

# Acercamiento a la geometría esférica a través de la resolución de problemas, una experiencia con comunidades de práctica<sup>4</sup>

Approaching spherical geometry through problem solving, an experience with communities of practice

Aproximando geometria esférica através de resolução de problemas, uma experiência com comunidades de prática

**Recibido:** mayo de 2013  
**Aprobado:** agosto de 2013

Julián David Martínez<sup>5</sup>  
Nubia Paola Vega Vargas<sup>6</sup>

## Resumen

En este trabajo encontrarán una experiencia en el aula que trabajo sobre geometrías no euclidianas, esta busca la reivindicación de estas geometrías desde el caso específico de la geometría esférica, una experiencia realizada mediante la metodología de resolución de problemas en el espacio de la cátedra de seminario de problemas, obteniendo como resultados un acercamiento a las geometrías no euclidianas propiedades y teoremas que se aplican en ellas como los invariantes topológicos encontrados en varias “comunidades de práctica”.

**Palabras clave:** Matemáticas escolares; geometría; pensamiento espacial; otras nociones de educación matemática; resolución de problemas; experiencia de aula.

## Abstract

In this paper we find a classroom experience to work on non-Euclidean geometries, it seeks to claim for these geometries from the specific case of spherical geometry, an experiment carried out using the methodology of solving problems in the space of the workshop chair problems, obtaining as a result an approach to non-Euclidean geometry properties and theorems that apply to them as topological invariants found in various “communities of practice”.

**Keywords:** school mathematics, geometry, spatial thinking, other notions of mathematics education, problem solving, classroom experience.

## Resumo

Neste trabalho, encontramos uma experiência de sala de aula para trabalhar em geometrias não-euclidianas, procura reivindicar para estas geometrias do

<sup>4</sup> Artículo de Investigación

<sup>5</sup> Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. Contacto: apples05.pv@gmail.com

<sup>6</sup> Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. Contacto: jd8vid@outlook.com

caso específico da geometria esférica, um experimento realizado utilizando a metodologia de resolução de problemas no espaço da cadeira de oficina problemas, obtendo como resultado uma abordagem não-euclidianas propriedades e teoremas de geometria que se aplicam a eles como invariantes topológicos encontrados em várias “comunidades de prática”.

**Palavras-chave:** matemática escolar, geometria, raciocínio espacial, outras noções de educação matemática, resolução de problemas, experiência em sala de aula.

## Contextualización

Esta experiencia en el aula se realizó en el proyecto curricular Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital, en el espacio de formación llamado Seminario de Problemas, el trabajo se realizó durante dos meses con una intensidad de dos horas semanales de trabajo presencial, con la participación de 25 estudiantes y cuyos objetivos eran: confrontar a los estudiantes a un problema y evaluar sus estrategias basadas en la metodología de resolución de problemas, mediante la conformación de comunidades de práctica, entendidas como grupos de trabajo establecidos voluntariamente, donde cada comunidad asumió un problema relacionado con la geometría esférica, en el caso particular se analizó las estrategias de resolución del siguiente problema: ¿es el teorema de Pitágoras un invariante topológico? El principal objetivo fue resaltar la utilidad de las geometrías no Euclidianas, además la utilidad de la metodología de resolución de problemas para su enseñanza, de esta experiencia salieron diversos resultados como la utilización de programas graficadores en 3d. Enriqueciendo el aprendizaje ya que a través de la metodología de trabajo planteada por el curso se logró un aprendizaje significativo de una temática totalmente nueva para los estudiantes.

## Referentes Teórico prácticos

En el mundo de hoy, las aplicaciones geométricas se encuentran en la mayoría de situaciones y la enseñanza del pensamiento espacial parece entender estas necesidades desde la legislación colombiana,

sin embargo la enseñanza de la geometría escolar se reduce al conocimiento básico de figuras geométricas en un plano euclídeo, siendo contradictorio con lo que se plantea en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) en relación con el contexto:

Tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas. (MEN, 1998)

Al enfocarse la enseñanza solamente al conocimiento de figuras euclideas dejamos de lado todas las figuras que están presentes en el contexto de los estudiantes y que no forman parte de la geometría plana, por esto en este trabajo queremos mostrar la importancia de la enseñanza de las geometrías no euclidianas mediante una experiencia de aula, donde a través de la resolución de problemas incurSIONAMOS en la temática de la geometría esférica.

