Sección Tecnologías de Internet
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 8, Nº 2. 2007

Los poliominóes o ¿Cómo jugar con el plano en pedazos?

Juan Eduardo Nápoles V.
jnapoles@ucp.edu.ar
Universidad de la Cuenca del Plata

Resumen.

En este trabajo, tomando como centro el pentominó, presentamos algunas notas históricas referidas a este tema y su vinculación con el Juego de la Vida de John Conway, así como con algunos pasatiempos matemáticos. Queremos además, que sirva de referencia en el desarrollo de trabajos de investigación cortos, que pueden ser desarrollados en la escuela, tomando como base la matemática escolar.

Palabras claves:poliominoes, juego de la vida, problemas de recubrimiento, puzzles

1.1 Los pentominóes.

Euclides (Siglo III) edificó su geometría a partir de la intuición, por nuestros sentidos, del espacio exterior. Los conceptos básicos se adaptaban a la experiencia sensible, dependiendo del grado de aproximación de las formas y extensiones que el hombre podía percibir directamente. También la mecánica, muy vinculada con la geometría, dependió de los intervalos de tiempo adaptados a nuestra vida fisiológica y a la duración media de la misma. Si pudiéramos admirar los pequeños detalles de la realidad circundante, y la duración de nuestra vida fuera de miles de años o fracciones de segundo, el concepto del mundo exterior hubiera sido muy distinto e igualmente diferentes hubieran sido, seguramente, la geometría y la mecánica, aún conservando las mismas características del razonamiento deductivo para descubrir y ordenar los conocimientos. Los pentominóes son todas las configuraciones de 5 elementos conectados siempre en horizontal o vertical. Existen 12 pentominóes que se muestran en la figura 1.1.

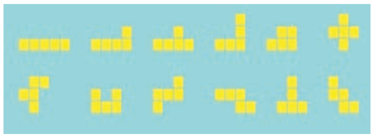


Figura 1.1

A cada una se le asigna una letra para poder denominas a las diferentes piezas a la hora de hablar de soluciones. Para poder recordarlas se recomienda la siguiente regla nemotécnica: las ultimas letras del abecedario T U V W X Y Z y RILiPiNo.

El pentominó es un antiguo juego de origen árabe que admite múltiples soluciones como veremos más adelante. Cuando intentes armarlo, difícilmente creas esto, ya que te dará la impresión de que no puede haber más de una o dos formas de ordenarlo. Creo que es por esa razón que ha despertado tanto interés a lo largo del tiempo. Así, se trata de componer las figuras entre si formando rectángulos, como por ejemplo:

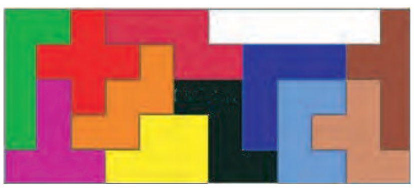


Figura 1.2

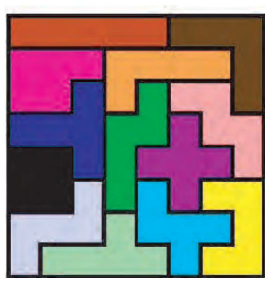


Figura 1.3

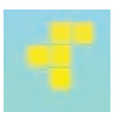
El número de soluciones para cada uno de los tipos de rectángulo está resumido en la siguiente tabla.

Medidas	Número de soluciones
3 x 20	2
4 x 15	368
5 x 12	1010
6 x 10	2339

Veremos que aunque haya tantas soluciones,no es para nada fácil resolver cada una. [1]

Desde el punto del Juego de la Vida, el pentominó es solo una de las tantas configuraciones posibles, así tenemos múltiples configuraciones en dependencia del número de celdas consideradas, el problema principal que resuelve el Juego de la Vida de John Conway, es responder la inquietud de John von Neumann que había buscado un constructor universal en los años 40. Él intentó encontrar una máquina hipotética que construyera copias de sí mismo y pudo tener éxito cuando él encontró un modelo matemático para semejante máquina pero con reglas muy complicadas en una red cartesiana, por lo que varió la misma y trabajo sobre una red especial, y estudió el comportamiento asintótico de las configuraciones posibles. Recomendamos que averigües la evolución de todos ellos excepto la del primero de la segunda fila que analizaremos más adelante. Descubrirás que cinco se extinguen rápidamente, dos alcanzan pronto formas estables y cuatro no tardan en convertirse en semáforos.[2]

El único que muestra un comportamiento interesante es el denominado **PENTOMINÓ r**.

