CONSIDERACIONES SOBRE CUADRADOS MÁGICOS

Luis Domínguez e Irwin Medina
Instituto Pedagógico Nacional
gabo1658@yahoo.es, irwinmedina@gmail.com

El pasatiempo de los cuadrados mágicos se puede emplear en el aula como objeto de estudio, con el propósito de acercar a los estudiantes al estudio de conceptos aritméticos, algebraicos, geométricos y otros. Al no mantener ajenos estos conceptos al contexto escolar y de diversión de los estudiantes, se puede propiciar el quehacer matemático en el salón de clases. A continuación se exponen algunas consideraciones sobre cuadrados mágicos que pueden llegar a convertirse en ideas para el desarrollo de las clases de geometría a nivel escolar.

PRELIMINARES

Una matriz A de tamaño $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m \cdot n$ números reales dispuestos en m filas y n columnas, escritos entre corchetes como sigue a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde los subíndices indican la fila y la columna de localización en la matriz de cada número real; a los a_{11}, $a_{12}, \dots,$ a_{mn} se les llama elementos o entradas de la matriz. (Si $m = n$, la matriz recibe el nombre de cuadrada). (Jiménez, 2004, p. 2)

Una sucesión aritmética (B_n) es una sucesión de la forma: $b, (b + c), (b + 2c), (b + 3c), (b + 4c), \dots$ es decir,

$$b_1 = b, b_2 = b + c, b_3 = b + 2c, \dots, b_h = b + (h-1)c, \dots, b_n = b + (n-1)c$$

El número $b \in \mathbb{Z}$ corresponde al primer término de la sucesión; $c \in \mathbb{Z}$ y es la diferencia común de la sucesión (Stewart, Redlin y Watson, 2012, p. 795).

Domínguez, L. y Medina, I. (2015). Consideraciones sobre cuadrados mágicos. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 111-118.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Muchos de los estudios sobre cuadrados mágicos se enfocan en la búsqueda de métodos de construcción de los mismos. Uno de los más relevantes, según lo manifiesta Bulajich (2009), lo publicó el matemático, escritor, poeta y diplomático francés Simón de la Loubère en 1693; este método se conoce como siamés o hindú y se utiliza en la construcción de cuadrados mágicos de orden impar, es decir, cuadrados mágicos de lado impar. A continuación, se hará una descripción detallada del método.

Cuadrado mágico

Un cuadrado mágico construido según el método hindú es una matriz de tamaño $n \times n$, con $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, donde sus entradas (a_{11}, $a_{12}, \dots$, a_{mn}) corresponden a los n^2 términos de una sucesión aritmética (B_n), que cumple las siguientes condiciones:

(i) $a_{1(k+1)}$ corresponde al primer término de la sucesión, es decir, b_1.

(ii) Si $b_h = a_{ij}$, entonces $b_{h+1} = a_{(i-1)(j+1)}$, con las siguientes restricciones:

- a) Si $i - 1 = 0$, y $j + 1 \neq 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{(2k+1)(j+1)}$.
- b) Si $i - 1 \neq 0$, y $j + 1 = 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{(i-1)1}$.
- c) Si $i - 1 = 0$, y $j + 1 = 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{2(2k+1)}$.
- d) Si en $a_{(i-1)(j+1)}$se tiene un término de la sucesión b_g tal que $g < h$, entonces $b_{h+1} = a_{(i+1)j}$.

Como consecuencia de lo anterior se cumple que la suma de las entradas pertenecientes a cada fila es igual a la suma de las entradas pertenecientes a cada columna e igual a la suma de las entradas pertenecientes a cada diagonal.

Como ejemplo del método de construcción se presenta el siguiente cuadrado mágico de lado 5, es decir, una matriz 5×5, cuyas entradas son los términos de la sucesión: $15, 13, 11, 9, \dots, -31, -33$ (sucesión cuyo primer término es 15 y de diferencia común -2); así, $k = 2, b = 15, c = -2$.

1) El número 15 corresponde a la entrada a_{13}, de acuerdo a la condición (i).

2) El siguiente término de la sucesión, es decir el número 13, corresponde a la entrada a_{54}, de acuerdo a la restricción a) de la condición (ii).

3) El término 11 corresponde a la entrada a_{45} de acuerdo a la condición (ii) y el siguiente a este, es decir el número 9 se asigna a a_{31}, según se indica en la restricción b) de la condición (ii).

4) El término 7 corresponde a la entrada a_{22} de acuerdo a la condición (ii) y el siguiente término, es decir, el número 5 se asigna a a_{32}, según se indica en la restricción d) de la condición (ii).

