Molina, M. (2015). *Concepciones del álgebra escolar*. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

CONCEPCIONES DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

En este documento se atiende a las diferentes concepciones que se distinguen del álgebra escolar (en adelante álgebra) en la literatura del área de Educación Matemática.

Son numerosos los autores que han tratado de precisar lo que ellos mismos entienden por álgebra o lo que se entiende como tal en la comunidad de investigadores en educación matemática. La identificación de componentes o concepciones del álgebra ha sido utilizada para proponer diferentes enfoques en la introducción y enseñanza del álgebra escolar y para analizar sus conexiones con otras áreas del currículo. Usiskin (1988), Bednarz, Kieran y Lee (1996), Kaput (1999), Drijvers y Hendrikus (2003), Kaput, Carraher y Blanton (2008) y Drijvers, Goddijn y Kindt (2011) son algunos de los autores que han tratado esta cuestión. Recogemos a continuación las principales concepciones que identificamos a partir del análisis de sus trabajos.

Estas concepciones —también denominadas componentes, enfoques, perspectivas o visiones de forma casi sinónima—, no son disjuntas, existen numerosas relaciones entre las mismas. Así mismo, en la práctica educativa no pueden ser separadas radicalmente debido a que una situación o contexto a menudo provoca actividades algebraicas correspondientes a diferentes visiones del álgebra (Drijvers y Hendrikus, 2003).

El reconocimiento de la multidimensionalidad del álgebra conduce a la adopción de una amplia visión de la misma que, en la actualidad, es ampliamente aceptada y defendida en la comunidad de investigadores. Kaput et al. (2008) argumentan que las concepciones cerradas del álgebra resultan un obstáculo al tratar de identificar modos en que el aprendizaje del álgebra puede partir de las habilidades y conocimientos previos de los estudiantes o puede ser integrado en el currículo de la Educación Primaria. Citando a Bell (1988) y Vergnaud (1989), Bednarz et al. (1996) insisten en que sólo un equilibrio entre las diferentes componentes del álgebra y la consideración de las variadas situaciones que las hacen significativas, pueden permitir a los alumnos comprender en profundidad la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico.

CONCEPCIÓN 1: ARITMÉTICA GENERALIZADA Y ESTUDIO DE PATRONES

Dentro de esta concepción del álgebra, como se pone de manifiesto por el título dado a este epígrafe, podemos distinguir dos componentes. Ambas están basadas en la consideración de la generalización como raíz del álgebra y de la exploración, identificación y expresión de regularidades y patrones como actividades algebraicas. La distinción entre "aritmética generalizada" y "estudio de patrones" radica en diferenciar entre patrones y leyes numéricas relativas a la estructura aritmética, la cuál es en general análoga a la estructura del álgebra, y aquellos patrones asociados a situaciones no numéricas o específicos de situaciones numéricas particulares tales como los números figurados o secuencias como las que se muestran a continuación:

$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$$

En ambos casos interviene la generalización y puede utilizarse el simbolismo algebraico para capturar, revelar y describir los patrones y estructuras, haciendo uso de las letras con el significado de variables, más concretamente de números generalizados. Según cuál de las dos sub-dimensiones de esta concepción queramos destacar en este proyecto utilizaremos el término Estudio de patrones o Aritmética generalizada.

Drijvers y Hendrikus (2003) aluden a esta doble concepción del álgebra al argumentar, por una parte, que el álgebra tiene sus raíces en la aritmética y depende fuertemente de su fundamentación aritmética y, por otra, que la aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente.

Enmarcamos en esta concepción del álgebra las argumentaciones de Gómez (1995), Hewitt (1998) y Mason, Graham y Johnston–Wilder (2005) sobre la conexión entre la aritmética y el álgebra. Gómez (1995) señala que el álgebra generaliza a la aritmética y la aritmética, por su parte, se apropia de su lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis. En términos de Hewitt (1998) y Mason et al. (2005), la aritmética consiste en el aprendizaje de métodos (generalidades implícitas) para hacer cálculos aritméticos y se centra en la obtención del resultado, siendo el álgebra lo que permite encontrar una forma estructurada de obtener dicho resultado. Usiskin (1995) se basa en esta concepción del álgebra para justificar la importancia del aprendizaje del álgebra por todos los estudiantes: "Si haces algo una sola vez, probablemente no necesitas el álgebra. Pero si haces un proceso repetidamente, el álgebra te facilita un lenguaje muy simple para describir lo que estás haciendo" (p. 23).

Una posición extrema de la concepción del álgebra como aritmética generalizada fue defendida por algunos investigadores en el siglo XIX considerando que la construcción y transformación de expresiones algebraicas vienen dadas por las propiedades de la aritmética, y oponiéndose a la consideración del uso algebraico de los números imaginarios, irracionales y negativos al no poder ser interpretados como cantidades (Kieran, 1990).

