View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Funes

Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 15, No 2. Marzo – Agosto 2015. ISSN 1659 -0643

Sobre el teorema de Liouville para funciones enteras

Victor A. Cruz B.
victorcruz@mixteco.utm.mx
Instituto de Física y Matemáticas
Universidad Tecnológica de la Mixteca
México

Silvia Reyes Mora
sreyes@mixteco.utm.mx
Instituto de Física y Matemáticas
Universidad Tecnológica de la Mixteca
México

Recibido: Mayo 29, 2014 Aceptado: Diciembre 18, 2014

Resumen. La idea del artículo es presentar las pruebas del teorema de Liouville sobre funciones enteras. En este trabajo recalcamos dos importantes aplicaciones, una en la demostración del teorema fundamental del álgebra y otra en el área de las aplicaciones conformes. El presente contiene una breve nota histórica de la vida de Joseph Liouville y su trabajo. También contiene la versión del teorema de Liouville para funciones doblemente periódicas, funciones armónicas y aplicaciones cuasiconformes.

Palabras clave: Teorema de Liouville, entire functions, analytic functions

Abstract. In this paper we present different demonstrations of the Liouville's theorem on entire functions. We detail how Liouville theorems can be applied to prove the Fundamental Theorem of Algebra and other theorems in the theory of conformal transformations. We include a brief historical note about the life and work of Joseph Liouville. As well as the version of Liouville's theorem for doubly periodic functions, harmonic functions and quasiconformal applications.

KeyWords: Liouvilleś theorem, entire functions, analytic functions

1.1 Nota Histórica e Introducción

En el presente trabajo se expone una nota histórica de la vida de Claude-Joseph Liouville. Además pretende discutir uno de sus teoremas más importantes en la teoría de funciones analíticas a través

Derechos Reservados © 2015 Revista digital Matemática, Educación e Internet (http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/)

del Teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy. También se incluyen demostraciones del teorema fundamental del álgebra y del teorema para funciones periódicas de Lioville. Mostramos, para finalizar, análogos del teorema de Liouville para funciones armónicas y cuasiconformes.

Joseph Liouville nació el 24 de marzo de 1809 en Saint-Omer, en la región norte de Paso de Calais al norte de Francia. Liouville fue hijo del capitán de la armada Claude-Joseph Liouville y de Theresa Balland, ambos miembros de familias nobles de Lorraine. Después de la guerra Napoleónica, su padre se retiró y la familia se estableció en Toul. Fue en este lugar donde Loiuville comenzó sus estudios en lenguas antiguas. Sus estudios sobre matemáticas iniciaron en el *Collège St. Louis* en París. Escribió sus primeros artículos en el área de geometría proyectiva y analítica, pero dichos artículos nunca fueron publicados.

Para ganarse la vida como estudiante, impartió clases en escuelas privadas como el *Institut Debian* ó *Ecole centrale des Arts et Manufactures* combinando esta actividad dando clases particulares. Obtuvo su doctorado en la *Faculté de Sciences* de París en 1827 bajo la dirección de los matemáticos Gaspard de Prony y Siméon Denis Poisson[1] con el trabajo:

> *"Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus, dont on fait usage dans un grand nombre de questions de Mécanique et de Physique, suivi de Sur la figure d'une masse fluide homogène en équilibre, et douée d'un mouvement de rotation."*

Ocupó diversas plazas como profesor, muchas de ellas habían pertenecido a matemáticos como Claude-Louis Navier, Siméon Denis Poisson, Sylvestre François Lacroix, entre otros. Como profesor fue considerado como uno de los más brillantes y originales, lo cual produjo una notable influencia en matemáticos jóvenes de la época como Charles Hermite, Joseph Alfred Serret, Urbain Le Verier, Pierre Bonnet, entre otros.

En 1836 fundó la revista *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* en la cual permaneció como editor hasta 1874. El hecho que Loiuville fuera editor tanto tiempo hizo que la revista fuera conocida como *Journal de Liouville*. Su papel más rescatable al frente de la revista, fue la publicación de los trabajos de Evariste Galois y de los cuales realizó ciertas observaciones para cubrir deficiencias de los escritos.

Liouville no gozaba de buena salud. El verano lo pasaba en Toul donde realizaba su investigación, escribía artículos y realizaba los trabajos de edición de la revista. Durante el periodo de noviembre a julio, residía en París donde se ocupaba de la docencia y de las actividades administrativas.

Fuera de las actividades académicas y de investigación, Liouville participó en actividades políticas. Perteneció a la mayoría republicana moderada al ser elegido como representante para la asamblea constituyente de 1848. Su amigo François Arago [2], quien lo alentaba en las actividades políticas, escribió:

> *" ... Liouville es uno de mis mejores amigos. Una eminencia, un patriota y un experimentado republicano. Dios quiera que la Asamblea Nacional cuente con muchos miembros de este calibre."*

[1]Las fuentes consultadas [18, 12] difieren en cuanto al año y uno de los directores que puede consultarse vía internet en *The Mathematics Genealogy Project*. En *The Mathematics Genealogy Project* se menciona que el año en que obtuvo el doctorado es 1836 y que, además de Poisson, tuvo como director de tesis a Louis Jacques Thenard (véase http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/index.php).

[2]Matemático francés (1786–1853).

Cuando Guglielmo Libri[3] huyó de Francia en 1848 debido a la revolución, su plaza quedó vacante en el *Collège de France*. En ese momento, Augustin-Louis Cauchy[4] y Liouville compitieron por dicho puesto. En una cerrada contienda Liouville ganó la plaza y comenzó su labor académica en el año de 1851.

Podemos decir que Liouville abarcó muchas áreas de la matemática tanto pura como aplicada. Sus primeros trabajos aparecen en electromagnetismo donde desarrolló el cálculo fraccional. Motivado por la época[5], estudió criterios para integrales de funciones algebraicas. Dichos trabajos son anteriores e independientes de los de Niels Henrik Abel, aunque posteriormente reformuló algunos resultados utilizando las ideas de éste.

Posiblemente, el apellido Liouville haya aparecido en nuestros cursos de licenciatura al hablar de números trascendentes. Liouville tuvo interés en esta área al leer las cartas entre Christian Goldbach y Daniel Bernoulli. Ciertamente, intentó demostrar que e era trascendente pero no lo logró. Sin embargo, demostró la existencia de números trascendentes en 1844 construyendo una clase infinita de estos números utilizando fracciones continuas. Posteriormente, removió el uso de fracciones continuas. Un ejemplo de número trascendente, es el llamado *número de Liouville*[6]

$$c = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10^{j!}} = 0.110001000000000000000001000\ldots.$$

Otra área en la que desarrollo su investigación fue en ecuaciones diferenciales parciales con valores en la frontera donde podemos encontrar la *teoría de Sturm-Liouville* para resolver ecuaciones integrales.