5) Los términos de la sucesión 3 a -13 se localizan en forma análoga a los pasos descritos anteriormente. El número -15 corresponde a la entrada a_{25}, según se indica en la restricción c) de la condición (ii).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 15 & 1 & -13 \\ a_{21} & 7 & 3 & -11 & -15 \\ 9 & 5 & -9 & a_{34} & a_{35} \\ -3 & -7 & a_{43} & a_{44} & 11 \\ -5 & a_{52} & a_{53} & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

6) Finalmente, se localizan los términos restantes de la sucesión de acuerdo a las anteriores condiciones, dando como resultado el siguiente cuadrado mágico:

$$\begin{bmatrix} -17 & -31 & 15 & 1 & -13 \\ -29 & 7 & 3 & -11 & -15 \\ 9 & 5 & -9 & -23 & -27 \\ -3 & -7 & -21 & -25 & 11 \\ -5 & -19 & -33 & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que la suma de las entradas de cada una de las filas es igual a la suma de cada una de las columnas y de cada una de las diagonales; siendo este valor de -45.

CONSIDERACIONES

De la construcción a la simetría axial

El método de construcción abordado no es el único para la construcción de cuadrados mágicos de lado impar. Al reflejar el cuadrado respecto a un eje de simetría se encuentran variaciones del método antes descrito.

Primera variación del método

Al reflejar el cuadrado mágico obtenido con la construcción del método descrito al inicio de este documento, con $k = 2$, $b = 1$, $c = 1$, respecto a un eje vertical, se obtiene una primera variación como se registra en la Figura 1.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

15	8	1	24	17
16	14	7	5	23
22	20	13	6	4
3	21	19	12	10
9	2	25	18	11

Figura 1. Reflexión respecto a un eje vertical

Se puede observar que el arreglo matricial resultante de la reflexión conserva las condiciones que lo hacen ser cuadrado mágico, sin embargo, unos cambios pueden evidenciarse en la manera en que debe ser construido, estos son:

(i) $a_{1(k+1)}$ corresponde al primer término de la sucesión, es decir, b_1.

(ii) Si $b_h = a_{ij}$, entonces $b_{h+1} = a_{(i-1)(j-1)}$, con las siguientes restricciones:

a) Si $i - 1 = 0,$ y $j - 1 \neq 0$, entonces $b_{h+1} = a_{(2k+1)(j-1)}$.

b) Si $i - 1 \neq 0,$ y $j - 1 = 0$, entonces $b_{h+1} = a_{(i-1)(2\mathrm{k}+1)}$.

c) Si $i - 1 = 0,$ y $j - 1 = 0$, entonces $b_{h+1} = a_{21}$.

d) Si en $a_{(i-1)(j-1)}$ se tiene un término de la sucesión b_g tal que $g < h$, entonces $b_{h+1} = a_{(i+1)j}$.

Segunda variación del método

La segunda variación que será considerada es la reflexión respecto a un eje horizontal del cuadrado obtenido en la primera reflexión (ver Figura 2).

En este caso, la construcción se modifica así:

(i) $a_{(2k+1)(k+1)}$ corresponde al primer término de la sucesión, es decir, b_1.

(ii) Si $b_h = a_{ij}$, entonces $b_{h+1} = a_{(i+1)(j-1)}$, con las siguientes restricciones:

a) Si $i + 1 = 2k + 2,$ y $j - 1 \neq 0$, entonces $b_{h+1} = a_{1(j-1)}$.

b) Si $i + 1 \neq 2k + 2,$ y $j - 1 = 0$, entonces $b_{h+1} = a_{(i+1)(2k+1)}$.

c) Si $i + 1 = 2k + 2,$ y $j - 1 = 0$, entonces $b_{h+1} = a_{2\mathrm{k},1}$.

d) Si en $a_{(i+1)(j-1)}$ se tiene un término de la sucesión b_g tal que $g < h$, entonces $b_{h+1} = a_{(i-1)j}$.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

15	8	1	24	17
16	14	7	5	23
22	20	13	6	4
3	21	19	12	10
9	2	25	18	11

9	2	25	18	11
3	21	19	12	10
22	20	13	6	4
16	14	7	5	23
15	8	1	24	17

Figura 2. Reflexión respecto a un eje horizontal

Tercera variación del método

El tercer movimiento se realiza haciendo reflexión del cuadrado obtenido en la segunda variación (ver Figura 3), respecto a un eje vertical; en este caso el método de construcción se modifica de la siguiente manera:

(i) $a_{(2k+1)(k+1)}$ corresponde al primer término de la sucesión, es decir, b_1.

