La investigación en pensamiento geométrico y didáctica de la geometría

Martha Iglesias Inojosa y
José Ortiz Buitrago

La investigación en pensamiento geométrico y didáctica de la geometría

Introducción

En 1994, se publicó el documento de discusión para un estudio ICMI denominado Perspectivas sobre la Enseñanza de la Geometría para el siglo XXI (Mammana y Villani, 1994); en dicho documento se plantearon ciertas preguntas clave, relacionadas con: las razones que justifican su enseñanza, los fines que se persiguen, los contenidos a ser estudiados, las estrategias, materiales y recursos didácticos, la evaluación de los aprendizajes, la formación docente y la innovación educativa.

Seguidamente, en la Conferencia de Catania (Italia), se procedió a trabajar en la edición de la correspondiente publicación (Mammana y Villani, 1998), en la cual se trataron, entre otros, asuntos sobre la evolución histórica de la Geometría y su relación con el mundo real, el razonamiento geométrico, la Geometría en los currículos de Matemática, el uso de los software de Geometría Dinámica y la formación docente. Sin lugar a dudas, este estudio ICMI ha guiado la investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría durante la primera década del Siglo XXI.

En este orden de ideas, Iglesias (2007) abordó la problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, con énfasis en asuntos cognitivos y didácticos, tales como: (a) la acepción del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele como soporte conceptual y metodológico del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría; (b) el uso de los llamados software de Geometría Dinámica (SGD) en las clases de Matemática, (c) la demostración en Geometría, y (d) el diseño y desarrollo de unidades didácticas con contenidos geométricos.

Por lo antes mencionado, este capítulo tiene como propósito mostrar los aportes teóricos de la investigación en y sobre Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría, teniendo como referencia la revisión de la literatura especializada, así como los hallazgos de las investigaciones realizadas desde el Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando Nuevas Tecnologías (CEINEM – NT) que funciona en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL Maracay), Venezuela.

El Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele

En el ámbito de las investigaciones relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele ha sido aceptado como soporte conceptual de estas investigaciones (Usiskin, 1982; Jaime, 1998; De Villiers, 2010; Sarasua, Ruiz de Gauna y Arrieta, 2013). Al respecto, Gutiérrez y Jaime (2012), al reflexionar sobre la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, expresan que “el modelo de razonamiento de Van Hiele es, en la actualidad, el marco más provechoso para organizar la enseñanza de la geometría y realizar una correcta evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes” (p. 56).

Cabe señalar que estas investigaciones han estado básicamente dirigidas a: (a) Diagnosticar el nivel de razonamiento geométrico alcanzado por los estudiantes antes o después del estudio de un cierto tema geométrico (Usiskin, 1982; Jaime, 1993, Sarasua, Ruiz y Arrieta, 2013); (b) Diseñar y desarrollar una unidad didáctica con contenidos geométricos (Jaime y Gutiérrez, 1990); y (c) Analizar los conocimientos y las habilidades geométricas que los estudiantes ponen en práctica cuando realizan tareas que involucran contenidos geométricos (Jaime, 1993).

Por ello, en el marco de la línea de investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría, adscrita al CEINEM – NT, se han venido ejecutando proyectos de investigación que asumen entre sus referentes teóricos el modelo de Van Hiele y que han permitido identificar los conocimientos y habilidades geométricas puestas en práctica por estudiantes de educación media antes o después del estudio de ciertos temas como triángulos (Sánchez, 2008), círculo y circunferencia (Pérez, 2008), transformaciones en el plano (Moreno, 2006) y teorema de Pitágoras (Linares, 2008), así como diseñar y ejecutar unidades didácticas organizadas en torno a las fases de aprendizaje propuestas en este modelo. También se han realizado trabajos en el ámbito de la formación docente en Geometría y su Didáctica, como los desarrollados por García (2009), Pérez (2010), Galvis (2010), Báez (2010) y Sánchez e Iglesias (2012). Asimismo, el modelo ha permitido analizar las actividades propuestas en los libros de texto más usados por los maestros de 4º, 5º y 6º grado de educación primaria en relación con la Geometría de los Cuadriláteros (Aguilar e Iglesias, 2013).

