



Artículo

Revista digital Matemática, Educación e Internet ([www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/](http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/)). Vol. 10, N° 1. 2009

# Resolución de relaciones de recurrencia lineales no homogéneas con coeficientes constantes a través de valores y vectores propios

Enrique Vílchez Q.

evilchez@una.ac.cr

Escuela de Informática

Universidad Nacional de Costa Rica

## Resumen

La resolución de relaciones de recurrencia es un tema de vital importancia para abordar distintos tipos de problemas en matemática e informática. Tradicionalmente los textos de Estructuras Discretas que proponen métodos de resolución de recursividades lineales, se basan en el planteamiento de ecuaciones polinómicas difícilmente programables. Este artículo expone un método fundamentado en el uso de valores y vectores propios, brinda la facilidad por un lado de arrojar soluciones suficientemente generales y por otro, de utilizar un enfoque que permite su programación de una manera relativamente sencilla.

**Palabras claves:** sucesiones, recurrencia, valores, vectores, propios, no homogéneas.

## Abstract

The resolution of recurrence relationships is a topic of vital importance to approach different types of problems in mathematics and computer science. Traditionally the texts of discrete structures that propose methods of resolution of linear recurrence relations, are based on the position of polynomial difficultly programmable equations. This article exposes a method based in the use of values and eigenvectors, offering general solutions and on the other

hand, using a focus that it allows its programming of a relatively simple way.

**Keywords:** successions, recurrence, eigenvalues, eigenvectors, not homogeneous.

## 1.1 Introducción

---

Las relaciones de recurrencia por su misma naturaleza, ponen de mani-fiesto la necesidad de determinar de forma explícita mediante algún método o técnica, el término  $n$ -ésimo de la sucesión que representan.

El presente artículo tiene por objetivo resolver este problema para un tipo especial de relación de recurrencia llamada *recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes de orden  $k$* . La propuesta es el complemento de una serie de dos algoritmos desarrollados con anterioridad, para resolver relaciones de recurrencia lineales pero estrictamente homogéneas.

Una relación de recurrencia lineal no homogénea de orden  $k$  con coeficientes constantes para una sucesión  $(S_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ , es aquella de la forma:

$$S_{n+k} = \beta_{k-1}S_{n+(k-1)} + \beta_{k-2}S_{n+(k-2)} + \cdots + \beta_1S_{n+1} + \beta_0S_n + f(n)$$

siendo los  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}$  números reales fijos, que junto con las  $k$  condiciones iniciales:

$$S_j = c_j, c_j \in \mathbb{R}, \forall j = 0, \dots, k-1$$

determinan de manera única los elementos de la sucesión.

## 1.2 Planteamiento del problema

---

Pretendemos generar un método mediante la aplicación de los valores y vectores propios, que nos permita calcular el término  $n$ -ésimo de una sucesión definida por una relación de

*Resolución de relaciones de recurrencia...* Enrique Vílchez Q.

Derechos Reservados © 2009 Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/)

recurrencia lineal no homogénea de orden  $k$ , con coeficientes constantes.

Dada una relación de recurrencia de este tipo:

$$S_{n+k} = \beta_{k-1}S_{n+(k-1)} + \beta_{k-2}S_{n+(k-2)} + \dots + \beta_1S_{n+1} + \beta_0S_n + f(n)$$

junto con las  $k$  condiciones iniciales:

$$S_j = c_j, 0 \leq j \leq k-1$$

siendo los  $\beta_j$  y los  $c_j$  números reales fijos  $\forall j, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 \leq j \leq k-1$ . El método que aquí desarrollamos, se fundamenta en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+k} = \beta_{k-1}S_{n+(k-1)} + \beta_{k-2}S_{n+(k-2)} + \dots + \beta_1S_{n+1} + \beta_0S_n + f(n) \\ S_{n+(k-1)} = S_{n+(k-1)} \\ S_{n+(k-2)} = S_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

Este sistema escrito en forma matricial, puede expresarse como:

$$X_{n+1} = \mathbf{A}X_n + B \tag{1.1}$$

siendo,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \dots & \beta_1 & \beta_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ una matriz } k \times k \text{ con entradas reales y}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} S_{n+(k-1)} \\ S_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vectores en } \mathbb{R}^k.$$

En 1.1 se observa aplicando un método iterativo progresivo que:

$$\begin{cases} X_1 = \mathbf{A}X_0 + B \\ X_2 = \mathbf{A}X_1 + B = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}X_0 + B) + B = \mathbf{A}^2X_0 + \mathbf{A} \cdot B + B \\ X_3 = \mathbf{A}X_2 + B = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^2X_0 + \mathbf{A} \cdot B + B) + B = \mathbf{A}^3X_0 + \mathbf{A}^2 \cdot B + \mathbf{A} \cdot B + B \\ \vdots \\ X_n = \mathbf{A}^nX_0 + \mathbf{A}^{n-1} \cdot B + \mathbf{A}^{n-2} \cdot B + \dots + \mathbf{A} \cdot B + B \end{cases}$$

En consecuencia, se intuye la siguiente generalización:

$$X_n = \mathbf{A}^nX_0 + \mathbf{A}^{n-1} \cdot B + \mathbf{A}^{n-2} \cdot B + \dots + \mathbf{A} \cdot B + B, \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

El resultado 1.2 se puede demostrar con mucha sencillez utilizando el primer principio de inducción matemática. Omitiremos esta demostración.

