Conocimiento del profesor sobre pensamiento estadístico

Ana Cristina Leiria, María Teresa González y Jesús Enrique Pinto

En este artículo se muestran los diferentes elementos del pensamiento estadístico a través de la práctica de dos profesoras. Dado que se parte de la práctica docente, el marco metodológico es el modelo del cuarteto del conocimiento. Este modelo permite determinar el conocimiento movilizado en una clase a través de las situaciones o tareas que plantea el profesor a sus alumnos. Se describen brevemente los elementos del pensamiento estadístico y su asociación con cada una de las dimensiones del cuarteto a través de diversos episodios de aula al trabajar el tópico de los gráficos estadísticos. Esta recopilación puede constituir una muestra del conocimiento que debe tener un profesor y que puede guiar el diseño de la formación de profesores.

Términos clave: Conocimiento profesional; Pensamiento estadístico; Práctica del profesor; Representación gráfica

Teacher Knowledge on Statistical Thinking

In this article we show the elements of the statistical thinking through two teachers' practice. As we start from the professional practice the methodological framework is the knowledge quartet model. This model is used to determine the knowledge mobilized in a classroom by different situations and tasks posed by the teacher. We briefly describe the elements of statistical knowledge and their relation with each quartet knowledge dimension through various classroom events when graphical representations are taught. This review can be a sample of required teacher's knowledge and can be a guide to the design of the teacher instruction.

Keywords: Professional knowledge; Statistical graphs; Statistical thinking; Teacher's practice

La investigación acerca del conocimiento de los profesores ha sufrido una gran evolución desde sus inicios con Shulman (1986, 1987) hasta nuestros días. En la actualidad está siendo una línea de investigación enormemente fructífera, como se puede com-

Leiria, A. C., González, M. T. y Pinto, J. E. (2015). Conocimiento del profesor sobre pensamiento estadístico. *PNA, 10*(1), 25-52.

probar tanto en la prensa escrita como en los congresos internacionales, siendo el centro de atención el conocimiento que moviliza el profesor en su práctica docente.

El conocimiento profesional del profesor no yace exclusivamente en un conocimiento académico, formal y teórico sobre la materia a enseñar sino que conjuga diferentes saberes que proceden de la experiencia que se inician con la formación didáctica y van evolucionando con la práctica docente. Por lo tanto, integra aspectos de naturaleza teórica que provienen tanto de la formación inicial como de la formación continua de los profesores, los que provienen de la interacción social con los alumnos y la comunidad escolar que generan un conocimiento acerca de los propios alumnos, de la gestión y dinámica del aula, el currículo o el diseño de tareas y aquellos que provienen de la propia práctica y de la reflexión sobre ella (Leiria, 2014).

Desde el punto de vista de la Didáctica de la Matemática es imprescindible identificar el conocimiento del profesor tanto con vistas a la formación de futuros profesores como para mejorar la práctica docente de los profesores en ejercicio. Esta práctica, como señala Llinares (2013), se nutre tanto de la investigación como de la propia experiencia del docente, de forma que las investigaciones más recientes sobre el conocimiento del profesor se centran en dicha práctica. Tal es el caso de la investigación desarrollada en la Universidad de Michigan por Deborah Ball y colaboradores e identificada con el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT[1]). A pesar de los avances realizados con este modelo, que es reconocido internacionalmente en la investigación en Educación Matemática y que ha sido enormemente fructífero en resultados, ha planteado algunos problemas prácticos a la hora de caracterizar los diferentes tipos de conocimiento que posee el profesor (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013)y como resultado se han desarrollado otros modelos como el de la Universidad de Huelva, centrado en el conocimiento especializado del contenido (*mathematics teacher's specialized knowledge,* MTSK).

Otro modelo desarrollado para el estudio del conocimiento del profesor y centrado en la observación del aula es el cuarteto del conocimiento (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2003). Este modelo permite categorizar las intervenciones del profesor en función del conocimiento movilizado en el aula (Rowland, Thwaites y Huckstep, 2005). Aunque se basa en el modelo teórico de Shulman, en el cuarteto del conocimiento se categorizan las situaciones de aula prestando especial atención al tópico que se está tratando en el momento sin categorizar los tipos de conocimiento del profesor. El objetivo del modelo es comprender lo que el profesor sabe e identificar las oportunidades para mejorar la enseñanza.

Aunque esta línea de investigación sobre el conocimiento del profesor ha sido realmente muy fructífera, son ciertamente muy escasas las investigaciones realizadas en torno al conocimiento del profesor de Estadística. Cabe destacar el trabajo realizado por Burguess (2006) quien propone un modelo en el que se combinan las aportaciones de Hill, Ball y Schilling (2008) en torno a la distinción entre conocimiento común del contenido y conocimiento especializado del contenido junto con los

[1] Mathematical knowledge for teaching

componentes del razonamiento y del pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999). Su modelo ha permitido identificar diferentes tipos de conocimiento del profesor de estadística así como determinar algunos componentes del modelo de Ball que pueden no ser apropiados en relación con la Estadística "dada la diferencia entre el aprendizaje de las matemáticas y el de la estadística" (Pinto, 2010, p. 89). En este sentido, Groth (2007), apoyándose en modelo de Ball y colaboradores de distinción entre conocimiento común y conocimiento especializado, propone una nueva distinción entre conocimientos matemáticos y conocimientos no matemáticos. Estos últimos son relativos a las recomendaciones del GAISE[2] sobre la enseñanza de la Estadística englobados en los componentes: formular preguntas, recoger datos, analizar datos y establecer conclusiones.

En esta misma línea, el año 2006 marcó un punto de inflexión en las investigaciones sobre el conocimiento del profesor de Estadística al plantear la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) y la *International Association for Statistical Education* (IASE) un estudio conjunto entre profesores de diferentes nacionalidades bajo la temática "Educación estadística en la matemática escolar: retos para la enseñanza en la formación del profesor" (Batanero, Burril y Reading, 2011). Posteriormente, Shaughnessy (2007) recomendó la realización de investigaciones futuras sobre el conocimiento estadístico necesario para la enseñanza al igual que se ha realizado en otras ramas de las matemáticas como el Álgebra y la Geometría.

En la Universidad de Granada se han realizado estudios sobre el conocimiento de futuros profesores en torno a diversos conceptos estadísticos como los conceptos de correlación y regresión (Gea, 2014), los gráficos estadísticos (Arteaga, 2011) o la probabilidad (Gómez, 2014) más centrados en las características que determinan la formación de los profesores que en la práctica profesional a la que dedicamos este artículo.

El objetivo principal de este artículo es avanzar en esta línea de investigación aportando, al igual que hace Rowland, Huckstep y Thwaites (2003), algunos resultados de una investigación sobre el conocimiento que moviliza el profesor en su práctica docente cuando enseña Estadística en un aula de primero de educación secundaria, concretamente lo que se refiere a la representación gráfica estadística (Leiria, 2014).

El pensamiento estadístico

Hoy en día, en muchos sectores de la sociedad, son necesarios datos y evidencias para la toma de decisiones, por lo que la estadística es parte integral de la era de la información emergente. Por ello los diferentes currículos escolares incluyeron las nociones estadísticas como parte de la formación de los alumnos como futuros ciudadanos.

Un abordaje de la enseñanza de la estadística se propone en el proyecto GAISE en el que se indica que para que los alumnos sean capaces de razonar estadísticamente se requiere que comprendan algunos aspectos de la Estadística como son: la necesidad de

[2] Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education

los datos, la importancia de generar buenos datos, la presencia de la variabilidad, la cuantificación y explicación de la variabilidad, que haya más conceptos y menos fórmulas y el fomento de un aprendizaje activo (Gea, 2014).

Nosotros nos hemos basado en el marco de referencia de Wild y Pfannkuch (1999) en torno al pensamiento estadístico por considerarlo lo suficientemente amplio (en cuanto a las cuestiones que abarca) y potente en cuanto a su formulación de la enseñanza de la Estadística. Su perspectiva teórica parte del supuesto del aprendizaje de la Estadística en contexto, es decir, el trabajo en el aula no se debe limitar únicamente al manejo de datos sino que estos deben ir precedidos por la formulación del problema, la recogida y análisis de la información y su interpretación; todo ello enmarcado dentro de una pedagogía de la investigación estadística como método de enseñanza.