CONCEPCIÓN 2: FUNCIONES

El álgebra incluye el estudio de relaciones entre variables y, por tanto, de funciones y gráficos (Vergnaud, 1997). Este enfoque sugiere un estudio del álgebra centrado en el desarrollo de experiencias con funciones y familias de funciones en situaciones de la vida real en las que relaciones cuantitativas pueden explicarse por medio de esos modelos (Heid, 1996). En este caso, si interviene el simbolismo algebraico, las letras representan variables con el significado de cantidades cambiantes.

La modelización de fenómenos físicos puede considerarse incluida dentro de esta concepción o de la siguiente.

CONCEPCIÓN 3: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El álgebra es una herramienta potente para la resolución de problemas, en especial los que pueden ser formulados en términos de ecuaciones e inecuaciones. Estos problemas no tienen por qué provenir de las matemáticas en sí mismas; a menudo proceden de otras áreas como la física, economía, vida profesional, etc. En caso de utilizarse simbolismo, las letras tienen el significado de incógnitas y parámetros. Esta concepción del álgebra es la más próxima a los orígenes del álgebra como herramienta privilegiada para la expresión de métodos generales que resuelven clases de problemas (Kieran, 2007).

CONCEPCIÓN 4: ESTUDIO DE ESTRUCTURAS

Usiskin (1988) distingue esta concepción en la que las letras se utilizan en expresiones algebraicas como un objeto arbitrario en una estructura, no siendo necesaria su vinculación a números o cantidades como referentes. El álgebra se entiende aquí como el estudio de estructuras por medio de las propiedades que se le atribuyen a las operaciones con números reales y polinomios. En este sentido tiene una estrecha conexión con la concepción del álgebra como aritmética generalizada. Esta es la perspectiva del álgebra que se aborda, por ejemplo, cuando se trabaja la obtención de expresiones equivalentes (ej., simplificación o manejo de identidades algebraicas) en el contexto de expresiones algebraicas descontextualizadas.

CONCEPCIÓN 5: LENGUAJE ALGEBRAICO

El último enfoque se centra en el lenguaje, considerando el álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, en otras palabras, como un sistema de representación. El álgebra dispone de un lenguaje propio estandarizado con un conjunto de símbolos, signos y reglas para su uso. Este lenguaje expresa acciones en, y relaciones entre, cantidades u otro tipo de números. Es un lenguaje compacto e inequívoco lo que hace que sea altamente aplicable en otras áreas. Se utiliza para representar ideas algebraicas separadas del contexto inicial y concreto del que surgen, ésta es una de sus fortalezas: nos permiten separarnos e incluso olvidar los referentes para producir resultados de forma más eficiente (Arcavi, 1994).

El término lenguaje algebraico es utilizado por algunos autores como Drouhard y Teppo (2004) para referir a una parte del lenguaje matemático formado por simbolismo algebraico, lenguaje natural y representaciones algebraicas compuestas (ej., tablas, diagramas, gráficos,..). Otros en cambio lo utilizan únicamente para referir al simbolismo algebraico. En relación con este segundo significado, es habitual en su análisis el uso de términos lingüísticos como sintaxis o semántica, sin embargo aunque autores como Drouhard (2001) y Kirshner (1987) han demostrado que puede considerarse como un lenguaje, la mayoría de los autores no entran a tratar esta problemática.

Referencias

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense–making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 24-35.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for Seeing*. Harmondsworth, Middlesex: BBC y Penguin Books Ltd.

Bell, A. (1988). Algebra choices in curriculum design. En A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 147-153). Veszprém, Hungary: Ferenc Genzwein OOK.

Drijvers, P., Goddijn, A. y Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. En P. Drijvers (Eds.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Los Países Bajos: Utrecht University.

Drouhard, J.-P. (2001). Research in language aspects of algebra: a turning point? En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 238-242). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Drouhard, J.-P. y Teppo A. R. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12^th^ ICMI study* (227-264). New York, NY: Kluwer.

Gómez, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa. *Suma*, 20, 61-68

Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. En A. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 239-255). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Hewitt, D. (1998). Approaching arithmetic algebraically. *Mathematics Teaching, 163*, 19-29.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Kaput, J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades.* Londres, Reino Unido: Routlege.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 96-112). New York, NY: Cambridge University Press.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–62). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kirshner, D. (1987). *Linguistic analysis of symbolic elementary algebra.* Tesis doctoral, University of British Columbia, Canada.

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. Londres, Reino Unido: The Open University.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn? *American educator, 19*(1), 30-37

Vergnaud, G. (1989). *L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction á l'algébre. Construction des savoirs.* Colloque International Obstacle Epistémologique et conflict Socio – cognitif, CIRADE, Montreal.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. En T. Nuñes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics – an international perspective* (pp. 5-28). East Sussex, Reino Unido: Psychology Press.