Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/). Vol. 9, N^o 2. 2009

Evolución Histórica del Concepto de Matriz

Antonio Rosales Góngora

Anrogo58@yahoo.es

Departamento de Matemáticas

IES Bahía de Almería (España)

Resumen

Tratamos de hacer un recorrido histórico de la evolución del concepto de matriz, desde su aparición en el siglo XIX hasta su consolidación en el siglo XX. Conoceremos las aportaciones de Sylvester y Cayley, la escuela algebraica inglesa y las diversas interpretaciones hasta consolidar el concepto de matriz.

Palabras claves:Historia de las matemáticas, matrices, álgebra.

1.1 Introducción

Una matriz puede representar una tabla de valores, un determinante, una familia de vectores, una aplicación lineal, un endomorfismo, un sistema de ecuaciones diferenciales, una forma bilineal..., como podemos ver una misma representación matricial se puede interpretar de distintas maneras pero, también, diferentes matrices pueden representar el mismo objeto, por ejemplo, en los cambios de base de las aplicaciones lineales.

Pese a que, como dice Morris Kline ([9]), las matrices y determinantes no son un tema decisivo en la historia de las matemáticas porque, mas que nuevos contenidos teóricos, lo que aportan son innovaciones en el lenguaje o nuevos instrumentos de expresión matemática, no por ello debemos olvidar el lugar que han ocupado estas dimensiones en la evolución matemática.

¿La historia de la noción de matriz empieza en 1858 con la aparición de la memoria de Sylvester?¿Se remonta al cálculo de "cuadros" usado en el XIX desde Cauchy a Poincare?¿Debemos remontarnos en el tiempo y estudiar los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales que ocupaban en el XVIII a D'Alambert, Lagrange y Laplace?

En el siglo XX la idea de matriz se transformó en un elemento básico del álgebra. Se ha pasado de la idea original de Sylvester (1851) de matriz como madre de los menores de un determinante, por las leyes del cálculo de matrices de Cayley (1858), hasta los procedimientos de descomposición matricial de Weyr (1885).

1.2 ANTECEDENTES

Los orígenes de las matrices y determinantes se encuentran entre los siglos II y III a.c. No nos debe sorprender su relación con el estudio de sistemas de ecuaciones lineales. En escritos babilonios aparece, sobre el 300 a.c. enunciados del tipo ([20]):

"Tenemos dos campos con un área de 1800 yardas cuadradas. Uno produce grano en razón de $\frac{2}{3}$ de celemín por yarda cuadrada, mientras que el otro lo hace en razón de $\frac{1}{2}$ de celemín por yarda cuadrada. Si el total de la cosecha es de 1100 celemines ¿qué dimensiones tienen los campos?"

Entre los años 200 y 100 a.c. aparece en China el libro *"Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático"* , escrito durante la dinastía Han, que da el primer ejemplo conocido de método matricial. El problema es parecido al anterior:

"Hay tres tipos de trigo, de los que tres sacos del primero, dos del segundo y uno del tercero hacen 39 medidas, dos del primero, tres del segundo y una del tercero son 34 medidas; una del primero, dos del segundo y tres del tercero son 26 medidas¿Cuántas medidas de cada tipo de trigo contiene un saco?"

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

El autor distribuye los coeficientes en una tabla e instruye como resolverlo con operaciones por columnas en lo que puede suponer el germen del método de Gauss.

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

El autor dice que multiplicando la primera columna por tres y restándola de la tercera es el camino más rápido, así como, multiplicar la columna central por tres y restarla de la de la derecha las veces posibles:

El siguiente paso es multiplicar por 5 la última columna y entonces la columna central es restada de ella las veces posibles.

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

De aquí se puede obtener la solución por sustitución.

Cardano en su *"Ars Magna"* (1545) da una regla para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas llamada "regula de modo" y que llama <u>madre</u> de las reglas. Esta regla es, esencialmente, el método de Cramer para sistemas de 2x2, salvo el último paso. Cardano no da la definición de determinante pero se encuentra latente.

La idea de determinante aparece en Japón y Europa, más o menos, al mismo tiempo. En primer lugar, el japonés Seki, en 1683, escribe *"Método para resolver los problemas disimulados"* que contiene métodos escritos en tablas matriciales. Seki introduce los determinantes y da un método general para calcularlos, basado en ejemplos. Usando su "determinante", encuentra los determinantes de matrices de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5 y los aplica para resolver ecuaciones aunque no sistemas de ecuaciones lineales.

En el mismo año, 1683, Leibniz escribe a L'Hôpital, y le expone que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{aligned} 10 + 11x + 12y &= 0 \\ 20 + 21x + 22y &= 0 \\ 30 + 31x + 32y &= 0 \end{aligned}$$

Tiene solución porque

$$10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 20 \cdot 31 \cdot 12 = 10 \cdot 22 \cdot 31 + 11 \cdot 20 \cdot 32 + 12 \cdot 21 \cdot 30$$

es decir, el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo.