En geometría diferencial encontramos resultados de Liouville. Un ejemplo de ello, son las llamadas *superficies de Liouville*. Dichas superficies pueden parametrizarse localmente de manera que su primera forma fundamental puede escribirse como[7]

$$ds^2 = (U(x) + V(y))(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2).$$

[3]Matemático italiano (1803-1869).
[4]Matemático francés (1789-1857).
[5]El desarrollo de la teoría de funciones algebraicas es sumamente interesante y puede consultarse en el libro de Laptev *et. al.* [12], por ejemplo.
[6]Una referencia interesante en este tema, es el libro de Eli Maor [13].
[7]Dichas superficies fueron introducidas por Liouville en la *Note III* de la quinta edición del libro de Gaspard Monge(1746–1818) de título *Application*.

SUR LA DÉCOMPOSITION

des fractions rationnelles, *d'après M. Liouville* (Journal de Mathématiques, t. XI, p. 462; 1846).

I. Soient :

$F(x)=Ax^n+A_1x^{n-1}+\dots A_n$; $fx=Bx^{n-1}+B_1x^{n-2}+\dots B_n$.

Formons l'équation $F(x)+\alpha fx=0$, où α est un paramètre quelconque, mais ne se trouvant ni dans $F(x)$, ni dans $f(x)$; cette équation étant du degré n, désignons ses racines par $x_1, x_2 \dots x_p \dots x_n$; le théorème newtonien sur les coefficients des équations donne :

$$x_1+x_2+\dots x_n=-\frac{A'}{A}-\alpha B.$$

Or, les racines sont évidemment chacune fonction de α ; prenant donc la dérivée de cette dernière équation, on obtient :

$$\frac{dx_1}{d\alpha}+\frac{dx_2}{d\alpha}+\dots\frac{dx_n}{d\alpha}=-B.$$

Le premier membre peut s'écrire symboliquement :

$$\Sigma_1^n\frac{dx_p}{d\alpha}=-B;$$

c'est-à-dire qu'il faut donner à l'indice p successivement les valeurs 1, 2, 3 ... n, et prendre la somme de ces valeurs.

(a) Trabajo de Liouville en *Nouvelles annales de mathématiques.*

LETTRES

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR C.-G.-J. JACOBI.

Nous devons à l'obligeance de M. Alfred Arago la précieuse communication de onze lettres inédites de JACOBI à LEGENDRE sur la théorie des Fonctions Elliptiques. Quoique les découvertes qu'elles contiennent soient aujourd'hui bien connues des Géomètres, ils étudieront sans doute avec un vif intérêt la forme que leur donne l'illustre inventeur; on prendra plaisir à voir Jacobi, avec une modestie digne de son talent, s'incliner devant l'illustre vieillard qu'il a déjà dépassé de si loin, et saluer en même temps par de véritables cris d'admiration les premiers résultats du jeune émule qui vient tout à coup partager sa gloire. « La découverte d'Abel, dit-il, est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux. »

Jacobi seul avait le droit de prononcer un tel jugement, dont la sévérité, sous toute autre plume que la sienne, irait jusqu'à l'injustice.

J. BERTRAND.

Kœnisberg, en Prusse, le 5 août 1827.

MONSIEUR,

Un jeune Géomètre ose vous présenter quelques découvertes faites dans la théorie des Fonctions Elliptiques, auxquelles il a été conduit par l'étude assidue de vos beaux écrits. C'est à vous, Monsieur, que

(b) Trabajo de Jacobi en *Annales scientifiques de l'E. N. S.*

Figura 1.1: Primeras páginas de publicaciones de la época.

Las superficies de Liouville generalizan a las de revolución[8]. En esta misma área, contribuyó al estudio de transformaciones de Möbius en tres dimensiones. Demostró que las aplicaciones conformes en el espacio de tres dimensiones están generadas por las inversiones con respecto a esferas[9](véase [12]). Además obtuvo el resultado que un sistema Hamiltoniano tiene la propiedad de preservar la medida de conjuntos. Dicho resultado es importante en la teoría de la medida y la mecánica estadística.
Por último, mencionaremos la teoría de funciones elípticas. Los creadores de esta teoría son Niels Henrik Abel y Carl Gustav Jacob Jacobi. Abel recomendó el estudio de la propiedad de doble periodicidad de las funciones elípticas. El resultado que nos motiva a estas notas, proviene de la siguiente afirmación presentada por Liouville en 1844 en la *Académie des Sciences*:

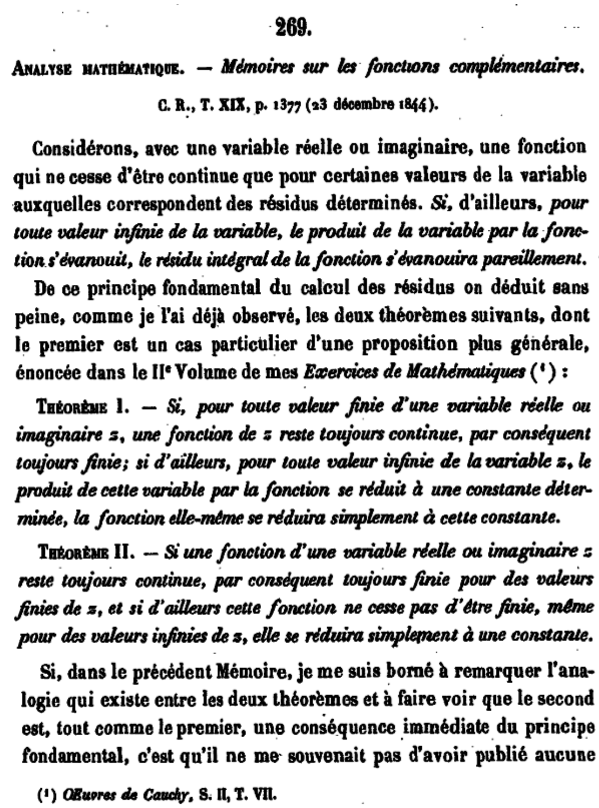
"Una función entera doblemente periódica es constante."

Una generalización del resultado anterior, que se conoce como el *Teorema de Liouville* afirma que:

"Una función entera y acotada es constante."

El resultado realmente se le debe a Augustin-Louis Cauchy y fue publicada en el mismo año[10]. Si bien el resultado se sigue de la teoría de integración desarrollada por Cauchy, Liouville es quien lo descubre y aplica posteriormente (véase [18, 12]).

[8]Para más detalles se sugiere consultar el libro de do Carmo [8].
[9]En el caso del plano se puede demostrar que las transformaciones de Möbius son la composición de cinco tipos de transformaciones elementales (véase e. g. [21]).
[10]Dicho resultado aparece en el segundo tomo de *Exercises de mathématiques* (1827) en la página 277 y en el segundo tomo de *Oeuvres de Cauchy* página 324. La Figura **??** muestra la referencia que apareció en [4].