En este modelo, Wild y Pfannkuch (1999) tratan de organizar algunos de los elementos del pensamiento estadístico involucrados en una investigación empírica en cuatro dimensiones: un ciclo investigador, el tipo de pensamiento, un ciclo interrogativo y lo que denomina disposiciones. La tabla 1 describe brevemente cada una de las dimensiones consideradas.

Tabla 1
Dimensiones para el desarrollo del pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999)

Dimensión	Descripción
1. Ciclo investigativo	Identifica las etapas, los momentos y las decisiones sobre la manera en que uno actúa y lo que uno piensa durante el desarrollo de la investigación estadística. Proponen una adaptación del modelo PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones).
2. Tipos de pensamiento	Tipos de pensamiento general aplicados al contexto de la estadística: (a) pensamiento estratégico, (b) buscando explicaciones, (c) modelización, y (d) aplicación de técnicas. Elementos centrales del pensamiento estadístico: (a) reconocimiento de la necesidad de los datos, (b) transnumeración, (c) percepción de la variación, (d) razonamiento con modelos estadísticos, y (e) integrar la estadística con el contexto.
3. Ciclo interrogativo	Es un proceso de pensamiento genérico en uso constante en la resolución de problemas estadísticos, que implica generar, buscar, interpretar, argumentar, valorar, tanto a nivel macro como micro, de forma lineal y recursiva.
4. Disposición	Se discuten las cualidades personales (curiosidad, perseverancia, compromiso, imaginación, escepticismo y ser lógico) de los procesos de pensamiento.

Dentro de esta estructura se contemplan cinco elementos del pensamiento estadístico (ver tabla 1), a saber: el reconocimiento de la necesidad de datos, la transnumeración, la percepción de la variación, el razonamiento con modelos estadísticos y la integración de la estadística en el contexto. Describiremos a continuación brevemente cada uno de ellos.

- La base de una investigación estadística reside en el hecho de que trata de dar respuesta a muchas situaciones de la vida real a partir de la recogida de datos, por lo que es necesario un reconocimiento de la necesidad de los datos. Esto debe realizarse en el aula o debe ser una de las tareas que realicen los alumnos. Se trata de un "reconocimiento de que no es adecuado basarse en la propia experiencia y en evidencias anecdóticas lo que conduce al deseo de basar las decisiones sobre datos recogidos deliberadamente como un impulso estadístico" (Wild y Pfannkuh, 1999, p. 227).
- Wild y Pfannkuh (1999) definen la transnumeración como

  la habilidad para realizar transformaciones numéricas para facilitar la comprensión… Se produce cuando se encuentran formas de obtener datos a través de la medida o la clasificación que capturan elementos significativos del sistema real. Penetra en todos los análisis de datos estadísticos, que se producen cada vez que cambiamos nuestra forma de mirar los datos con la esperanza de que esto va a transmitir un nuevo significado para nosotros… es un proceso dinámico de cambio de las representaciones para generar comprensión.(p.227)

  Es un proceso dinámico que se puede realizar en las tres fases mostradas en la figura 1: (a) durante la recogida y registro de las observaciones del mundo real; (b) en la construcción de diversas representaciones estadísticas y (c) en la comunicación de las ideas generadas que el mundo estadístico revela sobre el mundo real. La transnumeración es el proceso de trasformar los datos en representaciones, incluyendo el cambio de forma de representación para dotarles de sentido (Lee et al., 2014).

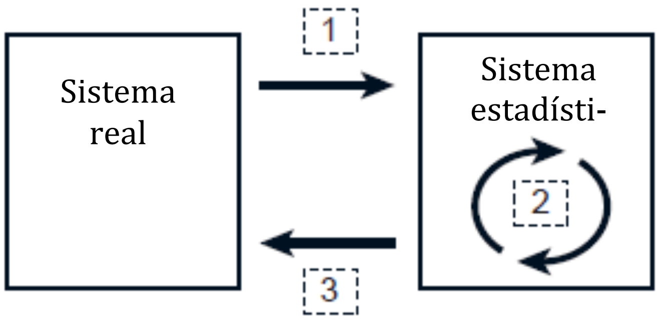


Figura 1. Fases del proceso de transnumeración (Shaughnessy y Pfannkuch, 2002)

- Las decisiones tomadas a partir de los datos requieren la comprensión de que existe variación observándola directamente de la representación adoptada para expresar los datos obtenidos. Esa comprensión exige de los alumnos leer los gráficos para buscar patrones de variación, evitando que se consideren generalizaciones sobre un conjunto de datos como certezas. La Estadística procura prever las causas de la variación y aprender a partir del contexto (Pimenta, 2006).

- Razonar con modelos estadísticos incluye la selección o creación de los modelos que mejor representan y muestran la naturaleza de un problema real. Según Pimenta (2006), cualquier instrumento estadístico, sea un simple gráfico, una recta de regresión o un parámetro estadístico es un modelo, en el sentido que se usa para representar la realidad.
- Es importante vincular el conocimiento estadístico relacionado con los datos con el contexto en el que tiene sentido la situación sobre la que se está investigando. La importancia del conocimiento del contexto en la búsqueda de las causas de la variación y la relación entre variables subyacentes a los datos es reconocida por Wild y Pfanchkuch (2004).

En el momento de tomar una decisión acerca del tópico en el que nos íbamos a centrar para realizar el análisis de la práctica del profesor, tomamos la decisión de hacerlo en torno a los gráficos estadísticos puesto que ya habíamos hecho algunas investigaciones previas en torno al tema (Pinto, 2009) y nos permite abordar los cinco elementos del pensamiento estadístico descritos en el apartado anterior.

En torno a este tópico se han realizado un gran número de investigaciones que han abordado cuestiones relativas a la comprensión gráfica (Aoyama, 2007;Wu, 2004), la interpretación de los gráficos (Curcio, 1987; Shaughnessy, 2007), los errores cometidos por los alumnos (Batanero, Arteaga y Ruíz, 2009; Lee y Meletiou, 2003), las dificultades de algunos gráficos (Pfannkuch, 2006), las dificultades de los futuros maestros (Bruno y Espinel, 2005) o el conocimiento didáctico del contenido de los profesores universitarios (Pinto, 2009), por citar algunos.

Estas investigaciones nos allanaron el camino por cuanto nos daban muchas pistas acerca de lo que implica el uso, construcción e interpretación de gráficos y al mismo tiempo nos señalaba un aspecto no abordado como era el de la práctica del profesor.

Metodología

Durante el curso escolar 2010-2011 se implantó en Portugal un nuevo programa de Matemáticas en la Enseñanza Básica (6-15 años) que, por primera vez, incluía un bloque de contenidos denominado organización y el tratamiento de datos (OTD). En este se siguen las recomendaciones hechas en la investigación en educación en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la Estadística haciendo especial énfasis en la lectura e interpretación de los datos desde el primer ciclo de enseñanza, en el valor de la alfabetización estadística, el proceso de investigación estadística usando datos reales recogidos por los alumnos o el recurso de la calculadora y el ordenador para favorecer la comprensión conceptual.

La introducción de nuevas temáticas y la profundización en otras, así como las orientaciones curriculares y metodológicas para la enseñanza de la Estadística, apuntaban a un cambio en la actuación por parte del profesor y justificaban la necesidad de la realización de estudios que contribuyan a un mejor conocimiento profesional del profesor cuando enseñan estas temáticas (Fernandes, 2009; Pinto, 2010).

En este sentido, realizamos un estudio sobre el conocimiento profesional de dos profesoras de enseñanza básica cuando enseñan OTD a alumnos de 7º curso (1º de Educación Secundaria Obligatoria en España) durante el curso lectivo 2010-2011, concretamente sobre el conocimiento del profesor movilizado en su práctica profesional acerca de las representaciones gráficas estadísticas. El objetivo era percibir cómo y qué interpretan las profesoras del tema y de qué modo lo implementaron en el aula.

El modelo metodológico adoptado para encuadrar nuestro estudio fue el modelo del *knowledge quartet* (KQ) de Rowland, Huckstep y Thwaites (2011), basado como hemos indicado en el modelo de Shulman (1986) y que constituye un marco para estudiar el conocimiento del profesor en la práctica de aula.