Aquí Leibniz no usa coeficientes numéricos, pues, estaba convencido, que una buena notación era la llave para el progreso, y experimentó con distintas notaciones hasta expresarlo de esta manera, donde 21 denota nuestro actual a_{21}.

Leibniz usó el término "Resultante" para ciertas sumas combinatorias de términos del determinante e incluso, estudia sistemas de coeficientes de formas cuadráticas, que lo empujaron hacia las matrices. No obstante, fue Maclaurin quien, en su libro póstumo, Treatise of Algebra (con resultados obtenidos probablemente en el año 1729, y publicados en 1748) usó el método de los determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales con 2, 3 y 4 incógnitas (con 4, dejó planteado o sugerido el método). Aquí se encuentra la llamada "regla de Cramer".

Si se tiene el sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$, la solución viene dada por $y = \dfrac{af - dc}{ae - db}$.

Y si el sistema es $\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + fz = p \end{cases}$

entonces: $z = \dfrac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$

Cramer, tratando de encontrar la ecuación de una curva plana que pasara por un número dado de puntos, encontró su regla, publicada en 1750 en "Introduction á l'analyses des lignes courbes algebraiques".

Bezout, en 1764, mostró que en un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas, tiene soluciones no nulas si el determinante de los coeficientes se anula. De la misma forma, Vandermonde en 1771 ofrece una exposición consistente del cálculo de determinantes.

En 1772, Laplace en un estudio sobre la orbita de los planetas interiores, considera pocos prácticos los métodos de Cramer y Bezout. Laplace discutía, sin calcularlas, las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales usando determinantes. Curiosamente, usó el término "resultante", el mismo que había usado Leibniz, para referirse al determinante, aunque sin saberlo.

Lagrange, en 1773, también estudió identidades de determinante funcionales de 3x3, aunque no vio ninguna conexión con los trabajos de Laplace o Vandermonde.

Tanto Newton como Euler también usaron determinantes para encontrar raíces comunes a dos polinomios de grado m y n aunque el método, generalmente aceptado, fuera el elaborado por Bezout.

El término determinante, aunque en distinto sentido al que nosotros le damos, fue introducido por Gauss en sus *Disquisitiones Arithmeticae* mientras discutía formas cuadráticas. Gauss también es el autor del método de eliminación que lleva su nombre, apareció en un trabajo en el que estudiaba la orbita del planetoide Pallas, donde aparece un sistema de seis ecuaciones y seis incógnitas.

Cauchy fue el primero en utilizar, en 1812, el determinante en sentido moderno. En 1826, en el estudio de formas cuadráticas de n variables usa el término "cuadro" para la matriz de los coeficientes, encuentra los valores propios (concepto introducido 80 años antes por D'Alambert en un trabajo sobre sistemas de ecuaciones diferenciales lineales), diagonaliza matrices, introduce matrices similares, pero tanto él como Sturm, que generaliza el problema del valor propio, solo dan sus ideas en el contexto propio en el que trabajan, sin generalizarlas ni extrapolarlas.

1.3 ORIGEN DE MATRIZ COMO MADRE DE MENORES: SYLVESTER

En Noviembre de 1850, Sylvester publica en el *"Cambridge and Dublín Mathematical Journal"* su memoria titulada *"On the intersection, contacts and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates"* sobre las distintas intersecciones de dos cónicas. Estas, habían sido estudiadas por Plücker en 1828, Sylvester utiliza el cálculo de determinantes en lugar del método analítico desarrollado por Hachette y Poisson (1802) y por Cauchy o Biot en 1826.

En este artículo Sylvester utiliza la caracterización hecha por Cayley de la intersección de dos cónicas U y V formando un cuadrángulo con tres pares de lados y cuatro vértices (se sabe que dos cónicas proyectivas se cortan en cuatro puntos como caso particular del teorema de Bezout en el que dos curvas proyectivas complejas de grado m y n se cortan en mxn puntos).

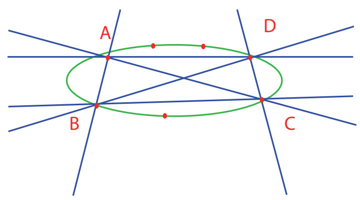

Figura 1.1

Existen cinco casos de intersección y sólo tres tipos de multiplicidad de raíces: tres raíces simples, una doble, una triple.

Todas las cónicas representadas por $U+\mu V$, μ variable, se cortan en un mismo cuadrángulo, correspondiente a los valores de μ para los cuales la cónica $U+\mu V$ es un par de rectas (es decir una cónica degenerada del haz). Sylvester tiene un criterio para distinguir el caso mixto de los casos de intersección enteramente reales o imaginarios: la ecuación cúbica cuyas coordenadas de los vértices son funciones lineales reales, dará un par de raíces imaginarias. Esta es la única condición requerida, la ecuación estará bien determinada cuando se conozca el determinante de $\lambda U+\mu V$ respecto a las coordenadas proyectivas: ξ,η,ς.

