Artículo Invitado
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 10, Nº 1. 2009

Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas.[1] [2]

Fernando Hitt
hitt.fernando@uqam.ca
Département de Mathématiques
Université du Québec à Montréal (UQÀM)

José Carlos Cortés
jcortes@fismat.umich.mx
Facultad de Físico-Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Resumen

Nuestra posición sobre el uso de la tecnología en el aula de matemáticas es que éste debe ser un uso reflexivo tomando en consideración el contexto matemático en donde se utiliza. Existen muchos profesores de matemáticas que consideran que el uso de la tecnología inhibe el desarrollo de ciertas habilidades matemáticas; otros, con un entusiasmo desbordado, consideran que la tecnología es aplicable en todo, promoviendo en los alumnos un uso de la tecnología que consiste a apretar botones sin promover una reflexión sobre lo que se está realizando. El punto de equilibrio todavía no ha sido alcanzado, los investigadores no han logrado convencer al profesor que rechaza la tecnología sobre lo apropiado de su uso en el aula de matemáticas. Debemos alcanzar ese punto de equilibrio para poder promover

[1]La investigación que reportamos aquí, ha sido posible gracias al apoyo otorgado por el Conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada (No. 410-2008-1836, CID 130252) y el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México (CONACyT No.CB-2007-58671). Expresamos también nuestro agradecimiento a los estudiantes que participaron en este estudio.
[2]Una primera versión preliminar de este artículo fue presentado en Barrera F. et al., (Editores), Memorias del Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas. Pachuca, Hidalgo, México, 2008, pp. 41-55.

un uso más complejo de la tecnología que ayude en la adquisición de conocimientos. En este documento , nos interesamos en el diseño de actividades para el desarrollo de competencias matemáticas en torno a la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas.

1.1 Introducción.

Los investigadores en educación matemática interesados en los problemas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática utilizando tecnología, reflexionan constantemente sobre los motivos que han impedido el uso de la tecnología en el aula de matemáticas en forma sistemática. Por ejemplo, desde el punto de vista de Artigue (2000), ella considera que los principales problemas por los que la tecnología no logra impactar en el aula de matemáticas son por:

1. La reducida legitimidad de las tecnologías computacionales como opuesta a la legitimidad social científica.
2. La sobre-estimación de los resultados ligados al conocimiento matemático en ambientes tecnológicos.
3. La oposición dominante entre la dimensión técnica y la dimensión conceptual de la actividad matemática.
4. La sobre estimación de la complejidad de los procesos de instrumentación.

En este documento estamos interesados en dos de los puntos señalados por Artigue, que a continuación describiremos : Con respecto al punto dos de Artigue, es nuestro propósito mostrar algunas actividades que hemos realizado en el aula de matemáticas tanto con estudiantes de secundaria como en la formación de profesores de matemáticas. Con estos últimos, nuestras experimentaciones incluyen la utilización de la calculadora con posibilidades gráficas. Además de lo antes dicho, nos interesa reflexionar sobre el papel que puede jugar la calculadora como elemento de control sobre los procesos algebraicos en la formación de conceptos. Con respecto al punto tres de Artigue, nos interesa mostrar la importancia de conjugar técnicas con procesos de desarrollo conceptual y no tratarlos como entes separados. De hecho, nosotros estamos sumamente interesados en los tratamientos TTT

(Tarea-Técnica-Teoría) desarrollada por la escuela francesa (ver, p. e. Artigue, 2002; Lagrange, 2000 y 2003; Hitt & Kieran, en prensa).

La experiencia que hemos adquirido en la formación de profesores nos permite poner a consideración un acercamiento diferente al uso clásico del uso de la tecnología. En este acercamiento, como lo hemos expresado en los párrafos anteriores, queremos proporcionar elementos que resuelvan algunos de los problemas planteados por Artigue (2000). En lo que respecta a este documento, nosotros queremos restringirnos al uso de la calculadora con posibilidades de graficación.

Para ejemplificar nuestro punto de vista, tomaremos el tema de modelización matemática. Sabemos que para los estudiantes, la modelización matemática es uno de los temas más difíciles de adquirir en el aprendizaje de las matemáticas, ya que dada una situación (seguramente en un contexto físico), se requieren de diferentes tipos de habilidades y conocimientos para poder llegar a su modelización desde el punto de vista de las matemáticas. En referencia a la modelización matemática, Confrey y Maloney (2007, p. 61), exponen que:

> la modelación matemática es el proceso de encontrarse con una situación indeterminada, problematizarla y traerla a investigación, razonamiento y estructuras matemáticas para llevar a transformar la situación. El proceso de modelación produce un resultado -un modelo- el cual es una descripción o una representación de la situación.

En términos específicos, la modelización matemática frecuentemente solicita la búsqueda de una función como modelo matemático que permite analizar el fenómeno y explicarlo a través de ese modelo. Desde nuestro punto de vista, en la formación de conceptos, *no necesariamente debemos restringirnos a la representación algebraica*. De hecho, por tomar otro ejemplo, la modelación matemática puede ser a través de una representación gráfica de una función. Aquí es importante recordar que, *en el aprendizaje de las matemáticas, todas las representaciones de un concepto deben ser consideradas al mismo nivel cognitivo; y, una vez que se ha adquirido el concepto, el profesor puede solicitar a los estudiantes una manipulación más depurada sobre los tratamientos algebraicos*.

De hecho, esta posición no es exclusiva de la didáctica de las matemáticas, por ejemplo, el matemático Brodetsky (1919-1920) ya mencionaba la importancia de la representación grafica en las ecuaciones diferenciales, ya que en ese entonces, y continua siendo cierto, una gran cantidad de ecuaciones diferenciales no se les había encontrado solución; y precisamente, a través del dibujo del campo de tangentes es posible encontrar soluciones desde el punto de vista gráfico que permite analizar el fenómeno físico en cuestión desde el punto de vista del modelo matemático gráfico. Así, en ese contexto, Brodetsky en los años 1920's mencionaba *la importancia de realizar gráficas en papel milimétrico del campo de tangentes asociado a una ecuación diferencial*; ¿Qué pensaría usted de las sugerencias de Brodetsky, si en ese entonces los estudiantes hubieran tenido acceso a la tecnología como es el caso en la actualidad?

Regresando a nuestra problemática, entonces, para nosotros, un modelo matemático puede ser una expresión algebraica, una representación gráfica u otro tipo de representación (p. e. tabla de valores).