269.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoires sur les fonctions complémentaires.*

C. R., T. XIX, p. 1377 (23 décembre 1844).

Considérons, avec une variable réelle ou imaginaire, une fonction qui ne cesse d'être continue que pour certaines valeurs de la variable auxquelles correspondent des résidus déterminés. *Si*, d'ailleurs, *pour toute valeur infinie de la variable, le produit de la variable par la fonction s'évanouit, le résidu intégral de la fonction s'évanouira pareillement.*

De ce principe fondamental du calcul des résidus on déduit sans peine, comme je l'ai déjà observé, les deux théorèmes suivants, dont le premier est un cas particulier d'une proposition plus générale, énoncée dans le II[e] Volume de mes *Exercices de Mathématiques* ([1]) :

THÉORÈME I. — *Si, pour toute valeur finie d'une variable réelle ou imaginaire z, une fonction de z reste toujours continue, par conséquent toujours finie; si d'ailleurs, pour toute valeur infinie de la variable z, le produit de cette variable par la fonction se réduit à une constante déterminée, la fonction elle-même se réduira simplement à cette constante.*

THÉORÈME II. — *Si une fonction d'une variable réelle ou imaginaire z reste toujours continue, par conséquent toujours finie pour des valeurs finies de z, et si d'ailleurs cette fonction ne cesse pas d'être finie, même pour des valeurs infinies de z, elle se réduira simplement à une constante.*

Si, dans le précédent Mémoire, je me suis borné à remarquer l'analogie qui existe entre les deux théorèmes et à faire voir que le second est, tout comme le premier, une conséquence immédiate du principe fondamental, c'est qu'il ne me souvenait pas d'avoir publié aucune

([1]) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. VII.

Figura 1.2: Página 378 del trabajo de Cauchy en *Oeuvres complètes*. Sér. 1, T. 8, donde aparece el hoy llamado *teorema de Liouville*

Liouville escribió más de 400 artículos de los cuales se publicaron alrededor de 200 que abarcaron un espectro muy amplio de temas y siendo tanto precursor como un notable motivador para la investigación posterior. Falleció el 8 de septiembre de 1882 en la ciudad de París.

Concluimos aquí esta breve nota histórica sobre la vida de Liouville y su trabajo para dar paso al estudio del teorema de Liouville para funciones enteras.

1.2 Notación y Resultados Preliminares

Definimos el *disco abierto con centro en z y radio r*, denotado por $\mathbb{D}_r(z)$, como el conjunto de todos los w cuya distancia a z es menor que r. Esto es $\mathbb{D}_r(z) = \{w \in \mathbb{C} \colon |z-w| < r\}$. También, definimos el *disco cerrado con centro en z y radio r* como $\overline{\mathbb{D}_r(z)} = \{w \in \mathbb{C} \colon |z-w| \leq r\}$. A su vez, la *frontera del disco* $\mathbb{D}_r(z)$ se denota por $\partial\mathbb{D}_r(z)$ y es el conjunto de puntos $w \in \overline{\mathbb{D}_r(z)} \setminus \mathbb{D}_r(z)$. Se puede ver que $\partial\mathbb{D}_r(z) = \{w \in \mathbb{C} \colon |z-w| = r\}$. Cuando omitamos z en la notación $\mathbb{D}_r(z)$, entenderemos que el disco tiene centro en el origen y lo denotaremos por $\mathbb{D}_r$. Si además, omitimos r, entenderemos que nos referimos al *disco unitario* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. A lo largo de este trabajo, consideraremos funciones definidas en el plano que toman valores complejos $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funciones definidas en un abierto Ω

Derechos Reservados © 2015 Revista digital Matemática, Educación e Internet (http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/)

con valores complejos $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$.

Sea f una función con valores complejos definida en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ y $z = x + iy$ donde $x, y \in \mathbb{R}$. Decimos que f es $\mathbb{C}$-*diferenciable en* a si existe el límite siguiente:

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z+a) - f(a)}{z}. \tag{1.1}$$

En tal caso denotamos al límite como $f'(a)$ y lo llamamos la derivada de f en a. Decimos que f es $\mathbb{C}$-*diferenciable en* Ω si f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a para todo $a \in \Omega$. Si éste es el caso, la función definida en Ω que toma valores en $\mathbb{C}$ y que asocia a cada a el número $f'(a)$, es denotada por f' y se llama la *derivada* de f.

De aquí en adelante, consideraremos que Ω es un *dominio*, es decir, un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$, a menos que se diga algo más al respecto. También, diremos que f es *entera* si $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-diferenciable para todo $a \in \mathbb{C}$.

Sea f una función definida en Ω. Si f es $\mathbb{C}$-diferenciable en $a \in \Omega$, entonces existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ donde éstas se definen por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+ih) - f(a)}{h}.$$

Puede verificarse que se cumplen las relaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = f'(a). \tag{1.2}$$

De (1.2) se sigue que

$$f'(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right). \tag{1.3}$$

Por otra parte, si u, v son las funciones coordenadas de f, se tienen las relaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial u}{\partial y}(a) + i\frac{\partial v}{\partial y}(a). \tag{1.5}$$

Utilizando estas relaciones en (1.2), se obtiene el sistema de ecuaciones conocidas como *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(a), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(a) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(a). \end{cases} \tag{1.6}$$

Si f es $\mathbb{R}$-diferenciable y $f(x,y)=f\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2},\dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
\partial f(a) := \frac{\partial f}{\partial z}(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}(a)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)-i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right), \qquad (1.7)\\
\bar{\partial} f(a) := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}(a)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)+i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right). \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Si f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)=0. \qquad (1.9)$$

Definición 1.1

Una función $f\colon \Omega\to\mathbb{C}$ es *holomorfa en* Ω si f es $\mathbb{C}$-diferenciable en cada punto de Ω. Decimos que f es holomorfa en $a\in\Omega$ si existe un disco $\mathbb{D}_r(a)$ contenido en Ω tal que $f|_{\mathbb{D}_r(a)}$ es holomorfa. Una función $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ que es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ se llama *entera*.

Observemos que el conjunto de todos los puntos donde la función es holomorfa es un abierto en $\mathbb{C}$. Claramente, si f es holomorfa en a, también es $\mathbb{C}$-diferenciable en a. Sin embargo, que la función f sea $\mathbb{C}$-diferenciable en a no implica que sea holomorfa en a; la función $f(z)=x^3y^2+ix^2y^3$ donde $z=x+iy$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en $x=0$ y $y=0$ pero no es holomorfa.

Por otra parte, mediante la *regla de la cadena* para funciones holomorfas se tiene que la composición de funciones holomorfas es holomorfa. En el caso que nos interesa, la composición de funciones enteras es una función entera.

Ahora, definiremos los elementos de la teoría de integración de funciones de variable compleja que utilizaremos para desarrollar este trabajo.

Definición 1.2

Sea $h\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ una trayectoria o curva continua $h(t)=\alpha(t)+i\beta(t)$. Definimos,

$$\int_a^b h(t)\mathrm{d}t=\int_a^b\alpha(t)\mathrm{d}t+i\int_a^b\beta(t)\mathrm{d}t.$$

El siguiente paso es definir la integral de línea para una función con valores complejos.

