triángulos, o al ver la forma de la casa como un triángulo colocado sobre un cuadrado. Los niños pueden componer filas de cuadrados para formar rectángulos (ver Figura 6). Muchas formas 3-D que observamos en la vida cotidiana se pueden considerar compuestas por formas que encontramos en conjuntos de bloques de construcción de madera (al menos aproximadamente). Un brik de zumo se parece a un prisma rectangular con un prisma triangular en la parte superior (con el prisma triangular apoyado sobre una cara lateral). Los niños pueden componer capas hechas con cubos para formar cubos más grandes y prismas rectangulares.

En la medición, las unidades se componen para hacer unidades mayores y se descomponen para formar unidades menores. La medición en sí misma requiere ver el atributo que deseamos medir compuesto por unidades. En efecto, el uso de una unidad de medida permite hacer una partición en una cantidad continua, tal como la longitud o el área, en partes discretas y del mismo tamaño que la transforman en una cantidad contable.

Relacionar y ordenar

Relacionar y ordenar nos permiten decidir cuál es mayor y menor en varios dominios: número, longitud, área. Hacer que los alumnos vean y discutan al relacionar y ordenar entre distintos dominios puede contribuir a profundizar en la comprensión matemática. Al ampliar el rango de modos en que las cosas pueden compararse, los niños pueden alcanzar la idea de que hay diferentes atributos medibles. Por ejemplo, dos torres de bloques de madera pueden estar hechas con el mismo número de bloques, pero una torre podría ser más alta que la otra. Relacionar es un primer paso hacia la medición, porque medir es una forma cuantificada de relación (de comparación). Una medición especifica cuántos de una cosa (la unidad) hacen falta para formar la otra cosa (el atributo medido). Cuando las relaciones y el número se unen en la medición, se profundiza en ambos temas. Por un lado, la relación (comparación) se vuelve más precisa cuando se convierte en medición, y, por otro lado, el ámbito numérico se extiende a las fracciones y los decimales en el contexto de la medición. Por ejemplo, un cubo de arena puede llenarse con 2 cubos y medio (2½) más pequeños.

La búsqueda de patrones y estructuras y la organización de la información

La búsqueda de patrones y estructuras y la organización de la información (que incluye la clasificación) son procesos matemáticos cruciales de uso frecuente en el pensamiento matemático y en la resolución de problemas. También han sido considerados como áreas de contenido en el aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia. El "contenido" de patrones por lo general se centra en patrones de repetición, como ABAB o ABCABC, formados con colores, sonidos, movimientos corporales, etc. (como vimos en los ejemplos de patrones con cuentas de collar y con bloques discutidos en la sección de unitización). Este tipo de actividades son apropiadas en la primera infancia y pueden ayudar a los niños a iniciarse en una detección y descripción de patrones más amplia en matemáticas. Los patrones ABAB, ABCABC y AABBAABB pueden ser aprendidos por muchos niños pequeños, y en kindergarten (5-6 años) muchos podrán formar patrones más complejos (Clements y Sarama, 2007). Aprender a detectar la unidad en una dirección (de izquierda a derecha, de arriba abajo, o de abajo a arriba) (AB en ABAB, ABC en ABCABC) y luego repetirlo de forma consistente es el fundamento del aprendizaje en el trabajo con patrones de repetición. Aprender a extender un patrón dado a otras modalidades (por ejemplo, del color a la forma, los sonidos, y los movimientos corporales) es un indicador de abstracción y de generalización del patrón.

El conteo implica algunos patrones especialmente importantes que van más allá de los patrones de repetición. Por ejemplo, el patrón en el conteo (oral) es uno de los fundamentos del número. La lista de los números de contar sigue un patrón intrincado y de singular importancia, que implica un ciclo de los dígitos del 0 al 9 en las posiciones de las unidades, decenas, centenas, etc. (ver el Recuadro 2). Aunque este intrincado patrón no llegue a ser comprendido completamente por niñas y niños hasta más tarde, en la escuela primaria, la base de su comprensión aparece en la educación infantil a medida que se van identificando y empleando (en la recitación de la secuencia) los patrones de repetición presentes en las palabras número hasta el 100.