El cuarteto del conocimiento constituye un cuadro conceptual para orientar la observación de las aulas en aquellos aspectos relativos al conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido que facilita el análisis de las situaciones observadas. Se trata de un marco flexible que permite capturar las ideas importantes y encuadrarlas en un número no excesivo de categorías conceptuales que puedan ser eficaces en la investigación. En este modelo se categorizan las situaciones correspondientes a las aulas de matemáticas centrándose en el tópico matemático que se está trabajando en el momento y el conocimiento matemático que el profesor usa en la sesión de clase en vez de en características más generales de la enseñanza (Rowland et al., 2005). El objetivo es ver lo que el profesor sabe y pone en práctica en el aula. Dado que nuestros datos proceden precisamente de lo que las profesoras realizan en el aula, consideramos este modelo el más adecuado para realizar el análisis de los datos. Además, consideramos que la reacción del profesor en situaciones imprevistas que se producen en el aula por la interacción con los alumnos es característica de su práctica; que el modelo KQ engloba en una categoría específica denominada contingencia y que es otro elemento que caracteriza al conocimiento del profesor. Mediante las situaciones de aula que se analizan a continuación, se puede comprobar la potencia de este modelo en cuanto al análisis de la actividad realizada en el aula y la aportación que supone respecto del conocimiento de la enseñanza en el aula, sin que sea un experimento de enseñanza.

Este modelo de análisis comprende cuatro dimensiones: fundamentación, transformación, conexión y contingencia (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2011) (ver tabla 2). La fundamentación incluye los conocimientos y comprensión de la matemática en sí misma y de la pedagogía específica de la matemática, así como las creencias acerca de las matemáticas, las finalidades de la matemática y las condiciones con las cuales los alumnos aprenden mejor matemáticas. Las otras tres dimensiones se refieren al contexto en el que se pone en práctica el conocimiento. Así, la transformación realizada sobre el conocimiento a enseñar en formas pedagógicamente fuertes sería la segunda categoría. La conexión incluye la secuenciación del material para la enseñanza y una concienciación de las exigencias cognitivas de los diferentes tópicos y tareas así como el establecimiento de relaciones entre diferentes conceptos matemáticos y la contingencia es la capacidad de respuesta de un profesor en situaciones de aula imprevistas y la habilidad para *think on one's foot* lo que incluye la capacidad de convencer, de fundamentar y de dar explicaciones esclarecedoras en situaciones imprevistas y no planificadas.

Tabla 2
Categorías del cuarteto del conocimiento(Rowland et al., 2011)

Dimensión	Categorías
Fundamentación	Consciencia de los objetivos, recurso al manual, concentración en los procedimientos, identificación de errores, exhibición explícita del asunto, bases teóricas de pedagogía, uso de terminología matemática.
Transformación	Selección de ejemplos, selección de representación, uso de material de enseñanza, demonstración del profesor (para enseñar un procedimiento).
Conexión	Anticipación de la complejidad, decisiones sobre la secuencialidad, conexiones sobre procedimientos, conexiones sobre conceptos, reconocimiento de la adecuación conceptual.
Contingencia	Desvío del plan de trabajo, respuesta a las ideas del alumno, uso de oportunidades, percepción del profesor durante la clase.

En el KQ algunos episodios de la enseñanza pueden ser significativos para una o más dimensiones. Por ejemplo, una respuesta a una sugerencia de un alumno (contingencia) puede relacionar ideas anteriores (conexión). Incluso, se puede argumentar que la aplicación de un tema en la clase se basa siempre en "lo que el profesor sabe" (fundamentación).

La adopción de este marco metodológico se realizó por ser de gran utilidad para el estudio del conocimiento del profesor a través de la práctica y por el marcado carácter de la contingencia que permite el análisis de la interacción con el alumno o entre los alumnos y exige un sentido de improvisación que se puede traducir como un momento de aprendizaje para el profesor. Cuando se confronta con la manera de pensar de un alumno, el profesor se ve obligado a una reflexión para reaccionar y tomar una decisión. Se trataba de estudiar al profesor en su ambiente natural, el aula, considerando toda su complejidad.

La recogida de datos se realizó mediante una entrevista inicial para conocer la biografía de cada una de las profesoras, sus concepciones sobre la matemática, la estadística y el papel que consideran que deben desempeñar como profesoras, así como información sobre las sesiones dedicadas al tema objeto de la investigación. También se realizaron entrevistas cortas después de cada sesión con la intención de clarificar los objetivos de las profesoras a lo largo de dicha sesión así como de clarificar las interpretaciones de la investigadora en cuanto al desarrollo de la sesión y promover reflexión sobre los conocimientos matemáticos de la sesión. Se recogió asimismo la propuesta de planificación de cada una de las sesiones y los materiales usados. Cada sesión fue grabada en video y analizada en función de las tareas y del tipo de actividad a desarrollar y las finalidades y objetivos generales de la enseñanza que incluía el tipo de representación gráfica utilizada, el nivel de comprensión gráfica requerida y las dimensiones y categorías definidas en el modelo KQ.

El análisis se centró en la práctica lectiva de las profesoras sin hacer referencia a los alumnos. Se llevó a cabo después de la transcripción de todas las sesiones y de todas las entrevistas grabadas. Se analizaron por separado cada una de las tareas realizadas en el aula mediante un análisis de contenido que permitió el paso de los datos brutos a los datos organizados sin desviarse del material pero haciendo evidentes aspectos invisibles inicialmente. Las tareas se dividieron en segmentos asociados con una o más de las dimensiones del modelo KQ que se fueron asignando por los investigadores procurando de este modo la triangulación. Posteriormente fueron revisadas dichas asignaciones apoyándose en las aportaciones realizadas en las entrevistas.

Aunque el sistema de dimensiones viene predeterminado por el modelo KQ, se realizó una adaptación de las categorías al caso del conocimiento estadístico de forma inductiva. Estas se muestran en la tabla 3.

Tabla 3
Dimensiones y categorías de análisis

Dimensiones	Categorías
Fundamentación	Consciencia de los objetivos
	Recurso al material didáctico pedagógico
	Conocimiento procedimiental
	Identificación de dificultades y errores
	Evidente conocimiento del tema
	Base teórica de pedagogía
	Uso de terminología y notación adecuada
Transformación	Selección adecuada de ejemplos
	Selección de la representación
	Uso de material de enseñanza
Conexión	Anticipación de la complejidad
	Decisiones sobre la secuencialidad
	Conexiones entre procedimientos
	Conexiones entre conceptos
	Reconocimiento de la adecuación conceptual
Contingencia	Responder a las ideas del alumno
	Desvío del plan de trabajo
	Uso de la oportunidades
	Percepción del profesor durante la clase

Mediante el software Atlas.ti se categorizaron los segmentos de las tareas, lo que permitió establecer relaciones entre los datos facilitando el descubrimiento de información relevante sobre el tema.

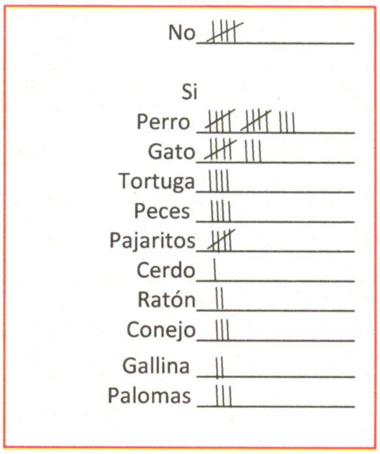
ANÁLISIS DE UNA TAREA

Con el objeto de mostrar cómo a través de una tarea se puede obtener información acerca del conocimiento que moviliza el profesor y los elementos del pensamiento estadístico con los que está relacionado dicho conocimiento, mostraremos a continuación el análisis de una de las tareas implementadas por una profesora (ver figura 2).

Esta profesora propuso a los alumnos una tarea acerca de los animales domésticos. El objetivo de la tarea era leer e interpretar gráficos distintos, recordar los gráficos usados en el curso anterior y aprender a recoger y registrar los datos. Se trataba de una tarea ya planificada (ver figura 2) en la que los datos respondían a la pregunta ¿Cuáles son nuestros animales domésticos?, que se hizo hipotéticamente a las primeras 50 personas que pasaban por la puerta de una escuela y que se representaron en una tabla de conteo (*tally chart*).

Tarea 2: ¿Cuáles son nuestros animales domésticos?

En la escuela, un grupo de alumnos decidió averiguar si las familias tienen animales domésticos y en caso de tenerlos, qué animales domésticos tienen. Fueron a la puerta de la escuela y a las primeras 50 personas que pasaron por allí, les hicieron las siguientes preguntas:



¿Tiene algún animal doméstico? Si es que sí ¿cuál es el animal doméstico que tiene desde hace más tiempo?