Definición 1.3

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{C}$ y sean $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva de clase $\mathcal{C}^1$. La integral de f a lo largo de γ se define mediante la relación:

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t. \tag{1.10}$$

Note que la integral está bien definida ya que no depende de la parametrización de la curva. Por último, es bien conocida la desigualdad para integrales:

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_\gamma |f(z)||\mathrm{d}z|.$$

1.3 Teorema de Cauchy y Fórmula Integral de Cauchy

En esta sección consideraremos curvas de clase $\mathcal{C}^1$. Dicha hipótesis puede ser menos restrictiva, por ejemplo considerar *curvas continuamente diferenciables a trozos* ó *rectificables*[11]. Si el lector está interesado en las versiones más generales, sugerimos consultar los libros clásicos [1, 11, 21], por ejemplo.

Por una *curva cerrada simple* entenderemos una curva $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$ y γ no se interseca a sí misma. Un ejemplo de una curva cerrada simple es la curva $\gamma(t) = z + re^{it}$ para $t \in [0,2\pi]$, que es la frontera del disco $\mathbb{D}_r(z)$ orientada positivamente.

Una reformulación del teorema de Green para funciones definidas en dominios del plano complejo que toman valores complejos es el siguiente (véase [6, pág. 9]).

Proposición 1.1 (Teorema de Green).

Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ continuamente diferenciable en Ω cuya frontera es una curva cerrada simple γ. Entonces

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = i\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2i\int_\Omega \bar{\partial} f(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}.$$

A continuación, mostraremos el teorema más importante de la teoría de funciones de la variable compleja. Si bien, ésta no es la formulación más general, nos basta con ella para nuestros propósitos. Sugerimos consultar cualquier libro de variable compleja (e. g. [1, 5, 11, 19, 21]) para formulaciones más generales.

[11] Una curva es *rectificable* si puede aproximarse por suma de poligonales de longitud finita. Véase [5, pág. 62].

Teorema 1.1 (Teorema de Cauchy).

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ curva cerrada simple de clase $\mathcal{C}^1$ tal que tanto la imagen de la curva como su interior estén contenidos en Ω. Entonces

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Bajo las hipótesis dadas, la demostración se sigue de la proposición 1.1 haciendo notar que toda función holomorfa en Ω satisface $\overline{\partial} f \equiv 0$.

Teorema 1.2 (Fórmula Integral de Cauchy).

Sea f holomorfa en Ω que contiene a $\mathbb{D}_r(z)$. Si $\partial\mathbb{D}_r(z)$ está orientada positivamene, entonces para todo $z \in \mathbb{D}_r(z)$ se cumple

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_r(z)} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w. \tag{1.11}$$

Observemos que si $\gamma(t) = z + re^{it}$ con $t \in [0,2\pi]$ es una parametrización de $\partial\mathbb{D}_r(z)$ orientada positivamente, utilizando la definición de integral de línea (1.10) y la fórmula integral de Cauchy (1.11), se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\mathrm{d}t. \tag{1.12}$$

La igualdad (1.12) nos dice que el valor de la función f en z puede encontrarse mediante el promedio de los valores de la función sobre $\mathbb{D}_r(z)$. Consecuencia de lo anterior, es la *desigualdad del valor medio*:

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\partial\mathbb{D}_r(z_0)}, \tag{1.13}$$

donde $\|f\|_{\partial\mathbb{D}_r(z_0)} = \sup\limits_{z\in\partial\mathbb{D}_r(z_0)} |f(z)|$.

Generalizaciones del teorema 1.2 y la desigualdad (1.13) son la *fórmula integral de Cauchy para derivadas* y las *desigualdades de Cauchy* que presentamos a continuación.

Corolario 1.1 (Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas).

Si f es holomorfa en un abierto Ω entonces tiene una infinidad de derivadas en Ω y por tanto cada función derivada es holomorfa. Más aún, si $\overline{\mathbb{D}_r(z)} \subset \Omega$, entonces para todo $a \in \mathbb{D}_r(z)$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_r(z)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathrm{d}w.$$

Corolario 1.2 (Desigualdades de Cauchy).

Sean f holomorfa en Ω y $\overline{\mathbb{D}_r(a)} \subset \Omega$, entonces

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\|f\|_{\partial\mathbb{D}_r(a)}}{r^n}. \tag{1.14}$$

Un resultado, que presentamos sin demostración, es el *Corolario de Morera*. Dicho resultado es un recíproco al teorema de Cauchy que establece que toda función localmente integrable en Ω es holomorfa. En este trabajo sólo nos interesa la siguiente consecuencia.

Proposición 1.2 (Corolario de Morera).

Si Ω es un dominio y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua y holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$, entonces f es holomorfa en Ω.

El teorema de Morera y su corolario aquí presentado pueden consultarse en [5, pág. 86].

1.4 Teorema de Liouville

Generalmente, los libros clásicos de variable compleja demuestran el teorema de Liouville utilizando las desigualdades de Cauchy. La demostración utiliza de forma profunda la teoría de Cauchy. En esta sección presentaremos tres pruebas del teorema de Liouville. La primera corresponde a utilizar el teorema del valor medio y las desigualdades de Cauchy. La segunda está propuesta como ejercicio en [5, pág. 123] y [19, pág. 207]. La tercera está sugerida en el artículo de Osserman [17] y utiliza el lema de Schwarz. Esencialmente, todas las demostraciones utilizan fuertemente el teorema de Cauchy y sus consecuencias.

Teorema 1.3 (Teorema de Liouville).

Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera y acotada, entonces f es constante.

Demostración: *(Primera demostración).* La idea es mostrar que la derivada de f es cero para todo $z \in \mathbb{C}$, de esta manera, f será constante. Para ver esto, recurrimos a la desigualdad de Cauchy (1.14) en el caso $n = 1$, entonces para todo $r > 0$ se tiene

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\|f\|_{\partial\mathbb{D}_r(z_0)}}{r},$$

para todo $z_0 \in \mathbb{C}$. Pero f es acotada por hipótesis, entonces $\|f\|_{\partial\mathbb{D}_r(z_0)} \leq M$ para alguna constante positiva y finita M. Así,

Derechos Reservados © 2015 Revista digital Matemática, Educación e Internet (http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/)

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}.$$

Dado que la desigualdad vale para toda r suficientemente grande, se sigue que $f'(z_0) = 0$. Como z_0 es arbitrario, se tiene que $f'(z) \equiv 0$.

Observemos de la igualdad (1.12), podemos relajar la condición de acotación de f por la acotación de

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \mathrm{d}\theta.$$

De la fórmula integral de Cauchy (teorema 1.2) y el corolario 1.1 podemos concluir que

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r(z)} \frac{f'(w)}{w - z} \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r(z)} \frac{f(w)}{(w - z)^2} \mathrm{d}w. \tag{1.15}$$

Esto implica que la condición que f sea acotada puede cambiarse por que esté acotada la cantidad

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| \mathrm{d}\theta.$$

Demostración. *(Segunda demostración)* Sea $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Para cada $a \in \mathbb{C}$, consideremos el número real positivo R tal que $a \in \mathbb{D}_R$. Entonces, mediante la fórmula integral de Cauchy se tiene:

$$\begin{aligned} f(a) - f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_R} \frac{f(w)}{w - a} \mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_R} \frac{f(w)}{w} \mathrm{d}w \\ &= \frac{a}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_R} \frac{f(w)}{(w - a)w} \mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$|f(a) - f(0)| \leq \frac{|z|MR}{R(R - |z|)} = \frac{M|z|}{(R - |z|)}. \tag{1.16}$$

Haciendo $R \to \infty$ en (1.16), se tiene que $|f(a) - f(0)| = 0$. De esta manera, concluimos que $f(a) = f(0)$ para todo $a \in \mathbb{C}$ y así, la función f es constante.