La caracterización del contacto de las cónicas lleva al estudio de las raíces de la ecuación $|\, U+\mu V \,|=0$. La existencia de tres raíces distintas traduce la existencia de un cuadrángulo formado por tres pares de rectas distintas:

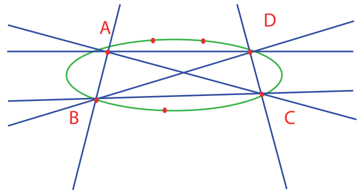

Figura 1.2

Pero el grado de multiplicidad de las raíces se demuestra insuficiente para distinguir dos tipos de contactos de segundo grado correspondientes al caso de una o dos tangentes dobles a la cónica:

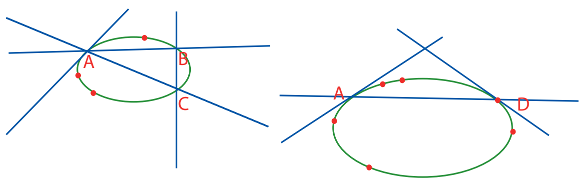

Figura 1.3

Sylvester traduce el caso de raíces dobles al lenguaje de determinantes:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2W}{d\xi^2} & \frac{d^2W}{d\xi d\eta} & \frac{d^2W}{d\xi d\varsigma} & p \\ \frac{d^2W}{d\eta d\xi} & \frac{d^2W}{d\eta^2} & \frac{d^2W}{d\eta d\varsigma} & q \\ \frac{d^2W}{d\varsigma d\xi} & \frac{d^2W}{d\varsigma d\eta} & \frac{d^2W}{d\varsigma^2} & r \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Fqr + 2Grp + 2Hpq$$

Donde los coeficientes son funciones cuadráticas de μ , y hace:

$A = 0, B = 0, C = 0, F = 0, G = 0, H = 0$ obteniendo un factor común para ellas, es decir, cualquiera de esas seis ecuaciones tendrá una y la misma, raíz en común.

Hay pues una relación entre los tipos de intersecciones de las cónicas y los tipos de factores comunes que intervienen en el desarrollo polinomial del determinante $\mid U + \mu V \mid$. Esto hace que las preocupaciones geométricas iniciales sean sustituidas por las de estudiar las distintas descomposiciones polinomiales de $\mid U + \mu V \mid$. Es en este contexto en el que Sylvester introduce la noción de "menor" del determinante $\mid U + \mu V \mid$, pues descubre que es mas rápido y seguro empezar estudiando las diferentes relaciones posibles entre el determinante correspondiente a la característica y sus menores.

En dos memorias publicadas en 1851, Sylvester generaliza sus trabajos a intersecciones de cuádricas y formas cuadráticas con "n letras". La extracción efectiva de los menores de un determinante de orden n se apoya en una representación en una tabla rectangular que Sylvester denomina "la matriz" de los menores.

La memoria de 1851: *"On the relations between the minor determinants of linearly equivalent quadratic function"* está dedicada a enunciar propiedades de los menores, como la invarianza por transformaciones elementales; en este marco, define explícitamente la noción de matriz como <u>madre de los menores</u> de un determinante:

"He definido en una publicación anterior una "Matriz" como una sucesión rectangular de términos de la que distintos sistemas de determinantes pueden engendrarse, como del útero de una misma madre. Estos determinantes, lejos de estar aislados en sus relaciones, están sujetos a ciertas leyes simples de dependencia mutua y de anulación simultánea. La representación condensada de tal matriz, con la notación que he desarrollado a partir de la de Vandermonde, será:

$$\begin{Bmatrix} a_1, a_2, \ldots\ldots., a_n \\ a_1, a_2, \ldots\ldots., a_n \end{Bmatrix}$$

Es fantástico que una teoría de tal pureza analítica encuentre su origen en especulaciones geométricas. Según mi amigo Hermite, algunas indicaciones podrían hacer suponer que una teoría semejante se encontraría en las " Recherches Aritmethiques " de Gauss. Mi notación es similar a la de Vandermonde y me ha ayudado de el notable tratado de Spottiswoode, "On the elementary Theorems of Determinants".

Vandermonde estaba en el buen camino, y no dudo en afirmar la superioridad de nuestra notación sobre la empleada por métodos ordinarios, esta notación es tan importante para el progreso del análisis como lo fue para el cálculo la superioridad del cálculo diferencial sobre los sistemas de fluxiones" [1]

Como podemos observar, la notación matricial es, en su origen, cosa de Sylvester, asociado a los métodos del cálculo de determinantes y particularmente a la práctica de extracción de menores en una descomposición polinomial para resolver el problema de las raíces características múltiples.

El problema general de enumerar los sistemas de menores extraíbles de un determinante, suscitará, en 1855, el interés de Cayley por la noción de matriz.