Para anotar la información que iban recibiendo, tenían una hoja de papel idéntica a la de al lado.

A medida que las personas iban respondiendo, anotaban con un trazo. Hacían grupos de 5 trazos, cortando el quinto a los otros 4. Estos grupos son más fáciles para un conteo posterior.

1. **Organiza los datos en una tabla.**
2. **Construye un gráfico de barras**
3. **Responde a las siguientes preguntas**
   a. ¿Hubo más personas que respondieron que tenían un perro que las que tenían un gato?
   b. De las personas que respondieron ¿cuál es el animal menos frecuente para tener en casa?
   c. Si el mismo grupo de alumnos hubiese hecho la misma pregunta a otras 50 personas, en el mismo lugar y a la misma hora ¿Qué esperas que respondieran las personas más veces? ¿Por qué?
   d. Si en el segundo grupo de personas consultadas, 9 personas respondieran que tenían un gato, ¿Te sorprendería o supones esta respuesta muy posible? ¿Por qué?
   e. Si, también en este grupo, 20 personas dijeran que tenían en casa gallinas ¿Te sorprendería? ¿Por qué? ¿Más o menos cuántas personas esperarías que dijeran que tenían gallinas?

Texto adaptado de Martins, M. Eugenia Graça, Luisa Castro y Mendes, M. Fátima Análise de dados. Lisboa: Editorial do Ministerio de Educação

Figura 2. Tarea propuesta por la profesora

Los alumnos resolvieron la tarea individualmente mientras la profesora resolvía las dudas de los alumnos que la solicitaban. La corrección de la tarea permitió conocer los errores cometidos por los alumnos, alertar y discutir esos mismos errores en el grupo e incluso reducir los datos y representarlos de forma que se facilitara su lectura e interpretación, lo que no se cumple en el caso de estar el gráfico (pregunta 2 de la tarea) dividido en dos (parte en una hoja y parte en otra) como hizo el alumno del siguiente episodio[3].

Profesora: Miguel hizo este gráfico. Pero la continuación del gráfico está aquí [en otra hoja]. ¿Esto es lógico?

Alumnos: No.

Profesora: Estoy viendo aquí el gráfico y luego tengo que darle la vuelta a la hoja para ver aquí el resto.

Alumno M: ¿Entonces cómo se hacía?

Profesora: Se podía hacer todo en la parte de atrás o encogías las barras y ya cabía todo. La cuestión es: ¿Para qué hace la gente un gráfico? Para interpretar lo que está en los datos. Entonces, si se hace la mitad en un lado y la mitad en el otro ¿cómo puedo mirar e interpretar algo?

En este episodio la profesora revela tener conocimiento de los objetivos de la estadística y de la importancia de la transnumeración para crear en el alumno la necesidad de hacer la representación gráfica de manera que él u otro puedan obtener fácilmente nuevas informaciones que se hayan hecho visibles a partir de la representación gráfica (conocimiento procedimental). Es importante tener presente que "la comprensión de los gráficos es una habilidad de los lectores que permite obtener información a partir de un gráfico creado por ellos mismos o por otros" (Friel, Curcio y Bright, 2001, p. 132).

La selección de esta tarea permitió confrontar a los alumnos con una situación que generó dificultades en la construcción de la tabla y del gráfico (como hemos visto antes). Concretamente para la realización de la tabla la profesora les pidió que incluyeran no sólo las frecuencias absolutas, sino también las relativas y los porcentajes. En este sentido, una cuestión que los alumnos tuvieron que decidir fue si deberían o no incluir en la tabla la respuesta "no" dada por cinco personas. Hubo alumnos que aceptaron esta respuesta como una categoría de la variable en estudio. Además, en la construcción de la tabla, el total de las frecuencias absolutas y consecuentemente, la determinación de las frecuencias relativas, condujeron a algunas dudas de por qué se entrevistó a 50 personas si solo 45 habían respondido positivamente a la pregunta sobre si tienen algún animal doméstico. Esta tarea permitió confrontar a los alumnos con determinadas dudas que surgieron durante su realización.

[3]Los episodios estaban originalmente en portugués pero por ser la revista de publicación una revista española se han traducido al castellano.

En la exploración de esta misma tarea se hizo una lectura por detrás de los datos, en la que se procuró establecer una conexión entre el contexto y el gráfico. La profesora cuestiona a los alumnos sobre las respuestas que habrían esperado a esas mismas preguntas si se hubiera entrevistado a otras cincuenta personas, en el mismo sitio y a la misma hora.

Alumno: El perro.

Profesora: Ok, el perro. ¿Pero por qué el perro?

Alumno B: Porque es el animal de estimación más habitual.

Alumnos: Por los datos.

[...]

Profesora: Si, incluso en este nuevo grupo [de otras 50 personas], 20 personas dijeran que tenían en casa gallinas, ¿te quedabas admirado? ¿Por qué? Pero más o menos ¿cuántas personas esperarías que dijesen que tenían gallinas?¿Cuántas personas de este grupo respondieron gallinas?

Alumnos: 2.

Profesora: Dos personas. De las 50 personas, de las 45 que dijeron que sí, dos dijeron gallinas como animal doméstico. Doméstico quiere decir que puede estar dentro de mi casa. En este conjunto de personas, 2 respondieron gallina. ¿Creéis que en otro grupo de 50, en el mismo día a la misma hora, si el grupo de personas de aquí fue aleatorio y el otro fuera aleatorio, creéis que vais a tener 20 respuestas de gallina?

Alumnos: No.

Profesora: O sea, si aquí tenemos dos respuestas ¿cuál es el valor que podríamos esperar?

Alumno: 3 o 4.

La representación de los datos y todo el proceso de construcción y de transformación permiten el aprendizaje de conceptos estadísticos, el de aleatoriedad de la muestra y la importancia del contexto en el que se desarrolla el estudio. En las mismas condiciones, si la pregunta se hiciera a otras cincuenta personas en la puerta de la escuela era de esperar categorías y frecuencias similares. Sin embargo, si la cuestión fuera formulada a cincuenta personas de una localidad rural es posible que las respuestas fueran diferentes.

En la tarea se seleccionaron los momentos considerados más significativos en relación con las dimensiones del modelo KQ y los tipos de pensamiento del modelo de Wild y Pfannkuch (1999). Por lo tanto, si un episodio pone de relieve la comprensión de la maestra de los procedimientos adecuados para la recogida y análisis de datos estadísticos se sombrearon las celdas correspondientes a la fundamentación y reconocimiento de la necesidad de los datos. Cuando hace hincapié en el objetivo de lo que va a ser aprendido, que incluye saber por qué optar por un determinado tipo de gráfico, el episodio se inscribe en el fundamentación y transnumeración. Cuando selecciona las tareas que requieren contextualización de contenido estadístico entonces la celda indicada es la intersección de transformación y transnumeración.

En el análisis de esta tarea se analizaron un total de once episodios, considerados como ilustrativos respecto del conocimiento del contenido de la maestra que se resumen en la tabla 4.

Tabla 4
Análisis de una tarea

Tipos de pensamiento estadístico	Dimensiones del modelo KQ			
	Fundamentación	Transformación	Conexión	Contingencia
Reconocimiento de la necesidad de los datos	✓		✓	✓
Transnumeración	✓			✓
Consideración de la variación	✓	✓		
Razonamiento con modelos estadísticos	✓			
Integración de la estadística y del contexto	✓	✓		✓

Nota. ✓ = se identifica.

En una lectura vertical de la tabla se puede verificar que la fundamentación está presente en los cinco componentes del pensamiento estadístico, lo que no sorprende dado que la aplicación del conocimiento de un tópico en el aula recae siempre en la fundamentación, que influye de forma determinante en las selecciones pedagógicas y las estrategias. En una lectura horizontal, los episodios significativos de cada uno de los tipos de pensamiento estadístico son relevantes en relación con las cuatro dimensiones del KQ.

La selección e implementación de esta tarea revela la preocupación de la profesora en proporcionar al alumno una experiencia rica en términos estadísticos que abarque los cinco tipos de pensamiento estadístico. Esta tarea pone de relieve la importancia de los datos y confronta a los alumnos con algunas actividades (como la elaboración de una tabla o un gráfico) que habitualmente generan dificultades en los alumnos. Es importante para el desarrollo de una buena comprensión gráfica que el profesor prepare situaciones didácticas en las que las dificultades y los errores, ya diagnosticados en la práctica lectiva y en la investigación en educación estadística sea fruto de discusión y de reflexión en el aula, evitando de este modo obstáculos cognitivos (Batanero, Godino, Vallecillos, Green y Holmes, 2012).