La organización de la información, que incluye la clasificación, también suele verse como un contenido matemático en la primera infancia, como cuando los niños utilizan bloques lógicos y otras colecciones de objetos en las que los atributos varían sistemáticamente para poder clasificarlos de diferentes maneras. Los bloques lógicos suelen variar en color, forma, tamaño, y algunas veces en grosor, por lo que los pequeños pueden clasificarlos atendiendo a cada una de estas variables y también describir un determinado bloque utilizando varios términos (atributos). Por ejemplo, en pequeños grupos, un maestro puede pedir a sus alumnos que seleccionen los bloques con dos atributos: "Encuentra todos los bloques grandes de color azul". A medida que los niños llegan a dominar este tipo de tareas, el maestro o la maestra pueden aumentar la dificultad. Por ejemplo: "Encuentra un rectángulo pequeño, azul y delgado". Más adelante, a medida que avanza la educación infantil y en 5-6 años, se puede pedir a los pequeños que describan verbalmente en qué se parecen o diferencian varios grupos de bloques.

El reconocimiento de patrones y la organización de la información forman parte del reconocimiento de estructuras. En todos los niveles de las matemáticas se busca la estructura. Algunas experiencias de reconocimiento de estructuras pueden constituir el fundamento del pensamiento algebraico posterior. Por ejemplo, reconocer que si había 3 pájaros y después 2 más vinieron volando, y que si había 2 pájaros al principio y luego 3 pájaros llegaron volando, ambas situaciones dan lugar al mismo número total de pájaros sea cual sea el camino seguido es un paso hacia el reconocimiento de la propiedad conmutativa de la suma, que dice que $a + b = b + a$ para todos los números a y b.

Aunque estos ejemplos de contenidos relativos a la búsqueda de patrones y estructuras y a la organización de la información son actividades apropiadas, constituyen una parte pequeña de los contenidos matemáticos para la primera infancia. Del mismo modo, las destrezas específicas que hemos visto en estos ejemplos muestran sólo una pequeña parte del papel que estos procesos juegan en las matemáticas.

5. Conexiones matemáticas

En este apartado se discuten algunas de las principales conexiones entre áreas de contenido matemáticas en la primera infancia y con las matemáticas posteriores. Las matemáticas en conjunto forman una red de ideas interconectadas, y las matemáticas de los primeros años no son una excepción. Las matemáticas son además profundas, en el sentido de que cada idea matemática, incluyendo las de la educación infantil, se entreveran en largas cadenas de ideas relacionadas. Como veremos en este apartado, las ideas matemáticas fundacionales y accesibles (para los pequeños) discutidas en los anteriores apartados están estrechamente entrelazadas entre sí y con otras ideas importantes que se estudian más adelante en matemáticas.

5.1. Las conexiones al estructurar el número, las formas y el espacio

Hemos encontrado y analizado la estructura en la composición y la descomposición en diferentes ámbitos matemáticos. Un grupo de objetos se pueden unir para formar un nuevo objeto compuesto. Un objeto puede descomponerse para revelar una estructura más fina. Algunas de las conexiones más importantes en las matemáticas elementales tienen que ver con la estructuración de los números y del espacio a través de la composición y la descomposición. A continuación, vamos a explicar varias de estas conexiones.

Formando unidades mediante agrupación

Los números están estructurados por composición porque el sistema de numeración decimal de valor posicional está basado en la agrupación por decenas. En el campo de número, consideramos que 10 contadores individuales forman una sola unidad compuesta de 10 (la decena). Una versión geométrica de esta idea de agrupación se produce cuando juntamos varias formas para crear otra forma mayor, que consideramos entonces como una forma unificada por derecho propio, como si tomáramos la forma unificada como una pieza que pudiera sustituir a otra forma o como si la usásemos para llenar un hueco en un puzle.