Para la tercer prueba, enunciamos el *teorema del módulo máximo* y el *lema de Schwarz* en la versión que utilizaremos en este trabajo. Sugerimos consultar el libro de Conway para la demostración del teorema del módulo máximo ([5, pág. 128]) y el lema de Schwarz ([5, pág. 130]).

Teorema 1.4 (Teorema del módulo máximo).

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{C}$ y supongamos que f es continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω. Entonces

$$\max_{z\in\overline{\Omega}}|f(z)| = \max_{z\in\partial\Omega}|f(z)|.$$

Teorema 1.5 (Lema de Schwarz).

Sea $f\colon \mathbb{D}\to\overline{\mathbb{D}}$ holomorfa y tal que $f(0)=0$. Entonces $|f(z)|\leq|z|$ para todo $z\in\mathbb{D}$.

Demostración: Consideremos

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z}, & \text{si } z\neq 0;\\ f'(0), & \text{si } z=0.\end{cases}$$

Por el corolario de Morera 1.2, al función g es holomorfa en $\mathbb{D}$. Sea $0<r<1$ y consideremos $\overline{\mathbb{D}_r}$. Entonces, si $z\in\partial\mathbb{D}_r$, se tiene

$$|g(z)|=\left|\frac{f(z)}{z}\right|=\frac{|f(z)|}{r}\leq\frac{1}{r}.$$

Por el Teorema del módulo máximo conluimos que para todo $z\in\overline{\mathbb{D}_r}$ se cumple

$$|g(z)|\leq\frac{1}{r}.$$

Al hacer r tender a 1 se sigue la afirmación.

Si en el lema de Schwarz (teorema 1.5) se pide adicionalmente que $|f(a)|=|a|$ para algún $a\in\mathbb{D}$ ó se satisfaga que $|f'(0)|=1$, entonces $f(z)=e^{i\theta}z$ para algún $\theta\in\mathbb{R}$.

Notemos que si $f\colon\mathbb{D}_{R_1}\to\mathbb{D}_{R_2}$ es holomorfa y cumple que $f(0)=0$; entonces para todo $z\in\mathbb{D}_{R_1}$ se tiene

$$|f(z)|\leq\frac{R_2}{R_1}|z|. \tag{1.17}$$

La afirmación se sigue aplicando el lema de Schwarz (teorema 1.5) a la función $D_2\circ f\circ D_1(z)$ donde $D_1(z)=R_1 z$ y $D_2(z)=\dfrac{z}{R_2}$.

Demostración: *(Tercera demostración).* Como f es entera y por el corolario 1.1, f' lo es también. Dado que f es acotada, podemos suponer que $f(z)\in\overline{\mathbb{D}}_{R_2}$ para $R_2>0$. De esta manera podemos considerar $f\colon\mathbb{D}_{R_1}\to\mathbb{D}_{R_2}$ y $f'\colon\mathbb{D}_{R_1}\to\mathbb{D}_{R_2}$ que son holomorfas en $\mathbb{D}_{R_1}$.

Aplicando la fórmula de Cauchy a f' y la relación (1.15), se sigue

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_{R_1}} \frac{f(w)}{w^2} \mathrm{d}w \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathbb{D}_{R_1}} \frac{|f(w)|}{|w|^2} |\mathrm{d}w|.$$

Bajo la hipótesis adicional que $f(0) = 0$ y por 1.17 se tiene

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathbb{D}_{R_1}} \frac{R_2}{R_1 |w|} |\mathrm{d}w| = \frac{R_1}{R_2};$$

haciendo $R_2 \to \infty$, se sigue que $f' \equiv 0$ en $\mathbb{D}_{R_1}$. Es decir, f es localmente constante. Pero $\mathbb{C}$ es conexo, así, f es constante.

Proposición 1.3

Si $f \colon \mathbb{D}_R \to \mathbb{C}$ es holomorfa con $|f(z)| \leq M$ para alguna constante $M > 0$, entonces

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{M^2 - \overline{f(0)} f(z)} \right| \leq \frac{|z|}{MR}.$$

Como una aplicación del teorema de Liouville, veamos el siguiente corolario.

Corolario 1.3

Supongamos que f es entera y $\Re e\, f(z) \leq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces f es constante.

Demostración: Consideremos la función $g(z) = e^{f(z)}$. Dicha función es entera por ser la composición de funciones enteras. Observemos que, utilizando la hipótesis, se tiene que $|g(z)| = e^{\Re e\, f(z)} \leq 1$. De esta manera g es una función entera y acotada, por el teorema de Liouville se tiene que g es constante. Pero la función exponencial no es constante lo que implica que f debe ser constante.

Si en lugar de $\Re e\, f(z)$ consideramos $\Im m\, f(z)$, el corolario 1.3 sigue siendo válido. Un caso más interesante de la aplicación del teorema de Liouville es el siguiente.

Proposición 1.4

Sea $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera y $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{f(z)}{z} = 0$, entonces f es constante.

Demostración. Consideremos

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(0)}{z}, & \text{si } z\neq 0;\\ f'(0), & \text{si } z=0.\end{cases}$$

Por el corolario de Morera 1.2, se sigue que g es entera. De la segunda hipótesis se sigue que

$$\lim_{z\to\infty} g(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)-f(0)}{z}=0. \tag{1.18}$$

Esto implica que existe $R>0$ tal que si $z\in\mathbb{D}_R$ entonces

$$|g(z)|\leq M. \tag{1.19}$$

Como g es entera, en particular es continua en $\overline{\mathbb{D}_R}$, entonces existe una constante K positiva tal que

$$|g(z)|\leq K, \tag{1.20}$$

para todo $z\in\overline{\mathbb{D}_R}$. De las desigualdades (1.19) y (1.20) se sigue que g es acotada. Por el Teorema de Liouville 1.3 es constante y por (1.18) se tiene que $g\equiv 0$. Si $z\neq 0$, entonces $f(z)=f(0)$ y de la continuidad de f, concluimos que $f(z)=f(0)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

1.5 Algunas Consecuencias del Teorema de Liouville

En esta sección, veremos algunas aplicaciones del teorema de Liouville. Sin duda alguna, la aplicación más impresionante es la demostración del *teorema fundamental del álgebra* que presentamos aquí. También, veremos brevemente que el plano no puede ser conformemente equivalente al disco $\mathbb{D}$.
El teorema fundamental del álgebra fue demostrado por primera vez por Gauss en su tesis doctoral en 1799. Hoy en día es uno de los teoremas más demostrados después del teorema de Pitágoras[12]. Curiosamente, la demostración del teorema fundamental del álgebra se prueba, en este caso, con análisis complejo. Las ideas para la demostración del teorema fundamental del álgebra pertenecen al libro [9].