Por otra parte, la realización del análisis didáctico de contenidos geométricos como soporte del diseño de unidades didácticas para la educación media, se ha visto favorecido por la aplicación del modelo de Van Hiele, con énfasis en el análisis cognitivo (niveles de razonamiento geométrico) y el análisis de la instrucción (fases de aprendizaje), según lo reportan Báez, González, Gudiño, Noguera e Iglesias (2013), Osorio, Gil, Gómez, Romero e Iglesias (2013) y Ramírez, Torres, Váldez e Iglesias (2013).

El modelo de Van Hiele (1957; 1959), establece que, en el aprendizaje de la Geometría, los estudiantes avanzan a través de una sucesión de cinco niveles de razonamiento, los cuales se describen en el Cuadro 1.

Cuadro1
Descripción de los niveles de razonamiento geométrico

Niveles	Descripción
Reconocimiento	El estudiante reconoce las figuras geométricas por su apariencia y de forma global; es decir, sin llegar a identificar sus partes componentes. En este nivel, el estudiante ignora ciertas características pertinentes de la figura, mientras enfatiza algunas características no pertinentes como lo puede ser la posición ocupada por una figura en un plano. Así, un cuadrado mostrado con los lados paralelos a los bordes del pizarrón deja de ser reconocido como tal si es cambiado de posición.
Análisis	El estudiante analiza las partes componentes de una figura geométrica tales como lados y ángulos internos. Así, pues, descubre, en forma experimental, relaciones entre las partes componentes de una figura o entre objetos geométricos; reconoce las características relevantes de una figura y las diferencia de las características irrelevantes; sabe que cambiar una figura de posición a otra no afecta a sus atributos relevantes; no acepta que una figura puede pertenecer a varias clases generales y tenga varios nombres; no puede establecer relaciones mediante deducciones lógicas, ni hacer demostraciones formales.
Relaciones, clasificación u ordenamiento	El estudiante establece relaciones lógicas y sigue razonamientos deductivos sencillos, a partir de las propiedades descubiertas en el nivel 2. Sin embargo, en este nivel, el estudiante aún no comprende el funcionamiento de los sistemas axiomáticos en la validación del conocimiento geométrico.
Deducción	El estudiante que razone a este nivel entiende el significado de los axiomas o postulados y es capaz de seguir y realizar razonamientos deductivos y demostraciones formales de los teoremas.
Comparación de Sistemas Axiomáticos o Rigor Lógico	En este nivel, el estudio de la Geometría es elevadamente abstracto y no incluye necesariamente el estudio de modelos concretos o pictóricos. Aquí, el estudiante establece teoremas en diferentes sistemas axiomáticos y analiza rigurosamente tales sistemas.

Cabe indicar que en las investigaciones revisadas suele trabajarse sólo con los primeros cuatro niveles de razonamiento geométrico, posiblemente porque en el ámbito educativo sea difícil que un estudiante requiera manejar distintos sistemas axiomáticos y quizá, por ello, en la literatura la descripción del nivel 5 esté escasamente apoyada en investigaciones empíricas; al respecto, Sarasua et. al. (2013) expresan que en la práctica se consideran cuatro niveles de razonamiento, ya que, el quinto sólo se ha formulado teóricamente, lo cual es un planteamiento también expresado por Usiskin (1982) y Jaime (1993).

Para la comprensión de este modelo, es importante tener en cuenta que los estudiantes no pueden llegar a un nivel si no alcanzan primero a los niveles anteriores y que, además, el paso de un nivel a otro no se da automáticamente con el cambio de edad, sino que el mismo está asociado al tipo de enseñanza recibida por el estudiante. Además, el paso de un nivel a otro no se da en forma brusca (como inicialmente se pensaba), sino de forma progresiva y continua; de manera tal que las habilidades geométricas implícitas en un nivel n, se hacen explícitas en el nivel n + 1.

