

Situaciones de modelación matemática. Algunas reflexiones para el aula de clase¹

Jhony Alexander Villa-Ochoa

Universidad de Antioquia

Colombia

jhony.villa@udea.edu.co

Resumen²

En este documento me propongo analizar la experiencia con futuros profesores de matemática cuando se enfrentaron a dos situaciones³ en las cuales los modelos y la modelación tiene presencia. A través de la experiencia vivida por los futuros profesores se han podido construir algunas reflexiones sobre las posibilidades que este tipo de situaciones ofrece frente la apropiación de significados de los tópicos matemáticos asociados a los contextos tanto en alumnos que han estudiado previamente estas nociones, como en aquellas que no lo han hecho. Finalmente, algunas implicaciones reconocidas por los futuros profesores, también se harán explícitas.

Palabras clave

Modelación matemática, modelos matemáticos, ventajas y limitaciones de situaciones de modelación.

Abstract

In this paper I propose to analyze an experience with future teachers of mathematics when they met two situations in which models and modeling were present. Through this experience the student teachers have been able to build some thoughts on the possibilities offered by such situations to develop meanings for mathematical topics associated with the contexts both by students who have previously studied these notions, as in those that have not. Finally, some implications recognized by prospective teachers, also will be made explicit.

Key words

Mathematical modeling, mathematical models, advantages and limitations of modeling situations.

¹ Este trabajo corresponde a un minicurso ofrecido en la I CEMACYC, celebrada en Santo Domingo, República Dominicana el año 2013.

² El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

³ Las situaciones analizadas en este artículo se derivan de la investigación "La formación inicial del profesor de matemáticas. Aportes de la modelación y las Tecnologías digitales". Código FPP01. CODI-Universidad de Antioquia.

1 Introducción

La formación matemática de futuros profesores para esta área debe posibilitar la consolidación de visiones de las matemática como una manera de estudiar e interpretar las diferentes situaciones del mundo que los rodea; este tipo de propósitos parece sustentarse en una mirada a las matemáticas como una producción humana y, en cierto modo, como una ciencia que ha estado en relación con las necesidades históricas de la sociedad y la cultura (Radford, 2002). En consonancia con dicha mirada, el aprendizaje de las matemáticas no puede ser ajeno a las diferentes prácticas en las cuales las matemáticas adquieren sentido en la sociedad, al respecto Masingila et al. (1996) apoyados en los trabajos de Saxe (1988) han señalado que el aprendizaje de las matemáticas no se limita a la adquisición de procedimientos algorítmicos formales transferidos de los matemáticos a los individuos a través de la escuela, sino que más bien, el aprendizaje de las mismas tiene lugar a través de la participación en prácticas culturales y en el intento de alcanzar las metas pragmáticas que en ellas se implican.

El reconocimiento de las prácticas culturales y demás aspectos sociales al interior de la matemática abre el panorama para que la modelación matemática, concebida como una actividad que trasciende la traducción entre dos dominios, pueda convertirse en una actividad útil para atender a los propósitos anteriormente mencionados en la formación de profesores. Para aproximarse a tales ideales, la modelación matemática debe comprenderse como una actividad que no se agota en la producción de representaciones matemáticas articuladas a la situación de estudio, sino que también reconoce otros aspectos de la naturaleza humana y del papel de la matemática en la sociedad.

Con base en lo anterior, en Villa-Ochoa (2013a) describí algunas comprensiones de la modelación matemática que se encuentran en la literatura, así mismo, mencioné que dichas comprensiones pueden implicar maneras de actuar en el aula de clase. En este documento me propongo ampliar los elementos allí expuestos y presentar y analizar dos situaciones que derivan de un proyecto de investigación que pretende observar las maneras como la modelación y la tecnología pueden integrarse al aula de clase, de esa manera, espero que las reflexiones que aquí se presentan posibiliten en el lector miradas alternativas sobre la modelación matemática y sus posibilidades y limitaciones en el aula de clase.