La modelización matemática es importante en la mayoría de las aplicaciones de las matemáticas a las otras ciencias. Su utilidad ha sido demostrada constantemente con las aplicaciones de la matemática en la física, ingeniería, comercio y administración, por mencionar solamente algunas. La importancia del modelo no solamente puede servir para explicar el fenómeno con los datos con los que se cuentan en ese momento, sino también para predecir lo que podría suceder con el pasar de los años. Un ejemplo de esto, es el crecimiento poblacional en algún país. El modelo matemático podría explicar el crecimiento poblacional después de cierto número de años. En otros casos, no es necesario que un fenómeno se repita para que puede ser modelado. De hecho, tenemos fenómenos que no se repiten, y con la recolección de datos es posible analizar el fenómeno e intentar encontrar un modelo. Puesto que la modelización matemática tiene como objeto la búsqueda de un modelo matemático que nos permita explicar el fenómeno en términos de ese modelo, un primer acercamiento para introducir el proceso de modelización matemática podría ser el ejemplificado con el diagrama siguiente:

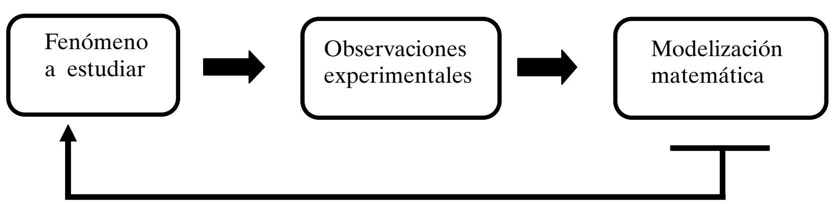


Figura 1.1 Proceso general sobre la modelización (1^{er} acercamiento)

La depuración del modelo se da al realizar un proceso cíclico que permita reajustar el modelo para mejor explicar el fenómeno en cuestión. Sin embargo, este acercamiento es general, y dentro de un contexto de enseñanza de las matemáticas se requiere de un modelo con mayor precisión. Veamos otro acercamiento propuesto por Katja (2005), quien nos proporciona un mejor acercamiento:

1. Definir un modelo real: simplificando, estructurando, idealizando la situación original,
2. Transformar el modelo real en un modelo matemático: por medio de la matematización,
3. Tratar matemáticamente el modelo,
4. Interpretar los resultados obtenidos a partir del modelo matemático,
5. Validar el modelo construido a la luz de soluciones obtenidas y de la matematización.

Si bien este modelo nos aporta un mejor acercamiento al problema del aprendizaje de las matemáticas, todavía no es lo suficientemente concreto para nuestros propósitos de enseñanza.
Antes de proporcionar un nuevo acercamiento, nosotros debemos colocarnos dentro de un marco teórico que nos proporcione los medios para reflexionar sobre nuestras propuestas didácticas.

Utilizaremos el marco teórico de Vergnaud (1991) en lo que se refiere al campo conceptual; para Vergnaud (Idem), un concepto adquiere sentido para el sujeto a través de situaciones y problemas. El campo conceptual está constituido por problemas que permiten el desarrollo de un concepto, operaciones que son necesarias de utilizar para la resolución de esos problemas, dentro de un sistema matemático. De hecho, recientemente Balacheff & Gaudin (2002, en prensa) han añadido una cuarta componente, que es sobre una estructura de control y que en su conjunto ellas forman las concepciones. Este añadido es fundamental en la didáctica de las matemáticas ya que la construcción de conceptos pasa por la construcción de concepciones. Un aspecto de corte práctico es de saber cuál es el campo conceptual para cada concepto que se quiere enseñar. De hecho, allí radica el principal problema! Para cada concepto matemático, ¿qué tipo de problemas son importantes de seleccionar para que el aprendizaje sea efectivo? Los investigadores proporcionan buenos ejemplos de lo que puede incluirse en ese campo conceptual; pero, para la mayoría de los conceptos que el profesor debe tratar en el aula, el profesor no cuenta con suficientes actividades que le permitan desarrollar una enseñanza adecuada de las matemáticas. Ese es también uno de los factores que no han permitido el uso sistemático de la tecnología en el aula de matemáticas.

En este acercamiento, sobre el campo conceptual de Vergnaud (1991) y de Balacheff & Gaudin (2002, en prensa), es importante que realicemos la distinción entre ejercicio, problema y situación problema (ver Hitt, 2004). Esta distinción la haremos dentro un marco teórico general sobre las representaciones (ver Hitt, 2003).

Ejercicio: Si en la lectura de un enunciado matemático recordamos de inmediato un proceso o algoritmo a seguir para resolverlo, se dice que el enunciado es un ejercicio.

Problema: Si en la lectura del enunciado no recordamos un proceso o algoritmo directo a utilizar, y la situación nos obliga a producir representaciones que nos permitan ligar aspectos matemáticos no en forma directa sino a través de articulaciones entre representaciones y procesos de tratamiento al interior de los registros involucrados, diremos que ese enunciado es un problema.

Situación problema: La situación debe ser simple, fácil de entender (ello no implica que sea fácil de resolver), ella debe provocar la reflexión y por tanto no puede ser un ejercicio. La matemática que debe utilizarse no debe ser explicitada en el enunciado. Es a través de la interacción de los estudiantes con la situación que representaciones funcionales (espontáneas) emergen, y por tanto la matemática hace acto de presencia de manera natural en la discusión entre los miembros de un equipo de estudiantes, proporcionándoles la posibilidad de construir un modelo matemático que, éste a su vez, permite explicar la situación. Nuestra proposición es que las situaciones problema, dentro de un contexto de una teoría sobre representaciones matemáticas, deben seguir entonces un tratamiento en el aula como el siguiente:

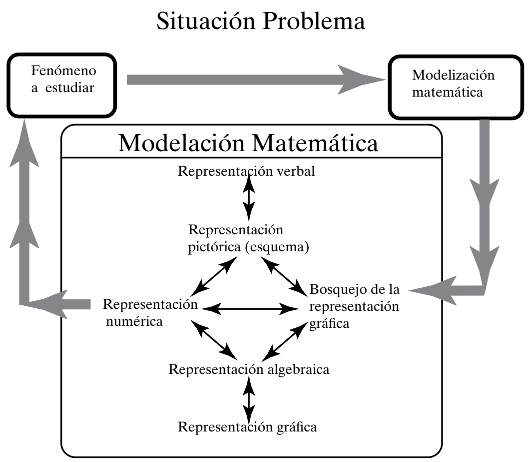


Figura 1.2 Proceso de modelización matemática (2do acercamiento)

1.2 En este tipo de acercamiento, ¿cómo organizar una secuencia didáctica que incluya el uso de calculadora?

Nuestra proposición es que la adquisición de conceptos debe realizarse en varias etapas y no solamente con un par de ejercicios. En realidad, nosotros estamos interesados en la producción de *secuencias de aprendizaje que implican la adquisición de conocimientos que pueden ser retenidos por los estudiantes a largo plazo*. Ello implica lo que algunos investigadores han denominado como extensas secuencias de problemas eslabonadas unas con otras.

Consideramos tres etapas en la construcción de conceptos. En el documento que nos ocupa, nuestro interés radica en la promoción de conceptos como el de covariación, función y procesos de modelización en estudiantes de secundaria y futuros profesores de enseñanza secundaria. Veamos a continuación, en qué consisten cada etapa.

Primera etapa: Proposición de situaciones problema que generen el uso de diferentes tipos de funciones en el proceso de modelización matemática (el uso de materiales como la cuerda, compás, elásticos, etc., y calculadora son primordiales en esta etapa). Con la cuerda o compás, es posible construir una primera aproximación a la representación gráfica de la situación. Ello permite que los estudiantes desarrollen, primeramente, el concepto de covariación (ver Carlson, 2002). Al mismo tiempo, los estudiantes pueden ser capaces de proporcionar una predicción sobre el comportamiento aproximado de la función desde un punto de vista gráfico (predicción construida a través de un proceso manual utilizando la cuerda o compás). Ello proporciona al estudiante *elementos de control* (en el sentido de Saboya et al., 2006) que en los procesos algebraicos largos, generalmente se cometen errores; y, al utilizar la calculadora, el estudiante se enfrenta a una representación producto de su proceso algebraico y a una representación gráfica producto de su *"proceso manua"* (utilizando la cuerda o compás); si no coinciden, el estudiante se encontrará frente a un conflicto cognitivo. Resolver este conflicto, permitirá al estudiante avanzar en sus procesos de aprendizaje (ver ejemplo del caminante más adelante en este documento).

