



# MÓDULO 5

## ANÁLISIS DE ACTUACIÓN

Isabel M<sup>a</sup> Romero y Pedro Gómez

El análisis de actuación corresponde al cuarto y último de los análisis que componen el análisis didáctico. Con él, se cierra un ciclo de análisis y se enlaza con el comienzo de un nuevo ciclo. El interés de este módulo se centra en la planificación del seguimiento del aprendizaje de los estudiantes y del propio proceso de enseñanza durante la implementación de lo planificado en el análisis de instrucción, con objeto de comparar las previsiones que se han hecho en dicha planificación con lo que sucederá cuando ésta se lleve a cabo en el aula. Esta comparación redundará en ajustes puntuales de la planificación durante el mismo proceso de instrucción, así como en reformulaciones globales, de cara a un nuevo ciclo de análisis didáctico.

De las componentes curriculares, el análisis de actuación está vinculado a la evaluación (interna o de aula), si bien no es equivalente a ella. Dependiendo de la concepción que los profesores tengan de la evaluación, la relación entre estos dos procedimientos puede ser más o menos estrecha. En este módulo, incidiremos en la idea de evaluación formativa, que nos servirá de base para la planificación del análisis y para su realización a lo largo de la implementación. Además, el análisis de actuación contempla la revisión de todo el proceso posterior a la implementación de la unidad didáctica, con objeto de contribuir al siguiente ciclo del análisis didáctico.

Así, el análisis de actuación consta de tres partes: (a) la planificación del análisis, (b) el análisis a lo largo de la implementación y (c) el análisis a posteriori. En este módulo, previo a la implementación, se planificará todo lo necesario para la recogida de los datos y para su análisis a lo largo de la implementación. Los principios y procedimientos de la evaluación formativa nos servirán de base para hacerlo. La comparación global de lo planificado con lo acaecido en el aula, así como las reformulaciones pertinentes, se llevará a cabo en los módulos siguientes, una vez implementadas las unidades didácticas.

## 1. IMPORTANCIA DE LA EVALUACIÓN EN EL CURRÍCULO

La preocupación por la mejora efectiva de la enseñanza de las matemáticas ha propiciado el desarrollo de propuestas fundamentadas para producir un aprendizaje significativo en el alumnado. Las transformaciones que promueven dichas propuestas han incidido de un modo u otro en los distintos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje: la concepción del currículo, la organización de los contenidos, el desarrollo de capacidades y competencias por parte de los estudiantes, la organización de actividades, la resolución de problemas, y el fomento de la comunicación en el aula, entre otras. Ahora bien, los cambios propuestos en la manera de concebir el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas tienen que venir acompañados de un cambio acorde en la evaluación. Esto es así porque la evaluación es, probablemente, la actividad de la enseñanza que muestra de forma más clara a qué se le concede importancia realmente. Aquello a lo que el profesor da importancia es percibido también por los estudiantes, que actúan en consecuencia y adaptan a la evaluación sus estrategias de aprendizaje. Por ello, la forma en la que el profesor elige evaluar a sus estudiantes tiene un impacto importante en su experiencia matemática y, por ende, en su visión de las matemáticas (p. ej., qué son, qué significa saber matemáticas o para qué sirven). Los expertos sustentan estas ideas. Por ejemplo, Boud (1988) sostiene que los métodos y requisitos de la evaluación probablemente tienen más influencia en cómo y qué aprenden los estudiantes, que cualquier otro factor individual. Por su parte, Harlen y Winter (2004) destacan la importancia de la evaluación en el aprendizaje: “La evidencia de que mejorar la práctica de la evaluación para el aprendizaje puede tener un efecto dramático en el logro académico de los estudiantes significa que se puede ganar mucho con un análisis cuidadoso de lo que está implicado en ella” (p. 391).

A pesar de lo que sugieren los expertos, en un número sorprendente de casos, profesores que propugnan una visión constructivista del aprendizaje —evidenciada en la estructura de la lección, las tareas seleccionadas, el respeto por el pensamiento del estudiante y el cuidado en propiciar un ambiente de clase favorecedor de la comunicación matemática— no traducen esta visión en cambios en la selección y calificación de las tareas de evaluación, de tal manera que propicien la valoración de la comprensión de los estudiantes (Webb, 2004). De hecho, incluso cuando en el currículo implementado hay oportunidades para hacerlo, los profesores a menudo eligen excluir como actividades de evaluación aquellas destinadas a promover razonamiento, comprensión, comunicación y resolución de problemas no rutinarios. En su lugar, siguen utilizando tareas relativas a destrezas, más fáciles de calificar. Sin embargo, la forma de practicar la evaluación potencia o debilita un tipo de operaciones intelectuales. Si se pide que se jerarquicen por orden de complejidad intelectual las siguientes tareas (todas importantes y necesarias), el orden tendrá carácter descendente: memorizar, aprender algoritmos, comprender, estructurar, comparar, analizar, argumentar, investigar, crear. Ahora bien, si se observa qué lugar ocupan estas tareas en las pruebas y exigencias habituales de evaluación, probablemente el orden esté invertido. Así, al producirse una simplificación de la evaluación, esta estará puesta al servicio de las tareas intelectualmente más pobres. Deberíamos preguntarnos: ¿Cómo se seleccionan los contenidos evaluables? ¿Por qué sólo conocimientos y destrezas? ¿Qué tipo de conocimientos y destrezas? ¿Por qué no actitudes (incluyendo, entre otras, la sistematización, la flexibilidad de pensamiento, el rigor, la creatividad)? ¿Y qué valores?

Aparte de los requerimientos institucionales en materia de evaluación, en la mayoría de los casos, la evaluación es un proceso local, no estandarizado e idiosincrásico a las creencias, conocimientos y experiencia de los profesores. No obstante, de lo anteriormente expuesto, se deriva que el cambio en las prácticas de evaluación de los profesores está directamente vinculado al cambio en sus creencias sobre la evaluación y no se sigue automáticamente del cambio en sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje.

Ahora bien, los métodos de evaluación que tradicionalmente usan los profesores no son efectivos para promover un buen aprendizaje. Las prácticas de calificar y poner notas tienden a enfatizar la competitividad más que la mejora personal, y la realimentación de esta evaluación tiene a menudo un impacto negativo, particularmente en estudiantes con bajo nivel de rendimiento, que son llevados a pensar que carecen de habilidad y que no pueden aprender (Webb, 2004, p. 17). Por otra parte, el impacto en los estudiantes que obtienen resultados positivos puede estar reforzando un aprendizaje poco significativo, encaminado a satisfacer expectativas ajenas. En cualquier caso, en las situaciones de evaluación tradicionales, los estudiantes suelen trabajar “bajo presión” y en esta circunstancia sus “ganas de aprender” se encuentran en peligro. Ante la presión, los estudiantes adoptan naturalmente posiciones estratégicas en su aprendizaje y se concentran, sobre todo, en aquello que va a ser evaluado.

Cuando la evaluación se realiza adecuadamente, puede ser motivadora y productiva para los estudiantes, ya que les ayuda a saber si lo que están haciendo es apropiado o si necesitan hacer algo más, o algo diferente. Por otro lado, a los profesores les proporciona los indicadores de actuación que necesitan. Se puede argumentar que una de las cosas más útiles que, como profesores, podemos hacer para influenciar positivamente los procesos de aprendizaje y enseñanza es elegir correctamente el diseño de la estrategia de evaluación adecuada a los propósitos (Brown y Glasner, 2003). De ello se deriva que la evaluación sea un instrumento clave para propiciar los cambios deseados en las otras componentes curriculares.

La evaluación formativa tiene por objetivo propiciar un aprendizaje en los estudiantes en consonancia con los planteamientos del modelo de enseñanza-aprendizaje constructivista. A continuación, nos extenderemos sobre los planteamientos de este modelo de evaluación.

## 2. EVALUACIÓN FORMATIVA

*La evaluación en el aula es más que simplemente una prueba al final de la instrucción para ver el rendimiento de los estudiantes en condiciones especiales, [sino que] es más bien una parte integral de la instrucción que informa y guía a los profesores cuando toman decisiones sobre la instrucción (NCTM, 2000, p. 22).*

Para conseguir que un sistema de evaluación se adecue a su propósito, es útil formular las siguientes preguntas.

- ◆ ¿Para qué evaluamos?
- ◆ ¿Qué evaluamos?
- ◆ ¿Quiénes evaluamos?
- ◆ ¿Cómo evaluamos?

## ◆ ¿Cuándo evaluamos?

Estas preguntas nos proporcionan una guía para elegir los sistemas de evaluación que funcionan. A continuación, consideraremos cada una de estas preguntas clásicas e intentaremos darles una respuesta breve, oponiendo una visión tradicional de la evaluación a una perspectiva formativa.

### **2.1. ¿Para qué evaluamos?**

En la evaluación tradicional, el propósito es determinar qué estudiantes tienen los conocimientos requeridos y cuáles no, y asignar calificaciones de acuerdo con ello. Este tipo de evaluación tiende a convertirse en un mecanismo de control, de selección, de comparación y de medición. De esta forma, las instituciones se convierten en filtros sociales que han de clasificar a los sujetos en función de sus capacidades. En la evaluación formativa, se evalúa para promover un aprendizaje matemático con comprensión en los estudiantes y para mejorar nuestro proceso de enseñanza. Nótese que pasamos de una evaluación del aprendizaje a una evaluación para el aprendizaje. El fin último es ayudar a las personas a que crezcan y lleguen a sus máximas posibilidades.

### **2.2. ¿Qué evaluamos?**

En la evaluación tradicional, se pone el énfasis en evaluar hechos específicos y destrezas aisladas, en forma de algoritmos y resolución de tareas rutinarias, a expensas de la comprensión, las conexiones y la resolución de problemas. La evaluación formativa amplía el espectro, al incorporar la valoración de procesos de pensamiento, estrategias seguidas para la resolución de problemas, uso de materiales y recursos, habilidades de comunicación oral y escrita, actitudes, y comportamientos, entre otros. Por otra parte, la enseñanza del profesor también puede ser objeto de evaluación. En nuestro caso, todo el análisis de actuación está encaminado a la evaluación de esa enseñanza, en términos de su planificación e implementación.

### **2.3. ¿Quiénes evaluamos?**

La evaluación tradicional supone que, en la clase, sólo el profesor puede evaluar adecuadamente el progreso de los estudiantes. Sin embargo, las experiencias avalan que la evaluación más efectiva de todas es la que uno realiza de su propio aprendizaje. Una de las capacidades más valiosas que un estudiante puede adquirir es la habilidad de mirar atrás y reflexionar sobre lo que ha hecho y sobre lo que todavía le queda por hacer. El hábito de autoevaluarse está relacionado con el desarrollo del potencial de aprendizaje continuo, a lo largo de la vida. De ahí que la evaluación formativa incorpore a los estudiantes en el proceso y se responsabilice de que adquieran esa capacidad. Además, los estudiantes pueden desarrollar la capacidad de evaluar a sus compañeros (evaluación por pares o coevaluación) y al profesor. No incidiremos de forma explícita en estos tipos de evaluación.

### **2.4. ¿Cómo evaluamos?**

La evaluación tradicional se apoya mayormente en los controles y exámenes para evaluar. Sin embargo, la formulación habitual de estas pruebas suele forzar a los estudiantes a aprender de forma superficial y los profesores están a menudo cansados y aburridos cuando realizan las correcciones.