2 Las situaciones

Conforme mencioné anteriormente, las situaciones que presentaré en este documento se desprenden de un estudio que se desarrolla con futuros profesores de matemáticas. El estado actual de las situaciones es fruto de continuos refinamientos y reflexión con diferentes miembros de la Red Colombiana de modelación en Educación Matemática; estas situaciones, al igual que otras, han estado expuestas a discusión en la sección de recursos del sitio web de la red (www.recomem.com.co), también han sido previamente discutidas con estudiantes y profesores de matemáticas en diferentes espacios en mi Universidad y otros eventos académicos internacionales (e.g. VIII CNMEM, VIII COVEM). Las situaciones, grosso modo, están estructuradas con dos intencionalidades,

la primera es involucrar a los futuros profesores en experiencias en las cuales afronten algunos tópicos matemáticos a partir de los contextos implicados en las situaciones; y la segunda, tiene que ver con las construcción de reflexiones por los participantes a través de su propia experiencia en el seguimiento y ejecución de las tareas que estructuran la situación. Algunas cuestiones que orientan la consecución de este segundo propósito radican en que los participantes identifiquen los propósitos que puede tener la actividad, tanto para el tratamiento conceptual de algún tópico matemático como para la identificación de modos de hacer modelación matemática; seguidamente se somete a discusión las posibilidades y se reconocen las limitación que cada actividad podría presentar en el aula de clase. Finalmente se sugiere que el participante valore los posibles roles que tanto el profesor como el estudiante podrían seguir en este tipo de situaciones, así como los aspectos por los cuales la situación podría caracterizarse como modelación matemática o no.

2.1 Situación: Análisis de modelos y el crecimiento fetal

La situación se presenta según el enunciado en el siguiente recuadro:

Durante el tiempo de gestación de un bebé es necesario llevar un control y monitoreo de su desarrollo a través de varias ecografías. Entre las características más observables se tiene la estimación del tamaño y, principalmente, el peso. Aunque no existen valores fijos que permitan prever el comportamiento del crecimiento de un feto, en medicina se usan estimaciones y modelos matemáticos que posibilitan a los médicos llevar el control en las maternas.

Momento uno: ¿Qué nos dice un modelo?

A continuación se presentan algunos de los modelos que suelen usarse para ilustrar información con respecto al tema. Obsérvelos, discútalos con sus compañeros y escriba la información que usted considera que puede encontrarse en dichos modelos.

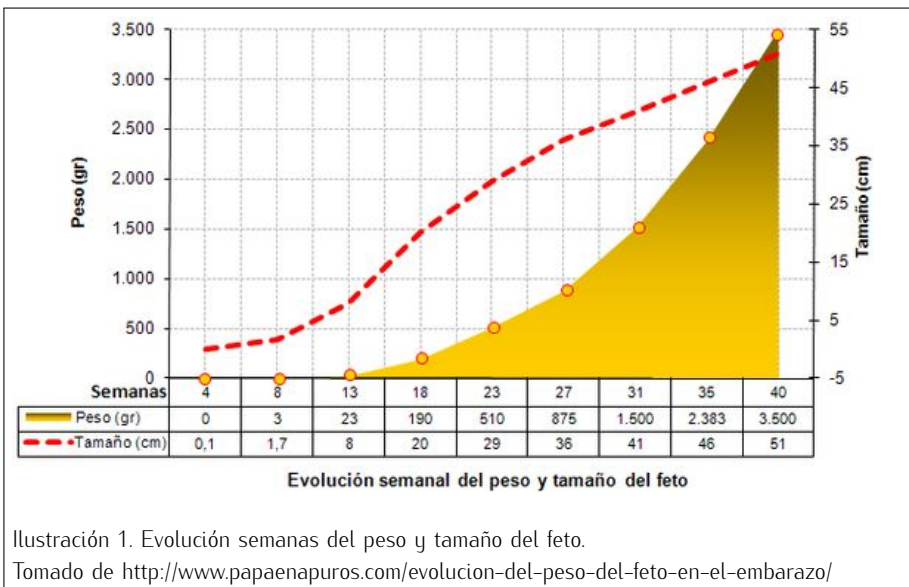


Tabla 1
Tamaño y peso de un feto.