Una vez trabajadas estas situaciones en clase, es posible pasar a la siguiente etapa. De hecho, la metodología que nosotros hemos seguido desde hace varios años *para las dos primeras etapas* es la metodología ACODESA (ver Hitt, 2007, Hitt et al., 2008, González-Martín et al., 2008). En un ambiente de aprendizaje colaborativo, debate científico y de auto reflexión, proporcionamos a los estudiantes un ambiente de aprendizaje desde el punto de vista de una teoría sociocultural.

Segunda etapa: Utilización de las funciones conocidas que son susceptibles de aplicar a diferentes tipos de situaciones.

En esta etapa, es importante generar datos y encontrar un modelo matemático (función) que permita explicar el fenómeno a partir del modelo matemático. En física, ingeniería, y economía entre otros, es uno de los procesos más utilizados. A partir de datos tomados de la vida real, debemos tratar de encontrar un modelo matemático que nos permita explicar el fenómeno, e incluso predecir lo que podría suceder en algún momento dado. Tomemos por ejemplo el crecimiento poblacional en un país. Encontrar un modelo matemático que nos explique el crecimiento durante los últimos 100 años puede ser importante; Pero si además, nuestro modelo nos puede informar sobre el probable crecimiento poblacional dentro de 10, 20, 50 o 100 años, es posible considerar esta información para la planificación sobre el crecimiento poblacional en ese país.

Tercera etapa: Procesos de institucionalización (análisis de parámetros de ciertas familias de funciones).
Esta etapa es la más conocida en nuestro medio. Los profesores utilizan las representaciones institucionales, analizando por ejemplo el papel de los parámetros para analizar el comportamiento de una familia de funciones. En esta etapa se supone que el estudiante debe llegar al saber, que es considerado como lo que todo individuo debe saber al final de sus estudios en un ciclo dado, de una institución dada.

1.3 Metodología ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión)

La metodología ACODESA[3] integra varias situaciones problema interrelacionadas unas con otras (Glaeser, 1999). Ella toma en consideración el trabajo individual, trabajo en equipo, debate en el aula y auto-reflexión. Es una adaptación a un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas (ver Hitt, Gonzalez-Martin et Morasse, 2008 et Gonzalez-Martin, Hitt et Morasse, 2008)

Veamos un resumen de las características de la metodología ACODESA (para una versión más completa, ver Hitt, 2007). Es importante señalar que en esta metodología, el profesor no dictamina sobre lo realizado por los alumnos en las primeras etapas, salvo al final en el proceso de institucionalización. En las 3 primeras fases el profesor es un guía y es deber de los estudiantes de argumentar y validar sus producciones, en el proceso de institucionalización es donde el profesor resalta las diferentes representaciones y presenta las representaciones institucionales:

1. Trabajo individual (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema),
2. Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales),

[3] Esta parte del texto es retomada del documento presentado en Barrera F. et al., (Editores), Memorias del Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas. Pachuca, Hidalgo, México, 2008, pp. 41-55.

3. Debate (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones funcionales),

4. Regreso sobre la situación (trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión).

5. Institucionalización. Proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales.

En la metodología ACODESA, la manipulación de materiales y trabajo con papel y lápiz es sumamente importante. En este caso, los estudiantes utilizan un compás para medir y trasladar medidas. En el caso de los estudiantes de secundaria, ello les permite convencer a sus compañeros, además la etapa de debate científico permite a algunos estudiantes modificar sus versiones originales llegando a resultados más refinados.

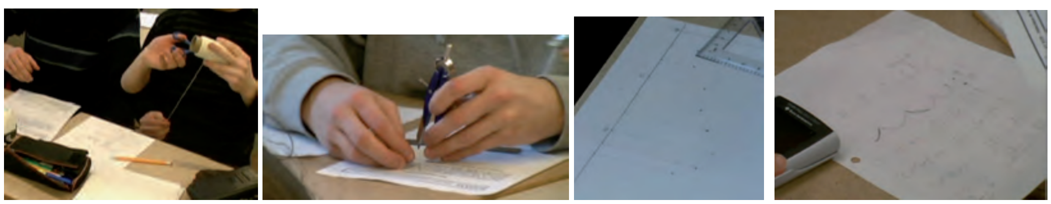


Figura 1.3 Materiales utilizados en la resolución de situaciones: Cuerda, compás, regla, calculadora...

La metodología ACODESA ya ha sido probada en diferentes ambientes. Con respecto a experimentaciones sin uso de la calculadora, hemos realizado una serie de investigaciones tanto en México (bajo la dirección de Cortés) como en Quebec (bajo la dirección de Hitt & González-Martín) con poblaciones en la escuela secundaria que nos muestran la potencialidad de la metodología. A continuación se muestran algunos resultados del grupo de México, resultados del grupo de Quebec se pueden ver en Hitt et al., (2008), González-Martín et al., (2008).

1.4 Ejemplos de actividades para cada una de las etapas.

1.4.1 Actividad: El caminante[5] (primera etapa)

> Un excursionista comienza un paseo alrededor de un parque (en forma de cuadrado). Él sigue el camino que le permite por lo tanto regresar al punto de partida. Al seguir este camino, un gran mástil con una bandera se encuentra situado en el centro del parque. Traza un camino y coloca el puesto de socorro en el lugar de tu elección de acuerdo al enunciado

Parte 1. ¿Qué variables podemos identificar en esta situación? Parte 2. ¿Qué relación funcional podemos proponer para las variables seleccionadas? Parte 3. ¿Cómo podemos representarla?

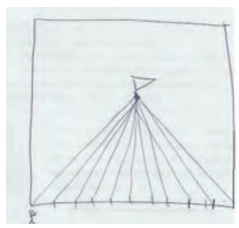


Figura 1.4 Pista producida por un equipo de estudiantes de secundaria en México

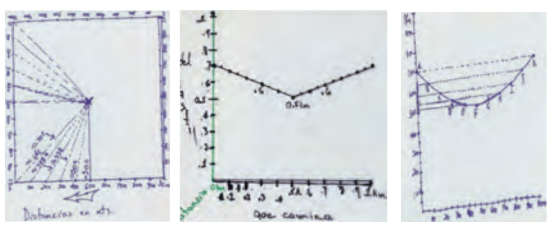


Figura 1.5 Soluciones gráficas proporcionadas por diferentes equipos de estudiantes de secundaria en México utilizando cuerda o compás

[5] La actividad del caminante ha sido utilizada desde hace algunos años en la formación de profesores en Quebec. Esta actividad fue utilizada constantemente dentro de un curso en la UQAM, por Claude Janvier y Bernadette Janvier.