(ii) Si $b_h = a_{ij}$, entonces $b_{h+1} = a_{(i+1)(j+1)}$, con las siguientes restricciones:

a) Si $i + 1 = 2k + 2,$ y $j + 1 \neq 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{1(j+1)}$.

b) Si $i + 1 \neq 2k + 2,$ y $j + 1 = 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{(i+1)1}$.

c) Si $i + 1 = 2k + 2,$ y $j + 1 = 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{2\mathrm{k}(2k+1)}$.

d) Si en $a_{(i+1)(j+1)}$ se tiene un término de la sucesión b_g tal que $g < h$, entonces $b_{h+1} = a_{(i-1)j}$.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

15	8	1	24	17
16	14	7	5	23
22	20	13	6	4
3	21	19	12	10
9	2	25	18	11

11	18	25	2	9
10	12	19	21	3
4	6	13	20	22
23	5	7	14	16
17	24	1	8	15

9	2	25	18	11
3	21	19	12	10
22	20	13	6	4
16	14	7	5	23
15	8	1	24	17

Figura 3. Reflexión vertical del segundo movimiento[1]

De la construcción del cuadrado mágico a otra representación

Un cuadrado mágico de $n \times n$, con $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, resulta ser la disposición conveniente de n^2 términos de una sucesión aritmética b_m, sin embargo, no es la única manera de presentar esta sucesión. A continuación, se presenta (ver Figura 4) una representación alterna de la sucesión de términos que componen el cuadrado mágico normal de orden cinco (ver Figura 1).

Esta representación se construye haciendo uso de los elementos de la sucesión y del cuadrado de la siguiente manera:

- En la primera fila se sitúan los términos b_m de la sucesión,
- La columna del lado izquierdo representa los números de cada una de las columnas del cuadrado, para este caso cinco números. La primera columna (C_n), corresponde a los $C_n = k + n(mod\ 2k + 1)$.

[1] Este movimiento es similar a reflejar el cuadrado mágico original sobre el eje horizontal.

- Los símbolos x marcados en cada fila representan los números que se encuentran en cada columna del cuadrado mágico, en el ejemplo, en la columna 5 del cuadrado se encuentran los números $3, 9, 15, 16, 22$.

C_n \ b_m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$C_1 = 3$	x						x						x						x						x
$C_2 = 4$		x						x						x						x	x				
$C_3 = 5$			x						x						x	x						x			
$C_4 = 1$				x						x	x						x						x		
$C_5 = 2$					x	x						x						x						x	

Figura 4. Representación del cuadrado mágico de orden cinco

CONCLUSIONES

El estudio de los cuadrados mágicos de orden impar y su construcción por el método hindú se podría abordar en la escuela, haciendo uso de un lenguaje menos formal. A continuación se presenta una propuesta. La descripción de la construcción del método hindú puede ser:

(i) El primer número se ubica en la mitad de la primera fila.

(ii) El número siguiente se ubica en la celda ubicada arriba a la derecha, teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

a) Si el número se sale del cuadrado mágico por las filas, entonces el número se ubicará en la última fila avanzando una columna.

b) Si el número se sale del cuadrado mágico por las columnas, entonces el número se ubicará en la siguiente fila y primera columna.

c) Si el número se sale tanto por las filas como por las columnas, entonces el número se ubicará en la siguiente fila y misma columna.

d) Si la casilla en la que el número se ubicará se encuentra ocupada, entonces el número se ubicará en la siguiente fila conservando la columna.

En el Instituto Pedagógico Nacional se proponen espacios de orientación llamados *talleres* en los que participan estudiantes del grado sexto a noveno. En uno de estos espacios se presentaron algunos cuadrados mágicos construidos mediante el método hindú. Se les pidió, entre otras cosas, que encontraran una manera general de construir un cuadrado mágico de lado impar. Luego de discutir en clase algunos de los resultados hallados por los estudiantes, se obtuvieron pasos similares a los descritos en la primera conclusión, sin embargo, por "economía" los discentes describen la construcción realizada como "diagonal derecha hacia arriba o abajo".

Teniendo en cuenta el lenguaje "económico" de los estudiantes, la descripción de la construcción de los cuadrados mágicos al ser reflejados sería: Primera variación: "diagonal izquierda hacia arriba o abajo". Segunda variación: "diagonal izquierda hacia abajo o arriba". Tercera variación: "diagonal derecha hacia abajo o arriba".

El método de construcción hindú y las variaciones estudiadas pueden ser consideradas como operaciones definidas en el conjunto de los cuadrados mágicos. Es natural, entonces, preguntarnos por las propiedades que cumpliría una estructura algebraica así definida.

En la representación alterna descrita en este documento es posible encontrar regularidades relacionadas con la ubicación y cantidad de marcas por fila. Regularidades que podrían resultar útiles para abordar procesos de generalización, y para estudiar sucesiones en la educación básica secundaria.

Reconociendo los patrones encontrados en la representación alterna es posible obtener una descripción distinta del método hindú.

Por la experiencia obtenida en el espacio de taller desarrollado en el Instituto Pedagógico Nacional, hemos podido mostrar que el estudio de objetos matemáticos no habituales en la escuela, como los cuadrados mágicos, resulta interesante a los estudiantes, lo que los mantiene motivados y permite su acercamiento al quehacer matemático en el aula.

REFERENCIAS

Bulajich, R. (2009, septiembre 7). Construcción de cuadrados mágicos (usando el método de Loubère). *La Unión de Morelos*, pp. 34-35.

Jiménez, J. (2004). *Notas de clase. Álgebra Lineal II (con aplicaciones en estadística)*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (sexta edición). México D.F., México: Editorial Cengage.