Cuando los niños (o los adultos) crean un patrón que se repite, podrían centrarse principalmente en el mantenimiento de un cierto orden. Pero los patrones de repetición también pueden interpretarse como algo elaborado a partir de una unidad compuesta que se copia una y otra vez. Esto no es muy diferente de entender los números de contar como una secuencia estructurada en grupos de 10 (Figura 8).

Los patrones de repetición y, en general, formar grupos con la misma cantidad son la base de la multiplicación y la división. Después, en la escuela primaria, cuando los niños cuenten de cinco en cinco, contando 5, 10, 15, 20,... recitando la lista de los múltiplos de 5, este patrón puede interpretarse como un patrón de crecimiento, pero también puede verse como contar cada quinto elemento en un patrón de repetición de 5. Cuando los niños estudian la división con resto (en cuarto o quinto curso de primaria), pueden observar un patrón de repetición en los restos. Por ejemplo, al dividir por orden los números de contar por 5, digamos, los restos forman un ciclo con los números 0, 1, 2, 3, y 4.

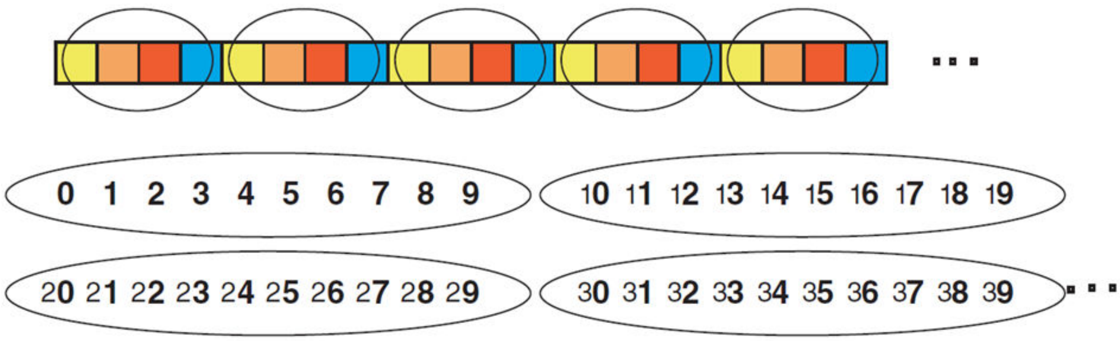

Figura 8. Un patrón de repetición se forma mediante la repetición de una unidad. En el conteo, las cifras de las unidades forman un patrón de repetición

Grupos de grupos: Los números, las formas y el espacio bidimensional

La estructura composicional del sistema de numeración decimal es más compleja que si solo formásemos grupos de 10 a partir de 10 unidades, ya que cada 10 grupos de 10 se componen en una unidad de 100 (la centena). Una versión geométrica de esta idea de agrupación se produce cuando las formas se juntan para formar una nueva forma compuesta y las formas compuestas se vuelven a unir para crear otra forma compuesta –una composición de formas compuestas.

Un caso especialmente importante de estructuración geométrica se produce cuando utilizamos composiciones de composiciones al analizar los rectángulos y sus áreas. Cuando se considera el área de un rectángulo, el rectángulo se ve compuesto de cuadrados idénticos que lo cubren sin huecos ni solapamientos (como en un embaldosado). Cada cuadrado tiene un área de una unidad cuadrada. El área del rectángulo (en unidades cuadradas) es el número de cuadrados que cubren el rectángulo. Aunque estos cuadrados pueden contarse uno por uno, para llegar a comprender la fórmula de *largo*×*ancho* (*base*×*altura*), los cuadrados deben considerarse en grupos, ya sea en filas o en columnas (ver Figura 6). Cada fila tiene el mismo número de cuadrados, y el número de filas en el rectángulo es igual al número de cuadrados de una columna (del mismo modo, cada columna tiene el mismo número de cuadrados, y el número de columnas es igual al número de cuadrados de una fila). Debido a esta estructura de agrupación, el área del rectángulo es el *número de filas* × *número de cuadrados en cada fila* o *longitud* x *anchura* (unidades cuadradas). Igualmente, el sistema decimal tiene una estructura multiplicativa porque 100 se forma (por definición) haciendo 10 grupos de 10, de modo que 100=10×10.