La evaluación formativa supone que los estudiantes, desde las primeras etapas de su aprendizaje, necesitan tener una guía de cómo lo están haciendo, de cómo pueden avanzar y de cómo pueden superar los obstáculos que se lo impiden. Los exámenes pueden ser un elemento muy útil dentro de un sistema mixto de evaluación, pero un examen formal, con calificaciones numéricas, no es suficiente para proporcionar a los estudiantes la guía que necesitan. Se deben incorporar otros formatos: tareas que puedan hacer visible el pensamiento de los estudiantes, formulación de preguntas que propicien la reflexión, fomento de la comunicación en el aula, trabajos escritos y diarios de los estudiantes, realimentación a los estudiantes a través de comentarios y a lo largo del proceso, registros de la observación de lo sucedido en la clase, y autoevaluaciones, entre otros.

En cualquier caso, los pilares sobre los que se asienta la evaluación son el criterio y la evidencia. Si hay que realizar juicios, entonces los criterios que hay que utilizar necesitan ser explícitos y compartidos. Además, debemos buscar evidencias de los progresos conseguidos, de acuerdo con dichos criterios. En los instrumentos de evaluación que se diseñarán en ese módulo trabajaremos sistemáticamente la formulación de criterios de evaluación y la manera de compararlos con los estudiantes. Además, avanzaremos en la detección de indicadores para esos criterios, que habrá de llevarse a cabo durante la implementación de la unidad didáctica.

## 2.5. ¿Cuándo evaluamos?

La evaluación tradicional parte de la idea de que primero enseñamos y luego evaluamos. La evaluación formativa tiende, cada vez más, a difuminar los límites entre instrucción y evaluación, al extraer información relevante de las tareas de la instrucción y proporcionar instrucción adicional a través de las tareas específicas de evaluación. Los mejores exámenes también enseñan y las mejores tareas de instrucción son oportunidades ricas de diagnóstico. De esta forma, la evaluación se integra en la instrucción y se concibe como un permanente proceso reflexivo, por parte de profesor y estudiantes, apoyado en evidencias de diverso tipo. Nótese que esto es diferente de la evaluación continua entendida como una suma de calificaciones obtenidas a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Esta concepción de la evaluación coincide con las consideraciones de los *Estándares del NCTM para la evaluación de las matemáticas estudiantes* (NCTM, 1995), que recomiendan dirigirse hacia las siguientes cuestiones.

- ◆ El uso de los resultados de la evaluación para asegurar que todos los estudiantes tienen la oportunidad de desarrollar su potencial. Para ello, necesitan recibir una realimentación que les permita saber cómo mejorar su trabajo y avanzar en su aprendizaje.
- ◆ La evaluación de la capacidad matemática global de los estudiantes, al proporcionarles múltiples oportunidades para demostrarla.
- ◆ La visión de los estudiantes como participantes activos en el proceso de evaluación.
- ◆ La comparación del progreso de los estudiantes con criterios establecidos, cuya comprensión debe ser compartida por profesor y estudiantes.
- ◆ El uso de múltiples fuentes de evidencia.
- ◆ La coherencia de la evaluación con el currículo y la instrucción.

- ◆ La consideración de la evaluación como un proceso continuo y recursivo, en el que la información recogida sobre los procesos y productos del aprendizaje se utiliza para reajustar tanto la enseñanza, como el aprendizaje.

Como profesores comprometidos con el aprendizaje de nuestros estudiantes, nos conviene saber que la investigación muestra que este tipo de evaluación beneficia a todos los estudiantes, pero con mayor intensidad a los estudiantes de bajo rendimiento (Harlen y Winter, 2004). De esta manera, la evaluación formativa contribuye a reducir la brecha entre los estudiantes de alto y bajo rendimiento.

En lo que sigue, trataremos de aplicar las ideas formuladas para articular el análisis de actuación, en sus dos primeras etapas: planificación y análisis durante la implementación. Para ello, tendremos en cuenta una última, pero no menos importante, recomendación para la evaluación: que tenga un tamaño (en tiempo y evidencia recogida y analizada) manejable para profesores y estudiantes, sin prolongarse más allá de unos límites razonables.

### 3. PROPÓSITOS DEL ANÁLISIS DE ACTUACIÓN

Con el análisis de actuación se pretende establecer:

1. en qué medida los estudiantes alcanzan los objetivos de aprendizaje;
2. en qué medida y de qué manera las tareas propuestas contribuyen al logro de esos objetivos de aprendizaje y a la superación de los errores y las dificultades previstas; y
3. en qué medida y de qué manera el diseño y la implementación de la unidad didáctica contribuyen al desarrollo del aprendizaje deseado.

Además, se pretende apoyar a los estudiantes en el logro de los objetivos de aprendizaje, al identificar los caminos de aprendizaje que realizan (incluyendo los errores en que incurren) y utilizar esta información para ayudarles a avanzar. Por lo tanto, el análisis de actuación, al igual que la evaluación formativa, se lleva a cabo con el fin de promover el aprendizaje matemático de los estudiantes, así como de mejorar nuestra enseñanza.

Cuando se trata de concretar lo que significa promover el aprendizaje matemático en el análisis de actuación, resulta de utilidad formular expectativas de lo que es posible que ocurra en el aula cuando se implementen las unidades didácticas diseñadas. En principio, lo que es probable que ocurra es que los estudiantes:

- ◆ compartan en alguna medida las metas educativas con el profesor;
- ◆ recorran caminos de aprendizaje (más o menos coincidentes con los que se habían previsto);
- ◆ incurran en errores y tengan dificultades;
- ◆ activen determinadas secuencias de capacidades y desarrollen determinadas competencias;
- ◆ logren, en mayor o menor medida, los objetivos de aprendizaje previstos;
- ◆ tengan distinto nivel de implicación, motivación, interés; e

- ◆ interactúen y se comuniquen matemáticamente de distintas maneras (y con distinta eficiencia) con el profesor y entre ellos.

Lo que parece claro que ocurrirá, en cualquier caso, es que los estudiantes alcanzarán distinto nivel de desarrollo, dependiendo de múltiples factores. Y, para un profesor, promover el desarrollo del aprendizaje matemático de sus estudiantes es intentar potenciar al máximo el aprendizaje de cada uno en particular. ¿Qué expectativas y qué metas, podrían plantearse en este sentido para cada estudiante? Proponemos las siguientes.

1. Que avance lo más posible en cuanto al logro de los objetivos de aprendizaje, al conseguir al menos un nivel básico de dominio (habría que determinar qué significa este nivel básico), y que progrese en el desarrollo de las competencias previstas por el profesor para el tema. Esto implica que supere las limitaciones de aprendizaje que le impiden avanzar en cada momento.
2. Que evolucione apropiadamente en su manera de comunicarse matemáticamente con el profesor y con los compañeros.
3. Que avance en el logro de las expectativas afectivas previstas, al implicarse en su proceso de aprendizaje, asumir el protagonismo del mismo y sentirse motivado para avanzar.

Con objeto de promover el aprendizaje de los estudiantes en los términos antes descritos, se ha realizado el diseño de la unidad didáctica, al planificar tareas encaminadas a estimular en ellos el logro de los objetivos de aprendizaje y la superación de sus errores y dificultades. En el análisis de instrucción, se incidió en varios aspectos en términos de enseñanza, destinados a analizar y enriquecer las tareas diseñadas en los análisis previos, así como a organizar su gestión y la de la unidad didáctica durante la implementación. Entre estos aspectos, destacamos el uso de materiales y recursos, la introducción de tareas complejas y problemas, el agrupamiento de los estudiantes, la gestión de la interacción y la comunicación en el aula, así como la organización espacio-temporal de cada tarea y de la unidad didáctica en su conjunto. A cada profesor le será útil formular sus expectativas para su clase concreta con respecto a la unidad didáctica diseñada (tareas, materiales y recursos, organización de la secuencia de tareas, entre otros) y con respecto a la propia actuación (motivación que pretende lograr en los estudiantes, tipo de interacción y de comunicación que será capaz de promover, flexibilidad ante los imprevistos, entre otros).

#### 4. BASES DEL ANÁLISIS DE ACTUACIÓN

Con motivo de las reflexiones realizadas a propósito de la evaluación formativa y sus implicaciones para la enseñanza, resulta oportuno realizar algunas adiciones al proceso de instrucción que se diseñó en el módulo anterior. Así, por ejemplo, la participación de los estudiantes en el proceso de evaluación implica compartir con ellos, desde el inicio, las metas que se persiguen y los criterios para valorar en qué medida se consiguen. Por otra parte, la necesidad de observar los procesos de pensamiento de los estudiantes, para valorar la adecuación de nuestras previsiones cognitivas y para ayudarles en su progreso, demanda la revisión de las tareas y del proceso de enseñanza. Las tareas deben generar procesos de reflexión y comunicación que pongan de manifiesto el pensamiento de los estudiantes al desarrollarlas. Por último, llamaremos la atención so-

bre un proceso transversal que deber permear toda la evaluación: la realimentación al alumnado. A continuación, abordaremos cada uno de estos puntos, que sientan las bases del análisis de actuación.

#### 4.1. Compartir metas

Para tomar parte activa en su aprendizaje, los estudiantes necesitan saber cuáles son las metas o los objetivos que se persiguen. Además, necesitan conocer los criterios mediante los cuales se valorará la calidad del aprendizaje, porque una cosa es saber hacia dónde han de ir, y otra, es saber si lo están haciendo bien. En el análisis cognitivo, se identificaron y concretaron los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. Estos objetivos de aprendizaje se caracterizaron en términos de grafos de secuencias de capacidades. Cada secuencia de capacidades tiene un significado dentro del proceso de resolución de las tareas que caracterizan el objetivo de aprendizaje. Este significado nos permite formular criterios de logro, que servirán de indicadores en la progresión que el estudiante puede realizar para lograr el objetivo de aprendizaje. El compartir con el alumnado esta información en una forma que ellos puedan comprender, es la base para que puedan realizar una autoevaluación de su aprendizaje, desarrollando así la responsabilidad sobre el mismo y la competencia de “aprender a aprender”.

En Gómez, González y Romero (2014), explicamos el procedimiento anterior. Utilizaremos material de este artículo para desarrollarlo en estos apuntes. El ejemplo presentado en el artículo gira en torno al tema “Permutaciones sin repetición” para estudiantes de 16 años. Dentro de ese tema, el objetivo 3 se enuncia de la siguiente manera: “Establecer la cantidad de permutaciones sin repetición posibles en un conjunto dado”.

Al seguir las indicaciones propuestas en el módulo de análisis cognitivo, se produce un grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje. La descripción de las capacidades y los errores que se incluyen en este grafo se encuentran en el anexo 1.