A MANERA DE EJEMPLOS: EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

En este apartado vamos a ilustrar parte del conocimiento revelado por las profesoras a través de algunos episodios de aula considerados relevantes respecto de cada uno de los tipos de pensamiento estadístico asociado con una de las dimensiones establecidas en el modelo KQ. No se trata por tanto de mostrar los resultados acerca del conocimiento de las profesores sobre los gráficos estadísticos o del análisis realizado, sino más bien mostrar algunas de las tareas analizadas a manera de ejemplos de cómo ellas han utilizado sus conocimientos profesionales en el tratamiento de estas tareas. Se trata por tanto de tareas extraídas ex profeso de la investigación con el único fin de ilustrar los tipos de conocimiento asociándolos a su vez con los elementos del pensamiento estadístico.

El profesor debe conocer los conceptos y procedimientos de la representación gráfica, reconociendo los componentes de los gráficos, las interrelaciones entre esas componentes y el efecto de esas componentes en la representación de la información en los gráficos. Ese conocimiento permite al profesor optar por una clasificación, por una medida estadística o una representación gráfica y aclarar el porqué de la opción escogida, mostrando reconocer cuándo un gráfico es más útil que otro dependiendo de la tarea a realizar y de los datos a representar. Así, en un mismo episodio, destacado por incluir una situación en la que se modifica el modo de representar un conjunto de datos para generar una comprensión mejor, puede ser significativo tanto de la transformación como de la contingencia, si la cuestión involucra la evaluación de una idea alternativa o una cuestión propuesta por los alumnos, que es posteriormente incorporada o no dependiendo de su pertinencia estadística.

Reconocimiento de la necesidad de los datos: fundamentación

Para la introducción del tema organización y tratamiento de los datos, una profesora presenta un sondeo sobre la intención de voto en unas elecciones generales en Portugal.

Profesora: En cada domicilio fue seleccionado un único sujeto con 18 años o más que estuviera censado. Por eso, telefoneaban y preguntaban cuál era la última persona que había cumplido 18 años y esa era la persona que respondía. Se obtuvieron 506 respuestas válidas y la tasa de respuesta fue del 74%. De ese 74%, 51% de los encuestados eran mujeres. Todos los resultados obtenidos se encontraron de acuerdo con la distribución de la población con 18 años o más residente en el continente, por sexo, grupo de edad y cualificación académica, con base en los datos de los censos de 2001. El margen de error máximo asociado a esta muestra aleatoria de 961 encuestas es de 3,5%.

Alumna M: La población tiene que ver con los censos.

Profesora: ¿Estáis todos de acuerdo con [Alumna M]? ¿La población tiene que ver con los censos?

Alumnos: Sí.

Alumno B: Hay un margen de error de 3,5% y confianza de 95%. ¿Y el otro 1,5?

Profesora: Es de aquellas personas que no respondieran correctamente o que respondieron y no se sabe qué respondieron.

En este extracto la profesora expone al mismo tiempo que explica a los alumnos, para que sean conscientes del proceso de recogida de datos, algunos aspectos sobre cómo se obtienen esos datos para establecer las intenciones de votos de una población, cómo se realizan los censos, el tipo de medidas que se utiliza y la utilidad de estos procedimientos al mismo tiempo que contesta a las preguntas de los alumnos. Con esto se procura asimismo una actitud positiva hacia la Estadística, se motiva a los alumnos. Sin embargo, no se da a los alumnos información acerca de los términos usados como el nivel de confianza o el margen de error lo que conduce a la pregunta del alumno.

Reconocimiento de la necesidad de los datos: transformación

Una de las tareas que se propusieron a los alumnos fue la de buscar en un periódico o revista, un gráfico para que los alumnos escribieran un texto asociado a la información que podían entresacar de ese gráfico. De este modo, los alumnos buscarían una temática que les fuera familiar o que les gustara como el deporte, la moda, la alimentación, los libros, etc. Este es un modo de desarrollar la comunicación estadística básica que incluye según Rumsey(2002), lectura, escritura, demostración e intercambio de información estadística de una forma que otra persona la entienda. Los alumnos de esta forma reconocerán la necesidad de los datos para obtener información acerca de una determinada actividad social que sea de su interés.

Reconocimiento de la necesidad de los datos: conexión

En otra tarea se les plantea a los alumnos que la masa de un cierto tipo de pan debe ser de 50 gramos (ver figura 3).

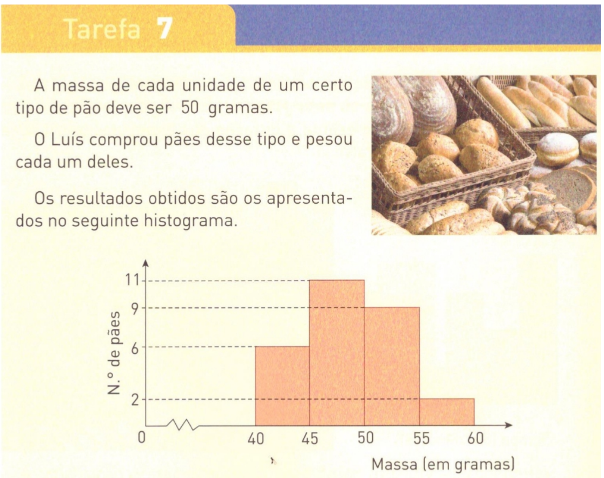


Figura 3. Tarea planteada[4]

En uno de los ítems se dice que exactamente 4 panes pesan 50 gramos y se les pregunta a los alumnos que bajo estas condiciones cuáles son las posibilidades del conjunto de panes que hay en la clase [50, 55[.

Profesora: Se sabe que exactamente 4 panes tenían la masa recomendada, 50 gramos. En estas condiciones presenta 9 posibles datos que formen parte de la clase [50, 55[.

Alumno F: 51, 52, 53, 54; 50,1; 51,2; 52,2; 53,2; 54,2.

Profesora: ¿Pero dónde están los 50 que piden?

Alumno B: 51, 52, 53, 54; 50,5; 51,5; 52,5; 53,5; 54,5.

Profesora: Tengo una gran duda. En la clase [50, 55[tenemos 9 panes y ya sabemos que 4 pesan 50. ¿Dónde vais a meter esos 4 panes que pesan 50?

Alumno A: Yo dije, 50, 50, 50, 50, 51, 52,…

Profesora: Ah! No os olvidéis de ese pormenor. 4 panes pesan 50, por eso tenemos que dar 5 valores que sean diferentes de 50 y que estén entre 50 y 55. ¿Me entendéis?

Alumna M: Los otros pueden ser…

Profesora: Los que quieran, sin coma, con coma, como quieran.

Alumna M: No podía ser 50, 50, 50, 50, 50, 50,…

Profesora: Son demasiados 50. Sólo cuatro pesan 50, los otros ya no pueden ser 50 pero tienen que estar entre 50 y 55, exclusive.

Profesora: Hay nueve panes que pesan entre 50 y 55. El 50 es inclusive y el 55 es exclusivo. ¿Por qué [Alumna M]? Porque el intervalo de 50 a 55 es abierto en el 55,

[4] Traducción (por los autores): "Tarea 7. La masa de un cierto tipo de pan debe ser 50 gramos. Luís compró panes de dicho tipo y pesó cada uno de ellos. Los resultados obtenidos se representan en el siguiente histograma."

los panes que pesan 55 están en el intervalo siguiente, entre 55 y 60…

En esta ocasión la profesora aprovecha la actividad para recordar a los alumnos el significado de un intervalo semicerrado, que en este caso ha de responder a una de las condiciones del problema al mismo tiempo que discute con los alumnos la forma de los datos incluidos en esa clase.

Reconocimiento de la necesidad de los datos: contingencia

En la primera tarea comentada sobre la intención de voto en unas elecciones generales en Portugal la profesora continúa de la siguiente forma.

Profesora: ¿Entonces no vieron un papel de estos en su casa? [presenta una encuesta para el Censo de 2011]

Alumnos: Sí, si es de los censos.

[…]

Alumno Z: A mí me preguntaron cuántos metros cuadrados tenía mi casa ¿Para qué quieren saber eso?

[*Los alumnos hablaron sobre los censos*]

Profesora: Los censos de 2011 preguntaban muchas cosas.

Alumno A: Había cosas innecesarias.