La idea de que los rectángulos pueden estructurarse como matrices de cuadrados puede aplicarse a la estructuración de todo un plano infinito (en la imaginación) como una matriz infinita de cuadrados. Esta idea de un plano estructurado por una matriz infinita es en esencia la idea del plano de coordenadas cartesianas, en el que cada punto del plano se describe con un par de números que indican su ubicación con respecto a dos ejes de coordenadas (Figura 9).

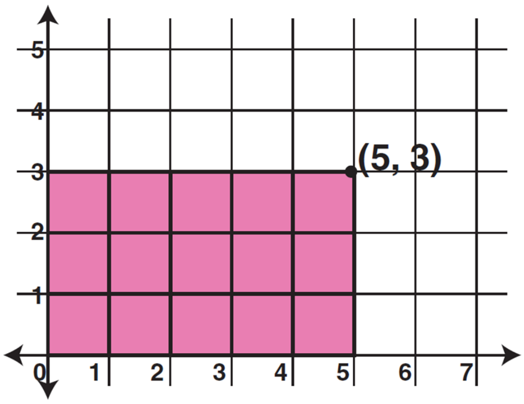

Figura 9. El plano de coordenadas

Grupos de grupos de grupos: Los números, las formas y el espacio tridimensional

La estructura compositiva del sistema decimal no sólo consiste en hacer grupos de 10 a partir de 10 unidades y grupos de 100 a partir de 10 grupos de 10, sino también en formar grupos de 1000 a partir de 10 grupos de 100, de modo que 1000 = 10 × 10 × 10. La estructura de agrupación del sistema decimal continúa de tal manera que todas las agrupaciones sucesivas se obtienen mediante la agrupación de 10. La contraparte geométrica de esta estructura de agrupación del sistema decimal tiene lugar en el espacio tridimensional y después en dimensiones superiores. Al igual que los rectángulos bidimensionales pueden estructurarse como matrices de cuadrados, así, del mismo modo, los prismas rectangulares (con forma de caja de base rectangular) pueden estructurarse como matrices tridimensionales formadas por cubos. Como en el caso de los rectángulos, la estructura multiplicativa de una matriz tridimensional de cubos explica por qué se multiplican las tres dimensiones de longitud, anchura y altura de una caja para calcular su volumen. Los sólidos con forma de caja pueden construirse con capas de cubos iguales, como en la Figura 12, y cada capa podemos verla como un grupo de filas, por lo que una caja construida con cubos puede verse como un grupo de un grupo de cubos, de la misma forma que 1000 es 10 grupos de 10 grupos de 10.

Cuando se extiende la estructura de matriz de prismas rectangulares a todo el espacio 3-D, se obtiene esencialmente la idea del espacio de coordenadas, en el que la ubicación de cada punto en el espacio se describe mediante una terna de números que indican su posición con respecto a los tres ejes de coordenadas.

El movimiento, la descomposición y composición, la simetría y las propiedades de la aritmética

Las propiedades (o leyes) de la aritmética son las propiedades estructurales fundamentales de la suma y la multiplicación a partir de las cuales se deriva toda la aritmética. Estas propiedades incluyen las propiedades conmutativas de la adición y de la multiplicación, las propiedades asociativas de la suma y la multiplicación y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma. Las propiedades conmutativas de la adición y la multiplicación establecen que:

$$A + B = B + A, \text{ para todos los números } A, B$$
$$A \times B = B \times A, \text{ para todos los números } A, B$$

Las propiedades asociativas de la adición y la multiplicación establecen que:

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \text{ para todos los números } A, B, C$$
$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C, \text{ para todos los números } A, B, C$$

La propiedad distributiva establece que:

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C, \text{ para todos los números } A, B, C$$

Cada propiedad puede ilustrarse mediante el movimiento y la reorganización de objetos, y algunas veces también a través de la descomposición y recomposición de una agrupación, y a veces incluso en términos de simetría.