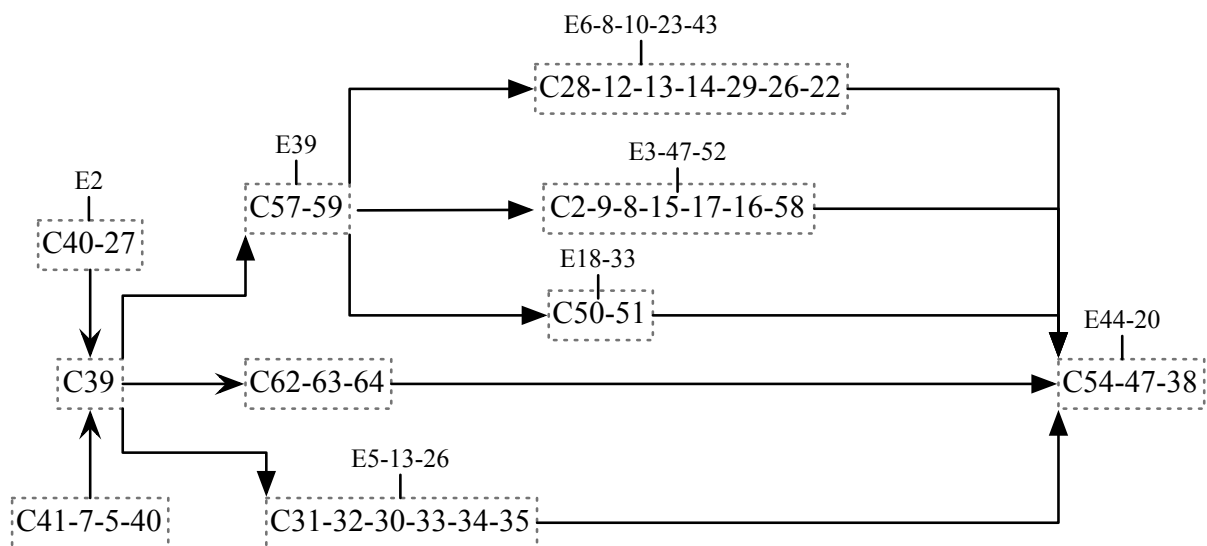


Figura 1. Grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje 3



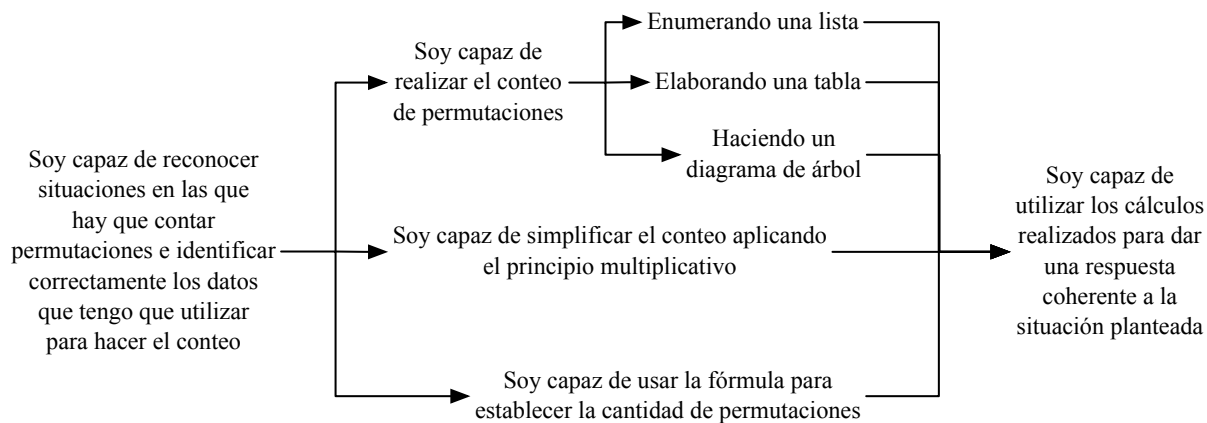
En el grafo de la figura 1, las dos primeras secuencias de capacidades, C40-27 y C41-7-5-40, corresponden a identificar en el enunciado que el problema se resolverá mediante permutaciones y a extraer los datos necesarios para realizar el cálculo. Estas secuencias de capacidades corresponden al inicio de todas las tareas el objetivo. En ese momento, se prevé que los estudiantes puedan incurrir en el error de tomar elementos repetidos para realizar el cálculo de permutaciones (E2). Aparecen seguidas de C39 en todas las tareas, punto en el que los estudiantes deciden si utilizarán un método de cálculo directo o indirecto. Si el cálculo es directo, la secuencia de capacidades C57-59 representa la decisión sobre el sistema de representación en el que se hace conteo y los procedimientos consiguientes. Si el conteo es indirecto, se prevén dos métodos, representados por las secuencias de capacidades C62-63-64 y C31-32-30-33-34-35, que corresponden al empleo del principio multiplicativo y al cálculo mediante la fórmula, respectivamente. En ese momento se prevé que los estudiantes puedan incurrir en errores relacionados con un mal uso de la fórmula, como confundir parámetros, calcular mal el factorial, o interpretar mal un número combinatorio (E5-13-26). Finalmente, todos los caminos comparten la secuencia de capacidades C54-C47-C39, que corresponde a exponer la cantidad pedida o a verificarla sobre los sistemas de representación (si se usaron). Es previsible que en esta parte los estudiantes puedan incurrir en errores relacionados con un conteo equivocado y, en consecuencia, con la obtención de una solución incoherente (E44-20).

De este modo, el grafo de aprendizaje de un objetivo proporciona una representación del objetivo en términos de los procedimientos y de los errores que se prevén en el tema. A partir del grafo, se obtiene una información valiosa sobre el modo en que el objetivo se pretende desarrollar: es posible dar significado a las conexiones entre secuencias de capacidades y es posible prever errores en el desarrollo del objetivo. Observamos que, en el ejemplo, el objetivo implica (a) ser capaz de reconocer que una tarea se resuelve mediante permutaciones y de identificar los datos que se emplearán en el cálculo; (b) ser capaz de tomar una decisión sobre los métodos de cálculo adecuados; (c) reconocer situaciones en las que el problema se puede resolver por enumeración directa de los arreglos en algún sistema de representación; (d) saber aplicar la fórmula, el principio multiplicativo o enumerar los arreglos y contarlos dentro de un sistema de representación; y (e) expresar la solución y verificar el resultado de acuerdo con la pregunta inicial. Desde el punto de vista de los errores, se prevé (a) que los estudiantes expresen permutaciones con elementos repetidos, (b) que hagan un cálculo erróneo del factorial, (c) que confundan parámetros en la fórmula, (d) que utilicen una tabla de doble entrada cuando no es conveniente, (e) que consideren que los árboles tienen igual número de ramificaciones en todas las ramas, (f) que cuenten elementos repetidos y (g) que obtengan una solución incoherente como consecuencia de un conteo equivocado.

Tal como hemos señalado, para involucrar a los estudiantes en el proceso de evaluación, el profesor necesita encontrar una manera de compartir con ellos los objetivos de aprendizaje y los criterios para valorar su logro. Para un objetivo determinado, consideramos que las secuencias de capacidades que conforman su grafo pueden interpretarse en términos de criterios de logro de dicho objetivo. Esto es así porque esas secuencias de capacidades han sido definidas como procedimientos concretos que los estudiantes han de dominar para resolver las tareas prototípicas que caracterizan el objetivo de aprendizaje y, por tanto, para alcanzar dicho objetivo. Se consti-

tuyen así en requisitos conductuales cuyo cumplimiento implica logros parciales en el logro del objetivo.

Partiendo de esta idea, es posible construir, a partir del grafo de secuencias de capacidades de un objetivo, un nuevo grafo con la misma estructura, en el que cada secuencia de capacidades representa un criterio de logro redactado en un lenguaje adaptado a los estudiantes y comprensible para ellos. Para elaborar el nuevo grafo, el profesor puede utilizar la primera persona, sustituir expresiones demasiado técnicas para el nivel de sus estudiantes, explicitar algunos supuestos, entre otros aspectos. En la figura 2, se ejemplifica cómo el grafo del objetivo 3 (figura 1) puede adaptarse para compartir con los estudiantes una visión del proceso de consecución de este objetivo como una progresión estructurada en la que se aprecian el orden y las relaciones entre los criterios de logro.



*Figura 2.* Grafo de criterios de logro del objetivo 3 para compartir con los estudiantes

Por otra parte, el grafo de criterios de logro puede particularizarse a cada tarea diseñada para contribuir al logro del objetivo, como se hizo en el análisis de instrucción para las secuencias de capacidades. Así, dada una tarea, es posible compartir su meta con los estudiantes, señalando en el grafo de criterios de logro del objetivo de aprendizaje a qué criterios de logro apunta la tarea en cuestión. Ejemplificamos esta idea en la figura 3, con la tarea siguiente.

### *Tarea 3*

Para abrir una cuenta de correo electrónico en el servicio `conteo.com`, un usuario debe escoger una contraseña de tres caracteres diferentes con las cuatro primeras letras del alfabeto en minúscula (a, b, c y d). El jefe del departamento técnico de `conteo.com` quiere prever el crecimiento de su servicio. Él quiere saber cuántas contraseñas de 10 caracteres diferentes puede haber si solamente se permiten las letras del alfabeto en minúsculas y cuáles son. ¿Cuántas y cuáles son?

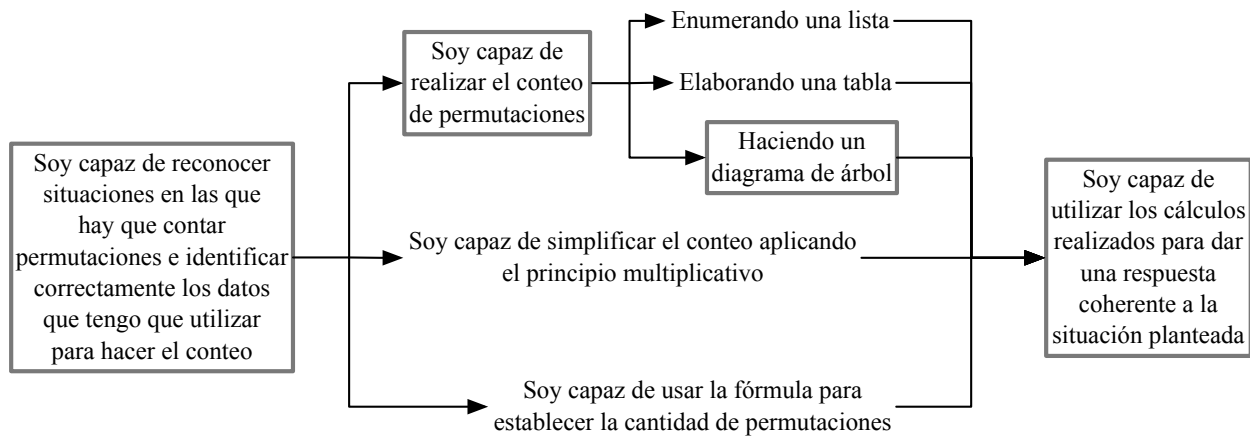


Figura 3. Criterios de logro a los que apunta la tercera tarea

Mediante este procedimiento, profesor y estudiantes disponen de un esquema común que les permitirá valorar cómo el aprendizaje conseguido mediante la realización de una tarea determinada está contribuyendo al logro del objetivo. Ello constituirá la referencia para la autoevaluación del estudiante a nivel cognitivo, como veremos más adelante.

#### 4.2. Estimular los procesos de reflexión y comunicación

En cuanto al fomento en los estudiantes de la capacidad de pensar matemáticamente y de comunicar sus procesos de pensamiento, Lee (2009, capítulo IV) y Harlen y Winter (2004, pp. 398-402) proponen estrategias sobre cómo generar preguntas que estimulen la reflexión y el diálogo, cómo gestionar el tiempo de respuesta a dichas preguntas y cómo proporcionar realimentación positiva a los estudiantes. Hemos de tener en cuenta que un aspecto esencial de la evaluación formativa es que se basa en el desarrollo de la competencia de comunicación en la clase. Esto es así porque, para que el profesor monitorice y realimente el proceso de aprendizaje, tanto de los estudiantes individuales como del grupo, los procesos de pensamiento tienen que hacerse lo más explícitos posible, oralmente y por escrito. Ello propicia también que los propios estudiantes puedan ayudarse unos a otros en la consecución de los objetivos pretendidos, siempre y cuando se cultive en el aula un ambiente de colaboración.