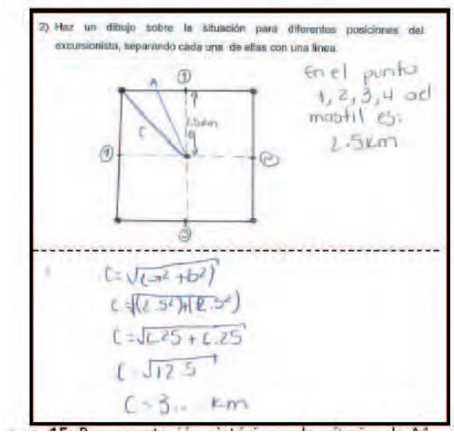


Figura 1.6 Lo escrito por debajo de la línea punteada fue realizado posterior al debate

Considerando que las actividades tienen una potencialidad grande para el desarrollo de procesos de modelización matemática. Como lo señalamos en el pie de página, la actividad del caminante se ha utilizado en la formación de profesores en Quebec desde hace varios años. Nosotros le hemos dado un tinte tecnológico solicitando a los futuros profesores que utilicen la calculadora con posibilidades gráficas en el aula de matemáticas en la resolución de las actividades; y reflexiones adicionales sobre la actividad en cuestión como tarea en casa, pero ahora con el software Cabri-Geomètre. Muestras de la complejidad de la actividad dependiendo de la pista producida para el caminante puede verse en los ejemplos de la Figura 1.7 y 1.8.

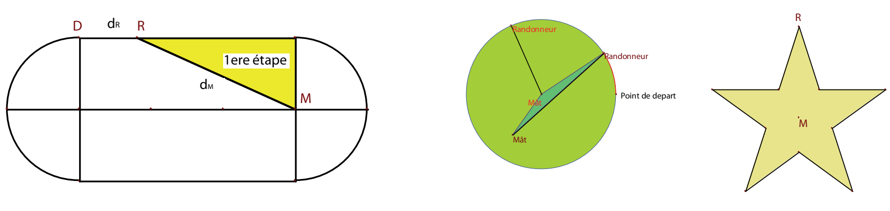


Figura 1.7 Proposiciones, situación abierta del caminante

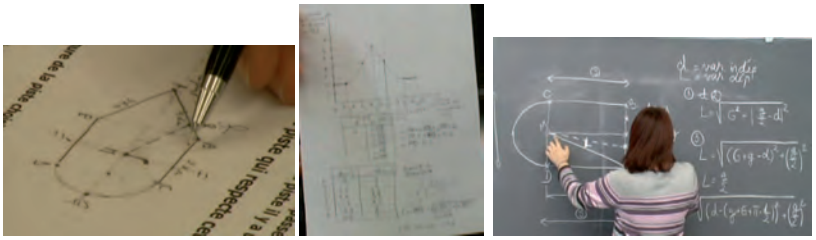


Figura 1.8 En el caminante "versión libre", los equipos proponen diferentes pistas y la complejidad matemática puede ser mayor o menor dependiendo de la pista propuesta

Veamos lo que sucedió en un grupo en la versión del caminante cuya pista es la de un cuadrado. Los futuros profesores (estudiantes de licenciatura), realizan un trabajo algebraico sin mucho problema. Sin embargo, a pesar de sus habilidades algebraicas, no es fácil imaginar la representación gráfica de una función por partes como se muestra en el cuaderno de uno de los miembros de un equipo (ver Figura 7 y 8). Sin embargo, ¿cómo saber si no se cometieron errores desde un punto de vista algebraico? Este es precisamente un caso en el que las expectativas de la representación gráfica de los diferentes estudiantes de un equipo no coincidían, aún y cuando desde un punto de vista algebraico ya habían resuelto el problema.

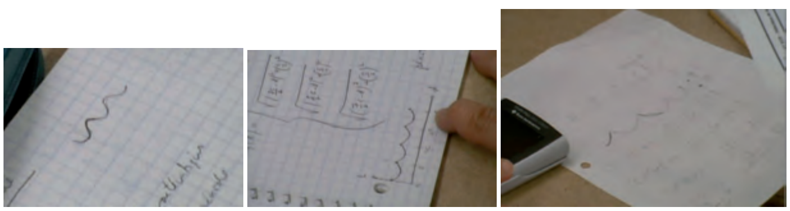


Figura 1.9 Una vez resuelto el problema desde un punto de vista algebraico, ¿Qué gráfica le corresponde?

En el cuaderno de uno de los estudiantes que trabajaban en un grupo de 4 personas (dos mujeres y dos hombres) se pueden encontrar ideas intuitivas y formales. En la hoja de la izquierda parte superior, se encuentra una gráfica que es completamente diferente a la de abajo a la derecha; otra persona del grupo tenía una gráfica completamente diferente. Ello provocó una discusión interesante entre los 4 estudiantes.

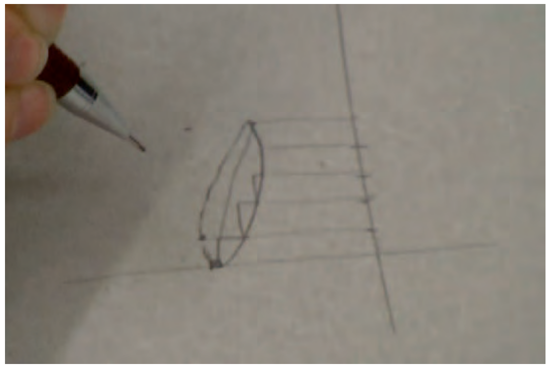


Figura 1.10 La discusión comienza y los argumentos se multiplican ...

Los argumentos de unos eran diferentes de los argumentos de otros, sin llegar a un acuerdo. Un momento interesante se dio cuando una de las estudiantes tomó su calculadora y trató de realizar la gráfica. Otro de los estudiantes al ver que tenía dificultades con la calculadora se la pidió y empezó él a manipularla, obteniendo lo mostrado en la Figura 1.11.

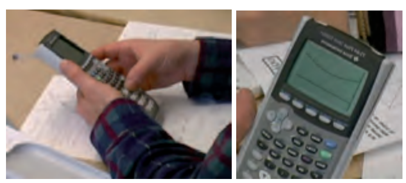


Figura 1.11 Representación gráfica proporcionada por la calculadora

A partir de ese momento, la discusión se dio por terminada. Ya contaban con la representación gráfica correcta y dejo de interesarles el problema ...
Considerando un cuadrado de lado unitario (p. e. 1 km), se puede obtener la función en términos de la distancia recorrida por el caminante (d): $D(d) = \sqrt{d^2 - d + 1/2}$, cuya representación gráfica considerando el trayecto completo, es lo mostrado en la Figura 1.12.