El informe *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* contiene una buena discusión e ilustración de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación y la propiedad distributiva (National Research Council, 2001, capítulo 3 y Recuadro 3-1). La propiedad conmutativa de la adición se ilustra cambiando el orden en el que se muestran dos conjuntos. La propiedad conmutativa resulta especialmente útil en conjunción con las estrategias de conteo para la resolución de problemas de adición (ver el Capítulo 5 para profundizar en la discusión sobre las estrategias infantiles de resolución de problemas de suma y resta). Por ejemplo, en lugar de contar 6 a partir del 2 para calcular $2 + 6$, un niño puede cambiar el cálculo y hacer $6 + 2$ contando 2 a partir del 6. La propiedad asociativa supone comenzar con tres conjuntos diferentes, dos de los cuales están muy juntos, separarlos, y mover uno de ellos para reasociarlo con el otro conjunto. La propiedad asociativa de la suma se utiliza en los métodos (de cálculo mental) de hacer diez, cuando un número se descompone de manera que una de sus partes se recompone con el otro número para formar un grupo de 10 (Nota del tr.: P. ej., $7 + 5 = 7 + (3 + 2) = (7 + 3) + 2 = 10 + 2 = 12$).

Las primeras experiencias con las propiedades de la suma se extienden después a la multiplicación en tercero y cuarto de primaria. Las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación y la propiedad distributiva son esenciales para comprender las relaciones entre los hechos numéricos de las tablas de multiplicar y para la comprensión de la multiplicación y la división con números de varios dígitos. Por ejemplo, saber que 3 × 5 = 5 × 3 y que 7 × 8 puede obtenerse mediante la suma de 5 × 8 y 2 × 8 aligera el esfuerzo de memorización en el aprendizaje de las tablas de multiplicar. La propiedad conmutativa de la multiplicación se ilustra mediante la descomposición de una matriz rectangular de dos maneras diferentes: en filas o en columnas (como se muestra en la Figura 6) o en términos de una rotación (ver National Research Council, 2001, Recuadro 3-1). La propiedad asociativa de la multiplicación puede ilustrarse a través de la descomposición de una matriz tridimensional (o una caja construida con bloques) de formas diferentes (una de ellas se muestra en la Figura 7). La propiedad distributiva se visualiza a través de objetos agrupados de dos formas distintas (ver National Research Council, 2001, Recuadro 3-1).

Las propiedades de la multiplicación se pueden ilustrar con matrices y rectángulos, y también se ven en las tablas de multiplicar, que contienen múltiples relaciones y muestran una importante estructura. Un aspecto estructural de las tablas de multiplicar es su simetría diagonal. Esta simetría diagonal corresponde a la propiedad conmutativa de la multiplicación, es decir, que a × b = b × a, para todos los números a y b. Reconocer esta simetría permite a los niños aprender las tablas de multiplicar de forma más eficiente. En otras palabras, una vez que conocen la parte triangular superior derecha de las tablas de multiplicar en torno a tercero de primaria, pueden completar el resto de la tabla mediante una reflexión en la diagonal (ver Figura 10).

Los patrones asociados con traslaciones horizontales o verticales (deslizamientos) también pueden verse en las tablas de multiplicar. Por ejemplo, las entradas correspondientes a dos columnas están relacionadas por la columna asociada a la distancia entre las columnas (véase la Figura 10). Esta relación estructural corresponde a la propiedad distributiva.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

La simetría con respecto a la diagonal en la tabla de multiplicar se debe a la propiedad conmutativa.

Un salto de 2 corresponde a sumar la columna de 2×

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

La relación que se da entre las columnas se debe a la propiedad distributiva. Es decir: 6 × 7 = 6 × 5 + 6 × 2

Figura 10. Simetría y relaciones en la tabla de multiplicar

Conexiones entre medición y número: Fracciones

Una vez que los niños se encuentran con situaciones de medición, las fracciones surgen de modo natural. Las fracciones pueden aparecer en un contexto de longitud y en rectas numéricas (en torno a segundo o tercero de primaria). Una recta numérica se parece bastante a una regla infinitamente larga, de modo que las rectas numéricas pueden verse como resultado de unificar la medición y el número en un espacio unidimensional. Un número en una recta numérica puede interpretarse como la representación de la longitud desde 0 hasta dicho número (ver Figura 11).