1.4 CAYLEY Y SU TEORÍA DE MATRICES

Es conocida la relación, iniciada en 1846, entre Sylvester y Cayley. A principios de 1850 se encuentra en plena efervescencia su colaboración en la teoría de invariantes. Cayley adopta por primera vez la noción de matriz en un artículo publicado en 1855 en *"Le Journal de Crelle"* titulado *"Remarques sur la notation de fonctions algebraiques"*. En este artículo, Cayley representa el sistema:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \xi & = & \alpha x+\beta y+\gamma z \\ \eta & = & \alpha' x+\beta' y+\gamma' z \\ \varsigma & = & \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z \end{array}\right. \quad \text{por } (\xi,\eta,\varsigma)=\left|\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma\ldots\ldots \\ \alpha' & \beta' & \gamma'\ldots \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\ldots \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. \end{array}\right|(x,y,z\ldots)$$

Como hemos visto, las nociones de matrices y menores se introducen para caracterizar las intersecciones de dos cónicas o cuádricas mediante la descomposición de un determinante en menores. Cuando se trata de generalizar el método a situaciones en las que intervienen más de tres o cuatro variables, se plantea el problema de enumerar las diferentes descomposiciones posibles. Este problema es el que motiva el interés de Cayley por la noción de matriz, y el que suscitó la

[1] *On the relations between the minor determinants of linearly equivalent quadratic function*, Philosophical Magazine, (4), vol.1 *pag 296*

publicación de tres artículos sucesivos, en 1855 en "Le Journal de Crelle", titulados *"Sobre la transformación de una función cuadrática en ella misma por sustituciones lineales", "Notas sobre la notación de las funciones algebraicas", "Investigaciones sobre las matrices cuyos términos son funciones lineales de una sola indeterminada"*. En ellos, Cayley da la tabla explícita de las distintas descomposiciones de un determinante en menores para $n < 6$ y asocia la sucesión obtenida con los coeficientes del desarrollo en serie entera de $(1-x^n)^{-1}$. Este método corrige un error de descomposición cometido por Silvestre para $n = 7$ y $n = 8$.

En 1858 las matrices eran consideradas simplemente como notación, cómodas pues permitían distinguir un objeto como un sistema lineal o una forma cuadrática de su determinante. La publicación, este año, de *"Memoria sobre la teoría de Matrices"* supone una evolución del punto de vista de Cayley sobre esta noción matricial.

Cayley da un teorema notable según el cual toda matriz satisface una ecuación algebraica de su propio orden, el coeficiente principal es uno, los coeficientes de las demás potencias serán funciones de los términos de la matriz y el término independiente será igual al determinante. La ley para la formación de estas ecuaciones es: el determinante formado por una matriz menos la matriz considerada como una cantidad simple asociada a la matriz unidad, es cero.

Por ejemplo, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ considera el determinante $\begin{vmatrix} a-M & b \\ c & d-M \end{vmatrix}$ obtenido de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M & o \\ o & M \end{pmatrix}$. El cálculo efectivo de las potencias de $\mathcal{M}$ permite demostrar que: $\mathcal{M}^2 - (a+d)\mathcal{M} + (ad-bc)\mathcal{M}^0$ es nulo, lo que demuestra el teorema para $n = 2$.

Con esta notación, m designa a la vez una cantidad múltiple y el producto de una cantidad M por la matriz unidad. Cayley llama cantidad simple a la matriz resultante del producto de una cantidad m por la matriz unidad: $m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$. Representa por $\widetilde{M}$ la matriz $\mathcal{M}$ considerada como cantidad simple, entonces si denota por 1 la matriz unidad, $\widetilde{M} \cdot 1$ representará la matriz la matriz $\mathcal{M}$ considerada como una cantidad simple asociada a la matriz unidad.

Esta memoria será muy utilizada por los matemáticos del XIX que trabajan en teoría de sistemas hipercomplejos. Será considerada, a partir de 1890, como uno de los primeros trabajos que originan la teoría de álgebras asociativas. Las reglas y propiedades de las operaciones matriciales establecidas por Cayley son, a menudo, consideradas como uno de los orígenes del álgebra asociativa de matrices, en particular la suma de matrices es un paso suplementario hacia la abstracción de una teoría de álgebras asociativas.

No obstante, no esta motivada por la voluntad de abstracción, con miras a generalizar las operaciones de la aritmética, a objetos hipercomplejos de varias dimensiones sino que el teorema notable, que funda la teoría de Cayley, está enunciado para resolver un problema preciso, como es la expresión de las funciones racionales de las funciones homográficas.