Sin embargo, en matemáticas, articular ideas puede ser muy difícil y los aprendizajes podrían quedar ocultos debido a una dificultad para expresarse. ¿Cómo puede el profesor ayudar a los estudiantes a ser más competentes en su comunicación matemática? Lee (2009, capítulo III) contempla formas de interactuar en la clase de matemáticas y hace propuestas prácticas de organización de esta interacción, encaminadas a fomentar que los estudiantes se expresen y aprendan. Por esta razón, sería muy conveniente que algunas de las ideas que propone la autora se empezaran a explorar en clase antes de la implementación de la unidad didáctica. Por ejemplo, recomendamos prestar atención a fomentar debates que se conviertan en conversaciones de aprendizaje, en las que los estudiantes puedan verse y escucharse unos a otros, y se habitúen a hacerse preguntas tales como: ¿estoy de acuerdo con lo que se ha dicho?, ¿quiero puntualizar o añadir algo?, ¿estoy en desacuerdo y por qué?, ¿siento inseguridad acerca de lo que se ha dicho y quiero hacer una pregunta para aclararlo? Es importante tomar en cuenta las estrategias encaminadas a incluir

a todos los estudiantes en los debates. Asimismo, es fundamental adoptar y transmitir una postura en la que el error sea una buena oportunidad para comprender y no algo que debe ser desterrado cuanto antes para llegar a la respuesta correcta. Y, por supuesto, es fundamental dar tiempo a los estudiantes y proporcionar estrategias que ellos puedan pensar y formular sus pensamientos (Alro y Skovsmose, 2012). Las clases en las que los estudiantes se expresan necesitan un tiempo adicional, que se ve ampliamente compensado por el tipo de aprendizaje que realizan.

Las tareas que se han diseñado hasta ahora incluyen propuestas para el agrupamiento de los estudiantes y para la interacción entre estudiantes y entre los estudiantes y el profesor. De cara a poder apreciar y registrar los procesos de pensamiento y aprendizaje de los estudiantes, es conveniente revisar estas propuestas para el agrupamiento y la interacción de tal forma que se fomente el debate, la reflexión y la comunicación. Por ejemplo, el debate y la reflexión se puede fomentar cuando se requiere a los estudiantes que comparen sus respuestas a una tarea con las de los compañeros, argumenten a favor de su posición o en contra de la del compañero, lleguen a acuerdos y comuniquen esos acuerdos de manera justificada al resto de la clase.

### **4.3. Realimentar a los estudiantes**

La investigación demuestra que la realimentación de los estudiantes tiene un impacto crítico en su motivación para el aprendizaje (Harlen y Winter, 2004); de ahí la importancia de realizarla de forma adecuada. A la hora de realizar una realimentación efectiva, debemos tener en cuenta tres condiciones. Ya sea vía oral o escrita, los estudiantes deben conocer:

- ◆ los objetivos de aprendizaje y los criterios de logro,
- ◆ el punto al que han llegado respecto a las referencias anteriores, y
- ◆ el modo de prosperar en la consecución de los objetivos de aprendizaje, o cómo llenar el espacio entre lo que han hecho y lo que podrían hacer.

Conviene dar la realimentación en el plazo más breve posible, utilizando los criterios de logro y los errores previstos en los grafos de criterios de logro de las tareas, para explicitar los logros de los estudiantes y señalar los errores que les están impidiendo avanzar. Es conveniente que, en la medida de lo posible, se preste atención a los distintos estudiantes (puede ser verbalmente o por escrito). Hay que cuidar de modo continuado que todos los estudiantes se sientan atendidos positivamente. En este sentido, se procurará presentar los errores como algo que tiene sentido en el proceso de aprender y que pueden ser superados, al proporcionar la ayuda necesaria. A los estudiantes que vayan bien, el reconocimiento les animará aún más. También es necesario cuidar de los estudiantes brillantes, por ejemplo, al proporcionarles retos adicionales. Los procesos de realimentación pueden utilizarse para crear un clima cooperativo en la clase: los errores y las dudas se toman como algo natural y se aprovechan para sacar a la luz puntos conflictivos del tema, de los que todos los estudiantes pueden beneficiarse, ya sea al discutirlos o al motivar a los estudiantes más avanzados a que ayuden a sus compañeros. Más adelante nos ocuparemos de la realimentación individual a cada alumno.

Puede ocurrir, por otra parte, que los trabajos de los estudiantes o la comunicación oral establecida a raíz de la realización de las tareas permitan al profesor constatar secuencias de capacidades, errores y/o caminos de aprendizaje alternativos a los previstos. Las novedades se tendrán en cuenta para la reformulación de los grafos de criterios de logro de las tareas, de cara a los

ajustes de la secuencia de tareas durante la implementación o de la unidad didáctica para implementaciones posteriores.

Además, es conveniente saber que, según algunas investigaciones, cuando los estudiantes trabajan en tareas que requieren pensamiento divergente, como la resolución de problemas y tareas complejas, el logro es mayor si la realimentación se hace solo a base de comentarios (en oposición a mediante calificaciones solamente o mediante comentarios y calificaciones conjuntamente). Esta forma de realimentación también resulta más motivadora para seguir aprendiendo en el caso de los estudiantes con bajo rendimiento. Lee (2009), en el capítulo IV, da recomendaciones y advertencias para que la realimentación sea entendida de forma positiva por el alumno y no resulte contraproducente, así como para encontrar tiempo y formas de gestionar en la práctica una realimentación efectiva.

En nuestro caso, además de la realimentación que el profesor proporcionará a los estudiantes “sobre la marcha”, en el transcurso de la resolución de las tareas, proponemos una realimentación sistemática basada en la recogida de sus trabajos escritos. Una vez finalizada cada tarea, todas las producciones escritas de los alumnos, junto con sus diarios, serán recogidos, escaneados y almacenados por el grupo, con el fin de realizar un análisis a posteriori en el módulo de análisis de datos. De esos trabajos, en cada tarea, el profesor elegirá una muestra para revisar y realimentar en la sesión siguiente. La muestra será escogida de tal forma que represente los distintos niveles de logro de los criterios de la tarea (ver el apartado sobre el diario del profesor) y que permita haber revisado el trabajo de cada estudiante al menos una vez al término de la unidad didáctica. Por otra parte, se realimentará a los estudiantes de forma cualitativa en la sesión siguiente y se tomará en cuenta esta revisión para la nota final. Opcionalmente, se puede aprovechar la devolución de trabajos para que los estudiantes de la muestra compartan sus diarios en clase.

## 5. PROCEDIMIENTOS DEL ANÁLISIS DE ACTUACIÓN

Para lograr los propósitos anteriormente expuestos, en el análisis de actuación, se observará, se recogerá y se analizará información sobre el aprendizaje de los estudiantes y sobre la enseñanza del profesor. Siguiendo los principios de la evaluación formativa, profesor y estudiantes participarán en el proceso y lo harán de forma continuada a lo largo de la implementación de la unidad didáctica. En este modelo de evaluación, se contempla que el profesor evalúe a sus estudiantes (individualmente y como grupo) y también que ponga en tela de juicio su propia labor de enseñanza. Asimismo, se insiste en la importancia de involucrar a los estudiantes en el proceso de evaluación, a través de la autoevaluación y a través de la evaluación a los compañeros. Por último, los estudiantes pueden dar información valiosa al profesor acerca de cómo han vivido el proceso de enseñanza, qué cosas les han funcionado bien y cuáles no. A pesar de que todas las variantes mencionadas son interesantes para ser exploradas, en esta versión del análisis de actuación, nos centraremos en la evaluación que realiza el profesor a los estudiantes y a su propia enseñanza, junto con la autoevaluación de los estudiantes. Opcionalmente, se podrá considerar la evaluación por pares o la evaluación de los estudiantes a la actuación del profesor.

A efectos de organización, distinguiremos entre una evaluación inicial, una evaluación cotidiana —realizada al hilo de cada una de las tareas que conforman la secuencia—, y una evalua-

ción final. Para cada una de ellas, explicitaremos en lo que sigue los agentes, instrumentos y procedimientos de análisis que se utilizarán.

## 6. EVALUACIÓN INICIAL

La tarea inicial diagnóstica tiene como función averiguar si los estudiantes manifiestan tener los conocimientos previos necesarios para comenzar la unidad didáctica y, en caso de que no sea así, proporcionarles las ayudas adecuadas. Esta tarea inicial, que puede tener formatos variados (tipo test, ejercicios-preguntas cortas, tarea introductoria al tema, etc.), se ha de diseñar tomando como base el listado de capacidades correspondiente a los conocimientos previos que fueron identificados en el análisis cognitivo, junto con los posibles errores asociados. Es una tarea de evaluación. El profesor deberá prever ayudas para proporcionar al alumnado que incurra en estos errores. Deberá prever también el tiempo necesario para realizar la tarea e implementarla con una antelación que permita dar apoyo a aquellos estudiantes que lo necesiten.

En este punto, es bueno tener en cuenta las características del grupo y de los estudiantes concretos con los que se implementará la unidad didáctica. La implementación en dos grupos distintos puede requerir de ayudas diferentes, de acuerdo con las características de los estudiantes.

## 7. EVALUACIÓN COTIDIANA

Las tareas que conforman el proceso de enseñanza deben ser consideradas como oportunidades para una evaluación informal, que el profesor debe realizar de forma habitual. La discusión en clase que resulta de compartir las soluciones a un problema, tanto en pequeño como en gran grupo, se convierte en un evento muy valioso para realizar este tipo de evaluación. Además, en algunas ocasiones, el profesor tendrá oportunidad de observar lo que los estudiantes hacen o escriben mientras ellos trabajan.

El profesor puede aprovechar distintos momentos y ocasiones para preguntar a los estudiantes, con el fin de revelar sus estrategias para resolver tareas. Se trata de desarrollar la habilidad de escuchar a los estudiantes y de comprender las respuestas con una actitud indagadora, en la que es posible generar secuencias de preguntas genuinas. En lugar de formular a los estudiantes preguntas a las que espera que le den la respuesta correcta, el profesor formula sus preguntas y observa la actuación de los estudiantes, con la intención de aumentar las posibilidades de que ellos activen las secuencias de capacidades o incurran en los errores que configuran los caminos de aprendizaje de la tarea en cuestión.

La intención debe ser averiguar la adecuación de la actuación de los estudiantes con las previsiones propuestas en los caminos de aprendizaje para la tarea y ajustar los siguientes pasos en el proceso de enseñanza. Para ello, el profesor ha de prestar atención también a los errores en los que los estudiantes pueden incurrir en el proceso de resolución y estar preparado para darles ayudas, que les permitan superarlos antes de que se conviertan en escollos que bloqueen la progresión en el tema. Estos errores y las ayudas correspondientes pueden o no coincidir con las que el profesor tenía previstas, dependiendo de lo que la realidad demande. En cualquier caso, el pro-

fesor debe permanecer alerta y ser ágil al proporcionar correcciones y ha de desarrollar la habilidad de saber, por ejemplo, cuándo merece la pena parar, cuándo es conveniente atender el error en otro momento para no interrumpir el flujo de la clase, o cuándo puede encargar a un alumno que ayude a otro compañero.

Para llevar a cabo un registro de las observaciones informales que han de realizar profesor y estudiantes de forma habitual, proponemos dos instrumentos: el diario del profesor y el diario del estudiante. El diario del profesor debe de rellenarse para cada sesión de clase y el del estudiante para cada tarea.

## 8. DIARIO DEL PROFESOR

En el diario del profesor se propone incluir, tanto a efectos de planificación, como de registro de lo acontecido durante la implementación, (a) los aspectos cognitivos, (b) los aspectos afectivos y (c) la toma de decisiones derivada de la reflexión sobre ambos aspectos. Se sugiere que el profesor prepare un formato del diario del profesor de cada tarea que servirá de guía para la observación y el registro de la información. A continuación, presentamos la información que sugerimos se debe recoger y registrar.