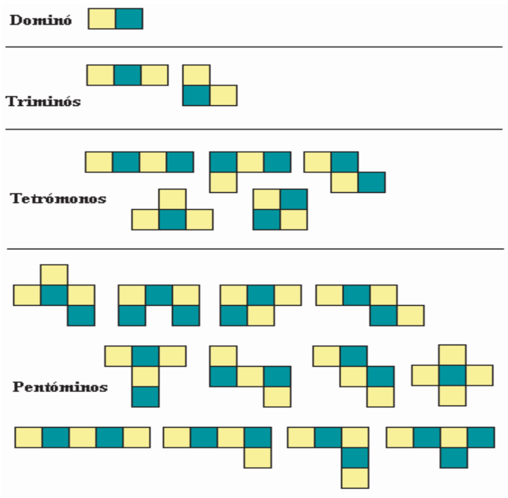


El propio Conway siguiendo su evolución ha comentado de este pentominó: *"Ha dejado por ahí un montón de residuos y detritus y tiene unas cuantas regiones activas por lo que no es evidente que vaya a sobrevivir indefinidamente."*

Si no has tenido paciencia para saber el futuro del pentominó r, te diremos que se convierte en una configuración oscilante al cabo de 1103 generaciones. Entre tanto se han producido 6 **deslizadores** que viajan hacia el exterior. Los detritus abandonados consisten en 4 biestables, un **barco**, una **nave**, una **barra de pan**, cuatro **colmenas** y ocho bloques.

[1] Ver todas las soluciones en `http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/55_56-2-o-pentomin.html`.

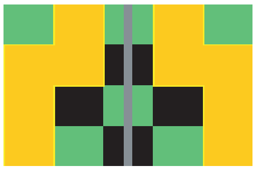
[2] Recomendamos consultar los detalles fundamentales del Juego de la Vida en la conferencia "El juego de la vida: Geometría Dinámica", presentada en el IV Simposio de Educación Matemática, 7-10 de mayo, 2002; así como en la bibliografía allí citada.



En nuestro **minimundo**, el resultado anterior depende de la posición inicial del pentominó r dentro del mismo. En la posición de la que partimos, la población se estabiliza al cabo de 1266 generaciones.[3]

En este trabajo, tomando como centro el pentominó, presentamos también algunas notas históricas referidas a este tema y su vinculación con el Juego de la Vida de John Conway, así como con algunos pasatiempos matemáticos. Queremos además, que sirva de referencia en el desarrollo de trabajos de investigación cortos, que pueden ser desarrollados en la escuela, tomando como base la matemática escolar.

1.2 ¿Qué es un poliominó? Conceptos básicos.

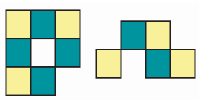


El interés de los poliominoes radica en que su aparente simplicidad no tiene nada que ver con la potencial fuente de problemas de inteligencia que estos suponen, algunos de los cuales aún sin solución.

Aunque hay distintos tipos de juegos con poliominoes (y en especial con pentominóes) la parte principal de este trabajo serán los **problemas de recubrimiento** de tableros con pentominóes.
No obstante el ejemplo antes citado, comprende tres tipos de problemas: recubrimiento de tableros, rectificado de poliominoes y recubrimientos de pentominóes a escala, si bien estos últimos se pueden considerar un subtipo de los problemas de recubrimiento.
El nombre de poliominoes se debe al matemático norteamericano Salomon W. Golomb de quién partió la idea hacia 1954.
Lo que hace radicalmente diferente a este tipo de rompecabezas de otro tipo como los puzzles es que si bien hay puzzles complicadísimos de, pongamos 1.000 piezas, una vez resueltos no hay más que hacer y acaba la diversión.

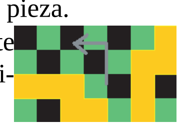
Este no es el caso de los juegos con poliminoes que entrarían en este sentido en la misma familia de juegos que el cubo de Rubik, aunque como se verá más adelante con muchos puntos de contacto con los puzzles.