Al observar 1.2 notamos que nuestro problema queda completamente resuelto si logramos calcular  $\mathbf{A}^h$  con  $1 \leq h \leq n, h \in \mathbb{N}$ , pues al desarrollar  $\mathbf{A}^nX_0 + \mathbf{A}^{n-1} \cdot B + \mathbf{A}^{n-2} \cdot B + \dots + \mathbf{A} \cdot B + B$  nos interesa obtener la última fila de esta matriz que nos devuelve de manera explícita a  $S_n$ .

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz diagonalizable, sabemos que existen una matriz invertible  $P$  y una matriz diagonal  $D$  formada por los valores propios de  $\mathbf{A}$ , tales que:  $\mathbf{A} = PDP^{-1}$ . Esto nos permite hallar  $\mathbf{A}^h \forall h, h \in \mathbb{N}$  pues por inducción matemática se puede comprobar que:

$$\mathbf{A}^h = PD^hP^{-1}$$

En el artículo [5], se demostró que la matriz  $\mathbf{A}$  es diagonalizable si y solo si todos sus valores propios son simples, además, se probó que:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_k^1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

siendo  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ . Adicionalmente en la citada publicación se demostró que el polinomio característico de  $A$  viene dado por:

$$P(\lambda) = \lambda^k - \beta_{k-1}\lambda^{k-1} - \beta_{k-2}\lambda^{k-2} - \dots - \beta_1\lambda - \beta_0 \tag{1.4}$$

Por otra parte, si la matriz  $\mathbf{A}$  no es diagonalizable (tiene valores propios de multiplicidad algebraica mayor estricta a uno), ésta se puede reducir a través de una matriz de Jordan. Por resultados conocidos de la teoría de matrices con certeza sabemos que para cualquier matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  es posible encontrar su forma canónica de Jordan, sin embargo, ¿cuál es el procedimiento que se aplica para ello?

En términos generales dada una matriz  $\mathbf{A} \in M_k(\mathbb{R})$  con valores propios distintos dos a dos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  de multiplicidad algebraica  $r_1, r_2, \dots, r_m$  respectivamente, si suponemos que los subespacios propios  $E_{\lambda_j} \forall j, j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m$  son de dimensión uno, y siendo  $X_1^j$  un vector propio asociado a  $\lambda_j \forall j, j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m$ , el método que utilizaremos se basa en formar y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda_j I_k) X_2^j = X_1^j \\ (\mathbf{A} - \lambda_j I_k) X_3^j = X_2^j \\ \vdots \\ (\mathbf{A} - \lambda_j I_k) X_{r_j}^j = X_{r_j-1}^j \end{cases} \quad \text{con } r_j \neq 1 \quad (1.5)$$

A cada uno de los vectores  $X_2^j, X_3^j, \dots, X_{r_j}^j$  se les llama vectores propios generalizados o generalísimos de  $\mathbf{A}$ , asociados al valor propio  $\lambda_j$ .

Hallando estos vectores propios generalísimos  $\forall j, j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m$ , es posible obtener la matriz de transición  $P^{-1}$ , la cual viene dada por:

$$( X_1^1 \ X_2^1 \ \dots \ X_{r_1}^1 \ X_1^2 \ X_2^2 \ \dots \ X_{r_2}^2 \ \dots \ X_1^m \ X_2^m \ \dots \ X_{r_m}^m )$$

Observe que por cada vector propio  $X_1^j$  se forman  $r_j$  columnas en  $P^{-1}$ , si  $r_j = 1$  entonces el único vector que se requiere para completar las  $r_j$  columnas correspondientes en esta matriz, es el vector propio  $X_1^j$  y en este caso por tanto, no se debe hallar ningún vector propio generalizado. Además, si algún subespacio propio  $E_{\lambda_j}$  es de dimensión  $t_j \in \mathbb{N}, t_j \neq 1$  existen  $t_j$  vectores propios asociados a  $\lambda_j$  linealmente independientes y en consecuencia se requerirán  $r_j - t_j$  vectores propios generalizados, para formar las  $r_j$  columnas correspondientes en  $P^{-1}$ .

Centremos ahora nuestra atención, en cómo hallar la potencia  $n$ -ésima de una matriz de Jordan. Dada una matriz de Jordan de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} B_1(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_3(\lambda_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_m(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

es notable su estructura diagonal, en consecuencia se puede inferir que:

$$J^n = \begin{pmatrix} (B_1(\lambda_1))^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (B_2(\lambda_2))^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (B_3(\lambda_3))^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (B_m(\lambda_m))^n \end{pmatrix} \quad \forall n, n \in \mathbb{N} \quad (1.6)$$

es decir, la potencia  $n$ -ésima de una matriz de Jordan se puede calcular al obtener las potencias  $n$ -ésimas de los bloques que la constituyen, sin embargo, ¿cómo se calculan dichas potencias?, para dar respuesta a esta pregunta se enuncia el siguiente teorema.

**Teorema 1.1 (Potencia  $n$ -ésima de un bloque de Jordan)** Sea  $B = (b_{ij}) \in M_r(\mathbb{R})$  un bloque de Jordan de la forma:

$$b_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces  $B^n = (c_{ij}) \in M_r(\mathbb{R}) \quad \forall n, n \in \mathbb{N}$  es tal que:

$$c_{ij} = \begin{cases} \lambda^n & \text{si } i = j \\ \frac{n!}{(n-l)!l!} \lambda^{n-l} & \text{si } j = i + l \text{ con } l = 1, 2, \dots, r - 1 \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

o bien:

$$B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \frac{n!}{(n-1)!1!} \lambda^{n-1} & \frac{n!}{(n-2)!2!} \lambda^{n-2} & \dots & \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!} \lambda^{n-r+1} \\ 0 & \lambda^n & \frac{n!}{(n-1)!1!} \lambda^{n-1} & \dots & \frac{n!}{(n-r+2)!(r-2)!} \lambda^{n-r+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n!}{(n-1)!1!} \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{pmatrix}$$

*prueba.* Procedamos por el primer principio de inducción.