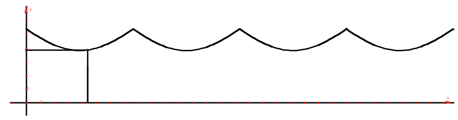
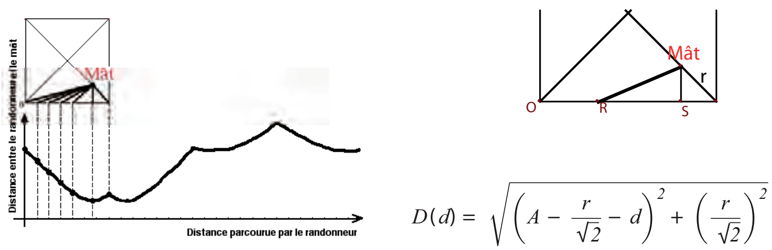


Figura 1.12 Gráfica obtenida bajo una simulación con Cabri

En el caso de los estudiantes universitarios, se solicita que calculen entonces para una situación más compleja en donde el asta esté en otro lugar sobre una de las diagonales del cuadrado. Utilizando un software de Geometría dinámica como el Cabri, se obtiene una gráfica como la mostrada en la Figura 1.13.



$$D(d) = \sqrt{\left(A - \frac{r}{\sqrt{2}} - d\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Figura 1.13 Pista cuadrada, puesto de socorro sobre una diagonal

1.4.2 Segunda etapa: Reconocimiento de funciones que pueden explicarnos fenómenos físicos en un contexto de modelización matemática

1.4.2.1 El famoso problema de la cajita... .Volumen máximo en la construcción de una caja Con un cartón de medidas 5.5 pulgadas por 4.5 pulgadas (cuarta parte de una hoja de papel). Podemos construir una caja cortando en cada esquina un cuadrado (ver figura 1.14) y posteriormente realizar el doblez. ¿Cuál será el valor del corte que debemos realizar para obtener una caja con máximo volumen?

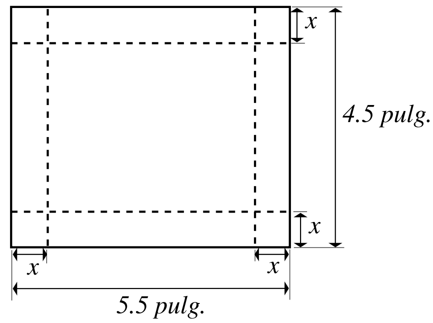


Figura 1.14

Desde un punto de vista experimental, algunos estudiantes construyen diferentes cajas y obtuvieron el volumen correspondiente. Recordemos que en este proceso hay errores de medición y los resultados no son exactos. De hecho, un equipo se equivocó en su cálculo y cuando se graficaron los puntos, quedaba un punto muy por debajo del resto. Todos propusieron eliminarlo, quedando la tabla siguiente:

Altura de la caja (x) en pulgadas	Volumen en función de x
1,25	6,56
0,875	8,2
1	7,875
0,79	8,268
1,5	4,687
0,59	7,84
0,98	7,92
0,75	8,25

Tabla 1.1

La representación gráfica realizada utilizando calculadora se muestra en la gráfica de la Figura 1.15.

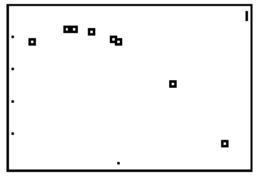


Figura 1.15 Representación de datos encontrados por diferentes alumnos de acuerdo a las dimensiones de la caja que construyeron cada uno de ellos o en equipo

En la discusión con los estudiantes, antes de realizar un proceso algebraico, se les solicitó predecir qué tipo de curva podría tomarse como modelo que siguiera estos datos. De manera natural, algunos estudiantes propusieron la función cuadrática. Un estudiante que había pensado ya en la solución algebraica también propuso una función, pero en su caso fue una cúbica (ver Figura 1.16).

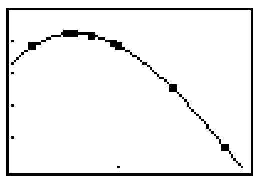


Figura 1.16 Representación de datos y representación de una función cúbica utilizando un proceso de regresión con calculadora

1.4.2.2 Proceso algebraico

Suponemos que x representa el corte realizado en cada esquina. Considerando las dimensiones originales del cartón tendremos las siguientes expresiones:

$$\text{Largo} = 5.5 - 2x, \qquad \text{Ancho} \quad = 4.5 - 2x, \qquad \text{Altura} = x$$

Cómo el lado más pequeño es de 4.5 pulgadas, entonces el corte máximo es de $2x < 4.5$ pulgadas.

El volumen es: Volumen $=$ Largo $\cdot$ Ancho $\cdot$ Altura; $\quad v(x) = (5.5 - 2x)(4.5 * 2x)x$
Tomando en cuenta las restricciones, la gráfica de esta expresión nos queda:

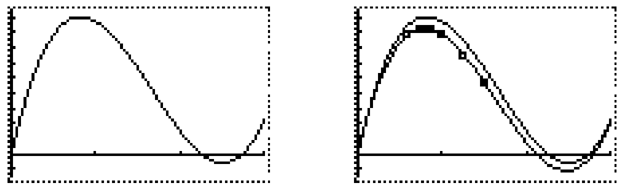


Figura 1.17 Representación gráfica de la función cúbica y contrastación con los datos experimentales

Una aproximación visual nos indica que la función volumen tiene un máximo absoluto en x_0 que se encuentra en el intervalo $]0,2[$; por otro lado, el dominio de la función de acuerdo al contexto, es: $]0,2.25[$.

1.4.3 Método de Fermat para el cálculo de máximos y mínimos

Los estudiantes universitarios ya tienen conocimientos del cálculo de máximos y mínimos de acuerdo a un acercamiento dentro del cálculo diferencial. Sin embargo, dentro del marco de la formación de profesores de secundaria, nosotros consideramos importante tener un acercamiento algebraico que no contemple el uso de las nociones formales del cálculo diferencial. Por al motivo, en el curso de didáctica de la variable y las funciones, se propone un acercamiento intuitivo con complementos algebraicos que trata el tema del cálculo de máximos y mínimos de acuerdo al Método de Fermat sin hacer alusión a conceptos propiamente del cálculo diferencial. De acuerdo al método, debe considerarse $V(x) = V(x+\Delta)$. Donde Δ es un número "infinitamente pequeño" que en principio es diferente de cero. En forma intuitiva, podemos pensar que Fermat se imaginaba que cerca de cada máximo o mínimo de una función, los valores de las imágenes deberían ser iguales (ver Figura 1.18).

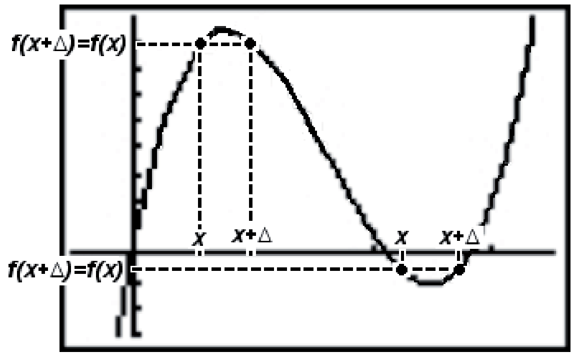


Figura 1.18 Ilustración del método de Fermat, $\Delta > 0$

El proceso nos proporciona lo siguiente:

$$\begin{aligned}
V(x+\Delta) &= [4,5-2(x+\Delta)][5,5-2(x+\Delta)](x+\Delta) \\
&= [(4,5-2x)-2\Delta][(5,5-2x)-2\Delta](x+\Delta) \\
&= [(4,5-2x)(5,5-2x)-2\Delta(5,5-2x)-2\Delta(4,5-2x)+4\Delta^2](x+\Delta) \\
&= x[(4,5-2x)(5,5-2x)-2\Delta(5,5-2x)-2\Delta(4,5-2x)+4\Delta^2]+ \\
&\quad +[(4,5-2x)(5,5-2x)-2\Delta(5,5-2x)-2\Delta(4,5-2x)+4\Delta^2]\Delta \\
&= x(4,5-2x)(5,5-2x)-2x\Delta(5,5-2x)-2x\Delta(4,5-2x)+4x\Delta^2+ \\
&\quad +[(4,5-2x)(5,5-2x)-2\Delta(5,5-2x)-2\Delta(4,5-2x)+4\Delta^2]\Delta
\end{aligned}$$