Lema 1.0

Sea $p(z)=a_nz^n+\cdots+a_0$ un polinomio con coeficientes complejos de grado $n\geq 1$, entonces, existe $R>0$ tal que para todo $|z|\geq R$ se cumple

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n\leq |p(z)|\leq 2|a_n||z|^n.$$

Demostración. Observemos que por la desigualdad del triángulo se tiene que

[12] El libro *The Pythagorean proposicion* de Elisha Loomis contiene 370 demostraciones del teorema de Pitágoras.

$$|p(z)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j||z^j| + |a_n||z^n|. \tag{1.21}$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|z| \geq 1$, luego $|z|^j \leq |z|^n$ para todo $1 < j < n$. Esto implica que si tomamos $M = \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|$ se tiene,

$$|p(z)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j||z^j| + |a_n||z^n| \leq M|z^{n-1}| + |a_n||z|^n.$$

Sea $R = \text{máx}\left\{1, \dfrac{2M}{|a_n|}\right\}$, entonces

$$|p(z)| \leq \frac{R}{2}|a_n||z^{n-1}| + |a_n||z^n| \leq 2|a_n||z^n|.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} |p(z)| \geq |a_n||z^n| - \sum_{j=0}^{n-1} |a_j||z^{j-1}| & \geq & |a_n||z^n| - \frac{R}{2}|a_n||z^{n-1}| \\ & \geq & |a_n||z^n| - \frac{1}{2}|a_n||z^n| = \frac{|a_n||z^n|}{2}. \end{aligned}$$

Esto termina la demostración.

La desigualdad (1.21) nos dice que para un polinomio p de grado $n \geq 1$ existe un R para el cual se da la desigualdad $|p(z)| \leq 2|a_n||z|^n$. La siguiente proposición nos da un recíproco a dicho resultado.

Proposición 1.5

Consideremos $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera y supongamos que existe $R > 0$ tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para $z \in \mathbb{D}_R$. Entonces f es un polinomio.

Demostración. La función f es un polinomio si $f^{(k)}(z) = 0$ para $k > n$. Para ver que las derivadas de orden k son cero, utilizaremos las desigualdades de Cauchy. Por el corolario 1.1 tenemos

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(z_0)| & \leq & \frac{k!\|f\|_{\partial \mathbb{D}_r(z_0)}}{r^k} \\ & \leq & \frac{k!}{r^k} \sup_{z \in \mathbb{D}_r(z_0)} \{M|z|^n\} \\ & = & \frac{k!M}{r^k} \sup_{z \in \mathbb{D}_r(z_0)} \{|z|^n\} \\ & \leq & \frac{k!M}{r^{k-n}}. \end{aligned}$$

Tomando $r \to \infty$ se sigue la afirmación.

Si en la proposición anterior cambiamos n por $\alpha \in \mathbb{R}$, la conclusión sigue siendo que f es un polinomio de grado $[\alpha]$, donde $[\cdot]$ representa la parte entera de un número.

Teorema 1.6 Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Demostración. Supongamos que $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y consideremos $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$. Por el lema 1.5 tenemos que para todo $0 \leq j < n$ se tiene

$$\frac{|z^j|}{|p(z)|} \leq \frac{K}{|z|^{n-j}},$$

donde $K = \frac{2}{|a_n|}$. Entonces $\lim\limits_{z\to\infty} |f(z)| = 0$ y por tanto, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Esto implica que existe una constante positiva R tal que si $|z| > R$ entonces

$$|f(z)| < \epsilon. \tag{1.22}$$

Por otra parte, como f es holomorfa y en particular continua, se tiene que f está acotada en $\overline{\mathbb{D}_R}$, es decir, para $|z| \leq R$,

$$|f(z)| < M, \tag{1.23}$$

para alguna constante positiva M.Utilizando las desigualdades (1.22) y (1.23) concluimos que f es entera y acotada. Por el teorema de Liouville, la función f es constante y así, el polinomio p también, lo cual es una contradicción.

Otra prueba del teorema fundamental del álgebra que utiliza elementos del análisis complejo, es la que depende del Teorema del Rouchè (véase [9]).

Como consecuencia se tiene que todo polinomio puede factorizarse como producto de funciones lineales. Dejamos de lado el teorema fundamental del álgebra para dar paso a otro teorema fundamental del análisis complejo.

Dados dos conjuntos $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$, podemos preguntarnos si existe una biyección holomorfa entre ellos. Las biyecciones holomorfas se conocen con el nombre de *biholomorfismos* o aplicaciones *conformes*. Si dicha biyección holomorfa existe, entonces diremos que Ω y $\tilde{\Omega}$ son *conformemente equivalentes*.

Una pregunta que podemos hacernos en esta dirección es la siguiente: ¿qué condiciones debe cumplir Ω para garantizar la existencia de una aplicación conforme $f : \Omega \to \mathbb{D}$, es decir, Ω sea conformemente equivalente al disco $\mathbb{D}$?

En el caso que $\Omega = \mathbb{C}$, tendríamos que, si existe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, entonces $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Es decir, f es entera y acotada, por el teorema de Liouville se tiene que $f(z)$ es constante. Por tanto, no puede existir tal biyección holomorfa.

Caracterizar los conjuntos conformemente equivalentes se debe a Riemann y el resultado se conoce como el *Teorema de la Aplicación de Riemann*. Dicho resultado establece que si Ω es un dominio simplemente conexo[13] en la esfera de Riemann[14], entonces Ω es conformemente equivalente a uno y sólo uno de los siguientes conjuntos: la esfera de Riemann, el plano complejo o el disco unitario.

1.6 Funciones periódicas y Teorema de Liouville

Los creadores de la teoría de las funciones elípticas fueron Henrik Abel (1802–1829) y Carl Gustav Joseph Jacobi (1804–1851). En 1835, Jacobi demostró que una función meromorfa[15] no puede tener más de dos periodos y que la relación entre los periodos es un número imaginario (véase e. g. [10] para más detalles). Dicho resultado abrió una nueva línea de investigación: *Determinar todas las funciones periódicas que, como las funciones elípticas, poseen dos periodos.*

En esta dirección, Liouville probó el siguiente resultado.

Teorema 1.7

Toda función entera doblemente periódica es constante.