Además, en el modelo de Van Hiele se propone que cualquier estrategia didáctica orientada a propiciar el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes, según los niveles mencionados, debe contemplar las siguientes fases de aprendizaje:

Fase 1: Información: El docente conoce los conocimientos previos que poseen sus estudiantes y qué tipo de tareas son capaces de realizar según su capacidad de razonamiento geométrico.

Fase 2: Orientación guiada o dirigida: El docente orienta a los estudiantes para que realicen las exploraciones geométricas iniciales y los induce a observar algunos elementos relacionados con las propiedades geométricas relevantes. En este sentido, Gutiérrez y Jaime (2012) señalan que “el objetivo principal de esta fase es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etcétera, principales en el área de la geometría que están estudiando” (p. 57).

Fase 3: Explicitación: El docente incentiva a los alumnos para que comuniquen y expliquen, en forma oral o por escrito, los resultados obtenidos a través de sus exploraciones geométricas.

Fase 4: Orientación Libre: El docente, con el propósito de facilitar el proceso de transferencia y consolidación de los aprendizajes, busca que los estudiantes utilicen y combinen los nuevos conocimientos y habilidades geométricas para resolver problemas.

Fases 5: Integración: Organizar lógicamente y como un todo los nuevos aprendizajes geométricos.

Según Gutiérrez y Jaime (2012), las fases de aprendizaje, componente prescriptivo del modelo de Van Hiele, "constituyen una propuesta metodológica para los profesores que les indican cómo organizar los diferentes tipos de contenidos de un tema específico, secuenciándolos para que faciliten el progreso de los estudiantes y gradúen su aprendizaje" (p. 56).

Por otra parte, Hoffer (1981) propone que la enseñanza de la Geometría debe fomentar el desarrollo de cinco tipos de habilidades prácticas y que tienen una naturaleza claramente geométrica; habilidades que, además, asocia a cada uno de los niveles de razonamiento geométrico y que, por tanto, se van desarrollando progresivamente: (a) *Habilidad visual*: Capacidad de observación; (b) *Habilidad verbal*: Uso apropiado del lenguaje de la Geometría; (c) *Habilidad para dibujar*: Expresar ideas geométricas en forma gráfica; (d) *Habilidad lógica*: Capacidad de estructurar argumentaciones lógicas; (e) *Habilidad para modelar*: Capacidad de construir modelos geométricos asociados al medio circundante.

En cambio, Gutiérrez y Jaime (1998) han identificado diferentes procesos de razonamiento (reconocimiento, definición, clasificación y demostración) como característicos de varios de los niveles propuestos por Van Hiele: (a) Reconocimiento de tipos y familias de figuras geométricas, identificación de componentes y propiedades de las figuras; (b) Definición de un concepto geométrico, la cual puede ser considerada de dos maneras distintas: cómo un estudiante formula la definición de un concepto que está aprendiendo o cómo un estudiante emplea una definición dada; (c) Clasificación de figuras geométricas en atención a distintos criterios o su clasificación como parte de diferentes familias o clases; (d) Demostración de propiedades o proposiciones matemáticas.

En atención a la clasificación de las habilidades geométricas por Hoffer (1981) y Gutiérrez y Jaime (1998), se establece que entre las habilidades vinculadas con el proceso de resolución de problemas geométricos usando un programa de Geometría Dinámica y el proceso de demostración en Geometría destacan las mencionadas en el Cuadro 2.

De modo que, a pesar que las habilidades para demostrar proposiciones matemáticas se consolidan en el nivel 4 (deducción), se observa que en los niveles previos se desarrollan ciertas habilidades geométricas que permiten abordar la demostración; esta situación ha sido tomada en consideración a la hora de diseñar y poner en práctica una propuesta didáctica centrada en la resolución de problemas geométricos que incorporó el uso de un SGD y la aplicación del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, así como al momento de describir y analizar las competencias matemáticas que estén relacionadas con la demostración en ambientes de Geometría Dinámica (Iglesias, 2014).