Profesora: No vamos a discutir si es necesario o no. Nos preguntaban nuestro nombre, nuestra edad, el número de hermanos….

[...]

Alumno Z: ¿Por qué nos preguntaron dónde estábamos el día 21 de marzo?

Profesora: Era para saber si estabas en casa o en otra casa, si no respondías o para confirmar los resultados. […] Sabéis que los censos no se realizan todos los años.

Alumno Z: De 10 en 10 años.

Profesora: Y nunca en el año 0, siempre en el año siguiente, en 2011, ahora será en 2021 a no ser que haya alguna anomalía. ¿Por qué no se hace todos los años?

El censo constituyó un foco de curiosidad para los alumnos manifestado a través de sus preguntas. La curiosidad de los alumnos se manifestó con su participación en el aula. Eran los propios alumnos los que realizaban las preguntas, la profesora se limitaba a clarificar algunas ideas para la comprensión de todo el grupo. Este interés de los alumnos permitió a la profesora darse cuenta de su predisposición para apreciar la Estadística “como instrumento de lectura de información y de su transformación en conocimiento” (Pestana y Velosa, 2010, p.17).

Transnumeración: fundamentación y contingencia

En otra tarea se incluía un pictograma relativo al número de coches vendidos en algunos países de Europa en el año 2008 y se informaba de que en el Reino Unido se vendieron 2.131.794 coches en ese año (Costa y González, 2012).

Profesora:	[Alumna R], el número de ventas en España es inferior o superior al 50% de las ventas en el Reino Unido?... Vamos a mirar al símbolo y al gráfico.
Alumna R:	Los coches enteros [se refiere al valor de cada coche en el pictograma] valen los 177.650 y el último coche vale la mitad de los 177.650.
Profesora:	Más o menos de la mitad. ¿Crees que debemos hacer esas cuentas? Cuando estoy pensando en el 50% ¿en qué estoy pensando?
Algunos alumnos:	En la mitad.
Profesora:	Entonces mira allí y piensa mejor. [Alumna R], ¿cuántos coches representan al Reino Unido? ¿Cuántos símbolos de coches? 12. Y en España, ¿cuántos símbolos tiene? 6 y un poco más. Entonces, en España se venden más o menos que en el Reino Unido.
Alumna R:	Más.

En este segmento la profesora reveló conocimiento del tema al presentar un modo de resolución diferente del propuesto por la alumna recurriendo al número de símbolos y no al número de coches vendidos que representan. La propuesta de resolución de la alumna era determinar el número de coches vendidos en España y Reino Unido y después comparar los números obtenidos. La profesora cuestionó la pertinencia del cálculo propuesto por la alumna, orientando la resolución en el número de símbolos que representan en cada uno de los dos países (contingencia).

El pictograma representa los datos disponibles de una forma considerada más apelativa para facilitar la comprensión e interpretación de los resultados. Recurriendo al número de símbolos y no al de coches, la profesora justificó el recurso al pictograma y el gráfico adquirió más significado.

Transnumeración: transformación

En una de las tareas propuestas, se proporcionaron los datos relativos a la esperanza de vida, en años, desde 1975 a 2050 en Portugal, obtenidos por el Instituto Nacional de Estadística portugués y representados en una tabla, en un gráfico de líneas y en gráfico de barras. La tarea podría haber contribuido para evidenciar la transnumeración, sin embargo la profesora fomentó una discusión muy breve y poco productiva sobre las diferentes representaciones de los datos, limitándose a informar que la utilidad de un tipo de gráfico depende del tipo de estudio que se pretenda realizar. La pertinencia estadística del ejemplo fue reconocida por la profesora pero no fue transformado para realzar su importancia y generar comprensión en cuanto a la representación gráfica estadística y la transnumeración.

Transnumeración: conexión

En un ejercicio se pedía a los alumnos que escribieran un texto sobre el número y el porcentaje de alumnos de una clase que habían ido más de 3 veces al cine durante las fiestas grandes.

Profesora: […] Otra cosas que nos piden es el porcentaje de los alumnos que fueron al cine durante las fiestas grandes, más de tres veces.

Alumno A: 71%. Pero en mi tabla está todo lo contrario.

Profesora: Pues sí. Entonces, en primer lugar si miramos a la tabla o al gráfico ¿a dónde tenemos que mirar?

Alumna M: El número de alumnos que fueron al cine más de 3 veces.

Profesora: O sea, tenemos que sumar el número de alumnos que fueron al cine 4 veces más los que fueron al cine 5 veces más los que fueran 6 veces ¿Nadie sumó los que fueron 3 veces?

Alumnos: No.

Profesora: Porque al decir, más de 3 veces, o sea 4, 5 o 6, o sea, 4+2+2, ocho. Entonces ya sabemos que 8 alumnos fueron al cine más de tres veces. Ahora nos piden el porcentaje.

Esta lectura obligaba a una lectura del gráfico o de la tabla, pero no a una lectura simple e inmediata sino a una lectura entre los datos. Curcio (1989) define niveles diferentes de comprensión gráfica, independientemente de su tipo, leer los datos, leer entre los datos y leer más allá de los datos. El nivel de la lectura entre los datos incluye la comparación de cantidades y el recurso a conceptos y capacidades que permitan identificar las relaciones matemáticas presentes en el gráfico. La secuencia de enseñanza planificada por la profesora incluye la construcción de tablas de frecuencias y de gráficos y la comprensión de la información representada gráficamente, lo que obligaba a un nivel de lectura diferente correspondiente al primer nivel establecido por Curcio.

Variabilidad: fundamentación y transformación

En esta tarea se presenta un gráfico de línea sobre la variación del número de alumnos matriculados en el primer ciclo de enseñanza secundaria de 1996 a 2007 en un centro. Después de leer el enunciado la profesora pide a los alumnos una interpretación del gráfico.

Profesora: [Alumna C], describe la variación del número de alumnos matriculados.

Alumna C: De 1994 a 2004 desciende y de 2004 a 2007 aumenta.

Profesora: Pero eso es como el reportaje de un ciclista que va a la Sierra de la Estrella sube hasta la Torre y después desciende.

Alumna C: De 1996 a 2004 desciende aproximadamente 100 mil alumnos y después de 2004 hasta 2007 sube en 40 mil alumnos, aproximadamente.

[…]

Profesora: Si yo quisiera comparar por ejemplo la evolución de la esperanza de vida de los hombres y de las mujeres de 1995 y 2050 el gráfico de abajo [de líneas] me permite hacer una mejor comparación. Si quisiera comparar por ejemplo el año 2000, o año a año, en qué año la esperanza de vida de las mujeres es superior a la de los hombres en este caso, el gráfico de encima [gráfico de barras] es más fácil para comparar. Moraleja de la historia: si tenemos varios gráficos para analizar los datos que recogemos o los que nos dan, hay gráficos que se adaptan mejor que otros a la función de aquello que queremos hacer.

El gráfico de líneas es un gráfico especialmente adecuado para representar observaciones de variables a lo largo del tiempo, por lo que se llama también de serie temporal y es una representación muy usada en la comunicación social. En esta clase se trabajaron dos gráficos de línea que representan la esperanza de vida en Portugal en determinados años para hombres y para mujeres y que facilitan el estudio comparativo. Además tenemos el gráfico de línea de los alumnos matriculados. Según la forma en la que se quiera estudiar la variabilidad de los datos es mejor un gráfico que otro, así que la profesora transforma la tarea inicial en otra para que los alumnos tomen conciencia de esto. Además la profesora promueve el cuidado y el rigor con el lenguaje de los alumnos.

Variabilidad: conexión

Son numerosas las ocasiones en las que estas profesoras abordan la conexión asociada con el análisis de la variabilidad de los datos, como cuando piden a los alumnos que transformen los datos en porcentajes (aritmética) y cuando deben usar el razonamiento proporcional usando fracciones y razones entre los datos, sus frecuencias absolutas o estableciendo las frecuencias relativas. Shield (2006) considera la dificultad que tiene la lectura de tablas y datos cuando requieren el uso de razones y porcentajes. Por ejemplo en un gráfico circular determinar que un sector tiene dos veces más que… otro. Los conceptos de razón, proporción y porcentajes son esenciales en la representación gráfica estadística. Además, cuando se construyen gráficos de sectores se transforman datos en proporciones y éstas en ángulos, lo que hace a los tres conceptos anteriormente mencionados, claves para comprender la construcción e interpretación de los gráficos de sectores.