## Geometrías no euclidianas

En este resumen queremos mostrar un recuento histórico del surgimiento de las geometrías no euclidianas ¿por qué razones surgen? y ¿cuáles son sus precursores? para empezar: los fundadores de la geometría fueron quienes trabajaron en simultáneo o alternativamente en el surgimiento de la “nueva geometría” (Bolona citado por Campos de 1994)

Es Gauss quien empieza con la idea de una geometría dado que creía que el postulado 5 no era posible demostrarlo luego surgiría una nueva geometría sin dicho postulado a la que llamo geometría no euclidiana. Sin embargo, no desarrolla por completo esta idea, Schweikart creía que existían dos geometrías; la euclidiana y la astral, esta tenía la particularidad de que la suma de los ángulos internos de un triángulo no era igual a dos rectos. Taurinus bajo influencia de Gauss y Schweikart estudio la teoría de las paralelas en (1826) “muestra como se puede construir un sistema analítico para derivar las consecuencias lógicas de la hipótesis del ángulo agudo” llamado la geometría logarítmico esférica de Taurinus, Lobachevski. Entre 1823 y 1825 trabajó en la geometría que podría hacerse dejándose de lado el 5° postulado del libro I de Euclides, expuso una geometría más general en la cual era posible trazar por un punto dos paralelas a una misma recta considerándose una “pangeometría” pues abarcaba las geometrías conocidas hasta entonces, a mediados del siglo XVII surge la geometría proyectiva ideada por Desargues y Pascal considerándose hacia los años 60 del siglo XIX la geometría más general sin embargo a finales del mismo siglo Poincaré inventó nuevas ideas que abarcaban todas las geometrías: la Topología. Bolyai trata de construir una teoría absoluta del espacio siguiendo el método griego “deductivo” se ocupa de tres problemas generales entre estos la conexión entre la trigonometría esférica y la trigonometría no Euclidiana.

Campos (1994) Nos muestra en una reflexión sobre los fundadores de las geometrías no euclidianas destacando que Lobachevski: a diferencia de los otros cuatro fundadores está seguro de la imposibilidad de demostrar el postulado 5 y se ocupa de indagar las consecuencias de la hipótesis de no unicidad de la paralela. El proceso que facilitó el desarrollo de las geometrías que se generaron al cambiar algunos de los postulados de Euclides, no fue sencillo porque la geometría euclidiana ha estado asociada a lo que se ha creído es el espacio que nos rodea. Y cambiar una geometría así rompía y todavía rompe muchos de los esquemas mentales e ideas que poseemos. Su historia es la historia de una de las más grandes revoluciones del pensamiento humano. Es por esto que para el desarrollo de la experiencia utilizamos una metodología que permitiera enfrentarse

a la novedad y romper esquemas, la resolución de problemas.

## El método de de resolución de problemas

Según (Polya citado por Abarca, 2005) tener un problema significa buscar en forma consiente una acción apropiada para lograr un objetivo. Un problema denota la búsqueda de una solución que no se da de manera inmediata, lo cual requiere que la persona realice un trabajo de investigación en búsqueda de ese camino que lo lleve a una solución este puede tener varios atascos o caminos que no está, haciendo que el individuo o colectivo busque otros nuevos caminos que los lleven a una solución. Reconociendo tres etapas en un problema aceptación, bloqueo y exploración (Cruz, 2006)

Este método propicia a que los estudiantes: creen un interés hacia el objeto matemático a tratar, busquen el conocimiento de manera autónoma, fortalezcan sus capacidades para resolver problemas, fomente su creatividad, hace una reflexión hacia su propio pensamiento y conocimientos, hace que el aprendizaje de las matemáticas cobre sentido con la manipulación del objeto matemático de una manera más natural y divertida.