Para  $n = 1$ ,  $B = (\lambda) \Rightarrow B^n = (\lambda^n)$  con lo cual queda probado el teorema en este caso.

Supongamos por hipótesis de inducción que para algún  $k, k \in \mathbb{N}$ ,  $B^k = (c'_{ij})$  es tal que:

$$c'_{ij} = \begin{cases} \lambda^k & \text{si } i = j \\ \frac{k!}{(k-l)!l!} \lambda^{k-l} & \text{si } j = i + l \text{ con } l = 1, 2, \dots, r-1 \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

Probemos el teorema para  $k + 1$ . Sea  $B^{k+1} = (c_{ij}) \in M_r(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= B^k \cdot B && \text{por definición de potencia de matrices} \\ \Rightarrow c_{ij} &= \sum_{h=1}^r c'_{ih} b_{hj} && \text{por definición del producto de matrices} \end{aligned}$$

Consideremos los siguientes casos:

a)  $i = j$

$$\begin{aligned} c_{ii} &= \sum_{h=1}^r c'_{ih} b_{hi} \\ &= c'_{i1} b_{1i} + c'_{i2} b_{2i} + \dots + c'_{ii-1} b_{i-1i} + c'_{ii} b_{ii} + c'_{ii+1} b_{i+1i} + \dots + c'_{ir} b_{ri} \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + \lambda \cdot \lambda^k + 0 + \dots + 0 \\ &= \lambda^{k+1} && \text{por definición de } B \text{ y la hipótesis inductiva} \end{aligned}$$

b)  $j = i + l$  con  $l = 1, 2, \dots, r-1$

$$\begin{aligned} c_{ii+l} &= \sum_{h=1}^r c'_{ih} b_{h,i+l} \\ &= c'_{i1} b_{1,i+l} + c'_{i2} b_{2,i+l} + \dots + c'_{ii+l-1} b_{i+l-1,i+l} + c'_{ii+l} b_{i+l,i+l} + c'_{ii+l+1} b_{i+l+1,i+l} + \dots + \\ & \quad c'_{ir} b_{ri+l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0 + 0 + \dots + \frac{k!}{(k+1-l)!(l-1)!} \lambda^{k+1-l} \cdot 1 + \lambda \cdot \frac{k!}{(k-l)!l!} \lambda^{k-l} + 0 + \dots + 0 \text{ por} \\
 &\text{definición de } B \text{ y la hipótesis inductiva} \\
 &= \frac{k!}{(k+1-l)!(l-1)!} \lambda^{k+1-l} \left[ 1 + \frac{k+1-l}{l} \right] = \frac{k!}{(k+1-l)!(l-1)!} \lambda^{k+1-l} \left[ \frac{l+k+1-l}{l} \right] \\
 &= \frac{k!}{(k+1-l)!(l-1)!} \lambda^{k+1-l} \left[ \frac{k+1}{l} \right] = \frac{(k+1)!}{(k+1-l)!l!} \lambda^{k+1-l}
 \end{aligned}$$

c)  $i > j$

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= \sum_{h=1}^r c'_{ih} b_{hj} \\
 &= c'_{i1} b_{1j} + c'_{i2} b_{2j} + \dots + c'_{i,j-1} b_{j-1,j} + c'_{ij} b_{jj} + c'_{i,j+1} b_{j+1,j} + \dots + c'_{ir} b_{rj} \\
 &= 0 + 0 + \dots + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \lambda + 0 + \dots + 0 \\
 &= 0 \quad \text{por definición de } B \text{ y la hipótesis inductiva}
 \end{aligned}$$

$$\therefore c_{ij} = \begin{cases} \lambda^{k+1} & \text{si } i = j \\ \frac{(k+1)!}{(k+1-l)!l!} \lambda^{k+1-l} & \text{si } j = i+l \text{ con } l = 1, 2, \dots, r-1 \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

Estos resultados nos permiten crear un modelo general, para resolver relaciones de recurrencia no homogéneas lineales de cualquier orden cuando los valores propios tienen multiplicidad algebraica mayor estricta que uno. Supongamos que la ecuación característica tiene  $m$  soluciones distintas dos a dos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  con multiplicidades algebraicas  $r_1, r_2, \dots, r_m$  respectivamente. Bajo estas condiciones sabemos que:

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{J}^n \cdot \mathbf{P} \quad \forall n, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

con:

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} (B_1(\lambda_1))^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (B_2(\lambda_2))^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (B_3(\lambda_3))^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (B_m(\lambda_m))^n \end{pmatrix} \text{ por 1.6}$$

donde cada  $B_j(\lambda_j)$  es un bloque de Jordan de orden  $r_j$  y  $P$  es la matriz de transformación de semejanza de la forma canónica de Jordan de  $A$ . Además, por el teorema 1 tenemos



que:

$$B_j^n(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j^n & \frac{n!}{(n-1)!1!} \lambda_j^{n-1} & \frac{n!}{(n-2)!2!} \lambda_j^{n-2} & \cdots & \frac{n!}{(n-r_j+1)!(r_j-1)!} \lambda_j^{n-r_j+1} \\ 0 & \lambda_j^n & \frac{n!}{(n-1)!1!} \lambda_j^{n-1} & \cdots & \frac{n!}{(n-r_j+2)!(r_j-2)!} \lambda_j^{n-r_j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n!}{(n-1)!1!} \lambda_j^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j^n \end{pmatrix}$$

Por otra parte, para determinar las columnas de la matriz  $P^{-1}$ , hemos observado que por cada valor propio  $\lambda_j$  de multiplicidad algebraica  $r_j$  se forman  $r_j$  columnas de  $P^{-1}$ , la primera de ellas corresponde al vector propio  $(\lambda_j^{k-1}, \lambda_j^{k-2}, \dots, \lambda_j, 1)$  asociado a  $\lambda_j$  y las otras  $r_j - 1$  columnas están constituidas por  $r_j - 1$  vectores propios generalísimos asociados a  $\lambda_j$ .