De acuerdo al método de Fermat, $V(x+\Delta) = V(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(4,5-2x)(5,5-2x)x &= x(4,5-2x)(5,5-2x)-2x\Delta(5,5-2x)-2x\Delta(4,5-2x)+4x\Delta^2+ \\
&\quad [(4,5-2x)(5,5-2x)-2\Delta(5,5-2x)-2\Delta(4,5-2x)+4\Delta^2]\Delta
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} 0 &= -2x\Delta(4,5-2x) - 2x\Delta(5,5-2x) + 4x\Delta^2 + \\ &\quad +[(4,5-2x)(5,5-2x) - 2\Delta(5,5-2x) - 2\Delta(4,5-2x) + 4\Delta^2]\Delta \end{aligned}$$

Dividimos por Δ entonces tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= -2x(4,5-2x) - 2x(5,5-2x) + 4x\Delta + \\ &\quad +[(4,5-2x)(5,5-2x) - 2\Delta(5,5-2x) - 2\Delta(4,5-2x) + 4\Delta^2] \end{aligned}$$

Ahora bien como Δ es "despreciable", lo eliminamos [6]

$0 = -2x(4,5-2x) - 2x(5,5-2x) + (4,5-2x)(5,5-2x)$
$0 = 12x^2 - 40x + 24,75$

Resolviendo la ecuación de 2$^{\text{do}}$ grado obtenemos:

$$x_0 = 0,82093 \quad \text{y} \quad x_1 = 2,5124$$

La función volumen tiene un máximo absoluto en $x_0 = 0,82093$ y la función volumen tiene un mínimo absoluto en $x_1 = 2,5124$. El valor máximo de la función en $x_0 = 0,82093$ es $f(x_0) = 9,0525$.

Finalmente, podemos dar el intervalo de dominio y el intervalo imagen de la función volumen Dominio: $]0,\ 2,25[$ e imagen: $]0,\ 9,0525[$.

1.4.4 Tercera etapa: Procesos de institucionalización de saberes.

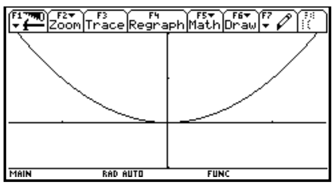
4.3 Tercera etapa: Procesos de institucionalización de saberes Como lo habíamos mencionado antes, el proceso de institucionalización de saberes es más o menos

[6]Debemos mencionar que el método de Fermat fue fuertemente criticado porque uno inicia con un diferente de cero y al final del proceso se le considera como despreciable... Sin embargo, desde un punto de vista intuitivo, el método de Fermat es muy ilustrativo.

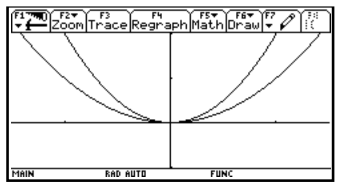
clásico. Decimos clásico en los ambientes con tecnología. Para ejemplificar esta etapa, realizaremos el estudio de la función cuadrática. Es decir, estudiaremos la variación de las diferentes representaciones de la función cuadrática, analizando los parámetros.

1.4.4.1 Función cuadrática (función polinomial de segundo grado) Consideremos la función cuadrática de la forma general: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,\ a, b, c$ constantes, $a \neq 0$.

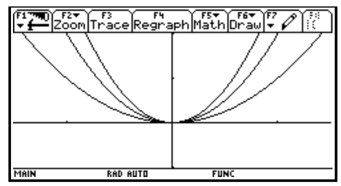
1. Comenzamos con los casos $b = 0,\ c = 0$, y $a \in \{1, 2, 3, 4\}$.



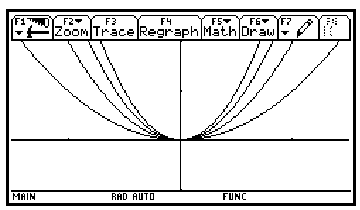
$f(x) = x^2$



$f(x) = x^2;\ f(x) = 2x^2$



$f(x) = x^2;\ f(x) = 2x^2;$
$f(x) = 3x^2$



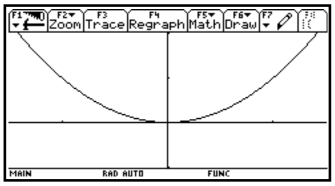
$f(x) = x^2;\ f(x) = 2x^2;\ f(x) = 3x^2;\ f(x) = 4x^2$

Figura 1.19

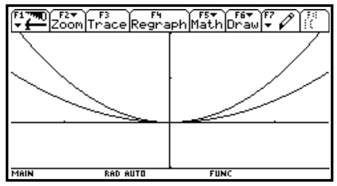
Compare las representaciones gráficas de las funciones para los diferentes valores de a. ¿Cuál es el efecto del parámetro a?

- Si asignamos los parámetros $b = 0, c = 0$, y $a > 1$, podemos deducir que $x^2 < ax^2$; entonces la función ax^2 se puede obtener de la función base o de referencia x^2 y se observa que dependiendo del tamaño de a, ésta se “cierra” sobre el eje de las ”.

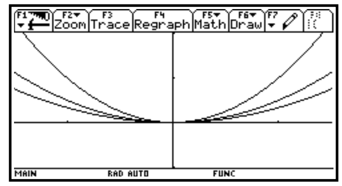
2. Con $b = 0, c = 0$, y $a \in \{1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4\}$, tenemos que:



$f(x) = x^2$



$f(x) = x^2$ y $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$



$f(x) = x^2$; $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ y $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$

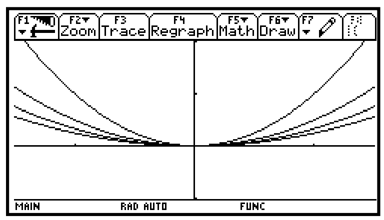
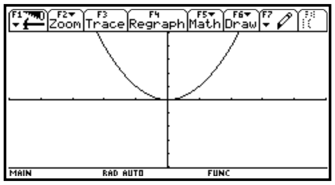


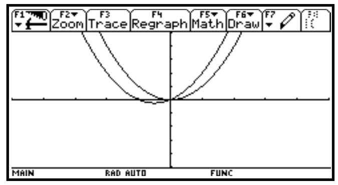
Figura 1.20

Comparando la representación gráfica para los diferentes valores de a, ¿cuál es el efecto del parámetro a?

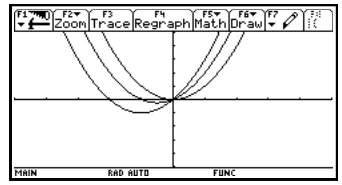
- Teniendo $b = 0, c = 0$, y $0 < a < 1$, o $a = 1/\beta$, deducimos que $ax^2 < x^2$; y por lo tanto comparando ax^2 con respecto a x^2 podemos observar que la primera función “se abre” con respecto al eje vertical, y entre mayor sea β la gráfica se aproxima más al eje horizontal.