Otros puntos que distinguen a este tipo de juegos son la carga matemática que contienen y la variedad de problemas que con ellos se pueden plantear. Los poliominoes son polígonos construidos a base de adosar cuadrados unitarios a lo largo de sus lados. Puesto que una pieza de dominó se compone, desde el punto de vista geométrico, de la unión de dos cuadros, podemos llamar triminoes a la unión de tres cuadrados, tetrominoes a la de cuatro y así sucesivamente. Pero de un modo formal se pueden definir como un conjunto de cuadrados conectados entre sí por uno de sus lados de tal modo que no queden huecos en el interior de la estructura resultante. Así las siguientes piezas (unos posibles heptominoes y pentominóes) no serían consideradas como tales.



Además sólo se considerarán poliominoes distintos a aquellos que no se pueden obtener a partir de otro dado con una simple función de *rotación* o de *inversión/reflexión*. Estas funciones se contemplan a continuación. En ambos casos el poliominó obtenido no se considerará distinto del que teníamos, sino una variación del original.

La figura anterior representa un N-poliominó tras aplicarle la función de rotación o inversión que transforma el poliominó dado(parte izquierda del diagrama) en su imagen especular (parte derecha), basándose en el eje dibujado.
La rotación de una pieza es de 90º y el poliominó resultado son la misma pieza.



Es fácil imaginar que el número de piezas irá creciendo exponencialmente pero un tema curioso y a simple vista factible es el de ver cuantos poliominoes diferentes existen de orden n.

Con 2 cuadros tenemos un sólo dominó, es lógico y con 3 cuadros tenemos dos posibles triminoes, así surge la siguiente interrogante de manera natural *¿Cuantos posibles poliominoes de n cuadros existen?*
Consideremos las siguientes funciones dependientes del orden del poliominó tratado:

$G(n)$: Número de poliominoes de orden n, sin contar rotaciones ni reflexiones/inversiones (2 dominoes, 5 tetrominoes, ...).

$H(n)$: Número de poliominoes de orden n sin contar los poliominoes resultado de rotaciones, pero contando como distintos los poliominoes resultados de invertir otros poliominoes.

$T(n)$: Número total de poliominoes de orden n, contando como distintos tanto las rotaciones como las reflexiones de otros poliominoes.

$S(n)$: Número de poliominoes de orden n que son invariables frente a la función de reflexión (pudiendo aplicar la rotación).

La siguiente tabla muestra los valores de estas funciones para un valor de n entre 1 y 12:

n	G(n)	H(n)	T(n)	S(n)
1	1	1	1	1
2	1	1	2	1
3	2	2	6	3
4	5	7	19	4
5	12	18	63	6
6	35	60	216	10
7	108	196	760	20
8	369	704	2.725	34
9	1.285	2.500	9.910	70
10	4.655	9.189	16.446	121
11	17.073	33.896	135.268	250
12	63.600	126.759	505.861	441

Existen algunas relaciones entre estas funciones. Por ejemplo es fácil ver que $S(n) = 2G(n) - H(n)$.

Se pueden contemplar más funciones y relaciones entre ellas de las aquí expuestas. En la bibliografía citada se encuentran algunos estudios más profundos sobre este tema, pero como aproximación da una idea de la complejidad del problema.
Si contemplamos la función $T(n)$, nos da una idea del número de combinaciones del que dispondríamos para, en el caso de problemas de recubrimientos, recubrir un tablero de heptominoes.

En la figura siguiente se muestra una tabla con las diferentes piezas *válidas* que existen de orden n (hasta cinco, pentominóes). Se corresponde con la función $G(n)$ estudiada en el punto anterior, poliominoes distintos sin aplicar funciones de rotación o inversión sobre otros poliominoes.

1.3 Problemas de recubrimiento.

Un tipo de problemas muy interesantes son los problemas de recubrimiento de tableros con poliominoes: Dado un tablero similar al de ajedrez (resultado de poner o quitar en él más cuadros) que alterna cuadros blancos y negros se debe recubrir con piezas de orden n.