Cuadro 2
Habilidades asociadas a los niveles de razonamiento geométrico

Nivel 2, Análisis	1. Expresar en un dibujo la información verbal dada. 2. Utilizar las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla. 3. Reconocer propiedades geométricas de objetos físicos.
Nivel 3, Relaciones, Clasificación u Ordenamiento	1. Reconocer interrelaciones entre diferentes tipos de figuras. 2. Reconocer las propiedades comunes de diferentes tipos de figura. 3. Definir con palabras adecuadas y consistentes. 4. Formular frases que muestren relaciones entre figuras.
Nivel 4, Deducción	1. Utilizar información de otra figura para deducir más información. 2. Comprender las distinciones entre definiciones, postulados y teoremas. 3. Reconocer cómo y cuándo usar elementos auxiliares en una figura. 4. Deducir a partir de la información dada cómo dibujar una figura específica. 5. Utilizar las reglas de la lógica para desarrollar demostraciones. 6. Poder deducir consecuencias a partir de la información dada. 7. Poder deducir propiedades de los objetos geométricos a partir de la información dada. 8. Poder resolver problemas que establezcan relaciones entre objetos físicos y objetos geométricos.

La Demostración en Geometría

A partir de Euclides se presenta el conocimiento geométrico a partir de ciertos términos no definidos y axiomas, de donde se deducen todos los teoremas por medio del razonamiento lógico deductivo. No obstante, dado el carácter empírico

– práctico que la Geometría tuvo en sus inicios es preciso señalar que un porcentaje significativo de los conocimientos geométricos se obtuvo a partir de la observación y experimentación (mediciones y construcciones); esto es, aplicando el método inductivo; de manera que, teniendo en cuenta la evolución histórica de la Matemática como disciplina científica, se puede afirmar que tanto la inducción como la deducción han sido dos vías para llegar al conocimiento matemático. Al respecto, Fetisov (1973) afirmó que

> Por supuesto, los primeros conocimientos geométricos del hombre se obtuvieron por el método inductivo, a partir de un número muy grande de observaciones y experimentos. No obstante, conforme creció el conjunto de conocimientos geométricos, se descubrió que podían obtenerse muchas verdades a partir de otras, por medio de la deducción, sin recurrir a las observaciones o a los experimentos (p. 16).

En los trabajos realizados en el marco de esta línea de investigación, se ha enfatizado en las perspectivas cognitiva y didáctica, pero se reconoce la importancia de abordar el estudio de la demostración desde una perspectiva epistemológica, ya que, la misma es una actividad propia y distintiva del quehacer matemático. Por ello, Iglesias y Ortiz (2013) presentaron una aproximación al estudio de la demostración desde una perspectiva epistemológica, a partir de la revisión de algunas investigaciones sobre intuición y demostración mencionadas por D'Amore (2006) y entre las cuales destacan los trabajos realizados por Fischbein (1987), Duval (1999), Balacheff (2000) y Harel y Sowder (2007); encontrándose que la introducción del método axiomático contribuyó a la evolución de la Matemática como disciplina científica y, además, trajo consigo a los métodos de demostración como formas aceptadas de validación de las verdades matemáticas.

Sin embargo, en el ámbito educativo, esto ha ocasionado una sobrevaloración de los llamados contextos de justificación (Sierpinska y Lerman, 1996), descuidando así lo relacionado con el descubrimiento del conocimiento matemático. Esto último pareciera estar asociado a un conjunto de procesos como construir, explorar, visualizar, conjeturar y verificar, los cuales conducirían a sentir la necesidad de justificación; siendo esta necesidad lo que impulsaría a los profesores y estudiantes a dar una explicación, presentar una prueba o realizar una demostración formal. Asimismo, se destacan las relaciones existentes entre la intuición, la demostración y la argumentación; lo cual obliga a tener en cuenta aspectos relacionados con las intuiciones matemáticas (Fishbein, 1987), las prácticas argumentativas (Duval, 1999; Flores, 2007) y las acciones de proceso y producto propias de la actividad demostrativa (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006) a la hora de analizar las acciones y las producciones de los estudiantes para profesor de Matemática cuando resuelvan un problema geométrico en un ambiente de Geometría Dinámica.