Dado que las funciones holomorfas en Ω no tienen polos[16], entonces son meromorfas en Ω. Un caso particular, son las funciones enteras que son meromorfas en $\mathbb{C}$.
Decimos que una función meromorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tiene *dos periodos*, si existen dos números complejos ω_1 y ω_2 tales que, si $k = 1,2$ se cumple

$$f(z + \omega_k) = f(z),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Una función que tiene dos periodos se dice *doblemente periódica*. El caso cuando ω_1 y ω_2 son linealmente dependientes sobre $\mathbb{R}$ es poco interesante (véase [16]). Por tanto, se utiliza la hipótesis adicional que ω_1 y ω_2 son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. De esta manera las condiciones de periodicidad se reescriben como:

[13] Un conjunto es simplemente conexo si toda curva es homotópica a un punto.
[14] La esfera de Riemann no es más que $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con una topología adecuada (véase e. g. [5, pág. 8]).
[15] Una función meromorfa es una función holomorfa a excepción de un conjunto finito de singularidades aisladas.
[16] Una función f tiene una singularidad aislada en $z = a$, si existe un $R > 0$ tal que f está definida y es analítica en $\mathbb{D}(a,R) \setminus \{a\}$ pero no en $\mathbb{D}(a,R)$. Si $z = a$ es una singularidad aislada de f, entonces a es un polo de f si

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty;$$

es decir, para $M > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que $|f(z)| \geq M$ cuando $0 < |z - a| < \epsilon$.

$$f(z+n+m\tau)=f(z), \tag{1.24}$$

para todo $z\in\mathbb{C}$ y para todos los enteros n y m, donde $\tau=\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$. De manera natural podemos considerar la celosía en $\mathbb{C}$ definida por

$$\Lambda=\{n+m\tau\in\mathbb{C}\colon n,m\in\mathbb{Z}\}.$$

En este caso decimos que 1 y τ *generan* a Λ. La ecuación (1.24) nos dice que f es constante por traslaciones de elementos de Λ. Asociado a la celosía Λ se tiene el *paralelogramo fundamental* definido por

$$P_0=\{z\in\mathbb{C}\colon z=a+b\tau, a\in[0,1), b\in[0,1)\}.$$

La importancia del paralelogramo fundamental radica en que f queda totalmente determinada por los valores en P_0. Es decir, z y w son congruentes módulo Λ, denotado por $z\sim w$, si $z=w+n+m\tau$ para algunos $n,m\in\mathbb{Z}$. En otras palabras, los puntos z y w difieren en un punto de la celosía o bien, $z-w\in\Lambda$. Por (1.24) concluimos que $f(z)=f(w)$ si $z\sim w$. Se puede ver que cada punto $z\in\mathbb{C}$ es congruente con un único punto en P_0 y entonces f está determinada por estos valores. Un paralelogramo P de periodo P_0 es una traslación del paralelogramo fundamental P_0. Es decir, $P=P_0+h$ con $h\in\mathbb{C}$. De esta manera f queda determinada de manera única por sus valores en un paralelogramo periódico. Observemos que Λ y P_0 cubren al plano complejo

$$\mathbb{C}=\dot{\bigcup}_{n,m\in\mathbb{Z}}(n+m\tau+P_0).$$

Una vez que hemos visto las propiedades de una función periódica, procedemos a la prueba del teorema de Liouville para funciones doblemente periódicas.

Demostración. [Demostración del Teorema de Liouville 1.6] La función está determinada completamente por sus valores en P_0 y por tanto en la cerradura del mismo que es un conjunto compacto. De esta manera tenemos que la función es acotada. Por el teorema de Liouville 1.3, es constante.

Al lector interesado en el tema de funciones elípticas sugerimos consultar el libro [16, capítulo 14].

1.7 Un Teorema de Liouville para aplicaciones cuasiconformes

Es bien conocido que si $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es entera, entonces la parte real y la parte imaginaria satisfacen que su *laplaciano* es igual a cero. Es decir, si $f(z)=u(z)+iv(z)$ donde $u,v\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ entonces:

$$\Delta u(z)=0 \quad \text{y} \quad \Delta v(z)=0,$$

donde Δ es el *operador de Laplace* definido como

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Una consecuencia inmediata del teorema de Liouville 1.3 es que si u es armónica y acotada, entonces es constante. Dicho de otra manera, las funciones armónicas en todo $\mathbb{R}^2$ y que pertenecen al espacio de funciones acotadas $L^\infty(\mathbb{C})$ son constantes.

Un espacio de funciones relacionado con $L^\infty(\mathbb{C})$ son las funciones de *oscilación media acotada*, denotado por sus siglas en inglés $BMO(\mathbb{C})$.

Dicho espacio $BMO(\mathbb{C})$ consiste de todas las funciones localmente integrables u tales que la cantidad

$$\|u\|_* := \sup_D \frac{1}{D}\int_D |u - u_D| < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre todos los discos D contenidos en $\mathbb{C}$. La cantidad u_D es el promedio de la función u sobre el disco D,

$$u_D = \frac{1}{|D|}\int_D u;$$

aquí, $|D|$ denota el área del disco y la integral es de área.

Se conoce que el espacio de funciones $L^\infty(\mathbb{C})$ está contenido en $BMO(\mathbb{C})$ pero no se da la otra contención de conjuntos. Esto nos motiva a preguntarnos si en la versión para funciones armónicas del teorema de Liouville puede relajarse el hecho que $u \in L^\infty(\mathbb{C})$ por $u \in BMO(\mathbb{C})$. El siguiente lema da una respuesta afirmativa a esta pregunta.

Lema 1.0

Sea $h \in BMO(\mathbb{C})$ una función armónica. Entonces h es constante.

Demostración. Consideremos los discos $\mathbb{D}_R(z) \subset \mathbb{D}_{2R} = D$. Por la propiedad del valor medio para funciones armónicas (véase [20, pág. 94]) se tiene que $h(0) = h_D$ independiente del radio del disco. Entonces,

$$\begin{aligned}
|h(z) - h(0)| &= \frac{1}{\pi R^2}\left|\int_{\mathbb{D}_R(z)} (h - h_D)\right| \\
&\leq \frac{1}{4\pi R^2}\int_D |h - h_D| \\
&= 4\|h\|_*.
\end{aligned}$$

De esta manera obtenemos que,

$$|h(z)| \leq |h(0)| + 4\|h\|_*.$$

que muestra que h está acotada. Consideremos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y R grande. Entonces

$$
\begin{aligned}
|h(z_1)-h(z_2)| &= \left|\frac{1}{\pi R^2}\left(\int_{\mathbb{D}_R(z_1)} h \quad - \int_{\mathbb{D}_R(z_2)} h \quad\right)\right| \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\left|\int_{(\mathbb{D}_R(z_1)\cup\mathbb{D}_R(z_2))\setminus(\mathbb{D}_R(z_1)\cap\mathbb{D}_R(z_2))} h \qquad \right| \\
&\leq \frac{\|h\|_\infty}{\pi R^2}|(\mathbb{D}_R(z_1)\cup\mathbb{D}_R(z_2))\setminus(\mathbb{D}_R(z_1)\cap\mathbb{D}_R(z_2))|.
\end{aligned}
$$

Haciendo $R\to\infty$ podemos concluir que h es constante.

La demostración está tomada de [3] y puede generalizarse para funciones armónicas definidas en $\mathbb{R}^n$. Dicha prueba puede consultarse en el artículo de Nelson [15].

Las aplicaciones holomorfas satisfacen $\overline{\partial} f(z)=0$ para toda $z\in\Omega$. Si además satisfacen que $\partial f(z)\neq 0$ se dice que f es conforme. Por tanto podemos concluir que no existen funciones enteras que sean conformes.