Semanas	Peso (gr)	Tamaño (cm)	Semanas	Peso (gr)	Tamaño (cm)
4	0	0	22	450	28
5	0	0,1	23	510	29
6	0	0,3	24	600	30
7	0	1,1	25	660	34
8	0	1,7	26	760	36
9	0	2,4	27	875	37
10	5	3,4	28	1.005	38
11	10	4,3	29	1.153	39
12	16	5,7	30	1.319	40
13	23	8	31	1.500	41
14	43	14	32	1.702	42
15	70	15	33	1.918	44
16	100	16	34	2.146	45
17	140	18	35	2.383	46
18	190	20	36	2.622	47
19	240	22	37	2.859	48
20	300	25	38	3.083	49
21	360	26	39	3.288	50
			40	3.500	51

Tomado de <http://www.papaenapuros.com/evolucion-del-peso-del-feto-en-el-embarazo/>

AUMENTO DE PESO DE SU BEBE DURANTE EL EMBARAZO

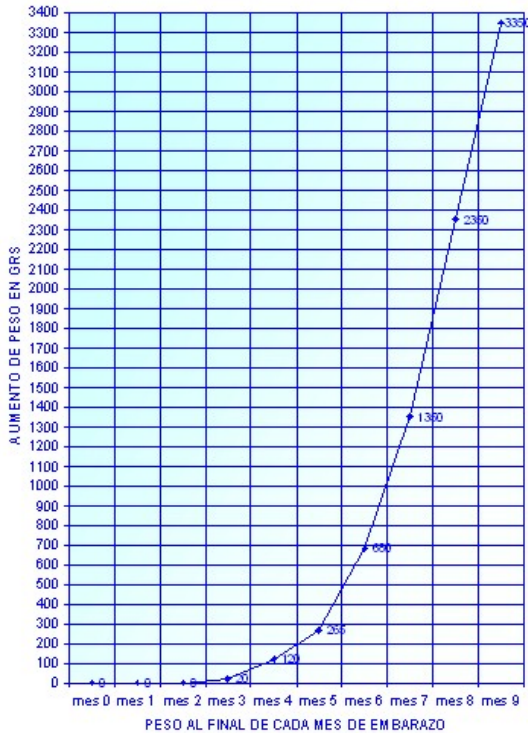


Ilustración 2. Peso al final de cada mes del embarazo;
<http://www.portalesmedicos.com/publicaciones/articulos/1177/6/>

Mencione algunas preguntas que considere podrían responderse con la información proporcionada por los modelos. Menciona otras que consideres no podrían responderse con dicha información.

Momento dos: El fenómeno de estudio, más allá de las matemáticas

Una vez identificada la información en los anteriores modelos, analiza una posible respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Se puede observar algún patrón de crecimiento fetal durante el curso de la gestación?
2. ¿Cuáles factores pueden influir o determinar el peso al nacer?
3. Existen etapas en el proceso de gestación ¿Cuáles podrían ser los intervalos en los cuales se caracterizan esas etapas. Cuáles criterios podrían definirlas y cuáles serían los pesos fetales promedio en tales etapas?
4. ¿Cómo cree que los matemáticos, biólogos, médicos han llegado a consolidar estos modelos matemáticos?

2.2 Situación: La matemática de los servicios públicos

El *primer momento* de esta situación se compone por la forma como en Villa-Ochoa (2007) he sugerido el desarrollo de la actividad. En ese sentido, se inicia con un diálogo con los participantes sobre los aspectos que ellos tienen, o deberían tener en cuenta, para tomar la decisión sobre cuál plan de telefonía fija o móvil deben elegir. Algunas variaciones en esta pregunta emergen cuando es otro el servicio público analizado (e.g. servicio de gas, acueducto, etc.)