Fetisov (1973), atendiendo al carácter axiomático y deductivo de la Geometría, estableció que "una demostración es una cadena de deducciones a través de las cuales se deduce la veracidad de la proposición que debe probarse, a partir de axiomas y proposiciones previamente establecidas" (p. 17). Por ello, los matemáticos tienen que enfrentarse con "el problema de la evidencia" (Fischbein, 1987), ya que, ellos requieren distinguir entre las proposiciones directamente aceptables por evidentes y aquellas que tienen que ser probadas, con el propósito de incorporarlas al seno de una teoría axiomática y, dado que la evidencia intuitiva no es sinónimo de certeza, tienen que arriesgarse a usar su intuición al momento de resolver un problema y hacer una demostración. Los matemáticos están dispuestos a demostrar, incluso, lo que parece obvio. Sin embargo, en el ámbito escolar, los estudiantes no comprenden la necesidad de demostrar lo que les parece evidente y, por lo tanto, tienen dificultades para presentar argumentos convincentes que garanticen la veracidad de una proposición. En este sentido, Alsina (1999) afirma que:

> Las demostraciones pueden ser muy instructivas si a su valor argumentativo se une la motivación de su necesidad. Muchas veces conviene resaltar tantos los ejemplos como los contraejemplos, o hacer ver lo que sucedería al suprimir una hipótesis o ser menos restrictivos. (...). (p. 35)

En otro orden de ideas, los ambientes de aprendizajes basados en el uso de un SGD establecen la necesidad de armonizar la intuición y el razonamiento lógico – deductivo, lo cual era una de las grandes aspiraciones de Fischbein (1987). Asimismo, en este tipo de ambientes, es posible distinguir entre verificación empírica y deducción lógica, lo cual está estrechamente relacionado con la validación del conocimiento matemático (Mariotti, 1998).

Según la perspectiva del Grupo de Investigación en Educación Matemática de Génova (Italia), Boero (1999) plantea que la aproximación a la demostración pertenece a una forma más general de aprendizaje cultural y cognitivo y, por ende, ingresar a la cultura de los teoremas significa desarrollar competencias específicas inherentes a la producción de teoremas y a la prueba de las conjeturas. Además, este investigador estudia los roles múltiples de la argumentación en las actividades matemáticas concernientes a teoremas y la mediación del docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración.

Algunos investigadores del Grupo Internacional de Psicología en Educación Matemática (PME) también han centrado sus esfuerzos en el análisis de la influencia de un SGD sobre los estudiantes y las concepciones de la demostración matemática mientras los estudiantes están resolviendo problemas geométricos en un ambiente mediado por tal software.

De manera análoga, la revista ZDM dedicó los volúmenes 34 (1) y 34(3) a la demostración y a la investigación sobre los SGD; entre las ideas relevantes se pueden mencionar: (a) los estudiantes deben distinguir entre la evidencia empírica y la demostración (Hanna y Jahnke, 2002); (b) las investigaciones han contribuido a la descripción y explicación de los procesos de demostración y sus prerrequisitos (Heinze y Kwak, 2002); (c) brindar oportunidades a los estudiantes para la exploración y la argumentación matemática, teniendo como soporte la resolución de problemas (Reiss y Renkl, 2002); (d) los ambientes de Geometría Dinámica son complejos, debido a que exigen el diseño de secuencias de aprendizaje que alternen el trabajo con el software y las discusiones colectivas y, en muchos casos, es necesario redefinir los contenidos, los métodos y el rol del docente (Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002); (e) para usar un SGD con fines didácticos se debe hacer una selección de materiales adecuados, y correspondencia de las secuencias de enseñanza con los objetivos de aprendizaje establecidos (Gawlick, 2002).