### 8.1. Aspectos cognitivos

En lo que respecta a los aspectos cognitivos, el formato del diario del profesor de cada tarea incluirá una tabla de registro de información y una representación del grafo de criterios de logro de la tarea. La tabla recogerá los criterios de logro a los que apunta cada tarea, dentro de su objetivo correspondiente; el porcentaje aproximado de estudiantes que alcanzan cada criterio a nivel total, parcial o nulo; una previsión de indicadores de estos niveles de logro (que describimos más adelante); un apartado de observaciones para matizar estos datos con lo ocurrido en la puesta en práctica de la tarea; y un apartado para registrar la muestra de estudiantes a los que se revisará el trabajo escrito sobre la tarea y el diario.

En la representación de aquellos criterios de logro a los que apunta la tarea en el grafo de criterios de logro del objetivo, cada criterio se coloreará de verde, amarillo o rojo, según el profesor considere que la clase en su conjunto ha cumplido con el criterio, con el fin de registrar si se puede avanzar sin problema, con precaución, o no es aconsejable avanzar hacia las siguientes metas.

### 8.2. Aspectos afectivos

En lo que respecta a los aspectos afectivos, el formato del diario del profesor de cada tarea incluirá una tabla y el matematógrafo. La tabla que recogerá las expectativas afectivas a las que apunta la tarea en cuestión; el nivel percibido de consecución de cada expectativa a nivel general de clase; e indicadores observables de cada expectativa (nivel Bajo, Medio y Alto), a partir de las observaciones cualitativas realizadas durante la puesta en práctica de la tarea. El matematógrafo de la tarea se describe más adelante en el apartado del diario del estudiante. En este instrumento, el profesor deberá registrar sus impresiones sobre la motivación observada en la clase en su conjunto a raíz del trabajo sobre la tarea.

Finalmente, el diario del profesor deberá también prever los espacios para registrar las acciones no previstas emprendidas durante la sesión, las observaciones de los trabajos corregidos de los alumnos de la muestra y la toma de decisiones para sesiones posteriores, o bien para la revisión de la secuencia de tareas de cara al próximo ciclo. Presentamos a continuación algunas indicaciones para la redacción de indicadores de nivel de consecución de un criterio de logro, realizados antes de la implementación de la unidad didáctica.

### 8.3. Niveles de consecución de criterios de logro

Establecemos que un estudiante o grupos de estudiantes al activar una o más secuencias de capacidades dentro de una tarea, puede conseguir el criterio de logro que las agrupa en uno de tres niveles: total, parcial o nulo. El nivel de consecución es total si el estudiante no incurre en ninguno de los errores previstos, realiza los procedimientos implicados en las secuencias de capacidades correctamente y produce la información apropiada para continuar con la resolución de la tarea. Por otro lado, cada secuencia de capacidades tiene asociados unos errores. Para cada criterio de logro, es necesario establecer cuáles de esos errores implican una consecución parcial de ese criterio de logro. Estos son aquellos errores que ponen en evidencia que los procedimientos no se realizaron correctamente, pero el estudiante produjo una información que le permite continuar con la tarea (aún si el resultado de la solución de la tarea no es el esperado). Describimos este procedimiento con base en un ejemplo de una tarea relacionada con la completación de cuadrados en el contexto de la función cuadrática.

Supongamos que los estudiantes están trabajando en una tarea relacionada con la función cuadrática en la que se ha dado un problema contextualizado cuya solución requiere, en un momento dado de la tarea, transformar una expresión en forma estándar ( $ax^2 + bx + c$ ) a su forma canónica ( $a(x-h)^2 + k$ ). Es decir, se requiere implementar el procedimiento de completación de cuadrados.

#### *Capacidades*

Este procedimiento se representa, en las previsiones del profesor, con una secuencia de capacidades que implica las capacidades que presentamos en la tabla 1.

Tabla 1

#### *Capacidades de la secuencia de capacidades*

C.	Descripción
1	Factorizar toda la expresión por el factor de $x^2$
2	Factorizar los factores de $x^2$ y $x$ por el factor de $x^2$
3	Sumar y restar el cuadrado de $\left(\frac{b}{2}\right)^2$



Tabla 1  
*Capacidades de la secuencia de capacidades*

C.	Descripción
4	Construir el trinomio cuadrado perfecto
5	Reducir al binomio cuadrado
6	Expandir

*Nota:* C = Capacidad

El procedimiento implica al menos dos secuencias de capacidades diferentes, según se comience por la capacidad C1 o la capacidad C2: C1-3-4-5-6 y C2-3-4-5-6. Agrupamos estas dos secuencias de capacidades en un criterio de logro que representa el procedimiento global.

#### *Errores*

Al abordar una tarea que implique el procedimiento de completación de cuadrados, un estudiante puede incurrir en los errores que presentamos en la tabla 2.

Tabla 2  
*Errores*

E.	Descripción
1	Incorre en errores numéricos en la activación de una o más de las capacidades
2	Incorre en errores algebraicos en la activación de una o más de las capacidades
3	Realiza el procedimiento sin factorizar
4	Realiza el procedimiento sin expandir
5	Construye el trinomio de manera errada sin seguir un procedimiento evidente
6	Construye el binomio de manera errada sin seguir un procedimiento evidente
7	No termina el procedimiento: no produce información que permita continuar con la resolución de la tarea

*Nota:* E = error.

#### *Niveles de consecución del criterio de logro*

Con base en esta lista de errores, es posible establecer los niveles de consecución del criterio de logro de la siguiente manera.

*Consecución total.* El estudiante consigue el criterio de logro a este nivel si realiza el procedimiento completo de manera correcta y obtiene el resultado esperado.

*Consecución parcial.* El estudiante consigue el criterio de logro a este nivel si incurre en al menos uno de los siguientes errores: E1, E2, E3 o E4. El estudiante produce información (incorrecta) que permite continuar con la resolución de la tarea.

*Consecución nula.* Se considera que la consigue del criterio de logro es nula por parte del estudiante si él incurre en al menos uno de los siguientes errores: E5, E6 o E7.

*Tabla de niveles de consecución de los criterios de logro*

El ejemplo que hemos presentado nos permite proponer el formato de la tabla 3 en la que se incluyen los indicadores de los tres niveles de consecución para cada uno de los criterios de logro previstas en los grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje. Incluimos el ejemplo anterior como el criterio de logro i en la tabla.

Tabla 3

*Niveles de consecución de los criterios de logro*

CdL	Niveles de consecución
1	
...	
i	<p><i>Total.</i> El estudiante consigue el criterio de logro a este nivel si realiza el procedimiento completo de manera correcta y obtiene el resultado esperado.</p> <p><i>Parcial.</i> El estudiante consigue el criterio de logro a este nivel si incurre en al menos uno de los siguientes errores: E1, E2, E3 o E4. El estudiante produce información (incorrecta) que permite continuar con la resolución de la tarea.</p> <p><i>Nula.</i> Se considera que la consecución del criterio de logro es nula por parte del estudiante si él incurre en al menos uno de los siguientes errores: E5, E6 o E7.</p>
...	
n	

*Nota:* CdL = criterio de logro.

**8.4. Ajustes a las previsiones**

Por último, hay que tener en cuenta que las entradas finales del diario se derivan de la reflexión sobre los aspectos cognitivos y afectivos, y redundan en ajustes con respecto a las previsiones hechas para la tarea en su planificación. Algunos de estos ajustes tendrán lugar sobre la marcha, durante la misma implementación de la tarea en clase, como cuando surge una dificultad generalizada y no prevista que nos obliga a ralentizar el ritmo y proporcionar más explicaciones o ayudas. Otras veces, se realizarán ajustes a la planificación de sesiones posteriores, como, por ejemplo, cuando el profesor se da cuenta de que, antes de pasar a la siguiente tarea prevista, convendría reforzar con tareas adicionales algunos aspectos imprevistos o cuando surge una cuestión tan interesante al hilo de una tarea que merece la pena tratarla de forma tangencial. Finalmente, el análisis de la información que surge del análisis de actuación puede dar lugar a ideas de mejora para una tarea o para la secuencia de tareas que el profesor estima oportuno considerar para más adelante, cuando se revise la unidad didáctica con vistas a una segunda implementación. Todas estas cuestiones deben quedar registradas en el diario del profesor. Su formato debe prever los espacios para el registro de esta información.

## 9. DIARIO DEL ESTUDIANTE

Para que los estudiantes participen en el proceso de evaluación, al evaluar su propio aprendizaje, proponemos que cada alumno lleve un diario del estudiante para cada tarea, que incluirá sus percepciones en el dominio cognitivo y en el dominio afectivo.

### 9.1. Dominio cognitivo

Con respecto a la autoevaluación del progreso cognitivo, una práctica que está ganando popularidad es la idea de los semáforos. En ella, se provee al alumnado de pegatinas en forma de circuitos verdes, amarillos y rojos con las que ellos pueden indicar el grado de comprensión percibida de determinados aspectos de la tarea. En caso de que no sea posible proporcionar pegatinas a los estudiantes, ellos pueden utilizar lápices de colores (verde, amarillo y rojo) para registrar su información. Suponemos que el profesor ha compartido con los estudiantes el grafo de criterios de logro del objetivo de aprendizaje (figura 2).

Para cada tarea, el profesor puede proporcionar a cada estudiante una hoja que será el formato de su diario. La primera parte de esta hoja incluirá el grafo del objetivo de aprendizaje en el que el profesor ha destacado aquellos criterios de logro a los que apunta la tarea específica (líneas grises continuas en la figura 3).

Después de realizar la tarea, el profesor solicitará a los estudiantes que indiquen a mano alzada el grado de consecución de cada uno de los criterios a los que apunta la tarea. Ello puede orientarle para rellenar el apartado de porcentajes en el diario del profesor (¡o no!). A continuación, cada estudiante coloreará su esquema de semáforos para la tarea, indicando con un semáforo de un color (verde, amarillo o rojo) el grado con el que él considera que ha logrado cada criterio de logro de la tarea (figura 4).

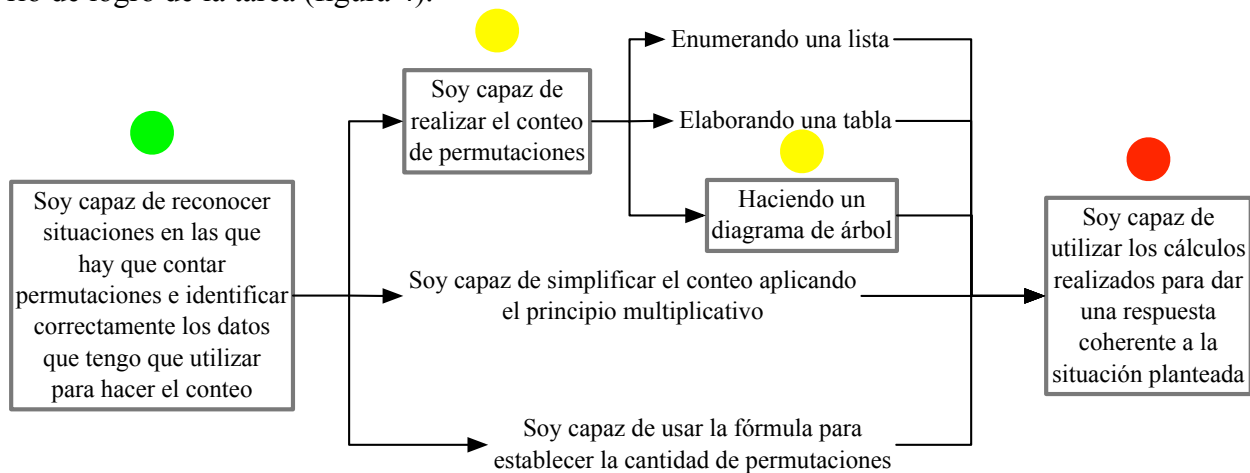


Figura 4. Grafo de criterios de logro de la tarea 3 con semáforos

A partir de esta información, el profesor puede percibir con relativa rapidez si puede pasar a la tarea siguiente, si necesita aclarar algunos puntos para toda la clase o si algunos estudiantes precisan ayuda particular. Él puede establecer qué aspectos de los criterios de logro no se han desarrollado suficientemente de manera general en la clase o si hay grupos de estudiantes que han

avanzado apropiadamente, mientras que otros grupos manifiestan dificultades en algunos aspectos de sus expectativas de aprendizaje. El profesor puede recoger estos aspectos en su grafo de semáforos de la tarea (segundo instrumento de los correspondientes a los aspectos cognitivos en el diario del profesor).