Después de analizar el caso personal sobre la relación consumo y costo se invita a los estudiantes a suponer el rol de asesores de la comunidad y que, por tanto, deben orientar a los demás ciudadanos en una buena elección del plan de consumo. Esta situación sugiere la necesidad de trascender el tratamiento aritmético (personal) para construir representaciones gráfica y algebraica de funciones (en Villa-Ochoa, 2007, este tipo de situaciones, con algunas simplificaciones, puede llevar a producir funciones lineales o por tramos). Una vez construidas las representaciones gráfica y algebraica, se hacen los tratamientos algebraicos necesarios para encontrar las intersecciones y finalmente poder determinar los intervalos en los cuales las funciones costo reflejan el más económico.

Con el ánimo de ilustrar la necesidad de valorar el modelo se propone a los estudiantes considerar la “continuidad” de las cantidades allí involucradas y, por tanto, un análisis de esa característica en los modelos, esta situación generalmente conlleva a la reformulación de la función, en una función parte entera (escalonada) tal y como ha sido sugerido por Villa-Ochoa (2007).

El *segundo momento* de la situación consiste en cuestionar a los participantes con preguntas como ¿Qué tiene el fenómeno o situación estudiada que conlleva que ese [la función parte entera] sea el modelo?, ¿Qué dice el modelo de la situación?, ¿Qué no dice el modelo de la situación?

Una vez identificada las características de la situación que conducen a este tipo de funciones, se pasa a un *tercer momento* en el cual los estudiantes deben buscar otras situaciones, con características semejantes, en las cuales el mismo tópico matemático

[función parte entera], pueda constituirse como modelo matemático de los fenómenos en ellas implicados.

3 Una experiencia con futuros profesores

Las dos situaciones presentadas anteriormente han sido implementadas en algunos espacios con futuros profesores de matemáticas, entre ellos, grupos de estudiantes³ de Práctica Docente y de un Semillero de Investigación adscrito a los programas de formación de profesores de matemáticas en la universidad donde laboro. Los grupos de estudiantes han sido heterogéneos en el sentido que se han conformado en ocasiones por estudiantes avanzados en su plan de estudios, pero en otras, con estudiantes iniciantes (estudiantes de primer año), intermedios (estudiantes de segundo y tercer año) y avanzados (estudiantes de cuarto y quinto año).

— *Aspectos generales de la experiencia relativos a la primera intencionalidad de las actividades:*

Conforme mencioné en Villa-Ochoa (2013b), si bien los estudiantes tuvieron diferentes aproximaciones al análisis de las gráficas de y las tablas asociadas al crecimiento fetal, también es cierto que ello no impidió que los estudiantes iniciantes cimentaran sus conocimientos para futuros estudios (e.g, cálculo diferencial). En relación con esta situación, en Villa-Ochoa (2013b) mostré que todos los estudiantes iniciaron el estudio de la situación con el reconocimiento de las cantidades que se implican tanto en los gráficos como en las tablas. Como consecuencia de ello, los futuros profesores tendieron a manifestar cierto desacuerdo con la "sintaxis" de los gráficos pues, según ellos, rompe con las reglas convencionalmente establecidas en las clases de matemáticas; a través de las discusiones entre los distintos participantes, los estudiantes lograron observar que socialmente, los modelos matemáticos pueden obedecer a otras presentaciones y reglas derivadas de la demandas que las profesiones hacen de ellos.

Conforme Soares y Javaroni (2013) y Soares (2012) han resaltado, el análisis de modelos puede constituirse en una estrategia pedagógica que permite introducir nuevos conceptos matemáticos en estudiantes que previamente no los han estudiado. Sin embargo, como Villa-Ochoa (2013b) apunta, no solo los estudiantes quienes no han estudiado algunos tópicos matemáticos se aproximan a nuevos conceptos, sino que también los estudiantes quienes ya lo han cursado, adquieren mayores significados y nuevas comprensiones de los tópicos matemáticos implicados en la situación. Mayores evidencias de este hecho pudieron construirse en la situación relacionadas con las matemáticas en la cuenta de servicio la cual relato a continuación.