El número máximo de vectores propios generalísimos que es necesario encontrar en este método, es igual a  $k - 1$  y lo anterior ocurre cuando de la ecuación característica se obtiene una única solución. Si a lo sumo se requieren  $k - 1$  vectores propios generalísimos, a continuación se explicará cómo encontrar estos vectores.

Para el caso dos por dos el vector propio generalísimo requerido es  $(1, 0)$ . Los vectores propios generalísimos asociados a  $\lambda_j$  para el caso tres por tres son  $(2\lambda_j, 1, 0)$  y  $(1, 0, 0)$ . Para el caso cuatro por cuatro los vectores propios generalísimos asociados a  $\lambda_j$  son  $(3\lambda_j^2, 2\lambda_j, 1, 0)$ ,  $(3\lambda_j, 1, 0, 0)$  y  $(1, 0, 0, 0)$ , para el caso cinco por cinco son  $(4\lambda_j^3, 3\lambda_j^2, 2\lambda_j, 1, 0)$ ,  $(6\lambda_j^2, 3\lambda_j, 1, 0, 0)$ ,  $(4\lambda_j, 1, 0, 0, 0)$  y  $(1, 0, 0, 0, 0)$  y para el caso seis por seis corresponden a  $(5\lambda_j^4, 4\lambda_j^3, 3\lambda_j^2, 2\lambda_j, 1, 0)$ ,  $(10\lambda_j^3, 6\lambda_j^2, 3\lambda_j, 1, 0, 0)$ ,  $(10\lambda_j^2, 4\lambda_j, 1, 0, 0, 0)$ ,  $(5\lambda_j, 1, 0, 0, 0, 0)$  y  $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

Si formamos por cada grupo de vectores añadiendo el vector propio original una matriz de coeficientes por fila para cada potencia de  $\lambda_j$ , se obtiene lo siguiente:

$$H_2^j = \begin{pmatrix} \lambda_j^1 & \lambda_j^0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_3^j = \begin{pmatrix} \lambda_j^2 & \lambda_j^1 & \lambda_j^0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_4^j = \begin{pmatrix} \lambda_j^3 & \lambda_j^2 & \lambda_j^1 & \lambda_j^0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_5^j = \begin{pmatrix} \lambda_j^4 & \lambda_j^3 & \lambda_j^2 & \lambda_j^1 & \lambda_j^0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_6^j = \begin{pmatrix} \lambda_j^5 & \lambda_j^4 & \lambda_j^3 & \lambda_j^2 & \lambda_j^1 & \lambda_j^0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz  $H_i^j \in M_i(\mathbb{R}) \forall i, i \in \mathbb{N}, i \geq 2$ , representa la matriz de coeficientes del vector propio original y los vectores propios generalísimos asociados a  $\lambda_j$ , para el caso  $i$  por  $i$ .

Lo interesante de cada una de estas matrices triangulares superiores, radica en sus  $i$  diagonales no nulas. Observe por ejemplo las diagonales no nulas de la matriz  $H_6^j$ , el triángulo

numérico que estas forman viene dado por:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

que corresponde al triángulo de Pascal con  $n = 5$ . Lo anterior significa que las diagonales de la matriz  $H_6^j$  están constituidas por coeficientes binomiales.

En términos más generales, es posible concluir por inducción finita que:

$$H_i^j = \begin{pmatrix} \lambda_j^{k-1} & \lambda_j^{k-2} & \lambda_j^{k-3} & \dots & \lambda_j^1 & \lambda_j^0 \\ \binom{k-1}{0} & \binom{k-2}{0} & \binom{k-3}{0} & \dots & \binom{1}{0} & \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{k-1}{1} & \binom{k-2}{1} & \dots & \binom{2}{1} & \binom{1}{1} \\ 0 & 0 & \binom{k-1}{2} & \dots & \binom{3}{2} & \binom{2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{k-1}{k-2} & \binom{k-2}{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{k-1}{k-1} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

La matriz  $H_i^j$  del vector propio original y los vectores propios generalísimos asociados a  $\lambda_j$ , nos permite completar las  $r_j$  columnas de  $P^{-1}$  por cada  $\lambda_j$  con  $j = 1, 2, \dots, m$ .

A partir de los resultados obtenidos es posible expresar la potencia  $h$ -ésima de la matriz  $\mathbf{A}$  en 1.2 como:

$$\mathbf{A}^h = PT^hP^{-1} \quad (1.8)$$

siendo  $T$  una matriz diagonal o una matriz de Jordan según sea el caso.

Si en 1.2 sustituimos la matriz  $A$  utilizando 1.8 entonces se obtiene:

$$\begin{aligned}
 X_n &= PT^nP^{-1}X_0 + PT^{n-1}P^{-1} \cdot B + PT^{n-2}P^{-1} \cdot B + \dots + PT^0P^{-1} \cdot B \\
 \Rightarrow X_n &= PT^nP^{-1}X_0 + P \cdot (T^{n-1} + T^{n-2} + \dots + T^0) \cdot P^{-1} \cdot B \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

El resultado 1.9 proporciona un método general para resolver relaciones de recurrencia lineales no homogéneas con coeficientes constantes de cualquier orden. En la sección siguiente se exponen demostraciones formales que resuelven recursividades de orden dos y tres, sin embargo, el algoritmo explicado a través de estos casos particulares, permite deducir un método de resolución en recurrencias de orden mayor.