En efecto, en 1855 Cayley había observado la posibilidad de emplear la notación matricial para representar las funciones lineales que intervienen en la teoría de figuras homógrafas[2]:

"Pero todo eso (la notación matricial) se aplica a otra teoría geométrica, la teoría de funciones homógrafas. Para fijar ideas, no considero figuras en el plano. Suponiendo x, y, z *las coordenadas de un punto, y tomando por* (X, Y, Z) *funciones lineales de* (x, y, z)*, entonces* (X, Y, Z) *se podrá tomar como coordenadas de un punto homógrafo al punto* (x, y, z)*. Buscando los puntos que son homógrafos a si mismos, llegaremos a las ecuaciones* $X - sx = 0, Y - sy = 0, Z - sz = 0$*. Las cantidades a la izquierda* $X - sx, Y - sy, Z - sz$ *son funciones lineales de* x, y, z *teniendo por coeficientes funciones lineales de s. Se tiene así una matriz cuyos términos son funciones lineales de s; toda la teoría se liga a las propiedades de esa matriz".*

Si se compone una función homográfica con ella misma, se obtiene lo que se puede considerar como una función homográfica al cuadrado. Babbage, predecesor de Cayley, se había preocupado del problema de expresar raíces cuadradas de funciones homográficas, aunque el verdadero objetivo de la teoría de matrices en 1858 era el de enunciar un teorema que de un método de cálculo de las funciones racionales de las homografías[5].

[2]Remarque sur le Notation des Fonctions algébriques, *Journal de Crelle*, 1855, pag. 282

"Se puede formar las potencias (positivas o negativas, enteras o fraccionarias) de una matriz y obtener así la noción de función entera, racional, o más generalmente de función algebraica de una matriz. Obtengo el teorema notable según el cual toda matriz satisface una ecuación algebraica de su propio orden.El teorema muestra que toda función racional de una matriz se puede considerar como una función racional de grado a lo mas igual al de la matriz menos uno, en este sentido, la misma cosa es verdadera para cualquier función algebraica de una matriz".

1.5 ESCUELA ALGEBRÁICA INGLESA

Está formada por una generación de matemáticos ingleses que preceden a Cayley y Sylvester, en la primera mitad del XIX, cuyos principales personajes fueron Babbage, Peacock, Gregory, De Morgan, Hamilton y Boole. Una de las grandes preocupaciones de esta escuela, la generalización de funciones racionales a expresiones simbólicas, fue el objetivo de la memoria de Cayley.

La traducción, por Babbage, del "Tratado elemental de cálculo diferencial e integral" de Lacroix en 1802, se considera como un ejemplo de los esfuerzos de un grupo de estudiantes de Cambridge para introducir en Inglaterra los métodos del álgebra analítica de Lagrange. Estos métodos, y en general los del cálculo diferencial e integral siguiendo la tradición de Leibniz, eran criticados en Inglaterra por el carácter mecánico de sus procedimientos y las paradojas sobre cantidades imposibles que implicaban. A estas críticas los miembros del grupo oponían una filosofía del álgebra caracterizada por la importancia dada a las operaciones sobre los objetos. El "Álgebra simbólica" de Peacock, de 1833, establecía una distinción entre significado y símbolos e implicaba una ruptura con el realismo matemático del XVIII, según el cuál, a todo objeto matemático le corresponde en la realidad un elemento esencial que lo legitima.

Usando como modelo la memoria de De Morgan de 1841, "On the foundations Álgebra", Cayley explora, en su teoría de matrices, propiedades de los procedimientos simbólicos y define las leyes operatorias que dan a la matriz madre de los menores de Sylvester, un comportamiento similar al de las cantidades algebraicas ordinarias.

"Las matrices (todas del mismo orden) se comportan como cantidades simples: pueden sumarse, multiplicarse o componerse unas con otras. La ley de adición es precisamente similar a la de la adición de cantidades algebraicas ordinarias, en lo que concierne a la multiplicación (o la composición) hay una especificidad porque las matrices no son en general permutables"[5].

La importancia que la memoria de Cayley, da a los problemas de cálculo de potencias y raíces de matrices, recoge una preocupación tradicional de la escuela inglesa desde los trabajos de Herschell de 1813, sobre la notación de los operadores diferenciales y la propiedad $f^n(f(x)) = f^{n+1}(x)$.

Cayley dedica parte de su obra a las matrices periódicas y, en general, a las ecuaciones con matrices. Uno de sus objetivos es mostrar que toda función racional de una matriz, en particular, $\sqrt{M}$, puede expresarse como función entera de grado menor al de la matriz dada. Para resolver este problema, define las operaciones matriciales necesarias para expresar $\sqrt{M}$ mediante funciones enteras.

Como vemos, en la memoria de Cayley de 1858, las matrices adoptan una nueva identidad. Ya no se caracterizan como madre de menores de un determinante sino por leyes de cálculo simbólico y el enunciado del teorema notable. Esta identidad está asociada a la herencia de la escuela algebraica inglesa por una parte y por otra, a las prácticas específicas de factorización de polinomios de matrices que responden a una concepción de las matrices como cantidades a la vez simples y múltiples.