Como se adivina fácilmente, hay muchas variantes de este juego, algunas de las cuales se tratan en los puntos siguientes. Como un detalle artístico queremos señalar la elaboración de retratos e imágenes con fichas de dominó, como el que a continuación presentamos, que corresponde a Marilyn Monroe [4].

Figura 1.4

[4] Ver `http://www.dominoartwork.com/prints.html`.

1.4 Recubrimiento con dominóes.

El problema más simple que puede surgir es el de recubrir un tablero de ajedrez (8 filas, 8 columnas alternando colores) con dominoes.
Es obvio que se puede hacer: cada dominó ocupa dos cuadros, uno de cada color y el tablero tiene n filas pares.

Pero ¿y si suprimimos las dos últimas casillas del tablero? También es trivial, lo conseguiríamos recubrir con una pieza menos.
¿Y si suprimimos dos esquinas diametralmente opuestas del tablero? También resulta obvio que sí.

¿Y si suprimimos dos cuadros cualesquiera? Pues entonces no. Como cada dominó tapa un cuadro de cada color si tachamos los dos cuadros del mismo color, no podremos recubrirlo pues quedarían más cuadros blancos que negros o al revés y no podrían ser recubiertos por las fichas.

Bien ¿Y con dos cuadros tachados de distinto color?
Entonces sí. Podemos recubrir el tablero siguiendo tres tramos recorriendo en cada uno un número par de cuadros (habiendo por tanto el mismo número de cuadros blancos que negros). Veámoslo.

Supongamos que los dos cuadros restringidos no están en la misma columna (si lo estuviesen haríamos el mismo razonamiento por filas en vez de por columnas).
Como toda columna tiene un número para de cuadros necesariamente uno de los dos caminos señalados en las siguientes figuras (C1 o C1') recorrerá un número par de casillas y podrá taparse con una cantidad entera de fichas. En el ejemplo este camino es el representado en la figura de la derecha, C1'.

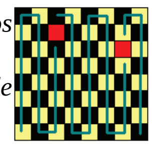
Si observamos la figura 1.5 y siguiendo tras recubrir C1' llegaremos al otro cuadro restringido con un camino, C2 que tendrá un número par de cuadro pues el otro cuadro restringido es de distinto color.

Así llegaremos al último tramo, C3, que será análogo al anteriormente cubierto, C2. El resultado final es la figura de la derecha.
Lo mismo sucede si en vez de dos suprimimos otro número par de cuadros.

Y ahora la pregunta es se pude generalizar esto para tableros rectangulares de cualquier tamaño?
Si el número de filas o de columnas es par la solución es la misma que la expuesta anteriormente, pero si se trata de un tablero cuyo número de filas y columnas es impar habrá que suprimir un número impar de casillas.

En general podemos ver que *una primera condición para recubrir un tablero es que el número de casillas hábiles sea múltiplo del número de cuadrados de que se compone el poliómino.*
Si se restringen una serie de cuadros el tablero se podrá seguir recubriendo con las siguientes condiciones:

Si alguna de las dimensiones del tablero es par entonces el número de cuadros restringidos de cada color debe ser el mismo.
Si las dos son impares entonces se deberá restringir un número impar de cuadros, restringiendo un cuadro más del color del que hay más.



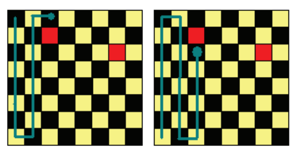
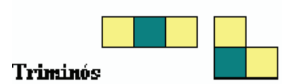
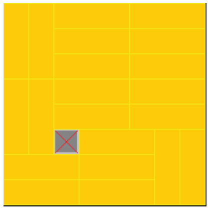


Figura 1.5

1.5 Recubrimiento con triminóes.

Solamente tenemos dos posibles triminoes.

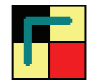




Analicemos primeramente el I-triminó.

Es claro que no se puede recubrir un tablero de ajedrez (8x8) con n copias de estas piezas, pues la dimensión del tablero no es múltiplo del número de cuadros que recubre.

Pero, si se tacha un cuadro, ¿es posible este recubrimiento?