Asimismo, Reiss, Heinze, Renkl y Groß (2008) señalan que las habilidades para argumentar y demostrar pudieran ser analizadas atendiendo a las exigencias de los problemas planteados a los estudiantes.

En el año 2012 se publica el Estudio ICMI 19 en el cual se examinan varias nociones teóricas y prácticas acerca de por qué y cómo los educadores matemáticos deben acercarse a la enseñanza y el aprendizaje de la prueba y la demostración. En el Cuadro 3, se muestra una síntesis de los asuntos tratados por estos grupos de trabajo (Hanna y De Villiers, 2012).

En la presentación de esa publicación, se señala que los educadores matemáticos participantes en ese estudio ICMI comparten una visión común de la demostración matemática que trasciende la visión formal de la misma. Por ello, Hanna y De Villiers (2012) afirman que: “Este tomo de estudios trata a la prueba en un sentido más amplio, reconociendo que una visión estrecha de la prueba ni refleja la práctica matemática, ni ofrece las mayores oportunidades para la promoción de la comprensión matemática" (p. 3).

Cuadro 3
Asuntos tratados por los grupos de trabajo participantes en el estudio ICMI 19

Grupo de Trabajo	Coordinador(es)	Asuntos tratados
Desarrollo cognitivo de la Prueba	David Tall y Oleksiy Yevdokimov	Características del desarrollo cognitivo de la prueba en los distintos niveles escolares.
Argumentación	Viviane Durand-Guerrier	Relación entre la prueba y la argumentación desde la perspectiva de las cualidades opuestas como formal vs informal, forma vs contenido, semántica vs sintaxis, verdad vs validez, lógica matemática vs sentido común, prueba formal vs heurística, y continuidad vs discontinuidad.
SGD y Experimentación	Ferdinando Arzarello	Las formas en que las investigaciones matemáticas usando tecnología avanzada y diferentes recursos semióticos se refieren a los aspectos formales del discurso matemático y la producción de pruebas.
Prueba en el currículo escolar	Fou-LaiLin	El conocimiento que los profesores necesitan para enseñar a demostrar con eficacia y de cómo las actividades demostrativas deben estar diseñadas para fomentar la mejor enseñanza acerca de la prueba y la actividad demostrativa.
Naturaleza de la prueba en el aula	Tommy Dreyfus, Hans Niels Jahnke y Wann-Sheng Horng	La forma, el estado y el papel que la prueba debe asumir en cada nivel educativo para asegurar la comprensión matemática.
Prueba en la Educación Universitaria	Annie Selden	Explora todos los aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de la prueba y demostración en el nivel universitario, incluyendo la transición de la escuela secundaria a la universidad y la transición de la licenciatura al trabajo como matemáticos.

Por lo tanto, la demostración matemática se entiende como "una práctica argumentativa orientada por las leyes de la lógica formal o reglas de inferencia y dirigida a entender el porqué es válida una proposición matemática y convencer a otros y quizá a uno mismo de su validez" (Iglesias y Ortiz, 2013, p. 242). Esta acepción guarda relación con lo propuesto por Flores (2007), quien asumió a la demostración o prueba como el resultado de una práctica argumentativa que se apoya en esquemas analíticos cuyos razonamientos son válidos desde el punto de vista de la lógica formal. Además, sin perder de vista que la demostración como proceso guarda relación con diversas actividades propias del quehacer matemático: exploraciones, estrategias heurísticas, reconocimiento de patrones o regularidades, formulación de conjeturas, verificación empírica, explicaciones, entre otras.

Referencias

Aguilar, R. e Iglesias, M. (2013). La Geometría de los Cuadriláteros en los Libros de Texto de Educación Primaria. *Paradigma*, Vol. XXXIV, Nº 2, 151 – 173.