1.6 EVOLUCIÓN DE LA NOCIÓN DE MATRIZ

Entre la publicación de la memoria de 1858 y 1890 el término matriz desaparece casi por completo de los escritos matemáticos. Durante este período el término menor, introducido por Sylvester, es adoptado por numerosos matemáticos como Hermite, Jordan, Darboux, e incluso Poincaré. El mismo Riemann utilizó en 1857 la idea de matriz de Sylvester para representar sistemas de ecuaciones diferenciales y extraer sus menores. Sin embargo, entre 1890 y 1900 reaparece, en numerosas citas, la memoria de 1858 como texto fundador de un álgebra asociativa de matrices, ¿qué evolución del concepto de matriz se ha producido en esta época?

Treinta años separan la definición de matriz como madre de menores y su reaparición en la obra de Sylvester con ocasión de una nota en "Comptes Rendus de l'Academie des Sciencies" fechada en febrero de 1882.

Se trataba de resolver un problema planteado el 9 de enero del mismo año sobre potencias y raíces de sustituciones lineales.[16] Sylvester parte de un problema clásico, determinar una función homográfica de periodicidad dada, es decir, determinar $\varphi(x) = \dfrac{ax+\alpha}{bx+\beta}$ tal que $\varphi^{\eta}(x) = x$ y la generaliza a las funciones homográficas de un número cualquiera de variables.

El método consiste en añadir el término $-\lambda$ a cada término de la diagonal, se obtiene así una función de λ, llama raíces lambdaicas a las raíces de esta función del determinante dado (det $(\varphi - \lambda I) = 0$). Para un valor cualquiera i, la i-ésima potencia de las raíces lambdaicas de un determinante de sustitución coinciden con las raíces lambdaicas de la i-ésima potencia del determinante.

En el mes de febrero aparece una segunda nota "sobre las raíces de matrices unitarias", donde se reformula el problema: Extraer la raíz $\mu - \acute{e}sima$, o más generalmente, encontrar la potencia i-ésima de una matriz dada.

La noción de matriz aparece en febrero de 1882 para corregir un error cometido por Sylvester ya que la fórmula dada para expresar funciones de sustitución como funciones numéricas de raíces lambdaicas es falsa cuándo las raíces no son todas distintas. La fórmula obtenida esta en contradicción con un resultado dado por Cayley en 1858 para resolver la ecuación $M^3 = I$.

Como vemos el problema es parecido a las dificultades planteadas en 1851 con las raíces múltiples de la ecuación (det $(\varphi - \lambda I) = 0$), resuelto con la introducción de las nociones de matrices y menores.

Las dificultades en la resolución de ecuaciones en matrices llevan a Sylvester a releer la memoria de Cayley. La idea de matriz de Sylvester evoluciona radicalmente entre 1882 y 1883. El nuevo método que elabora, en 1882, para extraer la raíz $\mu - \acute{e}sima$ de una sustitución dada, basado en la introducción de los invariantes, las raíces lambdaicas rebautizadas por raíces latentes, permite caracterizar funciones de matrices por funciones numéricas.

En adelante, Sylvester considera una matriz como una cantidad compleja en el sentido de la "cantidad simple" de Cayley, lo que le permite usar los símbolos λ_i a la vez como números (raíces latentes) y matrices (diagonales).En unas notas en "les Comptes Rendus" en 1884 dice:

"Quizás me sea permitido, antes de terminar, añadir una pequeña reflexión sobre la importancia de lo aquí tratado. Constituye, por así decirlo, un canal que, como el de Panamá, sirve para unir dos grandes océanos, el de la teoría de invariantes y el de las cantidades complejas o múltiples: en una de estas teorías, en efecto, se considera la acción de sustituciones sobre ellas mismas, y en la otra, su acción sobre las formas; además, se ve que la teoría analítica de cuaterniones es un caso particular de las matrices, dejando de ser una ciencia independiente, así, de tres ramas del análisis miradas hasta ahora como independientes, una es absorbida y las otras dos se juntan en una sola sustitución algebraica"[17]

1.7 NUEVAS BASES PARA LOS CUATERNIONES

Buscando incluir la teoría de los cuaterniones en las matrices, Sylvester se ve inducido a dar un nuevo papel a la representación matricial. El considera necesario representar por matrices "los cuaterniones fundamentales" y es la forma matricial la que permitirá caracterizar los elementos base de un sistema de "dimensiones generalizadas":

"Se sabe que se puede (y es ventajoso) cambiar la base de la teoría de cuaterniones considerando los tres símbolos de Hamilton (i,j,k) como matrices binarias. Si h, j son matrices binarias que satisfacen la ecuación $hj = -jh$, se demuestra fácilmente que, descartando los casos donde $hj = jh = 0$, A^2 y K^2 serán de la forma $\begin{matrix} c & 0 \\ 0 & c' \end{matrix}$ $\begin{matrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma' \end{matrix}$, es decir, cu, γ donde u es la unidad binaria $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

Se puede añadir, si se quiere, las dos condiciones $c^2 =$, $y^2 =$; entonces se obtienen las conocidas ecuaciones:

$h^2 = \overline{1}$, $j^2 = \overline{1}$, $k^2 = \overline{1}$
$hj = -jh = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$

una solución entre las mas simples de las ecuaciones $ij = -ji$ *,* $i^2 =$ *,* $j^2 =$*, es:*

$$i = \begin{vmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{vmatrix}; j = \begin{vmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{vmatrix}; k = ij = \begin{vmatrix} 0 & -\theta \\ -\theta & 0 \end{vmatrix} \textit{ donde } \theta = \sqrt{-1} \text{''} \ [19].$$

Entre 1884 y 1885 publica una serie de notas en Comptes Rendus para definir los noniones, cuyos elementos base se definen como matrices de orden 3:

“Se puede construir de una manera análoga un sistema de noniones considerando la ecuación $m = \rho n$ donde m y n son matrices ternarias y ρ una matriz cúbica primitiva de la unidad $[\ldots]$, tomando para el nonión fundamental u (unidad ternaria) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ y las ocho matrices m , m^2 , n , n^2 , m^2n , mn , m^2n^2 , mn^2 construidas con los valores más simples de m y n que satisfacen las ecuaciones $nm = \rho mm$, $m^3 = u$, $n3 = u$.

$$\text{Los valores de } m = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{vmatrix} \text{ y } n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \\ \rho^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{''}$$

La construcción de los noniones necesita la resolución de ecuaciones en matrices del tipo $nm = \rho mn$, ecuaciones que acarrearárán nuevos problemas. Sylvester estima que tales ecuaciones implican una relación funcional entre las matrices m y n, salvo en el caso de raíces latentes.

1.8 MATRICES DEROGATORIAS

Sylvester considera primero el caso en el que las soluciones de $xy = yx$ no estén relacionadas por una función racional, como en las raíces latentes múltiples. Posteriormente, Sylvester se ocupa del estudio de la ecuación algebraica cuyas raíces latentes están aisladas:

"Antes de considerar la ecuación xy=yx, es importante tener una idea clara de una cierta clase de matrices que yo llamo privilegiadas o derogatorias, en tanto que ellas derogan a

la ley general que toda matriz está sujeta a satisfacer una ecuación idéntica cuyo grado no puede ser menor que el orden de la matriz. Las matrices derogatorias son justamente las que satisfacen una ecuación de un orden inferior a su propio orden, se pueden llamar simplemente, doblemente, triplemente... derogatorias, según que el grado de la ecuación idéntica a las que ellas satisfacen digieran por una, dos, tres... unidades del grado mínimo ordinario".[19]

El problema se desplaza del caso de raíces múltiples al examen de las matrices que derogan la regla de satisfacer una ecuación de grado idéntico a su orden:

"Reservando los detalles del cálculo, he aquí el resultado general que he demostrado rigurosamente (ayudándome de la notación de los noniones) para las matrices de tercer grado que satisfacen la ecuación $xy = yx$ *.*

A menos que x no sea una matriz privilegiada o derogatoria, y será siempre una función racional y entera de x, y lo mismo, a menos que y no sea privilegiada, x será una función semejante de y . Es bueno notar que la matriz nula no puede ser derogatoria, salvo para el caso en el que existan igualdades entre sus raíces latentes; pero esas igualdades pueden perfectamente substituir sin que la matriz a la cual pertenecen sea derogatoria.

Nada impedirá, en el caso en el que una o las dos sean derogatorias, que se pueda sustituir $xy = yx$ *suponiendo que x e y sean funciones explicitas una de la otra. Todo lo que se afirma es que, en el caso supuesto, esta suposición deja de ser obligatoria, es un caso muy parecido a lo que ocurre en el caso que falta del teorema de MC-Laurin, cuando una variable no puede ser desarrollada en serie de potencias de otra variable"*[21]

Estas conclusiones de Sylvester ponen de manifiesto un cambio en la forma de entender la matriz, a partir de 1884, la matriz se vuelve para Sylvester, no sólo una cantidad, sino una cantidad que verifica una ecuación algebraica, la ecuación idéntica. A partir de esta fecha, caracterizar las matrices cuya ecuación idéntica es de grado menor que la ecuación característica será el objetivo de los trabajos de Sylvester.

El primer matemático del continente europeo en emplear la notación matricial de Cayley fue un geometra de Praga llamado Eduard Weyr. En principio, Weyr utiliza el método de Sylvester para expresar funciones racionales de matrices con el fin de estudiar la función exponencial cuyos argumentos son cuaterniones. En 1855 en una nota en Comptes Rendus, utiliza la matriz derogatoria de Sylvester para rectificar la caracterización dada por Riemann, de sustituciones lineales que eran incorrectas en el caso de raíces latentes múltiples. Weyr utiliza las nociones de nulidad y matriz derogatoria para caracterizar las sustituciones lineales de raíces múltiples e introduce para conseguirlo, el concepto de característica.[23]

En 1890, Weyr publica en el primer número de Monasberichte für Mathematik und Physik, un artículo titulado " Sobre las formas bilineales" en el que elabora una síntesis teórica que mezcla las nociones aparentemente distintas de formas bilineales y matrices.