3. Con $a = 1, c = 0$, y $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Tenemos las gráficas siguientes:

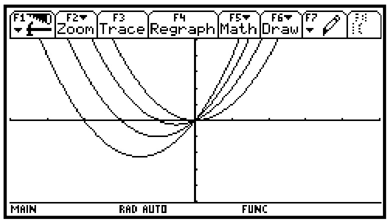




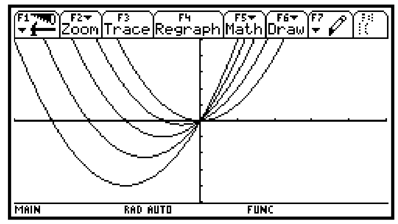
$f(x)=x^2$ y $f(x)=x^2+x$



$f(x)=x^2$, $f(x)=x^2+x$ y $f(x)=x^2+2x$



$f(x)=x^2$, $f(x)=x^2+x$, $f(x)=x^2+2x$ y $f(x)=x^2+3x$



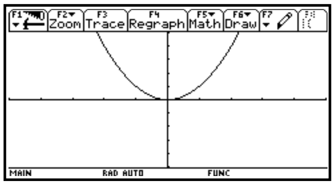
$f(x)=x^2$, $f(x)=x^2+x$, $f(x)=x^2+2x$, $f(x)=x^2+3x$ y $f(x)=x^2+4x$

Figura 1.21

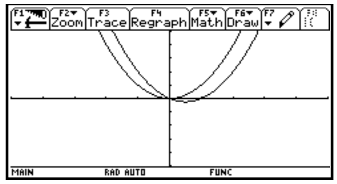
Comparando la representación gráfica para los diferentes valores de b, ¿cuál es el efecto del parámetro b ?

- Teniendo los parámetros $a = 1, c = 0$, y $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, podemos observara que en la gráfica de la función hay un desplazamiento hacia la izquierda y hacia abajo.

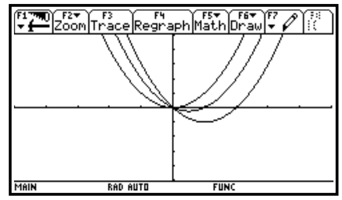
4. Con $a = 1, c = 0$, y $b \in \{-1, -2, -3, -4\}$. Tendremos las gráficas siguientes:



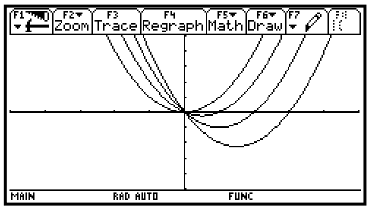
$f(x)=x^2$



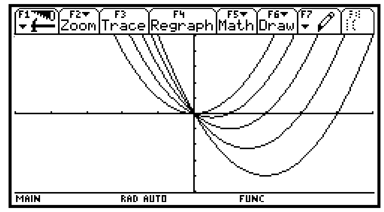
$f(x)=x^2$ y $f(x)=x^2-x$



$f(x)=x^2$, $f(x)=x^2-x$ y $f(x)=x^2-2x$



$f(x)=x^2$, $f(x)=x^2-x$, $f(x)=x^2-2x$ y $f(x)=x^2-3x$



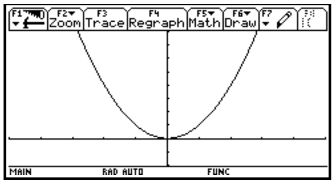
$f(x)=x^2$, $f(x)=x^2-x$, $f(x)=x^2-2x$, $f(x)=x^2-3x$ y $f(x)=x^2-4x$

Figura 1.22

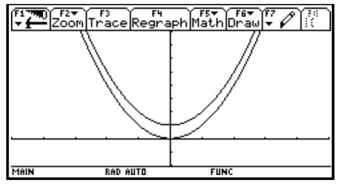
Comparando la representación gráfica para los diferentes valores de b, ¿cuál es el efecto del parámetro b?

- Teniendo los parámetros $a=1, c=0$, y $b \in \{-1,-2,-3,-4\}$, podemos observara que en la gráfica de la función hay un desplazamiento hacia la derecha y hacia abajo.

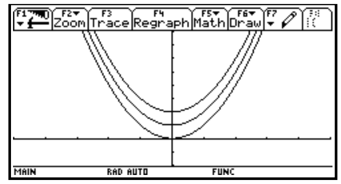
5. Con $a=1, b=0$, y $c \in \{0,1,2,3,4\}$. Tendremos las siguientes gráficas:



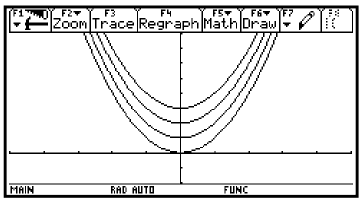
$f(x)=x^2$



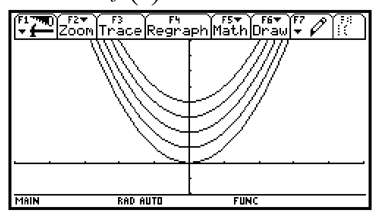
$f(x)=x^2$ y $f(x)=x^2+1$



$f(x)=x^2$, $f(x)=x^2+1$ y $f(x)=x^2+2$



$f(x)=x^2$, $f(x)=x^2+1$, $f(x)=x^2+2$ $f(x)=x^2+3$



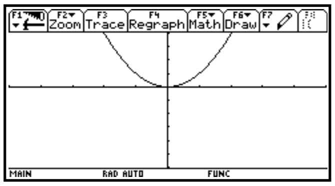
$f(x)=x^2$ $f(x)=x^2+1$, $f(x)=x^2+2$, $f(x)=x^2+3$ $f(x)=x^2+4$

Figura 1.23

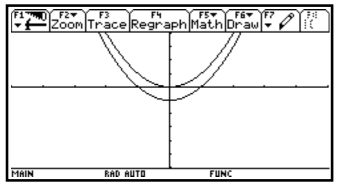
Comparando la representación gráfica para los diferentes valores de c, ?'cuál es el efecto del parámetro c?

- Teniendo los parámetros $a = 1, b = 0$, y $c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, podemos observara que en la gráfica de la función hay un desplazamiento hacia arriba sobre el eje de las "y".

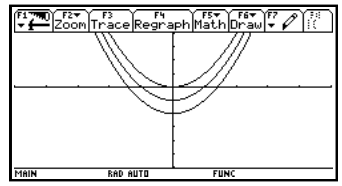
6. Con $a = 1, b = 0$, y $c \in \{0, -1, -2, -3, -4\}$. Tendremos las gráficas siguientes:



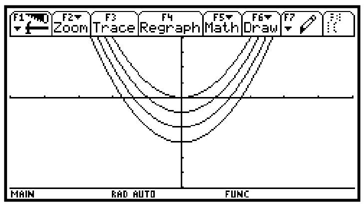
$f(x)=x^2$



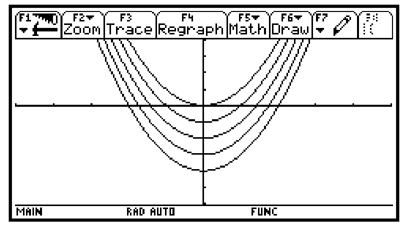
$f(x)=x^2$ y $f(x)=x^2-1$



$f(x)=x^2$, $f(x)=x^2-1$ y $f(x)=x^2-2$



$f(x)=x^2$, $f(x)=x^2-1$, $f(x)=x^2-2$ y $f(x)=x^2-3$



$f(x)=x^2$, $f(x)=x^2-1$, $f(x)=x^2-2$, $f(x)=x^2-3$ y $f(x)=x^2-4$

Figura 1.24

Comparando la representación gráfica para los diferentes valores de c, ¿cuál es el efecto del parámetro c ?