La información que los estudiantes proporcionan con los semáforos puede servir para identificar quiénes pueden ayudar a sus compañeros a avanzar sobre determinadas cuestiones, y estimular un clima colaborativo, útil tanto para el estudiante que ayuda como para los que son ayudados. Opcionalmente, se puede dejar libertad a los estudiantes para incluir en su diario dificultades particulares o percepciones de aspectos importantes para su comprensión.

Naturalmente, para que todo este proceso tenga sentido, se debe fomentar en el aula un clima de confianza y sinceridad a la hora de compartir las percepciones de cada uno. Además, el profesor debe tener en cuenta que las percepciones de los estudiantes, por sinceras que sean, son subjetivas, y debe contrastarlas con los datos procedentes de otras fuentes (su propia percepción y los trabajos escritos).

## **9.2. Dominio afectivo**

El diario del estudiante incluirá un segundo apartado correspondiente al dominio afectivo. En el análisis de instrucción, se incidió en la motivación de los estudiantes y se establecieron una serie de descriptores para caracterizarla, que se denominaron aspectos que contribuyen a la motivación: adecuación de las demandas cognitivas, reto, reacción a los errores, contribución a la interacción, contexto y compartir metas (ver apuntes del módulo sobre análisis de instrucción).

Hemos redactado estos descriptores en una frase en un lenguaje que pueda resultar comprensible para los estudiantes y con ellas se ha construido una propuesta de matematógrafo, que les permitirá expresar el grado de acuerdo o desacuerdo con cada uno de los descriptores para cada tarea particular (figura 5). Tal como indicamos en el diario del profesor, él puede hacer uso del mismo instrumento para registrar su percepción del nivel de motivación de la clase para las distintas tareas.

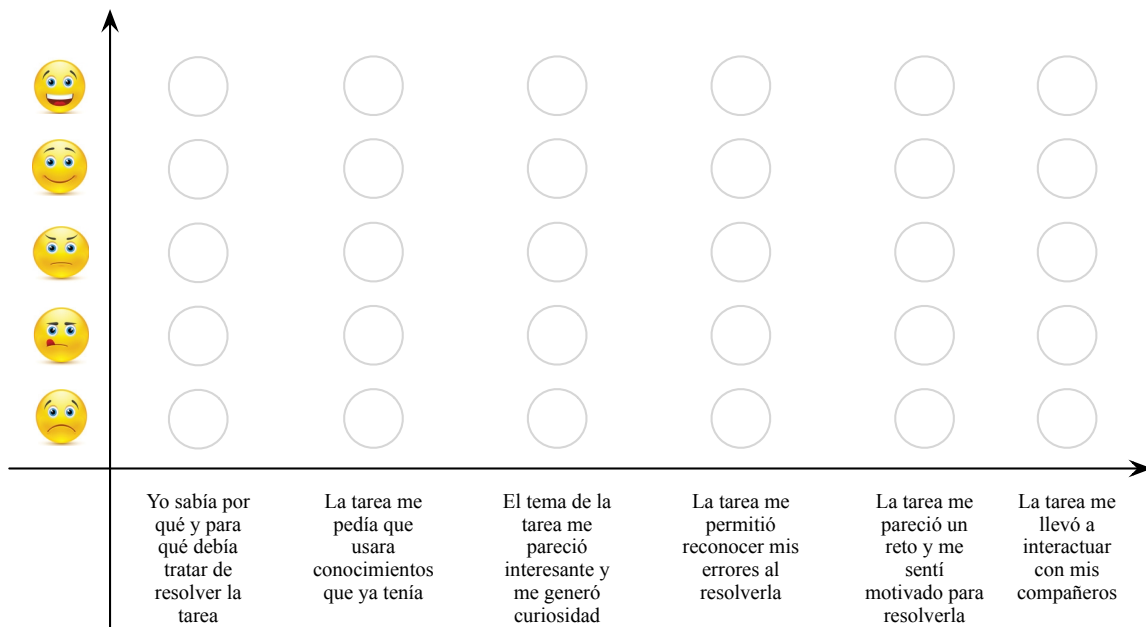


Figura 5. Propuesta de matemátografo

En la hoja del diario del estudiante que el profesor entregará a cada uno por tarea, se debe incluir un matemátografo como el de la figura 5. Al final de cada tarea, el profesor solicitará a los estudiantes que rellenen los círculos en cada columna hasta alcanzar el nivel de la cara que expresa su sensación en cada aspecto de la tarea que contribuye a la motivación. Este procedimiento puede proporcionar una información valiosa sobre el efecto que han surtido las medidas tomadas en la planificación para hacer que las tareas fuesen motivadoras para los estudiantes. Es posible que no todas las tareas estén diseñadas para puntuar alto en todos los descriptores, pero al final de la secuencia de tareas, podremos saber en qué medida el conjunto de tareas atendió a distintos indicadores de motivación. Este análisis se realizará en el módulo 6 y podrá contrastarse con las percepciones que el profesor haya anotado en su matemátografo, en el diario del profesor.

### 9.3. Logística del diario del estudiante

En lo que respecta al diario del estudiante, debemos realizar previsiones sobre el momento en que los estudiantes lo rellenarán y el modo en que se compartirá. Mientras que el profesor rellenará su diario después de clase, y siempre antes de comenzar la siguiente sesión, los estudiantes rellenarán el suyo después de cada tarea y en clase (para evitar que unos lo rellenen y otros no). Asimismo, hay que decidir el modo de compartir el diario con los estudiantes. Se sugiere que el profesor aproveche el diario de aquellos estudiantes que forman parte de la muestra que escoge, para que compartan su diario en voz alta, realimentar su trabajo en cada tarea e incluso para propiciar una pequeña discusión a partir de lo que los compañeros comparten, si lo estima oportuno. En cualquier caso, habrá que reservar un tiempo para la logística del diario del estudiante en la planificación de la unidad didáctica.

## 10. EVALUACIÓN FINAL

Para finalizar la evaluación de la unidad didáctica, proponemos un examen final, sistemáticamente diseñado, y una realimentación final de todo el tema. Ambos instrumentos se diseñarán en este módulo. El examen podrá sufrir modificaciones derivadas de los reajustes que tengan lugar con motivo de la implementación. La realimentación final puede ser llevada a la práctica o no; esto dependerá del tiempo del que se disponga. A continuación, describimos ambos elementos de la evaluación final.

### 10.1. Examen

El examen correspondiente a la unidad didáctica debe diseñarse teniendo en cuenta que se evalúen los aspectos clave de cada objetivo de aprendizaje. La necesidad habitual de que el examen tenga un tiempo reducido obliga a centrar bien las tareas que lo componen, de manera que se optimice la información que proporcionará, a la vez que permita distinguir un desempeño superior, uno alto, uno básico y otro bajo. El análisis de los grafos de cada objetivo, en términos de criterios de logro y errores será útil para el diseño del examen. Los criterios de logro y errores servirán para definir específicamente indicadores de los niveles de logro. Ello es útil a la hora de calificar a los estudiantes cuantitativamente con una referencia compartida. Esto es importante, puesto que la calificación numérica, que es otra de las funciones obligadas de la evaluación, debe ser subsidiaria de su función principal: la de promover el aprendizaje.

A la hora de diseñar el examen, el profesor debe contemplar también su experiencia sobre la comprensión del alumnado durante la implementación (grado de comprensión y principales dificultades) para ajustar el nivel del examen. Así, la misma unidad didáctica a nivel de planificación sufrirá más o menos ajustes en función del grupo de estudiantes con que se implemente, que deberán ser tenidos en cuenta para el diseño final del examen. Por último, es importante tener en cuenta la planificación de la realimentación que se dará a los estudiantes a propósito del examen y, en el caso de la evaluación cuantitativa, lo que se hará con los estudiantes que no consigan al final llegar al nivel básico estipulado.

La siguiente tarea es un ejemplo de una parte del examen que aborda algunas cuestiones clave del objetivo de aprendizaje que hemos considerado en estos apuntes.

Para abrir una cuenta de correo electrónico en el servicio `conteo.com`, un usuario debe escoger una contraseña de tres caracteres diferentes con las cuatro primeras letras del alfabeto en minúscula (a, b, c y d).

1. El dueño de `conteo.com` quiere saber cuántas contraseñas diferentes puede haber y entender por qué. Teniendo en cuenta que al dueño de `conteo.com` no le gustan las fórmulas, escribe un texto, que use un diagrama de árbol o un listado, en el que le muestres al dueño de `conteo.com` cuántas contraseñas puede haber y cómo se obtiene ese resultado.

2. Los técnicos de `conteo.com` están pensando en permitir que se usen las 27 letras de alfabeto en minúsculas para las contraseñas de tres caracteres diferentes. Ellos quieren saber cuántas contraseñas pueden haber y por qué. Escribe un texto en el que muestres cómo se puede hallar el número de contraseñas teniendo en cuenta el número de letras que se puede usar para cada uno de los tres caracteres.

3. El jefe del departamento técnico de conteo.com quiere prever el crecimiento de su servicio. Él quiere saber cuántas contraseñas de 10 caracteres diferentes puede haber si se permiten los dígitos del 0 al 9 y las letras del alfabeto en minúsculas y mayúsculas. ¿Cuántas son?

Para la corrección de esta tarea, y la consiguiente valoración del grado en que el estudiante ha alcanzado el objetivo 3, al que corresponde, el profesor puede elaborar una rúbrica que refleje la medida en que un estudiante ha avanzado en el logro de los criterios señalados a lo largo del grafo de dicho objetivo. La tabla 4 ejemplifica el modo de hacerlo.

Tabla 4  
*Niveles de logro e indicadores para el objetivo 3*

Nivel de logro	Indicadores
Alto	El estudiante activa todas las secuencias previstas en el camino de aprendizaje del objetivo, sin errores.  El estudiante incurre en errores menores (p. ej. fallos en las operaciones aritméticas) que no le impiden llegar hasta el final.
Básico	El estudiante es capaz de reconocer la situación planteada en la tarea 3 como adecuada para aplicar una fórmula (C31), pero incurre en errores en su aplicación (E5, E6 o E26).  El estudiante no reconoce la idoneidad de aplicar la fórmula para resolver la tarea 3 y la resuelve aplicando el principio multiplicativo.
Bajo	El estudiante establece el principio multiplicativo pero incurre en el error de repetir elementos (E55).  El estudiante no llega a establecer el principio multiplicativo porque incurre en el error de sumar en lugar de multiplicar (E54).  El estudiante incurre en errores correspondientes al establecimiento de las permutaciones en forma de tabla o de diagrama de árbol que le impiden avanzar en el camino de aprendizaje.