La memoria consta de dos partes, en la primera se desarrolla una teoría del concepto abstracto de matriz, y la segunda se aplica a los problemas clásicos de la teoría de formas bilineales de Frobenius, como la caracterización de formas y las equivalencias de parejas de formas. Para ello la matriz, en palabras de Sylvester, abandona sus dimensiones espaciales y se deja representar como una suma lineal. Esta noción de matriz evoluciona y deja de tener existencia autónoma, para Weyr, para pasar a estar asociada a un sistema de valores y a la noción esencial de independencia lineal de sistemas.

El número máximo de sistemas linealmente independientes que se puede extraer de n valores dados es un invariante denominado rango r del sistema, en referencia a los trabajos de Kronecker de 1880 sobre la teoría aritmética de las magnitudes algebraicas. El rango es un invariante complementario de la nulidad de Sylvester y se corresponde con el orden del mayor menor no nulo del determinante, de manera que si v es la nulidad, entonces $r + v = n$.

La nulidad de una matriz es v sii existe al menos v sistemas independientes (xi) tales que $A(xi) = 0$ (en definitiva, el núcleo del operador). Esta asociación entre nulidad de matrices y rango, caracterizando los sistemas linealmente independientes, es usada constantemente por Weyr en su artículo de 1890.

1.9 CONCLUSIÓN

Hemos visto la evolución de matriz en el tiempo. En los años 1850, la matriz como madre de menores de Sylvester y la matriz de Cayley eran nociones distintas y suponían, por una parte, la práctica diferente de extracción de menores de un determinante y el cálculo simbólico por otra. Además, eran utilizadas en contextos diferentes, las matrices de Sylvester estaban relacionadas con el problema de la multiplicidad de las raíces de una ecuación obtenidas al calcular un determinante; las de Cayley apuntaban hacia la expresión polinomial de funciones . racionales de homografía, en la tradición de la escuela algebraica inglesa. Siguiendo los trabajos de Sylvester entre 1882 y 1885 vemos como la noción de matriz evoluciona en un mismo autor.

La síntesis teórica de Weyr en 1890 basada en el encuentro de la práctica matricial y la teoría de formas bilineales, pone de manifiesto como se enriquece una con otra. Weyr construye una nueva identidad entre matrices y formas bilineales, para lo cuál la noción de matriz de Cayley evoluciona, se enriquece y cambia de significado.

Bibliografía

[1] C, Boyer. *"Historia de la matemática"*. A.U. 1994.

[2] N, Bourbaki. *"Elementos de historia de las matemáticas"*. Alianza Universidad. 1976.

[3] J, Collete. *"Historia de las matemáticas"*. Siglo XXI. 1985.

[4] M, Castellet. *"El desenvolupament de les matemátiques al segle XIX"*. Institut d'Estudis Catalans. 1984.

[5] A, Cayley. "A Supplementary Memoir on the Theory of Matrices". Royal Society of London. 1866

[6] A, Cayley.*"Collected mathematical papers"*. Cambridge University Press. 1889.

[7] D, Luzardo. *"Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX"*. Divulgaciones Matemáticas . 2006.

[8] N, Higham. *"Functions of Matrices"*. The University of Manchester. 2005.

[9] M, Kline. *"El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días (II)"*. A.U. 1992.

[10] M, Kline. *"Matemáticas, la pérdida de la certidumbre"*. España Editores. 1985.

[11] J, Pastor. *"Historia de la Matemática"*. Gedisa. 1986.

[12] K, Ríbnikov. *"Historia de las Matemáticas"*. Editorial Mir. 1987.

[13] R, Taton.*"Historia general de la ciencia"*. Orbis. 1988.

[14] A, Ruiz. `http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/`

[15] J, Sylvester. *"Enumeration of the contents of lines and surfaces of the second order; on the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions"*. Philosophical Magazine. 1851

[16] J, Sylvester. *"Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires"*. University Press. 1882.

[17] J, Sylvester. *"Sur les quantités formant un groupe de nations analogues aux quaternions de Hamilton"*. 1884.

[18] J, Sylvester. *"On Quaternions, Nonions, Sedenions, etc."*. Philosophical Magazine. 1883.

[19] J, Sylvester. *"On the equation to the secular inequalities in the planetary theory"*. Philosophical Magazine. 1883.

[20] J, O'Connor. "Matrices and determinants". `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html`. 1996.

[21] J, Sylvester. *"The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester"*. HF Baker. 1904.

[22] E, Weyr. *"Sur la théorie des matrices"*. Sci. 1885.

[23] E, Weyr. *"Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces"*. Sci. 1885.

[24] E, Weyr.*"Zur Theorie der bilinearen Formen, Monatshefte für Mathematik und Physik"* Jahrgang. 1890.