- Teniendo los parámetros $a=1, b=0$, y $c \in \{0,-1,-2,-3,-4\}$, podemos observara que en la gráfica de la función hay un desplazamiento hacia abajo sobre el eje de las"y".

7. **Observación**. Para contestar las preguntas en 3 y 4, observemos las representaciones gráficas siguientes:

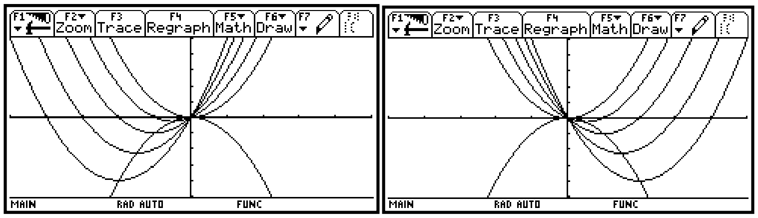


Figura 1.25

Haciendo un análisis visual de las gráficas, podemos emitir una conjetura: Si $f(x) = x^2 + b \cdot x$, las diferentes funciones generadas variando el parámetro b tienen una intersección con la función $g(x) = x^2$.

Verificación algebraica: Todas las ecuaciones de la forma $x^2 + b \cdot x$, donde $b \in \mathbb{R}^+$ pueden ser transformadas a $x^2 + b \cdot x = x^2 + b \cdot x + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \dfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$. Es decir que la función cuadrática $f(x) = x^2 + b \cdot x$, se puede escribir en forma canónica como $f(x) = \left(x + \dfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$, por lo tanto la abscisa y la ordenada (h, k) son $h = -b/2$ y $k = -\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$.

¿Cómo coinciden los vértices de $f(x) = x^2 + b \cdot x$, donde $b \in \mathbb{R}^+$, en la intersección con la cuadrática $-x^2$?

$x^2 + b \cdot x = -x^2 \iff 2x^2 + b \cdot x = 0 \iff x(2x + b) = 0 \iff x = 0$ y $2x + b = 0$; es decir, $x = 0$ y $x = -\dfrac{b}{2}$. Así que las dos funciones coinciden en $x = 0$ y $x = -\dfrac{b}{2}$.

1.5 A manera de conclusión

El diseño de actividades en ambientes tecnológicos no es una tarea fácil. Es importante tomar en cuenta que muchos de los problemas que se utilizaban en el pasado probablemente no tengan cabida en un ambiente con tecnología. Los investigadores en didáctica de las matemáticas, tendrían que proporcionar muchos ejemplos para que el profesor de matemáticas tenga un soporte en la preparación de sus cursos. El uso de tecnología en el aula de matemáticas requiere, como Artigue (2002), Guin & Trouche (1999), Lagrange (2003), Hitt & Kieran (en prensa) entre otros lo han señalado, de cuidados en el diseño de actividades. En el presente documento hemos querido mostrar características del uso de tecnología en el aula de matemáticas relativa a la construcción del concepto de covariación en el sentido de Carlson (2002), el concepto de función y procesos de modelización matemática. Nuestras propuestas didácticas intentan la promoción de un aprendizaje profundo de la matemática, que pueda ser recordado y que no se pierda a través del tiempo. Recordemos que lo que se aprende si no es utilizado se pierde con el tiempo (ver Karsenty, 2003). La metodología utilizada en las experimentaciones tanto en México como en Quebec ha sido ACODESA. La experimentación nos ha mostrado las dificultades que podemos encontrarnos en una enseñanza de corte sociocultural, pero también nos ha mostrado su potencialidad para seguirla utilizando en el aula de matemáticas. Los dos grupos de investigadores tanto en México como en Quebec consideran fructífero el uso de la metodología. En una de las experimentaciones con dos grupos de secundaria en Quebec, pudimos observar que con un grupo de 36 alumnos, realizar la experimentación fue muy pesado para el profesor de secundaria, y él tuvo que modificar el trabajo en equipo para poder contralar al grupo. En cambio, con otro grupo de 24 alumnos, el mismo profesor, utilizando la metodología tuvo resultados extraordinarios (ver Hitt et al., 2008; González-Martín, 2008). Si bien ya hemos realizado cierto tipo de experimentación con tecnología (calculadoras) con estudiantes universitarios que serán futuros profesores, nuestra siguiente etapa es la de realizar experimentación en el aula de matemáticas en la escuela secundaria y preuniversitaria con el uso de calculadora con posibilidades gráficas.

Bibliografía

[1] A. Gonzalez, F. Hitt, C. Morasse, (2008). "The introduction of the graphic representation of functions through the concepto co-variation and spontaneous representations. A case study". In Figueras, O. and Sepúlveda, A.

(Eds.). Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XX North American Chapter Vol. 3, pp. 89-97. Morelia, Michoacán, México: PME.

[2] D. Guin, L. Trouche, (1999). "The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators". International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3, 195-227.

[3] F. Hitt, (2003). "Le caractère fonctionnel des représentations", Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 8, 255-271.

[4] F. Hitt, (2004). "Une comparaison entre deux approches", enseignement des mathématiques sans ou avec logiciels et calculatrices symboliques. In Guiménez J., Fitz Simons G. and Hahn Corine (2004) Actes de la CIEAEM-54, Vilanova i la Geltrú. Spain, pp. 351- 359.

[5] F. Hitt, (2007). "Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif", de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), Environnements informatisés pour l'éducation et la formation scientifique et technique : modèles, dispositifs et pratiques. Paris : Éditorial Hermes.

[6] G. Glaeser, (1999). "Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques". La Pensée Sauvage Éditions. France.

[7] J. Confrey, A. Maloney, (2007). "A theory of mathematical modelling in technological settings". En Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., Niss, M. (Eds.) Modelling and Applications in Mathematics Education. Springer. USA.

[8] M. Artigue, (2000). "Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. In Proceedings of the Annual Meeting of GDM" (pp. 7-17). Potsdam, Germany. (http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000)

[9] M. Artigue,(2002). "Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work". International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7, 245-274.

[10] M. Katja,(2005). "Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study". Teaching Mathematics and its applications. Volume 24, No. 2-3, pp. 61-74.

[11] Marilyn P. Carlson, (2002). "Physical enactment : a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships". In Hitt F., (ed.), Representations and mathematics visualization. (pp. 63-77). Special issue of PME-NA and Cinvestav-IPN.

[12] N. Balacheff, N. Gaudin (en prensa). "Modeling student's conceptions (the case of functions)". In Hitt F., Holton D. & Thompson P. (Eds), Research in Collegiate in Mathematics Education, Volume VII. USA.

[13] N. Balacheff, N. Gaudin, (2002). "Students conceptions: an introduction to a formal characterization". Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, No. 65, (http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/)

[14] S. Brodetsky, (1919-20). "The Graphical Treatment of Differential Equations". The Mathematical Gazette, IX, (142, p. 377-382, p. 3-8, p. 35-38, 919); X, (146, p. 49-59, 1920).