## 1.3 Relaciones de recurrencia lineales no homogéneas de orden dos

---

### 1.3.1 Método de resolución

Dada la relación de recurrencia:

$$S_{n+2} = \beta_1 S_{n+1} + \beta_0 S_n + f(n)$$

sujeta a las condiciones iniciales  $S_0 = c_0$ ,  $S_1 = c_1$ . Tenemos según 1.4 que el polinomio característico definido por la matriz  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  corresponde a:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \beta_1 \lambda - \beta_0$$

Este polinomio puede tener dos raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ; distintas o iguales.

Si las raíces son distintas, la matriz  $T$  en 1.9 es una matriz diagonal de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Además, por 1.3:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, en 1.9:

$$\begin{aligned}
 X_n &= P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} + \dots \\
 &\quad P \cdot (T^{n-1} + T^{n-2} + \dots + T^0) \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow X_n &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_1^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - \lambda_2 \lambda_2^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \\ \lambda_1^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - \lambda_2^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \end{pmatrix} + \dots \\
 &\quad P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2} + \dots + 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2} + \dots + 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow X_n &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_1^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - \lambda_2 \lambda_2^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \\ \lambda_1^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - \lambda_2^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \end{pmatrix} + \dots \\
 &\quad P \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1 - 1} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_2 - 1} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow X_n &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_1^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - \lambda_2 \lambda_2^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \\ \lambda_1^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - \lambda_2^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \end{pmatrix} + \dots \\
 &\quad \begin{pmatrix} f(n) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} - f(n) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1} \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{f(n)}{\lambda_1 - 1} \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{f(n)}{\lambda_2 - 1} \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow X_n &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_1^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - \lambda_2 \lambda_2^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + \dots \\ \lambda_1^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - \lambda_2^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + \dots \\ f(n) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} - f(n) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1} \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{f(n)}{\lambda_1 - 1} \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{f(n)}{\lambda_2 - 1} \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Se supone en este desarrollo que ningún valor propio es igual a uno, si así fuera entonces  $\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots + 1 = n$ . Finalmente, bajo esta restricción:

$$S_n = \lambda_1^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - \lambda_2^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + \dots$$

$$\frac{f(n)}{\lambda_1 - 1} \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{f(n)}{\lambda_2 - 1} \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$
(1.10)

en caso contrario:

$$X_n = \left( \begin{array}{l} \lambda_1 \lambda_1^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - \lambda_2 \lambda_2^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + \dots \\ \lambda_1^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - \lambda_2^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \\ f(n) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - f(n) \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{array} \right)$$

es decir:

$$S_n = \lambda_1^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - \lambda_2^n \left( \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)$$
(1.11)

Si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , entonces según 1.6:

$$T = \left( \begin{array}{cc} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{array} \right)$$

Además, por 1.7:

$$P = \left( \begin{array}{cc} \lambda_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow P^{-1} = \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{array} \right)$$

En 1.9:

$$\begin{aligned}
 X_n &= P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} \\ 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} + \dots \\
 &P \cdot (T^{n-1} + T^{n-2} + \dots + T^0) \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow X_n &= \begin{pmatrix} \lambda_1 (\lambda_1^n c_0 + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0)) + \lambda_1^n (c_1 - \lambda_1 c_0) \\ \lambda_1^n c_0 + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0) \end{pmatrix} + \dots \\
 &P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2} + \dots + 1 & (n-1)\lambda_1^{n-2} + (n-2)\lambda_1^{n-3} + \dots + 1 \\ 0 & \lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2} + \dots + 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow X_n &= \begin{pmatrix} \lambda_1 (\lambda_1^n c_0 + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0)) + \lambda_1^n (c_1 - \lambda_1 c_0) \\ \lambda_1^n c_0 + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0) \end{pmatrix} + \dots \\
 &P \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1 - 1} & \frac{1}{(\lambda_1 - 1)^2} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1 - 1)^2} (n + \lambda_1 - n\lambda_1) \\ 0 & \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1 - 1} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Este resultado se justifica pues:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (j \cdot x^{j-1}) = \begin{cases} \frac{1}{2}n(n-1) & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} \frac{x^n}{(x-1)^2} (n+x-nx) & \text{si } x \neq 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

lo cual es comprobable por inducción matemática. Luego:

$$\begin{aligned}
 X_n &= \left( \begin{array}{c} \lambda_1 (\lambda_1^n c_0 + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0)) + \lambda_1^n (c_1 - \lambda_1 c_0) \\ \lambda_1^n c_0 + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0) \end{array} \right) + \dots \\
 &\left( \begin{array}{c} \frac{f(n)}{\lambda_1 - 1} (\lambda_1^n - 1) + f(n) \lambda_1 \left( \frac{1}{(\lambda_1 - 1)^2} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1 - 1)^2} (n + \lambda_1 - n\lambda_1) \right) \\ f(n) \left( \frac{1}{(\lambda_1 - 1)^2} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1 - 1)^2} (n + \lambda_1 - n\lambda_1) \right) \end{array} \right) \\
 \Rightarrow X_n &= \left( \begin{array}{c} \lambda_1 (\lambda_1^n c_0 + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0)) + \lambda_1^n (c_1 - \lambda_1 c_0) + \dots \\ \lambda_1^n c_0 + f(n) \left( \frac{1}{(\lambda_1 - 1)^2} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1 - 1)^2} (n + \lambda_1 - n\lambda_1) \right) + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0) \\ \frac{f(n)}{\lambda_1 - 1} (\lambda_1^n - 1) + f(n) \lambda_1 \left( \frac{1}{(\lambda_1 - 1)^2} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1 - 1)^2} (n + \lambda_1 - n\lambda_1) \right) \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$S_n = \lambda_1^n c_0 + f(n) \left( \frac{1}{(\lambda_1 - 1)^2} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1 - 1)^2} (n + \lambda_1 - n\lambda_1) \right) + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0) \quad (1.13)$$