Alsina, C. (1999). Intuición y Deducción en Geometría. En E. Veloso, H. Fonseca, J.P. da Ponte y P. Abrantes (Eds.), *Ensino da Geometria no virar do milenio (pp. 33 - 41).* Departamento de Educação da Facultade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktic der Mathematik*, 34 (3), 66 – 72.

Báez, R. (2010). *Propuesta didáctica para el curso de Geometría de la especialidad de Educación Integral del Instituto Pedagógico Rural "El Mácaro". Evaluación de una unidad didáctica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Báez, O., González, A., Gudiño, G., Noguera, L., e Iglesias, M. (2013). Teorema de Thales: Una Propuesta Didáctica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 139 - 150). Maracay:

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los alumnos de Matemática*. Bogotá: Una Empresa Docente de la Universidad de los Andes.

Boero, P. (1999). Argumentación y Demostración: Una relación compleja, productiva e inevitable en las Matemáticas y en la Educación Matemática [Documento en línea]. *La lettre de la Preuve. Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 99 07/08.* Disponible: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeIT.html [Consulta: 2012, Mayo 4]

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

De Villiers, M. (2010). Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Educação Matemática Pesquisa*, 12 (3), 400 - 431.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fetisov, A.I. (1973). *La Demostración en Geometría*. México: Editorial Limusa – Wiley.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Flores, A.H. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas del Bachillerato. *Educación Matemática*, 19 (1), 63-98.

Galvis, L. J. (2010). *Estudio de la geometría del espacio mediante la metodología enseñanza y aprendizaje por proyectos*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

García, R. (2009). *Estudio de las funciones reales de una variable real en un ambiente de geometría dinámica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Gawlick, T. (2002). On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom. *Zentralblatt für Didaktic der Mathematik*, 34 (3), 85 - 92.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele Levels of Reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20 (2 y 3), 27 – 46.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 32, 55 – 70.

Hanna, G. y De Villiers, M. (2012). Aspects of Proof in Mathematics Education. En G. Hanna y M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (pp. 1 – 10). Dordrecht: Springer.

Hanna, G. y Jahnke, H. N. (2002). Another Approach to Proof: Arguments from Physics. *ZDM*, 34 (1), 1 – 8.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics (2 volumes)*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Heinze, A. y Kwak, J. Y. (2002). Informal prerequisites for informal proofs. *ZDM*, 34 (1), 9 – 16.

Hoffer, A. (1981). Geometry is More Than Proof. *Mathematics Teacher*, 74 (1), 11 – 18.

Iglesias, M. (2007). La Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría. Una experiencia desde el CEINEM – NT. En J. Ortiz Buitrago y M. Iglesias Inojosa (Eds.), *Memorias. VI Congreso Venezolano de Educación Matemática* (pp. 211 – 225). Maracay: Asociación Venezolana de Educación Matemática, Capítulo Aragua.

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2013). La Demostración en Geometría desde una perspectiva epistemológica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 230- 247). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Iglesias, M. (2014). *La Demostración en Ambientes de Geometría Dinámica. Un Estudio con Futuros Docentes de Matemática*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Valencia, España.

Jaime, A. (1998). ¿Por qué los estudiantes no comprenden la geometría? En A. Gutiérrez y A. Jaime (Eds.), *Geometría y algunos aspectos generales de la Educación Matemática* (pp. 23 – 43). Bogotá: Una empresa docente.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp. 295 – 384). Sevilla: Alfar.

Linares, O. (2008). *Evaluación de una unidad didáctica orientada a la enseñanza y el aprendizaje del teorema de Pitágoras en un ambiente de geometría dinámica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Mammana, C. y Villani, V. (1994). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Discussion Document for an ICMI Study. *L' Enseignement Mathématique*, 40, 345 – 357.