Debido a la estrecha conexión que hay entre las rectas numéricas y la longitud, las rectas numéricas son difíciles para los alumnos más o menos hasta segundo de primaria. Por el contrario, los caminos numéricos presentes en la mayoría de juegos de mesa que se usan en educación infantil son un modelo de conteo, no una recta numérica. En ellos, hay un camino formado por cuadrados, círculos o rocas, cada uno con un numeral, y los jugadores van moviéndose a lo largo de este camino contando las casillas u otros objetos, o diciendo el numeral representado en ellos a medida que avanzan. Estos son apropiados para los niños más pequeños, ya que pueden potenciar su conocimiento del conteo, de la cardinalidad, la comparación y los símbolos numéricos (numerales escritos con cifras).

En la medición, existe una relación importante entre el tamaño de la unidad y el número de unidades necesario para formar una cantidad fija dada. Por ejemplo, si consideramos al triángulo de la Figura 5 como 1 unidad de área, entonces el hexágono tiene un área de 6 unidades. Pero si seleccionamos una nueva unidad de área, como hacemos al designar al rombo de la Figura 5 como 1 unidad, que tiene el doble del tamaño del triángulo, entonces el hexágono tendrá un área de solo 3 unidades.

Más adelante, en la escuela primaria (en torno a segundo curso), los niños ven esta relación inversa entre el tamaño de la unidad de medida y el número de unidades necesario para formar una determinada cantidad reflejada en la relación inversa que se da entre el orden de los números de contar (los números naturales) y la ordenación de las fracciones unidad (ver Figura 12).

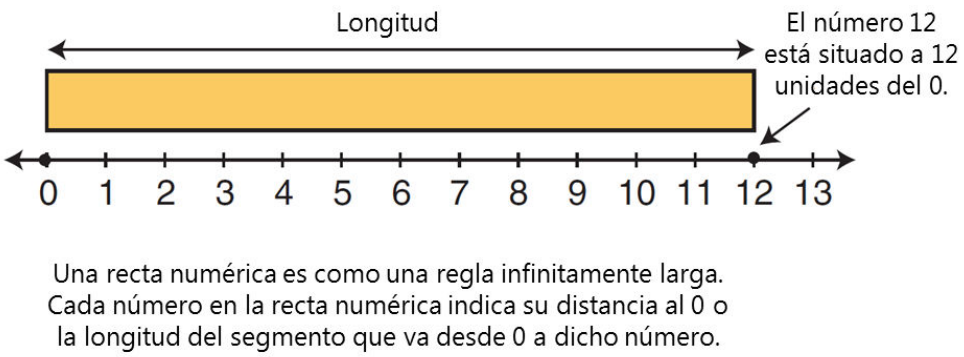

Figura 11. rectas numéricas se refieren a números de longitudes

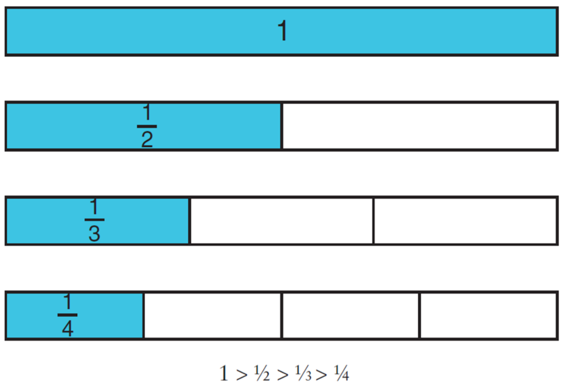

Figura 12. El orden de las fracciones

Conexiones entre el análisis de datos, el número y la medición

Al utilizar los datos para contestar (o abordar) una pregunta, es necesario analizar los datos, lo que a menudo implica clasificarlos en diferentes categorías, mostrar los datos categorizados gráficamente, y describir o comparar las categorías. Dado que el proceso de describir o comparar categorías suele implicar el uso del número o la medición, estos resultan fundamentales en el análisis de datos, y el análisis de datos proporciona un contexto en el que pueden aplicarse el número y la medida.