Según (Guzmán citado por Abarca, 2005) la finalidad de este modelo es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento de forma sistemática a fin de eliminar obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces. Por esto consideramos propicio el trabajo de geometrías no euclidianas a través de este método ya que es una temática totalmente nueva para los estudiantes y requiere de una reestructuración del conocimiento que ya se tenía. Siendo la resolución de problemas un método idóneo para que los estudiantes de una manera autónoma investiguen y reflexionen sobre su propio pensamiento para cambiar sus conocimientos

## Descripción general de la experiencia

La experiencia en el aula propició la resolución de un problema específico, el problema que nos

correspondió era la construcción del teorema de Pitágoras en geometría esférica. Para abordarlo iniciamos recordando cómo era dicho teorema en geometría plana, luego tratamos de realizar un paralelo para poder construir las definiciones, características y propiedades de los triángulos esféricos apoyándonos de diferentes referentes teóricos, axiomatizándolos de una manera clara para todo el grupo. Esta axiomatización fue discutida en las diversas comunidades de práctica a las que se les otorgó un problema relacionado con la geometría esférica.

El proceso de construcción de los cuadrados sobre la esfera fue bastante complejo ya que al recurrir a representaciones concretas como trazarlos en la superficie de una bola de icopor no podríamos demostrar que la construcción realmente fuera un cuadrado, por lo que tuvimos que recurrir al software Cabri 3D para poder realizar este proceso basados en la axiomatización que inicialmente construimos.

### Logros y dificultades evidenciadas

El mayor logro en definitiva fue mostrar el por qué surgen las geometrías no euclidianas ¿Quiénes fueron sus precursores? y cuál fue su importancia a lo largo de la historia. Pues gracias a eso se logró construir una axiomatización de los triángulos esféricos partiendo de la geometría plana. Creemos que a través de la metodología de resolución de problemas es posible introducir la temática de geometrías no euclidianas aunque en esta se puedan presentar dificultades. Se presentaron dificultades para hacer representaciones icónicas de los objetos matemáticos tratados utilizando materiales concretos, pero a su vez esto sirvió para la utilización de el software Cabri 3D para lograr esta representación y evidenciar las propiedades de los cuadrados formados en el teorema de Pitágoras

### Reflexión final

Las geometrías no euclidianas han tenido un desarrollo histórico notable y su exploración ha permitido en cada comunidad un avance en la manera

de ver el mundo y construir representaciones del mismo, siendo necesario explorar nuevas geometrías y potencializar el pensamiento espacial y de sistemas geométricos, tanto en el currículo escolar como en las actividades extraescolares, la metodología de resolución de problemas puede ser una herramienta eficaz y útil a la hora de realizar acercamientos e investigaciones sobre estas nuevas geometrías, pues gracias a ella es posible enfrentarse a situaciones nuevas y lograr explorar diversas formas de pensar, aproximarse a las situaciones y proceder en la reestructuración de axiomas geométricos, además el abordaje de geometrías no trabajadas antes por el estudiante puede llegar a desarrollarse por medio de situaciones que le permitan verificar propiedades conocidas en ambientes o estructuras diferentes; es ahí donde la adaptabilidad del pensamiento espacial del estudiante se pone a prueba y se desarrollan y potencializan diferentes estrategias o modos de pensar geoméricamente.

### Referencias

- Abarca, S. (2005). *Método de enseñanza de resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. La Habana: Universidad de la Habana.
- Campos, A. (1994). *Axiomatica y Geometria desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogota. obra presentada como requisito para optar a profesor titular del Departamento de matemáticas y estadística de la Universidad Nacional de Colombia
- Cruz, M. (2006). *La enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas*. La Habana: Educación Cubana.
- MEN, (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Colombia