Para caracterizar los niveles de logro dentro de la rúbrica, el profesor debe recurrir, una vez más, a la información que le proporciona el grafo de criterios de logro del objetivo. Así, cada nivel de logro está caracterizado por los criterios de logro conseguidos y los errores en los que el estudiante ha podido incurrir. Es importante determinar qué criterios de logro considera necesarios que el estudiante haya conseguido para alcanzar un nivel básico en el logro del objetivo y, a partir de ahí, decidir los restantes niveles. Por otra parte, dentro de cada nivel establecido, la importancia de los errores en que los estudiantes incurrieron podría utilizarse para asignar una calificación numérica mayor o menor, dentro de un rango de puntuación correspondiente al nivel.

### 10.2. Realimentación final

Una vez realizado y corregido el examen del tema, es conveniente dedicar una sesión a realimentar sus resultados al grupo clase. Esta sesión puede aprovecharse para recabar la opinión del desarrollo del tema por parte del alumnado, al menos informalmente. Para ello, se sugiere partir

de la reflexión propuesta al final del apartado 4 de estos apuntes, sobre las expectativas del profesor en torno a distintos elementos de su planificación. Éstas pueden utilizarse para elaborar un guión de cuestiones que puede plantear a los estudiantes en la última sesión, de forma que le permitan contrastar si sus propósitos se han logrado en alguna medida. Asimismo, puede recabar sugerencias de los estudiantes sobre la manera de mejorar la propuesta o sobre aquellas innovaciones realizadas con motivo de MAD que pueden resultar interesantes para incorporarlas a la práctica habitual en un futuro.

## 11. INTEGRACIÓN DE EVALUACIÓN E INSTRUCCIÓN

Para afrontar las demandas de la evaluación formativa, los marcos para interpretar las respuestas de los estudiantes y actuar en consecuencia, juegan un papel cada vez más relevante. En el análisis didáctico, los análisis realizados y la unidad didáctica obtenida a partir de ellos, nos proponen este marco. A partir del mismo, se propone que el profesor:

- ◆ encuentre maneras de compartir con los estudiantes los objetivos de aprendizaje y los criterios de logro con que se valorarán;
- ◆ desarrolle paulatinamente sus habilidades para gestionar la interacción y la comunicación en el aula, de forma que ayuden a los estudiantes a explicitar sus caminos de aprendizaje y a optimizar su recorrido;
- ◆ esté atento a los errores en los que pueden incurrir sus estudiantes y tengan preparado un repertorio de ayudas para facilitar su superación;
- ◆ de a los estudiantes realimentación que proporcione oportunidad permanente de mejora, así como recursos para la autoevaluación; y
- ◆ contraste el funcionamiento de las opciones de enseñanza que ponen en juego con el resultado que obtienen en la práctica, tanto a nivel cognitivo como a nivel afectivo.

En suma, el profesor debe aprender a promover una dinámica compleja de evaluación para el aprendizaje y observar lo acaecido en el aula, contrastarlo con lo previsto de un modo continuado, para realizar los ajustes pertinentes. Este enfoque adoptado para el análisis de actuación plantea numerosas demandas al profesor. Se requiere planificar, al hilo de la instrucción, un andamiaje de evaluación que contemple todos los aspectos anteriores y los inserte dentro de la secuencia. Surge así la noción de secuencia de evaluación, basada en la noción de trayectoria de evaluación (de Lange, 1999): un conjunto de procedimientos que apoyan la evaluación de las expectativas de aprendizaje que corresponden a una determinada unidad didáctica. La diferencia entre secuencia de tareas y secuencia de evaluación no implica que la enseñanza esté separada de la evaluación, sino que ambas son paralelas y están estrechamente relacionadas. De este modo, la evaluación se convierte en la compañera de la enseñanza, en lugar de ser su fin. Aunque la secuencia de tareas y la secuencia de evaluación no estarán separadas en la implementación, sí las diferenciamos a efectos de organización.

Proponemos una forma de articular esta organización que contempla, en primer lugar, la secuencia de tareas, junto con las previsiones, observaciones y ajustes realizados, recogidos por medio del diario del profesor. A estas tareas habrá que añadir la tarea diagnóstica, el examen y la



realimentación final. En segundo lugar, se deberá contemplar la secuencia en su conjunto, al integrar en ella los procedimientos, momentos y tiempos dedicados a la evaluación. En lo que concierne a la secuencia global, se propone realizar las siguientes actividades.

1. Previsiones sobre el modo de presentar a los estudiantes el tema, los objetivos de aprendizaje, los criterios de logro y el sistema de evaluación. Se propone que este último incluya el trabajo escrito recogido a cada estudiante sobre una de las tareas de la secuencia, el diario del estudiante y el examen, junto con una ponderación de su peso en la calificación global. Es necesario ajustar estos requerimientos a los requerimientos sobre evaluación en las instituciones en las que se implementarán las secuencias didácticas, así como prever el tiempo que llevará esta presentación al alumnado.
2. Presentación del primer objetivo, junto con sus criterios de logro y las tareas asociadas. Para cada tarea, la evaluación se realizará a partir del diario del profesor y de los diarios de los estudiantes. Hay que prever el tiempo que se destinará a la ejecución de las tareas propiamente dichas, así como a la diligenciamiento del diario del estudiante y a la realimentación que se realizará a partir de los instrumentos de evaluación.
3. Presentación de objetivos sucesivos, siguiendo el mismo esquema.
4. Al final de la secuencia, se realizarán previsiones sobre el modo de recapitular lo aprendido en el tema, basándose en los objetivos de aprendizaje y los criterios de logro. Esta recapitulación servirá también para preparar con los estudiantes el examen del tema, que se realizará en una sesión posterior. A esto hemos de añadir la realimentación del examen y la sesión final (opcionalmente). Nuevamente, el tiempo necesario para la realización de estas actividades finales deberá ser previsto.

## 12. CONCLUSIONES

En relación con la enseñanza, el análisis de instrucción permitió diseñar las tareas que conforman la unidad didáctica y permitió hacer previsiones sobre el modo de organizar la dinámica de ejecución de las tareas por parte de los estudiantes, la distribución temporal de las sesiones, así como el tipo de interacción y comunicación que se promovería en el aula en distintos momentos. Estas previsiones, unidas a los fines que se persiguen con respecto a la enseñanza, constituyen las referencias para valorar la instrucción, tanto a nivel de planificación, como de ejecución en el aula. El proceso de valoración tendrá lugar en dos momentos: a lo largo de la puesta en práctica de la unidad didáctica y a posteriori, con objeto de proporcionar información para la reformulación de la unidad didáctica en un ciclo siguiente del análisis didáctico.

En este módulo, nos hemos ocupado de planificar la recogida de información, con el fin de realizar la valoración indicada. Parte de esta información se usará a lo largo de la unidad didáctica, para realizar los ajustes pertinentes sobre la marcha, así como para llevar a cabo una evaluación formativa dentro de la misma. La información recogida servirá, además, para realizar el análisis a posteriori de la unidad didáctica, que se llevará cabo en los dos módulos que siguen.

### 13. REFERENCIAS

- Alro, H. y Skovsmose, O. (2012). Aprendizaje dialógico en la investigación colaborativa. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 149-171). Bogotá: una empresa docente.
- Benavides, D., Carrillo, A., Ortiz, M., Parra, A. y Velasco, C. (2014). *Permutaciones sin repetición*. Documento no publicado. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Boud, D. (Ed.). (1988). *Developing student autonomy in learning*. London: Kogan Page.
- Brown, S. A. y Glasner, A. (2003). *Evaluar en la universidad: problemas y nuevos enfoques*. Madrid: Narcea Ediciones.
- de Lange, J. (1999). *Framework for classroom assessment in mathematics*. Documento no publicado. Madison: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Gómez, P., González, M. J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. *Profesorado. Revista de Curriculum y Formación de Profesorado*, 18(3), 319-338.
- Harlen, W. y Winter, J. (2004). The development of assessment for learning: learning from the case of science and mathematics. *Language Testing*, 21(3), 390-408.
- Lee, C. (2009). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas. La evaluación formativa en la práctica*. Madrid: Morata.
- NCTM. (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- Webb, N. M. (2004). *Classroom Assessment as a Research Context: Variations on a Theme of Pedagogical Decision Making*. Trabajo presentado en ICME 10 – TSG 27: Internal Assessment, Copenhagen.

## ANEXO 1. LISTADO DE CAPACIDADES PARA PERMUTACIONES<sup>1</sup>

1. C1. Asociar notaciones con los datos dados en el enunciado (B=Barranquilla).
2. C2. Relacionar el orden con la representación de la información dada (1°Cartagena, 2°Barranquilla y 3°Santa Marta= {C, B, S}).
3. C3. Garantizar las permutaciones posibles representándolas mediante un conjunto por extensión ({C, B, S}).
4. C4. Interpretar las condiciones de orden que asigna el problema al listar cada arreglo.
5. C5. Discriminar en un conjunto de arreglos, los que no corresponden a permutaciones sin repetición.
6. C6. Identificar que en un conjunto de n elementos se pueden hacer permutaciones de r elementos siempre y cuando  $n > r$ .
7. C7. Reconocer en dos arreglos con los mismos elementos, pero diferente orden, dos permutaciones diferentes.
8. C8. Especificar cuáles elementos de un conjunto dado se deben permutar.
9. C9. Establecer cuántos elementos se deben permutar.
10. C10. Identificar cada ramificación del diagrama de árbol con el ordinal de un elemento o dato en el arreglo.
11. C11. Garantizar que al enlistar un elemento o dato en un nivel del diagrama de árbol, éste no exista en el nivel anterior.
12. C12. Identificar que cada nivel del diagrama de árbol relaciona un elemento o dato menos que en el anterior.
13. C13. Usar el patrón de orden que asigna el diagrama de árbol para evitar la repetición en los arreglos.
14. C14. Asociar cada trayectoria en el diagrama de árbol con una permutación.
15. C15. Conocer qué datos se deben poner en los encabezados de filas y columnas de una tabla de doble entrada para hallar permutaciones.
16. C16. Identificar el resultado de intersecar filas y columnas en tablas de doble entrada.
17. C17. Advertir el orden en que se escriben las intersecciones entre filas y columnas en una tabla.
18. C18. Reconocer la practicidad de las tablas de doble entrada para hallar permutaciones de n elementos, donde  $r = 2$ .

---

<sup>1</sup> Tomado del trabajo del grupo 5 de MAD 2 (Benavides, Carrillo, Ortiz, Parra y Velasco, 2014).