Para el desarrollo de la situación 2, previamente se les había solicitado a los estudiantes que llevaran consigo la factura de servicios públicos, los estudiantes se dispusieron a trabajar en equipo y a reconocer los diferentes valores y aspectos que se facturaban en ellos; en esta parte de la actividad los estudiantes continuamente estuvieron preguntando por los significados de algunos valores facturados, y sobre la diferencia

3. En este documento hago uso de las denominaciones "futuros profesores de matemáticas" y "estudiantes" para referirme al mismo colectivo de personas; de esa manera, espero facilitar la lectura del documento.

entre los valores de las facturas de los diferentes miembros, algunas conjeturas de las posibles causas de estas diferencias fueron emergiendo y se hizo necesario consultar en fuentes especializadas (leyes, decretos que regulan los servicios públicos) para salir de dudas. La producción de los modelos algebraicos para los estudiantes iniciantes estuvo basada en la identificación de regularidades y patrones numéricos y en entender el significado de las variables. Recurrir a la construcción de tabla de valores fue de fundamental para alcanzar producir tanto los modelos para la función (lineales y por tramos) para las funciones parte entera. Para los estudiantes quienes ya había cursado las asignaturas de precálculo y cálculo, los modelos fueron construidos de manera más directa.

En el caso de los estudiantes no iniciantes, se observó cierto grado de sorpresa por poder ver la presencia de este concepto en una situación propia del contexto. Declaraciones como las que presento a continuación se convierten en muestra de este hecho⁴:

Diana: "... que bien que por fin veo dónde se aplica eso, yo lo vi en introcálculo [asignatura precálculo] pero no lo vimos con aplicaciones, yo creo que mis estudiantes así lo podrán entender..."

Santiago: "nosotros habíamos visto modelación en cálculo, pero eran ejercicios de esos que hay al final del capítulo... no me había imaginado así esa función [refiriéndose a la función parte entera]"

Posterior a la producción de los modelos se pasó al momento dos descrito anteriormente. La intención de esta parte de la situación, era que los estudiantes pudieran reconocer los aspectos que en ella hace que la función sea una *parte entera* y no una *lineal o por tramos* (lineales y afines).

Los estudiantes se comprometieron con esta parte de la situación y trabajaron en equipos. Algunas de las respuestas de los estudiantes fueron:

"*profe, eso salió fue de ver que no cobran los KWH por fracción sino completo*"

"*porque los pedacitos [fracciones] de KWH no los cobran proporcional*"

Se invitó a los estudiantes a que continuaran con el reconocimiento de funciones que se pudieran identificar en la misma factura de servicios (telefonía, acueducto, alcantarillado) y que argumentaran por qué las funciones que pudieran surgir de allí son o no funciones por partes (o parte entera). Los estudiantes lograron concluir que todas esas funciones tenían "el mismo comportamiento de la función costo en energía" por que "también se cobra la unidad de medida completa y no la fracción". Finalmente se le pidió a los estudiantes que identificaran fuera de la factura de servicios públicos otras situaciones en las cuales se podrían presentar funciones *parte entera*. En esta momento de la actividad emergieron contextos como: El pago del servicio de parqueadero, el costo de los planes de telefonía celular, el valor de una carrera de taxi, entre otros.

La experiencia vivida con estos futuros profesores a través de esta manera de hacer modelación, y en particular, afrontar los momentos dos y tres de la situación le

4. Los nombres usados en este documento corresponden a seudónimos

permitieron a los estudiantes reconocer ciertas características comunes entre los diferentes contextos en los cuales la función *parte entera* puede hacer presencia, de esa experiencia se logró asociar la función como una expresión que modela a cualquier situación como las descritas por ellos mismos al finalizar esta experiencia. En palabras de algunos estudiantes *“una función en la que una variable depende de otra a la cual se le asignan los mismos valores por intervalos, y no por fracción”*.