Buscamos ahora generalizar la idea de aplicaciones conformes. Dicha generalización se le debe principalmente a Lars. V. Ahlfors. Aquí, presentamos la definición de las aplicaciones cuasiconformes desde el punto vista de las ecuaciones en derivadas parciales. Pueden consultarse las equivalencias de la definición en su forma geométrica y analítica en el libro de Ahlfors [2] (véase también [3]).

Consideremos la *ecuación de Beltrami*

$$\overline{\partial} f(z)=\mu(z)\partial f(z), \tag{1.25}$$

para $z\in\mathbb{C}$ a excepción de un conjunto de medida cero, donde μ es una función medible con soporte compacto que satisface la condición de elipticidad $\|\mu\|_\infty<1$. Las soluciones $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ que pertenecen al espacio de Sobolev[17] $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ se llaman *cuasiregulares*. Si además f es un homeomorfismo, entonces la llamamos *cuasiconforme*.

Claramente, las aplicaciones cuasiregulares y cuasiconformes satisfacen la *desigualdad de distorsión*

$$\left|\overline{\partial} f(z)\right|\leq k\,|\partial f(z)|\,, \tag{1.26}$$

para casi todo $z\in\mathbb{C}$ y donde $\|\mu\|_\infty\leq k<1$. Si adicionalmente f es continua, entonces para $s\in\left(1+k,1+\dfrac{1}{k}\right)$ se cumple la desigualdad de Cacciopoli

$$\|\eta\mathcal{D}f\|_s\leq C_s(k)\|f\,\nabla\eta\|_s; \tag{1.27}$$

[17] Las funciones $f\in L^2(\mathbb{C})$ satisfacen que $\int_{\mathbb{C}}|f|^2<\infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{C})$ es el conjunto de funciones que tanto f como sus derivadas parciales pertenecen a $L^2(\mathbb{C})$.

donde $\|\cdot\|_s$ representa la norma en el espacio[18] $L^s(\mathbb{C})$, η es cualquier función Lipschitz con soporte compacto y $\mathcal{D}f(z) = |\partial f(z)| + |\overline{\partial} f(z)|$.

En este contexto, tenemos la siguiente versión del teorema de Liouville tomada del libro [3].

Teorema 1.8

Supongamos que $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ que satisface la desigualdad de distorsión (1.26). Sea $2 \leq s < 1 + \dfrac{1}{k}$. Si se cumple

$$\int_{\mathbb{D}_R} |f|^s \leq C(1 + R^s),$$

para algunas constantes positivas C y R, entonces f es constante. En particular, si f es acotada entonces es constante.

Demostración. Observemos que f satisface la desigualdad de Cacciopoli (1.27). Elegimos la función de prueba η como

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z \in \mathbb{D}_R; \\ 2 - \dfrac{\log |z|}{\log R}, & \text{si } R \leq |z| \leq R^2; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calculamos el gradiente de η y tenemos que

$$|\nabla \eta(z)| = \begin{cases} \dfrac{1}{|z| \log R}, & \text{si } R \leq |z| \leq R^2; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para $R > 0$, elegimos un entero N tal que $2^{N+1} < R < 2^N$. De esta manera,

[18]El espacio $L^s(\mathbb{C})$, es el conjunto de las funciones que satisfacen $\int_{\mathbb{C}} |f|^s < \infty$.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |f\nabla\eta|^s &= \int_{R<|z|<R^2} \left(\frac{1}{|z|\log R}\right)^s |f(z)|^s \\
&\leq \left(\frac{1}{\log R}\right)^s \sum_{j=1}^{N} \int_{2^{j-1}R<|z|<2^jR} \frac{|f(z)|^s}{|z|^s} \\
&\leq \left(\frac{1}{\log R}\right)^s \sum_{j=1}^{N} 2^s(2^jR)^s C(1+2^{js}R^s) \\
&= \frac{2^{s+1}CN}{(\log R)^s} \leq \frac{2^{s+2}C}{\log 2}(\log R)^{1-s}.
\end{aligned}
$$

Entonces, para $R>0$, la desigualdad de Cacciopoli toma la forma

$$\int_{\mathbb{D}_R} |\mathcal{D}f|^s \leq C(k,s)(\log R)^{1-s},$$

donde $C(k,s)$ es una constante que puede depender de k y s. Como la estimación anterior es válida para todo R suficientemente grande, concluimos que $|\mathcal{D}f| \equiv 0$ y por tanto f es constante.

Otras versiones del teorema de Liouville para funciones cuasiconformes, cuasiregulares, de distorsión finita, entre otras, pueden consultarse en el libro de Astala *et. al.* [3].

1.8 Comentarios finales

A lo largo de este trabajo, esperamos haber motivado el interés por el estudio de ciertos resultados del análisis complejo.

El propósito del mismo fue motivar la revisión de un teorema clásico primeramente situándonos en la época, el resultado a tratar, las visiones o demostraciones que han aparecido y los resultados recientes relacionados.

No nos queda mas que agradecer la oportunidad de presentar este breve recorrido por uno de tantos grandes resultados de la matemática.

Bibliografía

[1] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill. Third edition.

[2] Lars V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings*, volume 38 of *University Lecture Series*. Second edition.

Derechos Reservados © 2015 Revista digital Matemática, Educación e Internet (http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/)

[3] Kari Astala, Tadeusz Iwaniec, and Gaven Martin. *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, volume 48 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[4] Augustin-Louis Cauchy. Mémoires sur les fonctions complémentaires. *Comptes Rendus de L'Académie*, 8:378–383, 1844.

[5] John B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1978.

[6] John B. Conway. *Functions of one complex variable. II*, volume 159 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[7] Victor Cruz. Versiones del Teorema de Cauchy. Master's thesis, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2004.

[8] Manfredo do Carmo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Textos Universitários. Sociedade Brasileira de Matemática, Brasil, 2005.

[9] Benjamin Fine and Gerhard Rosenberger. *The fundamental theorem of algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1997.

[10] Carl G. L. Jacobi. A proof of Liouville's theorem. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 13:55–78, 1835.

[11] Kunihiko Kodaira. *Complex analysis*, volume 107 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. volume edition.

[12] B. L. Laptev, B. A. Rozenfel′d, and A. I. Markushevich. *Mathematics of the 19th century*.

[13] Eli Maor. *e: the story of a number*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[14] Raghavan Narasimhan and Yves Nievergelt. *Complex analysis in one variable*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 2001.

[15] Edward Nelson. A proof of Liouville's theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12:995, 1961.

[16] Rolf Nevanlinna and Veikko Paatero. *Introduction to complex analysis*. second edition.

[17] Robert Osserman. From Schwarz to Pick to Ahlfors and beyond. *Notices Amer. Math. Soc.*, 46(8):868–873, 1999.

[18] Jeanne Peiffer. Joseph Liouville (1809–1882): ses contributions à la théorie des fonctions d'une variable complexe. *Rev. Histoire Sci.*, 36(3-4):209–248, 1983.

[19] Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*, volume 122 of *Graduate Texts in Mathematics*.

[20] Donald Sarason. *Complex function theory*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2007.

[21] Ian Stewart y David Tall. *Complex analysis*. Cambridge University Press.

Derechos Reservados © 2015 Revista digital Matemática, Educación e Internet (http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/)