Variabilidad: contingencia

En esta tarea del cálculo de la media de 24 calificaciones, una alumna sugiere la construcción de una tabla de frecuencias para facilitar el cálculo y otra alumna cuestiona el cálculo de la media cuándo el número de valores distintos es muy grande.

Profesora: Son 24 datos, ahí tiene que haber 24 datos. Imaginen que fuesen 50. ¿Piensa que la práctica era hacer esto, de esta forma? ¿Cómo resolvemos el problema [de cálculo de la media] para escribir 50 datos?

Alumna AR: Una tabla de frecuencias.

Profesora: Una tabla de frecuencias… ¿Para qué?

Alumna C: Si los resultados fueran todos diferentes no tendríamos muchas alternativas.

Alumna AR: Si el número estuviera repetido, contábamos las veces que estaba repetido y con la tabla es más fácil calcular la media.

Profesora: … lo que [Alumna AR] está diciendo es que si escribo los datos en una tabla de frecuencia, puedo ver fácilmente si algún dato se repite y después si se repite ¿qué hago?

Alumna AR: Multiplico el dato por el número en vez de escribir 63 muchas veces, escribo 63 por 5.

La profesora valoró la pregunta de la alumna y la sugerencia de la otra y las incorpora aunque esto significara desviarse del plan de trabajo. Esto supone "una matemática sólida y significativa" (Canavarro y Santos, 2012) con la que se procura la comprensión profunda del tópico y el desarrollo de los procesos matemáticos particulares y ayuda a los alumnos a comprender lo que es hacer matemáticas. Así se valora también la participación de los alumnos y sus argumentaciones que, en casos particulares, se traducen en pequeños progresos.

Razonamiento con modelos estadísticos: fundamentación

En esta tarea se plantean los precios en euros de un juguete: 19, 20, 25, 20, 20 y 25 y se pide a los alumnos que calculen la moda.

Profesora: [Alumna AR]

Alumna AR: La moda es el mayor número de los dados.

Profesora: Entonces, para ti, entre esos datos ¿la moda cuál es?

Alumna AR: 20.

Profesora: Pero lo que tú me dijiste no me hizo pensar en el 20. Lo que dijiste es el mayor número, por tanto era el 25, pero tú dijiste el 20. Luego una de dos: o tu frase no es correcta o tu valor para la moda no es correcto.

Alumna AR: Es el que aparece más veces.

En este caso la profesora procuró que la alumna se diera cuenta de su error y rectificase la definición de moda. De esta forma va incentivando en el alumno su capacidad de cuestionarse en relación con una definición.

Razonamiento con modelos estadísticos: transformación y conexión

En un diagrama de tallo y hojas se proporcionaban las edades de los integrantes de dos equipos de balonmano y se pide la edad del jugador más joven.

Alumnos: 19.

Profesora: 19 años. Sólo hay que leer. El equipo A está al lado izquierdo, las hojas en relación al tallo están al lado izquierdo y la edad del jugador más joven es de 19 años. ¿Cuál es la edad del jugador mayor del equipo B?

Alumnos: 32.

Profesora: 32. ¿El número de jugadores [Alumna M] del equipo A con menos de 25 años?

Alumna M: 3.

Profesora: 3 jugadores, menores. ¿Por qué? Está el que tiene 19 años, el que tiene 20 y el que tiene 22 años. El siguiente ya tiene 25 años ¿verdad? Ya no cuenta, tiene que ser menor de 25 años. Por tanto 3 jugadores.

Al seleccionar este gráfico la profesora mostró su preocupación por desarrollar en los alumnos un conocimiento relacional. Además, en su desarrollo no sólo procura que los alumnos lean los datos del gráfico sino también que hagan una lectura entre esos datos (Curcio, 1987). Para realizarlo deben darse cuenta de sus relaciones y cómo están organizados. Así se sugiere una secuencialidad pasando de unas preguntas más sencillas correspondientes a una lectura directa a otras que exigen establecer relaciones.

Razonamiento con modelos estadísticos: contingencia

La profesora pidió a los alumnos que calculasen la media de 19, 20, 25, 20, 20 y 25. Un alumno sugirió transformar algunas de las sumas en productos multiplicando 20 por 3 y 25 por 2. Una alumna preguntó a la profesora como se hacía para calcular la media si la variable presentaba una gran diversidad de valores. La profesora les recuerda que los datos se deben agrupar en clases.

Integración de la estadística y el contexto: fundamentación

En la tarea sobre la venta de coches, cuando se trata de analizar las ventas de Luxemburgo pasa lo siguiente.

Profesora: Luxemburgo es un país rico pero es dónde hubo menos volumen de ventas. Indica una justificación posible para esta situación. [La profesora leyó el enunciado del problema]

Alumna R: Es un país que tiene menos población.

Alumna L: Van en bicicleta.

Profesora: [Alumna R] dice que una de las razones puede ser esa. Dice que es un país muy pequeño. ¿Tenéis una noción del tamaño de Luxemburgo?

Alumnos: Es muy pequeño.

Profesora: … El país es muy pequeño, más pequeño de lo que creéis. Puede ser una razón la que da [Alumna R]. [Alumna L] dice que van todos en bicicleta. Pero es un país con muchas cuestas así que no creo que vayan en bicicleta.

Alumna L: Son todos atletas [risas].

Profesora: Además de la razón de [Alumna R], otra puede ser que están muy concentrados en la ciudad, la capital y usan el transporte público.

En este caso la profesora incentivó en sus alumnos la lectura por detrás de los datos lo que incluye establecer conexiones entre el contexto y el gráfico procurando los condicionantes que llevan a que en un determinado momento se produzcan unos datos y no otros(Shaugnessy, 2007). La importancia del conocimiento del contexto para buscar las causas de la variación y la relación entre las variables subyacentes a los datos es también reconocida por Wild y Pfanchkuch (2004).

Integración de la estadística y el contexto: transformación y conexión

En una tarea la profesora presentó dos gráficos, uno de líneas con el título "edad de las víctimas" y otro circular con el título "lo que es necesario para combatir la violencia en las escuelas" para que los alumnos escribieran un pequeño texto con tres informaciones significativas sobre cada gráfico. Los alumnos debían responder a esta tarea en casa para luego discutirla en clase.

El recurso a gráficos de comunicación social es importante por la necesidad de llamar la atención de las personas al hecho de que un mismo fenómeno puede producir modos de representación distintos y posiblemente conflictivos y que hay gráficos creados intencionalmente para engañar o destacar/ocultar una tendencia específica o una diferencia (Gal, 2002).

Integración de la estadística y el contexto: contingencia

La profesora recurre a ejemplos de características de los alumnos de un grupo que se pueden estudiar y que fueron sugeridas por los mismos alumnos.

Profesora: Quiero… es una idea para la próxima clase, quiero estudiar las características de los alumnos de este grupo. ¿Qué podemos estudiar?

Alumno A: La edad.

Alumno B: Número de hermanos.

Alumno Z: Localidad de residencia.

Alumno I: Altura.

Alumno S: Peso.

Alumno B: Quien usa gafas.

[*La profesora va escribiendo en la pizarra una lista con las características que van diciendo los alumnos*.]

Profesora: Color de los ojos. Ya llega. Estas características que están aquí ¿cómo se llaman?

Alumno Z: Características de las personas.

Profesora: Son características de las personas que están en estudio y pueden cambiar ¿no? Puedo tener diferentes respuestas. Son variables estadísticas.

Las cuestiones están relacionadas con el contexto de los alumnos que permite satisfacer su curiosidad en relación con los compañeros, esto permite crear situaciones de aprendizaje motivadoras. La selección de temas para la construcción de problemas de recogida de datos, que sean adecuados a los alumnos, es fundamental para incentivar su interés. Espinel, González, Bruno y Pinto (2009) realzan que el profesor debe tener una bolsa de ejemplos que le permita enseñar determinados contenidos y sugieren para los alumnos de 12 a 16 años, como temas para posibles análisis, los pasatiempos (música, cine, deporte) y datos de otras materias como Ciencias Naturales, Educación Física, Geografía, Historia y Ciencias sociales.