Mammana, C. y Villani, V. (1998). Introduction. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study (pp. 1 – 8)*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mariotti, M.A. (1998). La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein. *La lettre de la preuve. Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 98 11/12. Disponible: http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/981112.html

Moreno, Z. (2006). *Una propuesta didáctica orientada a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en 8° grado de educación básica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Nacional Experimental Rómulo Gallegos, San Juan de los Morros.

Osorio, A., Gil, C., Gómez, W., Romero, E. e Iglesias, M. (2013). Pitágoras y el Teorema de la Mujer Casada. Una Propuesta Didáctica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 194 - 204). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Pérez, J. C. (2008). *La calculadora graficadora en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría de la circunferencia y del círculo a nivel de 7º grado de educación básica*. Trabajo de grado de maestría no publicado.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Pérez, M. (2010). *La metodología de enseñanza – aprendizaje por proyectos en la formación inicial del maestro de educación integral en geometría*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Perry Carrasco, P., Camargo Uribe, L., Samper de Caicedo, C. y Rojas Morales, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Ramírez, S., Torres, Z., Váldez, K. e Iglesias, M. (2013). La Circunferencia y el Círculo. Una Propuesta Didáctica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 217 - 229). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Reiss, K. y Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples.*ZDM*, 34 (1), 29 – 35.

Reiss, K. M., Heinze, A., Renkl, A. y Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: effects of learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 40(3). 455 – 467.

Sánchez, R. (2008). *El plegado de papel y las construcciones con regla y compás en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría del triángulo a nivel de 7º grado de educación básica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Sánchez, J. e Iglesias, M. (2012). El desempeño de los docentes de matemática y sus necesidades formativas. *Paradigma*, Vol. XXXIII (1), 155 – 173.

Sarasua, J. M., Ruiz de Gauna, J. G. y Arrieta, M. (2013). Prevalencia de los niveles de razonamiento geométrico a lo largo de diferentes etapas educativas. *Revista de Psicodidáctica*, 18 (2), 313 – 329.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologías de las Matemáticas y la Educación Matemática. [Documento en Línea] Disponible:

http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/escorial/SIERLERM.html [Consulta: 2012, Diciembre 12]

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and achievement in secondary school geometry*. Chicago: University of Chicago.

Van Hiele, P.M. (1957): *El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría.* Tesis doctoral no publicada. Universidad Real de Utrecht: Utrecht, Holanda. Disponible:

http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

Van Hiele, P.M. (1959). La pensée de l'enfant et la géométrie. *Bulletin de l'APMEP* 198, 199-205. Traducido al español por Ricardo Barroso. Disponible:http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/aprgeorefer.html

Martha Iglesias Inojosa.

Doctora en Educación por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL). Profesora de Matemática con Maestría en Enseñanza de la Matemática por la UPEL. Actualmente se desempeña como Profesora Asociada a Dedicación Exclusiva de la UPEL Maracay y Coordinadora del Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM). Además es integrante del Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando Nuevas Tecnologías (CEINEM – NT) que funciona en la UPEL Maracay y Coordinadora de la Línea de Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría. Es miembro activo de la Asociación Venezolana de Educación Matemática, Capítulo Aragua. Tiene publicaciones nacionales e internacionales.

José Ortiz Buitrago.

Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada, España, egresado del Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática. Licenciado y Magister en Matemáticas por la Universidad Simón Bolívar, Caracas. Profesor Titular de la

Universidad de Carabobo (UC). Director de Proyectos de la Unidad de Investigación del Ciclo Básico de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, UC, Campus La Morita, Maracay; donde dirige la línea de investigación en Educación Matemática: Pensamiento Numérico y Algebraico. Presidente de la Asociación Venezolana de Educación Matemática, Capítulo Aragua. Tiene diversas publicaciones en el ámbito nacional e internacional. Ha dirigido varios trabajos de grado de maestría y tesis doctorales en Educación Matemática, en distintas universidades nacionales. Es profesor-investigador del Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Ha participado en eventos nacionales e internacionales. Es asesor de varias revistas científicas.