— *Algunas reflexiones construidas por los participantes relativas a la segunda intencionalidad de las actividades:*

Durante el desarrollo de las situaciones de modelación por parte de los futuros profesores de matemática se identificaron los diferentes episodios en los cuales ellos mismos construyeron ciertos conocimientos, no solo matemáticos sino también propios del contexto del cual emerge la situación. Este tipo de episodios sirvió para observar algunas características de la actividad de modelación en la cual siempre ha de estar en relación con otras áreas, disciplinas o contextos, y en consecuencia, los lenguajes utilizados no siempre han de ser solo los de la matemática. En ambas situaciones los participantes se vieron en la necesidad de indagar por términos como cigoto, embrión, hiperplasia celular, hipertrofia celular para el caso de la biología y por términos como KWH, conectividad, transporte de energía, ajuste, comercialización, todos ellos propios del contexto energético.

Tanto los conocimientos matemáticos como los extramatemáticos fueron producidos ante la necesidad de consultar sobre otros tópicos de los fenómenos de crecimiento fetal o el consumo de energía; ello sirvió de evidencia para observar la necesidad de interrelacionar conocimientos de otras áreas y reconocer que a través de la modelación otras disciplinas pueden entrar en juego dinamizando el trabajo matemático al interior del aula de clase. Estas reflexiones son consistente con las evidencias presentadas por Berrío (2012), Rendón & Esteban (2013) y Obando et al. (2013) quienes sugieren la importancia de colocar en diálogo los saberes matemáticos y no matemáticos (de otras áreas) intentando superar ciertas miradas “utilitaristas” de la matemática sobre el contexto, es decir, miradas en las cuales los contextos son asumidos como puntos de partida para el estudio de la matemática, pero posteriormente se omiten en el desarrollo de la actividad de la modelación.

Conforme argumenté en Villa-Ochoa (2013b) en la situación de Análisis de Modelos interviene espontáneamente el uso de tecnologías como una manera “heurística” para estudiar el fenómeno, así como buscar evidencia que permita validar o refutar las conjeturas que van surgiendo en el proceso estudio del fenómeno; como evidencia de este hecho, un conjunto de estudiantes transcribió los valores presentados en la Tabla 1 en el software Excel, y con base en los datos realizó un ajuste de regresión llegando a descartar la conjetura de que el comportamiento del peso con respecto al tiempo correspondía a una función cuadrática, del mismo modo, otro conjunto de estudiantes insertó el gráfico de dicho peso (Ilustración 2) en la ventana de gráfico del Geogebra, y mediante la manipulación de los parámetros de la función pudo construir una amplia familia de funciones cuadráticas de las cuales ninguna logró superponerse a dicho gráfico. Este tipo de experiencias vividas por los participantes, permitieron observar que la tecnología tiene diversos usos al interior del aula de clase, y que al articularse con procesos de modelación permite (re)organizar los modos de producción de conocimiento

matemático. Las experiencias desarrolladas por futuros profesores permiten observar cómo las tecnologías participan activamente del desarrollo de actividades relacionadas con análisis de modelos (Soares & Javaroni, 2013)

4 Consideraciones finales

Este documento pretende constituirse en una orientación para el taller (cuya denominación coincide con el nombre de este artículo) que se desarrollará en el I CEMACYC. Se espera con los participantes, investigadores, profesores en formación y en ejercicio profundizar en las reflexiones y críticas al uso de modelos y la modelación matemática al interior de las matemáticas escolares y en la formación de profesores de matemáticas.