si  $\lambda_1 \neq 1$ . En caso contrario,

$$\sum_{j=1}^n (j \cdot x^{j-1}) = \frac{1}{2}n(n-1) \quad \text{y} \quad \lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2} + \dots + 1 = n,$$

es decir:

$$X_n = \left( \begin{array}{c} \lambda_1 (\lambda_1^n c_0 + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0)) + \lambda_1^n (c_1 - \lambda_1 c_0) + f(n)n + \frac{1}{2}f(n)n\lambda_1(n-1) \\ \lambda_1^n c_0 + \frac{1}{2}f(n)n(n-1) + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0) \end{array} \right)$$

de donde:

$$S_n = \lambda_1^n c_0 + \frac{1}{2}f(n)n(n-1) + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0) \quad (1.14)$$



### 1.3.2 Ejemplos

**EJEMPLO 1.1** Definamos la sucesión recursiva  $S_{n+2} = -S_{n+1} + 6S_n + 8n - 10$  sujeta a las condiciones iniciales  $S_0 = 2, S_1 = -1$ . Formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+2} = -S_{n+1} + 6S_n + 8n - 10 \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y las condiciones iniciales están dadas por  $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . El polinomio característico de la matriz  $\mathbf{A}$  es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6$$

cuyas raíces son  $\lambda_1 = 2$  y  $\lambda_2 = -3$ . Por 1.10 tenemos que  $S_n$  corresponde a:

$$S_n = \frac{8}{5}2^n n - 2n + \frac{2}{5}(-3)^n n - 2^n + \frac{1}{2}(-3)^n + \frac{5}{2} \quad \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

**EJEMPLO 1.2** Definamos la sucesión recursiva  $S_{n+2} = 2S_{n+1} - S_n + 3^n$  sujeta a las condiciones iniciales  $S_0 = 1, S_1 = 3$ . Formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+2} = 2S_{n+1} - S_n \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y las condiciones iniciales están dadas por  $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . El polinomio característico de la matriz  $\mathbf{A}$  es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

cuya única raíz es  $\lambda_1 = 1$ . Por 1.14 tenemos que  $S_n$  corresponde a:

$$S_n = 2n + \frac{1}{2}3^n n(n-1) + 1 \quad \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

## 1.4 Relaciones de recurrencia lineales no homogéneas de orden tres

---

### 1.4.1 Método de resolución

Dada la sucesión:

$$S_{n+3} = \beta_2 S_{n+2} + \beta_1 S_{n+1} + \beta_0 S_n + f(n)$$

sujeta a las condiciones iniciales  $S_0 = c_0$ ,  $S_1 = c_1$  y  $S_2 = c_2$  el polinomio característico definido para la matriz  $A$  según 1.4 está dado por:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \beta_2 \lambda^2 - \beta_1 \lambda - \beta_0$$

Las raíces  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de este polinomio derivan tres casos posibles: que sean distintas dos a dos, que dos de ellas sean iguales, o bien, que las tres raíces sean iguales. A continuación, resolveremos cada caso por separado.

Si las raíces son distintas dos a dos, la matriz  $T$  en 1.9 es la matriz diagonal:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Por 1.3:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3 - 1} & \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3 - 1} & -\lambda_2 \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3 - 1} \\ -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_2^2 + \lambda_2 \lambda_3} & \frac{\lambda_3 + 1}{\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_2^2 + \lambda_2 \lambda_3} & -\frac{\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_2^2 + \lambda_2 \lambda_3} \\ \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_3^2 - \lambda_2 \lambda_3} & -\frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_3^2 - \lambda_2 \lambda_3} & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_3^2 - \lambda_2 \lambda_3} \end{pmatrix}$$

Luego, en 1.9:

$$\begin{aligned}
 X_n &= P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} + \dots \\
 &P \cdot (T^{n-1} + T^{n-2} + \dots + T^0) \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow X_n &= \left( \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \lambda_1^n \left( \frac{c_2}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_2 \lambda_3 \frac{c_0}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} \right) + \dots \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_2^n \left( \frac{c_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_1 \lambda_3 \frac{c_0}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \right) + \dots \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_3^n \left( \frac{c_2}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \right) \end{array} \right) + \dots \\
 &P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2} + \dots + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2} + \dots + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{n-1} + \lambda_3^{n-2} + \dots + 1 \end{pmatrix} \cdot \\
 &P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X_n = \left( \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \lambda_1^n \left( \frac{c_2}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_2 \lambda_3 \frac{c_0}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} \right) + \dots \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_2^n \left( \frac{c_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_1 \lambda_3 \frac{c_0}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \right) + \dots \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_3^n \left( \frac{c_2}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \right) \end{array} \right) + \dots$$

$$P \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1 - 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_2 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3^n - 1}{\lambda_3 - 1} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n = \left( \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \lambda_1^n \left( \frac{c_2}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_2 \lambda_3 \frac{c_0}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} \right) + \dots \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_2^n \left( \frac{c_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_1 \lambda_3 \frac{c_0}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \right) + \dots \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_3^n \left( \frac{c_2}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \right) \end{array} \right) + \dots$$

$$\left( \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \frac{f(n)}{\lambda_1 - 1} \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} + \frac{f(n)}{\lambda_2 - 1} \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} + \frac{f(n)}{\lambda_3 - 1} \frac{\lambda_3^n - 1}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \end{array} \right)$$