Algunas consideraciones finales

El modelo del cuarteto del conocimiento permite identificar el conocimiento movilizado durante la práctica docente a partir de las situaciones de aula diseñadas para la enseñanza de la estadística, concretamente lo que se refiere a la representación gráfica de datos (Leiria, 2014). En las investigaciones realizadas anteriormente con este modelo, no se había aplicado a los tópicos de estadística ni se había realizado una investigación con profesores en ejercicio sino con profesores en formación (Rowland et al., 2003, 2005, 2011). Los tópicos de las situaciones de aula tenían que ver fundamentalmente con la Aritmética y se analizaba el proceso de implementación en el aula de un futuro profesor. La riqueza que proporciona haber investigado el conocimiento de dos profesoras con numerosos años de servicio, nos ha permitido analizar una amplia gama de situaciones e identificar diferentes aspectos del conocimiento que en otro caso no hubiera sido posible. Hay que señalar que haber aplicado este modelo al análisis de situaciones de aula de Estadística ha requerido una adaptación del modelo a las características especiales de estos tópicos.

En las situaciones descritas anteriormente se ha podido comprobar como las profesoras mostraban conocimientos de la Estadística (fundamentación) pero no se han podido verificar los conocimientos sobre el contenido pedagógico, aunque sí han planteado, por ejemplo, situaciones con las que detectar los errores y dificultades de los alumnos (transformación), algunas tareas en las que se relaciona la Estadística con la vida cotidiana (conexión) y el apoyo en las preguntas y sugerencias de los alumnos para profundizar en algunos aspectos estadísticos (contingencia). Sin embargo, por ejemplo, se ha detectado que la lectura de los gráficos se hace en un nivel de lectura de datos o entre los datos (Curcio, 1987) pero no se va más allá. También se ha hecho referencia a la construcción y utilidad de las tablas de frecuencia y al uso más adecuado de algunos gráficos como el gráfico de líneas (Espinel, González, Bruno y Pinto, 2009).

Como se ha visto, en algunos episodios de enseñanza relativos a la contingencia las profesoras no incorporaron intervenciones de los alumnos o situaciones que surgieran en el aula cuya adecuada exploración se podría haber traducido en un instrumento útil para la transnumeración señalada como uno de los tipos fundamentales de pensamiento estadístico por Wild y Pfannckuch (1999). Los tipos de pensamiento nos han ayudado a clasificar las situaciones de aula y de esta forma poner un ejemplo de cada una de ellas. Este modelo puede ser útil no sólo como una guía para el diseño de las situaciones de aula procurando desarrollar en los alumnos el pensamiento estadístico sino como marco para la investigación de la práctica del profesor. Además, puede constituir un marco para la formación de maestros y profesores.

REFERENCIAS

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2*(3), 188-207.

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2009). Statistical graphs produced by prospective teachers in comparing two distributions. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.),*Proceedings of the sixth Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 368-377). Lion, Francia: ERME.

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R. y Holmes, P. (2012). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Educations in Science and Technology, 25*(4), 527-547.

Batanero, C., Burril, G. y Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Burgess, T. (2006). A framework for examining teacher knowledge as used in action while teaching statistics. En A. Rossman y B. Chance (Eds.),*Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*[CD-ROM]. Salvador, Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Bruno, A. y Espinel, M.C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 7*, 57-85.

Canavarro, A. P. y Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas [Explorar tareas matemáticas]. En A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes y S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática:ATAS do EIEM 2012*(pp. 99-104).Vila Viçosa, Portugal: SPIEM.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.),*Proceedings of theEighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya,Turquía: ERME.

Costa, A.C. y González, M.T. (2012). O conhecimento de uma professora quando explora representação gráfica estatística numa aula de 7º ano [El conocimiento de una profesora cuando explora una representación gráfica estadística en un aula de 7º año]. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F. J. García y L.

Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 209-218).Jaén, España: SEIEM.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(5), 382-393.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension.*Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Espinel, M. C., González, M. T., Bruno, A. y Pinto, J. (2009). Las gráficas estadísticas. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en Educación Estocástica* (pp. 133-155).Melilla, España: Universidad de Granada.

Fernandes, J. A. (2009). Ensino e aprendizagem da estatística: realidades e desafios [Enseñanza y aprendizaje de la estadística: realidades y desafios]. En C. Costa, E. Mamede y F. Guimarães (Eds.), *Números e estatística: reflectindo no presente, perspectivando o futuro: actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 1-12). Vila Real, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciência da Educação.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal of Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Gal, I. (2002). Expanding conceptions of statistical literacy: An analysis of products from statistics agencies. *Statistics Education Research Journal, 2*, 3-21.

Gea, M.M. (2014).*La correlación y regresión en bachillerato: análisis de libros de texto y de los conocimientos de los futuros profesores*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Gómez, E. (2014).*Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Groth, R. E. (2007). Toward a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 427-437.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Lee, H.S., Kersaint, G., Harper, S.R., Driskell, S.O., Jones, D.L., Leatham, K.R., Angotti, R. L. y Adu-Gyamfi, K. (2014). Teachers' use of transnumeration in solving statistical tasks with dynamic statistical software. *Statistics Education Research Journal*, *13*(1), 25-52.

Lee, C.y Meletiou, M. (2003). Some difficulties of learning histograms in introductory statistics.EnAmerican Statisfical Association (Ed.),*Proceedings of the American Statistical Association*, *Statistics Education Section*(pp. 2326-2333). Alexandria, VA: Editor. Disponible enhttp://www.statlit.org/PDF/2003LeeASA.pdf

Leiria, A.C. (2014).*Conhecimiento e praticas profissionais de duas professoras quando ensinam representaçao gráfica estatistica*[Conocimiento y prácticas profesionales de dos profesoras cuando enseñan la representación gráfica estadística]. Tesis doctoral. Universidade da Beira Interior, Portugal.

Llinares, S. (2013).Professional noticing: A component of mathematics teacher's profesional practice. *Sisyphus, 1*(3), *76-93.*

Pestana, D. P. y Velosa, S. F. (2010). *Introdução à probabilidade e à estatística*[Introducción a la probabilidad y la estadística](4ª ed., Vol. 1). Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.

Pfannkuch, M. (2006). Comparing box distributions: A teacher's reasoning. *Statistics Educations Research Journal*, *5*(2), 27-45.

Pimenta, R. (2006).Assessing statistical reasoning through project work. En A. Rossman y B. Chance (Eds.),*Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics (ICOTS7).* Salvador de Bahía, Brasil, 2-7 julio, 2006.Disponible en- https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/C117.pdf

Pinto, J. (2009). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudio de casos con profesores de Estadística en carreras de Psicología y Educación.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca, España.

Rowland, T. Huckstep, P. y Thwaites, A.(2003). The knowledge quartet. En J. William (Ed.),*Proceedings of the British for Researh into Learning Mathematics* (pp. 97-103). Birmingham, Reino Unido: BSRLM.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2011). Secondary mathematics teachers' content knowledge: The case of Heidi. En M. Pytlak y T. R. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2827-2837). Rzeszow, Poland: University of Rzeszow.

Rowland, T., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2003, marzo). Elementary teachers' mathematics content knowledge and choice of examples.*Trabajo presentado enthe Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME3)*,Bellaria, Italia. Disponible en http://fibonacci.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG12/TG12_Rowland_cerme3.pdf

Rowland, T., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2005). Elementary teacher's mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 255-281.

Rumsey, D. (2002). Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of Statistics Education, 10*(3).Disponible en http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/rrumsey2.html

Shaughnessy, J.M. (2007). Research on Statistics learning and reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1006). Greenwich, CT: NCTM.

Shaughnessy, J. M. y Pfannkuch, M. (2002). How faithful is old faithful? Statistical thinking: A story of old variation. *Mathematics Teacher*, *95*(4), 252-259.

Shield, M. (2006). Statistical literacy survey analysis: Reading graphs and tables of rates and percentages. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of International Conference on Teaching Statistics (ICOTS7).*Salvador de Bahia, Brasil: International Association for Statistical Education.Disponible enhttp://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/6C4_SCHI.pdf
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, *15*(2), 4-14.
Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.
Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.
Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 17-46). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
Wu, Y. (2004, julio). Singapore secondary school students' understanding of statistical graphs. *Trabajo presentado en the Tenth International Congress on Mathematics Education (ICME 10)*,Copenhagen, Dinamarca. Disponible en-www.stat.ackland.ac.nz/~iase/publications/11/Yingkang.doc

Ana Cristina Leiria
Escola Secundária Campos Melo
acleiria@hotmail.com

María Teresa González
Universidad de Salamanca
maite@usal.es

Jesús Enrique Pinto
Universidad Autónoma del Yucatán
psosa@uady.mx

Recibido: Julio 2014. Aceptado: Enero 2015.