De manera particular, se espera que los participantes logren observar el doble rol que tiene este conjunto de situaciones, es decir, para conjugar diferentes conceptos matemáticos que previamente han sido desarrollados, o incluso, para introducir temáticas sin que con antelación hayan sido estudiadas en clase. Ambos tipos de situación (construcción, validación de modelos y análisis de modelos) pueden constituirse en herramientas para estudiantes que hayan o no estudiado las temáticas puedan reconocer aspectos conceptuales que cimienten un posterior estudio de las mismas, o reconocer otros significados de las temáticas; en otras palabras, este tipo de situaciones, más allá de una característica meramente utilitaria, se convierte en *artefactos culturales* (Bonotto, 2007) sobre los cuales se produce conocimiento matemático.

El uso de este tipo de situaciones en las cuales interviene la construcción o análisis de modelos demanda implicaciones para la formación de futuros profesores de matemáticas y para la modelación matemática como un dominio de investigación al interior de la Educación Matemática; estas implicaciones han de estar relacionadas con:

- El reconocimiento del contexto o fenómeno como medio en la producción de conocimiento tanto matemático como de otras disciplinas.
- Involucrar a los futuros profesores en el reconocimiento de los roles que pueden tener los modelos matemáticos en la sociedad y la cultura.
- Discutir que la naturaleza de la construcción, validación y análisis de modelos es diversa y que por tanto no se deja “modelar” ni “encapsular” en representaciones y ciclos de la modelación; de esa manera se espera construir visiones de la modelación matemática que trascienden usos instruccionales de este tipo de representaciones y ciclos.
- Reconocer las limitaciones que este tipo de situaciones puede presentar en la producción de conocimiento matemático escolar.

Bibliografía

- Berrío, M. (2012). *Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos. El caso del cultivo de café*. (Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Tesis de maestría no publicada), Universidad Nacional de Colombia, Medellín.
- Bonotto, C. (2007). How to replace word problem with activities of realistic mathematical modelling. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and application in Mathematics Educations. The 14th ICMI Study* (pp. 185-192). New York: Springer.
- Javaroni, S., & Soares, D. (2012). Modelagem matemática e Análise de modelos na Educação Matemática. *Acta Scientiae*, 14(2), 260-275.
- Masingila, J. O., Davidenko, S., & Prus-Wisniewska, E. (1996). Mathematics learning and practice in and out of school: A framework for connecting these experiences. *Educational Studies in Mathematics*, 31(1-2), 175-200. doi: 10.1007/BF00143931
- Obando, J. D., Sánchez, J. F., Muñoz, L. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2013). El reconocimiento de variables en el contexto cafetero y su constitución como modelos matemáticos In G. Obando (Ed.), *Matemática Educativa-13° Encuentro Colombiano* (1 ed., Vol. 1, pp. 453-459). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Radford, L. (2002). The Historical Origins of Algebraic Thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (Vol. 22, pp. 13-36). Netherlands: Springer.
- Rendón, P. & Esteban, P. (2013). *La modelación matemática en ingeniería de diseño*. Paper presented at the I Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe. Santo Domingo, República Dominicana.
- Soares, D. (2012). *Uma abordagem pedagógica baseada na análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?* (Doctorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro-Brasil.
- Soares, D., & Javaroni, S. (2013). Análise de Modelos: possibilidades de trabalho como Modelos matemáticos em Sala de aula. In M. C. Borba & A. Chiari (Eds.), *Tecnologias Digitais e Educação Matemática* (pp. 195-219). São Paulo: Livraria da Física.
- Villa-Ochoa, J. (2007). La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: Un Marco de Referencia y un Ejemplo. *Tecno Lógicas*, 19, 63-86.
- Villa-Ochoa, J. A. (2013a). *Miradas y actuaciones sobre la modelación matemática en el aula de clase*. Paper presented at the VIII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática Santa Maria-RS, Brasil.
- Villa-Ochoa, J. A. (2013b). *Análisis de modelos por los futuros profesores de matemáticas*. Paper presented at the VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática, Canoas-RS, Brasil.