Idealmente, la recogida de datos debe comenzar con una pregunta de interés para los niños. Por ejemplo, los niños de una clase podrían estar interesados en cómo ha llegado cada alumno a la escuela por la mañana y podría preguntarse qué medio de transporte se ha usado más. Para responder a esta pregunta, se puede clasificar a niñas y niños en diferentes grupos en función de cómo han llegado a la escuela por la mañana (en autobús, en coche, a pie o en bicicleta). Los niños podrían entonces hacer "gráficos reales" (gráficos hechos con objetos reales), ya sea alineando en sus categorías o colocando un juguete pequeño o un objeto para representar un autobús, un coche, un par de zapatos o una bicicleta en una hoja cuadriculada, como se muestra a la izquierda en la Figura 13 (las hojas cuadriculadas aseguran que cada objeto ocupe el mismo espacio en el gráfico). En lugar de usar un gráfico "real", los niños pueden mostrar los datos de algún modo más abstracto en un pictograma alineando notas adhesivas en categorías, como a la derecha en la Figura 13. Cada niño coloca una nota adhesiva en la categoría que representa el modo de llegar a la escuela.

En general, los pictogramas emplean pequeñas imágenes idénticas para representar los datos. En este caso, cada nota adhesiva representa un único dato y realiza la misma función que una imagen en un pictograma. Los niños pueden utilizar estos gráficos o pictogramas para contestar preguntas tales como "¿Cuántas niñas y niños han venido hoy en autobús a la escuela?" O "¿Han venido hoy a la escuela más niños en coche o andando?" O incluso "Si hoy estuviera lloviendo, ¿en qué crees que cambiaría el gráfico?" Las representaciones de datos (gráficos) que se utilizan al plantear y responder estas preguntas cuantitativas tienen sentido para los niños y les ayudan a matematizar sus experiencias diarias. Por el contrario, los gráficos que se hacen sin hablar sobre ellos en el aula es menos probable que contribuyan al desarrollo del pensamiento matemático de los pequeños.