De acuerdo con lo anterior:

$$\begin{aligned}
 S_n = & \lambda_1^n \left( \frac{c_2}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_2 \lambda_3 \frac{c_0}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} \right) + \dots \\
 & \lambda_2^n \left( \frac{c_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_1 \lambda_3 \frac{c_0}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \right) + \dots \\
 & \lambda_3^n \left( \frac{c_2}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \right) + \dots \\
 & \frac{f(n)}{\lambda_1 - 1} \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} + \frac{f(n)}{\lambda_2 - 1} \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} + \\
 & \frac{f(n)}{\lambda_3 - 1} \frac{\lambda_3^n - 1}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \tag{1.15}
 \end{aligned}$$

la cual es válida siempre y cuando ninguno de los valores propios sea igual a uno. Si para algún  $i, 1 \leq i \leq 3, \lambda_i = 1$ , entonces  $\lambda_i^{n-1} + \lambda_i^{n-2} + \dots + 1 = n$  y se recurre al mismo procedimiento aplicado para obtener la expresión 1.15, obteniéndose:

$$\begin{aligned}
 S_n = & \lambda_1^n \left( \frac{c_2}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_2 \lambda_3 \frac{c_0}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} \right) + \dots \\
 & \lambda_2^n \left( \frac{c_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_1 \lambda_3 \frac{c_0}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \right) + \dots \\
 & \lambda_3^n \left( \frac{c_2}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \right) + \dots \\
 & \frac{f(n)n}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} + \frac{f(n)}{\lambda_2 - 1} \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \\
 & + \frac{f(n)}{\lambda_3 - 1} \frac{\lambda_3^n - 1}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_3} \tag{1.16}
 \end{aligned}$$

En un segundo caso, si  $\lambda_1 = \lambda_3$  y distintos a  $\lambda_2$  entonces por 1.6 la matriz  $T$  en 1.9 corresponde a:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Además, según 1.7:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{2\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{\lambda_2(\lambda_2-2\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \\ \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & -\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \\ \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{-2\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, en 1.9:

$$X_n = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$P \cdot (T^{n-1} + T^{n-2} + \dots + T^0) \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_n = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$P \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1-1} & \frac{1}{(\lambda_1-1)^2} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2} (n + \lambda_1 - n\lambda_1) & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_2^n-1}{\lambda_2-1} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver este producto y tomar la última fila de la matriz resultante, se concluye que:

$$\begin{aligned}
 S_n = & \lambda_2^n \left( \frac{c_2}{\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2} + \lambda_1^2 \frac{c_0}{\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2} - 2\lambda_1 \frac{c_1}{\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2} \right) + \dots \\
 & \lambda_1^n \left( c_0 \frac{\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2} - \frac{c_2}{\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2} + 2\lambda_1 \frac{c_1}{\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2} \right) + \dots \\
 & n\lambda_1^{n-1} \left( \frac{c_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - c_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + \lambda_1\lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + \\
 & \lambda_2^n \left( \frac{c_2}{\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3} + \lambda_1\lambda_2 \frac{c_0}{\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3} \right) + \dots \\
 & n\lambda_1^{n-1} \left( \frac{c_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3} - c_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3} + \lambda_1\lambda_3 \frac{c_0}{\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3} \right) + \dots \\
 & f(n) \frac{\frac{1}{(\lambda_1-1)^2} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2} (n + \lambda_1 - n\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{f(n)}{\lambda_1 - 1} \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2} + \frac{f(n)}{\lambda_2 - 1} \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2} \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

Esta fórmula se puede utilizar cuando todos los valores propios son distintos de uno. En caso contrario, si  $\lambda_1 = 1$ ,  $\sum_{j=1}^n (j \cdot x^{j-1}) = \frac{1}{2}n(n-1)$  y  $\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2} + \dots + 1 = n$  posteriormente el procedimiento de resolución es equivalente a lo expuesto con anterioridad. Podría ocurrir también que  $\lambda_2 = 1$ . En dicho caso simplemente  $\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2} + \dots + 1$  se sustituye por  $n$ .

Por último, si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , distintos de uno, tendríamos por 1.6 que la matriz  $T$  en 1.9 es:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, de acuerdo con 1.7:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 \\ 1 & -2\lambda_1 & \lambda_1^2 \end{pmatrix}$$

Entonces en 1.9:

$$X_n = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda_1^{n-2} \\ 0 & \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$P \cdot (T^{n-1} + T^{n-2} + \dots + T^0) \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para continuar con este desarrollo, es necesario utilizar:

$$\sum_{j=2}^{n-1} \left( \frac{j(j-1)}{2} \cdot x^{j-2} \right) = \begin{cases} \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) & \text{si } x = 1 \\ -\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{2x^2} \frac{x^n}{(x-1)^3} \dots & \text{si } x \neq 1 \\ (-n - 3nx^2 - 2n^2x + n^2x^2 + 4nx + n^2 + 2x^2) & \end{cases} \quad (1.18)$$

lo cual se puede demostrar sin mayor dificultad por inducción matemática. Luego:



$$\begin{aligned}
 X_n &= P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda_1^{n-2} \\ 0 & \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} + \dots \\
 &P \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1-1} & \frac{1}{(\lambda_1-1)^2} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2} (n + \lambda_1 - n\lambda_1) & \dots \\ 0 & \frac{\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1-1} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \\
 &\left( \frac{1}{2\lambda_1^2} \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^3} (n^2\lambda_1^2 - 2n^2\lambda_1 + n^2 - 3n\lambda_1^2 + 4n\lambda_1 - n + 2\lambda_1^2) - \frac{1}{(\lambda_1-1)^3} \right. \\
 &\left. \frac{1}{(\lambda_1-1)^2} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2} (n + \lambda_1 - n\lambda_1) \right) \dots \\
 &\cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Al tomar la última fila de este producto se obtiene:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \lambda_1^n c_0 + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0) + \frac{1}{2} n\lambda_1^{n-2} (n-1) (c_0\lambda_1^2 - 2c_1\lambda_1 + c_2) - \dots \\
 &f(n) \left( \frac{1}{(\lambda_1-1)^3} - \frac{1}{2\lambda_1^2} \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^3} (n^2\lambda_1^2 - 2n^2\lambda_1 + n^2 - 3n\lambda_1^2 + 4n\lambda_1 - n + 2\lambda_1^2) \right)
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , por 1.12 y 1.18 se reemplaza  $\sum_{j=1}^{n-1} (j \cdot \lambda_1^{j-1}) = \frac{1}{2}n(n-1)$  y

$\sum_{j=2}^{n-1} \left( \frac{j(j-1)}{2} \cdot \lambda_1^{j-2} \right) = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) + \lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2} + \dots + 1 = n$  en 1.9, lo cual nos da como resultado:

$$S_n = \lambda_1^n c_0 + n\lambda_1^{n-1} (c_1 - \lambda_1 c_0) + \frac{1}{2}n\lambda_1^{n-2} (n-1) (c_0\lambda_1^2 - 2c_1\lambda_1 + c_2) + \dots$$

$$f(n) \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \tag{1.20}$$

### 1.4.2 Ejemplos

**EJEMPLO 1.3** Definimos la sucesión recursiva  $S_{n+3} = S_{n+2} + S_{n+1} + 2S_n + n^2 + 3^n$  sujeta a las condiciones  $S_0 = 1, S_1 = 1, S_2 = 1$ . Formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+3} = S_{n+2} + S_{n+1} + 2S_n + n^2 + 3^n \\ S_{n+2} = S_{n+2} \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y las condiciones iniciales

están dadas por  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . El polinomio característico de la matriz  $\mathbf{A}$  es:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2$$

cuyas raíces son  $2, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ . Por 1.15 se tiene que  $S_n$  corresponde a:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{2}{21}n^2 \left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{21}n^2 \left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{21}3^n \left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \dots \\
 &\quad \frac{2}{21}3^n \left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{7}i\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \dots \\
 &\quad -\frac{1}{7}i\sqrt{3} \left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{7} \left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \dots \\
 &\quad \frac{1}{21}i3^{n+\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{21}i3^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \dots \\
 &\quad \frac{1}{7}2^n n^2 + \frac{3}{7}2^n - \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{3}3^n + \frac{1}{7}6^n + \dots \\
 &\quad \frac{1}{21}i\sqrt{3}n^2 \left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{21}i\sqrt{3}n^2 \left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}
 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 1.4** Definamos la sucesión recursiva  $S_{n+3} = 5S_{n+2} - 3S_{n+1} - 9S_n - 5^n + \sin n$  sujeta a las condiciones iniciales  $S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = -1$ . Formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}
 S_{n+3} = 5S_{n+2} - 3S_{n+1} - 9S_n - 5^n + \sin n \\
 S_{n+2} = S_{n+2} \\
 S_{n+1} = S_{n+1}
 \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y las condiciones

iniciales están dadas por  $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . El polinomio característico de la matriz  $\mathbf{A}$  es:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9$$

cuyas raíces son  $\lambda_1 = 3$  de multiplicidad algebraica dos y  $\lambda_2 = -1$  de multiplicidad algebraica uno. Por 1.17 tenemos que  $S_n$  corresponde a:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{8}\sin(n) - \frac{1}{3}3^n n - \frac{1}{24}15^n n - \frac{1}{32}(-1)^n \sin(n) - \frac{3}{32}3^n \sin(n) + \frac{1}{2}(-1)^n + \dots \\
 &\quad \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{32}(-5)^n - \frac{1}{8}5^n + \frac{3}{32}15^n + \frac{1}{24}3^n n \cdot \sin(n) \quad \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}
 \end{aligned}$$

## 1.5 Conclusiones

---

El algoritmo desarrollado en este trabajo finaliza una serie de resultados conducentes a la resolución de relaciones de recurrencia lineales con coeficientes constantes, tanto homogéneas como no homogéneas.

Los resultados obtenidos permiten programar formas de resolución de recursividades de una manera rápida y eficiente. A futuro se espera desarrollar una aplicación que se fundamente en estos insumos teóricos para solucionar completamente el problema.

## Bibliografía

---

- [1] Apostol, T. (1985). Calculus. México: Reverté.
- [2] Hill, R. (1997). Álgebra Lineal Elemental con Aplicaciones. México: Prentice-Hall.
- [3] Hoffman, K. y Kunze, R. (1971). Álgebra Lineal. México: Prentice-Hall.
- [4] Johnsonbaugh, R. (1988). Matemáticas Discretas. México: Iberoamérica.
- [5] Vílchez, E. y Monge, J. (2001). Valores Propios y las Sucesiones Definidas de Forma Recursiva. Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate). 2(2).
- [6] Vílchez, E. (2004). Resolución de Sucesiones Definidas por una Relación de Recurrencia Homogénea Lineal con Valores Propios de Multiplicidad Algebraica Mayor Estricta que Uno. Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate). 5(2).