Para verlo asignamos coordenadas a las casillas del tablero, desde la (1,1) para la casilla superior izquierda a la (8,8) para la casilla inferior izquierda. Se tiene entonces que la suma de las primeras coordenadas de todas las casillas del tablero es $8\cdot(1+2+3+...+8) = 9\cdot(9\cdot 8)/2 = 288$, que es un número múltiplo de 3. Análogamente, la suma de las segundas coordenadas es también $8\cdot(1+2+3+...+8) = 9\cdot(9\cdot 8)/2 = 288$.
Por otra parte, un I-triminó recubrirá siempre tres casillas con coordenadas (x,y), (x+1,y), (x+2,y) (si está situado horizontalmente) o tres casillas con coordenadas (x,y), (x,y+1), (x,y+2) (si está situado verticalmente). En los dos casos, tanto la suma de las primeras coordenadas de las 3 casillas, como la suma de las segundas coordenadas de las 3 casillas es un múltiplo de 3.

Por tanto, esto también será cierto para la suma de las coordenadas de todas las casillas que recubramos.
Todo lo anterior implica necesariamente que las dos coordenadas de la casilla que suprimamos del tablero han de ser números múltiplos de 3.

Solo existen 4 casillas con esta propiedad: la (3,3), la (6,3), la (3,6), la (6,6).
Además en estos casos es posible el recubrimiento. Por ejemplo, si suprimimos la casilla (6,3) un recubrimiento sería el siguiente.
En los otros 3 casos, el recubrimiento se obtendría de rotar éste.

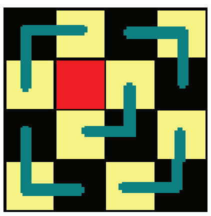
Consideramos ahora el caso de recubrir tableros con $L-triminoes$.

Un tablero de 2x2 con un cuadro tachado es obvio que se puede recubrir con un L-triminó (se debe formar un cuadrado situando adyacente el ángulo del L-triminó a una de las esquinas del cuadro restringido. Esto siempre es posible).

Si el tablero es de 4x4 con una casilla tachada podemos construir una estructura como la siguiente figura.

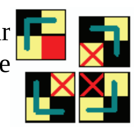
El proceso que se sigue para ello es el siguiente.
Como hemos visto las configuraciones de 2x2 con un cuadro tachado se pueden recubrir con una sola pieza.

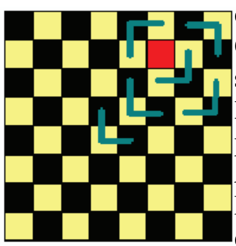
Si se descompone el tablero de 4x4 resultan cuatro subtableros de 2x2. Uno de ellos se puede recubrir de forma inmediata como anteriormente se ha hecho.
Realizado esto se puede decir que recubriríamos el tablero de 4x4 si en los tres subcuadrados de 2x2 restantes tuviéramos tachado un cuadro, de modo que nos quedaran tres configuraciones como las que acabamos de recubrir.
Si colocamos una pieza con el ángulo del L-triminó adyacente a una esquina del subtablero recién cubierto de modo que las tres casillas que éste recubre ocupen cuadros de subtableros distintos estaremos en la situación para la que hemos deducido existe solución segura.
Esto también es factible siempre y por lo tanto este tipo de problemas tiene solución.



Ya que vemos viable recubrir el tablero de 4x4 veamos el tablero de 8x8.
Esta constituido por cuatro bloques de 4x4 cuadrados, luego si se tacha un cuadro en cada subtablero (60 cuadros hábiles) también se puede recubrir a partir del anterior.
Pero si sólo tachamos un cuadro también se puede recubrir (el tablero tendría $8x8 - 1 = 63$, divisible por 3).

Una vez recubierto el subtablero de 4x4 con el cuadro tachado se puede colocar un L-triminó de tal modo que tape un cuadro de cada subtablero de 4x4 restante cogiendo los cuadros de la esquina interior de estos bloques.



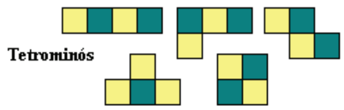


Como ya se ha cogido uno de cada bloque se completará como en el caso anterior.
Como hemos visto podremos recubrir un tablero de 8x8 con L-triminoes si restringimos un único cuadro.
El razonamiento es el mismo que el aplicado para los tableros de 4x4 y podríamos extenderlo igualmente para 16x16.
Así, aplicando este algoritmo recurrente para descomponer en subproblemas hasta el caso básico que sabemos recubrimos (un tablero de 2x2 con un cuadro tachado) podemos encontrar la solución para este tipo de tableros.