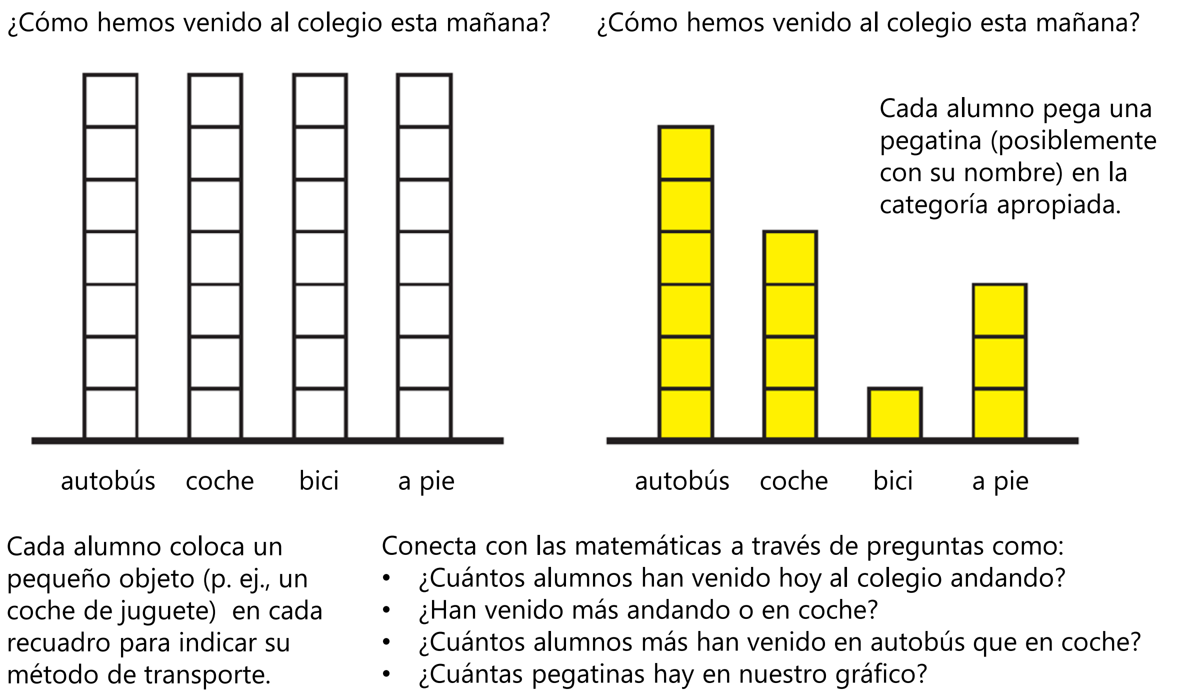

Figura 13. Una plantilla para un "gráfico real" (con objetos) y un pictograma hecho con notas adhesivas

En torno a segundo o tercer curso, una vez que los niños han trabajado con la medición de longitudes, pueden comenzar a trabajar con gráficos de barras. Estos pueden interpretarse como el resultado de fundir las entradas separadas de un pictograma para formar las barras de un gráfico de barras. De esta manera, el proceso discreto de conteo de entradas separadas da paso a la medición de la longitud de una barra en un gráfico de barras.

Aproximadamente en tercero de primaria, cuando los alumnos se han iniciado en el conteo a saltos y en la multiplicación, las entradas del pictograma pueden pasar a representar más de un único elemento. Por ejemplo, cada imagen podría representar de 2 a 10 elementos de los datos.

Referencias

Clements, D.H., y Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F.K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 461-555). New York: Information Age.

Clements, D.H., Battista, M.T., Sarama, J., Swaminathan, S., y McMillen, S. (1997). Students' development of length measurement concepts in a logo-based unit on geometric paths. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 70-95.

Grattan-Guinness, I. (2000). *The Search for Mathematical Roots 1870-1940: Logics, Set Theories, and the Foundations of Mathematics from Cantor Through Russell to Gödel*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Howe, R. (2008). *Taking Place Value Seriously: Arithmetic, Estimation and Algebra*. Disponible en: http://www.maa.org/pmet/resources/PlaceValue_RV1.pdf

Menninger, K. (1958/1969). *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*. (P. Broneer, Trans.). Cambridge, MA: MIT Press.

National Association for the Education of Young Children and National Council of Teachers of Mathematics. (2002). *Early Childhood Mathematics: Promoting Good Beginnings. A joint position statement of the National Association for the Education of Young Children and National Council of Teachers of Mathematics*. Disponible en: http://www.naeyc.org/about/positions/pdf/psmath.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

National Research Council. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Mathematics Learning Study Committee. J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds.). Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Reynolds, A., y Wheatley, G.H. (1996). Elementary students' construction and coordination of units in an area setting. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 564-581.

Sophian, C. (2007). Rethinking the starting point for mathematics learning. In O.N. Saracho and B. Spodek (Eds.), *Contemporary Perspectives in Early Childhood Education: Mathematics, Science, and Technology in Early Childhood Education* (pp. 21-44). New York: Information Age.

Wheatley, G.H. (1990). Spatial sense and mathematics learning. *Arithmetic Teacher, 37*(6), 10-11.

National Research Council of the National Academies (Consejo Nacional de Investigación de las Academias Nacionales, de EEUU). La Academia Nacional de Ciencias, la Academia Nacional de Ingeniería, Instituto de Medicina, y el Consejo Nacional de Investigación son instituciones privadas, sin ánimo de lucro, que ofrecen el asesoramiento de expertos sobre algunos de los retos más urgentes que afrontan la nación y el mundo. Nuestro trabajo ayuda a establecer políticas sólidas, informar a la opinión pública, y avanzar en el desarrollo de la ciencia, la ingeniería y la medicina (*Nota:* Información traducida de la web, del apartado "about us").

Web: http://www.nationalacademies.org/nrc/