19. C20. Identificar que la cantidad de permutaciones obtenidas usando un sistema de representación no cambia al representarlas con otro.
20. C21. Excluir del conjunto de permutaciones representado en una tabla aquellas que tienen repetición (diagonal).
21. C22. Verificar la cantidad de permutaciones requeridas haciendo uso del diagrama de árbol.
22. C23. Comparar la cantidad de permutaciones obtenidas en tablas, listas y diagramas para verificar los resultados.
23. C24. Cotejar que cada celda de la tabla de doble entrada, excepto las de la diagonal, corresponde a una trayectoria del diagrama de árbol.
24. C25. Comprobar que los arreglos obtenidos en la tabla de doble entrada, son los mismos que los obtenidos en el diagrama de árbol.
25. C26. Organizar las permutaciones obtenidas en tablas y/o diagramas mediante listas.
26. C27. Identificar datos expresados de manera no matemática para encontrar la cantidad de permutaciones.
27. C28. Hacer uso de diagramas de árbol para realizar conteo de permutaciones posibles.
28. C29. Generalizar la cantidad de permutaciones posibles a partir de un diagrama de árbol.
29. C30. Conocer la fórmula empleada para encontrar la cantidad de permutaciones de un conjunto.
30. C31. Reconocer situaciones donde es posible aplicar la fórmula de permutaciones.
31. C32. Comprender en un problema dado, cuál dato corresponde a  $n$  y cuál a  $r$ .
32. C33. Sustituir las cantidades correspondientes a las expresiones  $(n, r)$  en la fórmula para hallar permutaciones.
33. C34. Hallar la cantidad de permutaciones como un número natural, resultado de un cociente de factoriales.
34. C35. Calcular la cantidad de permutaciones de un conjunto dado resolviendo la expresión matemática correspondiente.
35. C36. Contar los arreglos obtenidos utilizando diagramas para expresar la cantidad resultante.
36. C37. Comparar la cantidad de arreglos obtenidos por conteo en un diagrama de árbol con la cantidad calculada usando la fórmula.
37. C38. Justificar una respuesta relacionando la cantidad de permutaciones encontrada con la pregunta planteada.
38. C39. Escoger el(los) sistema(s) de representación pertinente(s) para abordar situaciones que involucran permutaciones.

39. C40. Reconocer las condiciones en las que es posible aplicar el concepto de permutación sin repetición. Es decir, interpreta en el contexto de un problema, una situación que implica permutaciones sin repetición.
40. C41. Identificar las condiciones de muestreo. Es decir, deduce de un enunciado la información que se conoce y la que se debe hallar.
41. C43. Argumentar si es posible solucionar un problema que implica permutaciones sin repetición, con la información dada.
42. C46. Probar su(s) procedimiento(s) de solución con los datos del enunciado.
43. C47. Interpretar el resultado obtenido de acuerdo con el contexto del problema.
44. C48. Acudir a sistemas de representación alternos para generar el tránsito de un sistema a otro (pasar de tabla a lista).
45. C49. Modelar un problema utilizando correctamente el modelo matemático de un problema similar antes resuelto.
46. C50. Reconocer un patrón de orden al momento de realizar las listas para evitar la repetición en los arreglos.
47. C51. Asociar cada arreglo de la lista con una permutación.
48. C52. Usar las listas para realizar conteo de permutaciones posibles.
49. C54. Verificar la respuesta extrayendo información de el(los) sistema(s) de representación usados.
50. C55. Utilizar un listado preliminar de arreglos para identificar los restantes como arreglos con los mismos elementos en diferente orden.
51. C56. Mostrar en una tabla de doble entrada los arreglos que son y no son permutaciones sin repetición, sin extraerlos de ella.
52. C57. Reconocer situaciones donde no es necesario utilizar la fórmula y pueden resolverse por conteo directo.
53. C58. Hacer el conteo de las permutaciones posibles a partir de la representación en una tabla de doble entrada.
54. C59. Acudir a sistemas de representación, como herramienta en el proceso de conteo.
55. C60. Establecer un elemento de los que se deben permutar como origen del diagrama de árbol.
56. C61. Comparar las permutaciones de un conjunto de arreglos haciendo uso de diferentes sistemas de representación.
57. C62. Ubicar los elementos a permutar en posiciones, atendiendo a la cantidad, en orden de la máxima a la mínima posible, en cada posición.

58. C63. Identificar que en cada posición que puede ocupar cada uno de los elementos a permutar, se tiene un elemento menos que en la posición previa.
59. C64. Calcular la cantidad de permutaciones utilizando el principio multiplicativo.
60. C65. Leer una misma permutación representada en un diagrama de árbol, una lista o una tabla de doble entrada.
61. C66. Identificar cuando dos conjuntos de permutaciones son iguales, iniciando por la igualdad entre sus cardinales y la correspondencia uno a uno de cada permutación.
62. C67. Identificar que dos conjuntos de permutaciones son diferentes cuando sus cardinales también lo son.
63. C68. Identificar que dos conjuntos de permutaciones son diferentes cuando no es posible hacer la correspondencia uno a uno de sus elementos.
64. C70. Identificar invariantes entre dos problemas que involucren la no repetición y el orden.
65. C71. Resolver problemas de permutaciones donde  $n > r$  con base a otro(s) de la misma situación donde  $n = r$ .
66. C72. Usar la noción de parámetros  $n$  y  $r$  para identificarlos con otros nombres (número, tamaño).
67. C73. Señalar o explicar que la expresión “resultado de la fórmula” corresponde al cardinal del conjunto de permutaciones.
68. C74. Explicar gráfica, verbalmente o de forma escrita, la relación de cada parámetro que compone la fórmula para calcular permutaciones con los datos del problema.
69. C75. Comparar la cantidad de arreglos obtenidos por conteo en una tabla de doble entrada con la cantidad calculada usando la fórmula.
70. C76. Comparar fórmulas evaluadas con diferentes parámetros para identificar similitudes.
71. C77. Explicar el procedimiento matemático que da como resultado la misma cantidad de permutaciones con diferente parámetro  $r$ .
72. C78. Identificar que dos conjuntos de permutaciones con el mismo cardinal no necesariamente son iguales.
73. C79. Extraer de un conjunto de permutaciones en un sistema de representación, un subconjunto de las que cumplen alguna condición específica.
74. C80. Encontrar por conteo el cardinal de un subconjunto del conjunto de permutaciones, que cumplen alguna condición.
75. C81. Sustentar una respuesta relacionando las permutaciones identificadas con la información del problema.
76. C82. Justificar la identificación o elección de un conjunto de permutaciones haciendo uso de la definición y/o sus características.

77. C83. Identificar el tipo de variación entre la cantidad de permutaciones obtenidas y el cambio del parámetro  $r$ .

C84. Identificar que, teniendo fijo a  $n$ , a medida que crece  $r$ , también crecen las cantidades de permutaciones.

## ANEXO 2. ERRORES Y DIFICULTADES PARA PERMUTACIONES

### **Conoce parcialmente el significado de permutación y/o ignora condiciones que la caracterizan**

E1. Considera que dos arreglos con los mismos elementos pero distinto orden son la misma permutación.

E2. Expresa permutaciones con elementos repetidos.

E3. Selecciona un número mayor o menor, de elementos que el necesario para permutar.

### **D2. No conoce criterios para establecer los sistemas de representación adecuados para representar las permutaciones dependiendo de la situación**

E4. Usa la fórmula para calcular en problemas que piden enumerar.

E5. Confunde los parámetros entre sí.

E6. Construye el diagrama de árbol con igual número de ramificaciones en cada nivel.

E7. Reitera un elemento del arreglo varias veces en la misma ramificación del diagrama de árbol.

E8. Extrae arreglos del diagrama de árbol que no corresponden a permutaciones sin repetición.

E10. Considera conexiones entre ramificaciones del diagrama de árbol, que no deberían estar relacionadas

E9. Extrae arreglos de una tabla de doble entrada que no corresponden a permutaciones sin repetición.

E11. Incluye dentro de las permutaciones sin repetición, las resultantes de la diagonal de una tabla de doble entrada.

E39. Utiliza la tabla de doble entrada cuando es más práctica otra representación -por ejemplo tabular cuando  $r > 3$ .

E52. Extrae los elementos de las permutaciones obtenidas en una tabla de doble entrada sin tener en cuenta el orden asignado por ésta.

E12. Denota las intersecciones de filas y columnas sin mantener el mismo criterio de orden en todos los arreglos.

E47. Nombra las filas y/o columnas de la tabla reiterando u omitiendo elementos.

E13. Calcula el factorial como una operación aditiva y no multiplicativa.

E14. Desarrolla el cociente de la fórmula obviando el factorial.

E42. Asigna denominaciones iguales a elementos diferentes en los arreglos (por ejemplo M para montaña rusa y para martillo).

E51. Extrae arreglos de la lista que no corresponde a permutaciones sin repetición.



E53. Ubica los elementos a permutar en la cantidad de posiciones correcta, pero en desorden.

E54. Calcula la cantidad de permutaciones sumando en situaciones donde debería hacer uso del principio multiplicativo.

E55. Reitera el número de elementos que pueden ocupar una posición cuando hace uso del principio multiplicativo para calcular permutaciones.

### **D3. Desconoce estrategias adecuadas para resolver problemas compuestos**

E15. Entrega el resultado de un proceso de permutación, sin evidenciar procedimientos previos.

E16. Entrega un resultado parcial o de un procedimiento preliminar.

E17. Fija la primera o segunda variable incorrectamente.

E18. Fija la primera variable correctamente pero la segunda incorrectamente.

E19. A pesar de haber fijado un elemento, lo repite en pasos posteriores.

E20. La solución numérica no es coherente con los datos del problema, aun cuando identificó los parámetros correctamente.

E49. Usa en algún nivel del diagrama de árbol algún elemento que no se debe permutar.

E44. Cuenta un número mayor o menor de permutaciones sin repetición posibles.

### **D4. Dificultad para generalizar**

E21. Completa la tabla de doble entrada, “reflejando” las permutaciones respecto a la diagonal.

E22. Supone que el conjunto de permutaciones es una sola iteración del diagrama de árbol.

E23. Generaliza que las permutaciones obtenidas con una sola iteración del diagrama de árbol son análogas a las demás permutaciones.

E24. Resuelve el problema como un conjunto de enunciados particulares, cuando los parámetros son variables.

E25. Identifica incorrectamente el número de permutaciones, usando como criterio el cardinal de conjuntos con menor cantidad de elementos.

E56. Omite regularidades al generalizar procedimientos para  $n$  elementos.

### **D5. Adaptar la información a un modelo matemático o a una situación**

E26. Multiplica los números representados en la fórmula. Asume un problema combinatorio como un problema de estructura multiplicativa (por ejemplo,  $5P3$  como  $5/3$  ó  $5 \times 3$ ).

E27. Resuelve problemas que involucran permutaciones utilizando solamente  $n!$

E28. Sustituye los parámetros en la fórmula por valores que no corresponden.

E29. Utiliza la fórmula para encontrar la cantidad de combinaciones en problemas que requieren hallar el número de permutaciones.

E30. Identifica una operación que no corresponde al problema de conteo: enumerar cuando es recuento y recuento cuando es enumerar.

E31. Uno de los números de la fórmula es dado como solución.

E38. No extrae todos los datos del enunciado del problema para desarrollarlo.

E40. Escoge algún problema abordado anteriormente con una estructura parecida, pero no con todas las características que implica un problema de permutaciones sin repeticiones.

E41. Utiliza o plantea un modelo de combinación para resolver un problema de permutación.

E45. Obtiene un resultado pero no lo interpreta de acuerdo con el contexto del problema.

E46. Sustenta su respuesta con información del enunciado que no corresponde.

#### **D6. Dificultad para enumerar sistemáticamente**

E32. Encuentra una respuesta incompleta por ensayo y error, sin emplear procedimientos recursivos.

E33. Lista las permutaciones encontradas al fijar un solo elemento, sin tener en cuenta las que puedan resultar de fijar los demás.

E34. Presenta como respuesta a un problema, una tabla de doble entrada con celdas vacías, distintas a las que forman la diagonal.

E35. Exhibe un diagrama de árbol con ramificaciones incompletas.

E36. Interpreta una situación que no implica permutaciones en el contexto de un problema que si corresponde a permutaciones sin repetición.

E37. Adapta el problema a un modelo matemático que no corresponde a permutaciones con repetición.

E43. Construye el diagrama de árbol pero no interpreta los resultados que obtiene o interpreta otros resultados.