Podemos entonces extender este razonamiento también a tableros de tamaño cualquier potencia de dos indefinidamente y afirmar que podemos recubrirlos restringiendo un sólo cuadro con L-triminoes.

1.6 Recubrimientos con tetrominoes.

Aunque los recubrimientos con tetrominoes no son tan simples como los anteriores planteémonos el siguiente problema ¿Es posible recubrir con ellos un tablero de 4x5?



En principio estamos hablando de 20 cuadros, 10 de cada color y como hay 5 tetrominoes se podría abordar el problema.
Consideremos los cuadros del tablero coloreados, alternativamente en blanco y negro.

Podríamos pensar que cada tetrominó cubrirá dos cuadros negros y dos cuadros blancos del tablero.

Pero si analizamos los cinco tetrominoes representados en la figura anterior podemos ver que cada uno de ellos recubrirá cuatro cuadros, dos de cada color, excepto el T-tetrominó que recubrirá tres cuadros de un color y otro del color contrario.

Esto implica una segunda condición a la lógica de configuraciones de 20 cuadros: *Es condición necesaria (pero no suficiente) para recubrir construcciones que el número de cuadros blancos sea igual al número de cuadros de color negro+ 2.*

1.7 Recubrimientos con pentominóes.

Son configuraciones que cubren adyacentemente cinco cuadros de un tablero de ajedrez. En total son doce (entre todos suman sesenta cuadros) ya que no se consideran rotaciones ni imágenes especulares como distintos. Una manera de nombrarlos es la representada a continuación.

Aunque en los siguientes apartados se comentan propiedades interesantes y nociones de recubrimientos de tableros con este tipo de poliominoes no hay una fórmula para recubrirlos, siendo esto principalmente una cuestión de ingenio.
No obstante es en esta teoría en la que me he basado para el desarrollo del ejecutable de poliominoes y puede ser de ayuda a la hora de resolver alguna de las configuraciones que allí se presentan. Los recubrimientos más interesantes con pentominóes son los de algunas configuraciones de tableros que pueden ser recubiertas con un solo uso de cada uno de los 12 pentominóes. Evidentemente estos tableros suman 5 cuadros/pentómino x 12 pentominóes =60 cuadros. Los diferentes tableros rectangulares de 60 cuadros son de 1x60, 2x30, 3x20, 4x15, 5x12 y 6x10. Por razones obvias los rectángulos de 1x60 y 2x30 no pueden ser recubiertos con pentominóes (considérese por ejemplo el x-pentominó).
En contra de lo que podría parecer el rectángulo de 3x20 puede ser resuelto pero es sin duda el más difícil pues tiene sólo dos soluciones. El número de soluciones diferentes para estos rectángulos se presentaron al comienzo de este trabajo. Un tablero de ajedrez normal también puede ser recubierto siempre que se tapen las cuatro esquinas o que se tape un cuadrado de 2x2 que puede estar situado en cualquier parte del tablero.

Bibliografía

[1] Albaiges, L. (1981)-"Se atreve Usted con ellos?", Marcombo, p.47-49.

[2] Alsina, C. (1995)-"Viaje al país de los rectángulos", Red Olímpica, Buenos Aires.

[3] Gardner, M. (1982)-"Nuevos pasatiempos matemáticos", Alianza, Madrid.

[4] Gardner, M. (1984)-" Festival mágico matemático", Alianza, Madrid.

[5] Juraido, M. (1983)-"Pentominó, el rompecabezas interminable", Cacumen 11, 6-10.

[6] Parent, A. (1988)-"Le cube. Mathematiques et pedagogie", 65. Societé Belgee Professeurs de Mathématiques, 17-34.

[7] Parent, A. (1988)-"Des cubes et des jeux. Mathematiques et pedagogie", 66, 29-47. Societé Belge de Professeurs de Mathématiques.

[8] Sánchez Pesquero, Cipriano y Casas García, Luis M. (1998)-"Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en matemáticas", CIDE, Madrid.