¿Es esto “machetear”?

Carmen Samper y Patricia Perry

Introducción

Demostrar en matemáticas es una actividad compleja que requiere, entre otras cosas, trabajar comprensivamente dentro de un sistema axiomático, con base en un sistema lógico que establece las maneras lícitas de proceder. Es necesario distinguir el estatus teórico (Duval, 2007) de los diferentes elementos que conforman el sistema axiomático: definiciones, postulados, y teoremas; es decir, identificar qué caracteriza a cada uno de estos elementos en cuanto a estructura lógica, su papel dentro del sistema y su alcance y, por ende, reconocer diferencias entre tales elementos. Por ejemplo, una definición, cuyo formato lógico corresponde a un enunciado bicondicional, aunque no se expresa así explícitamente, asocia un término con unas propiedades; en cambio, tanto un teorema como un postulado enuncian, a través de respectivas proposiciones condicionales, la relación de dependencia entre dos conjuntos de condiciones o de propiedades. Así mismo, se requiere entender el estatus operativo (Duval, 2007) de las proposiciones que intervienen en un paso de deducción cualquiera: premisa, aserción y garantía; es decir, reconocer qué datos son imprescindibles para poder usar un elemento teórico como garantía de una aserción. También se requiere identificar cuál esquema de razonamiento válido permite deducir información que podría ser útil para llegar a la aserción que se quiere demostrar.

Estudios recientes han reportado diferentes dificultades que enfrentan los estudiantes de nivel universitario para poder producir demostraciones exitosamente (cf. Selden y Selden, 2011; Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006).

Los investigadores coinciden en que las problemáticas que se evidencian tienen que ver, entre otras cosas, con: la estructura lógica de los argumentos[1] y el encadenamiento de estos en una demostración, la comprensión y el manejo lógico de los enunciados de los elementos teóricos, y las técnicas para producir demostraciones. Específicamente, relacionado con esto último, mencionan que a los estudiantes les resulta difícil: identificar cuándo la demostración exige el estudio de varios casos y entender que cada uno se debe demostrar; saber cuándo, en la demostración, se toma un elemento cualquiera de un conjunto dado, o cuándo se debe elegir convenientemente para que pueda pertenecer a un conjunto específico; demostrar teoremas cuyo consecuente expresa una conjunción o una disyunción de propiedades. Si los estudiantes han tenido la oportunidad de producir justificaciones en la clase de matemáticas, posiblemente tienen una imagen conceptual de lo que es una demostración que también puede generar dificultades. Esto porque es muy probable que solo hayan trabajado con demostraciones directas en las que los datos de cada argumento o paso de la demostración es algo dado o son aserciones deducidas en pasos anteriores, y los argumentos se enlazan de manera directa usando el esquema de razonamiento *Modus Ponendo Ponens*; la demostración fluye suavemente. Pero, la realidad es que no hay un procedimiento fijo para producir demostraciones. Tal como lo señalan Hanna et al. (2009) citado en Dreyfus, Nardi y Leikin (2012), “Las distinciones matemáticas entre demostraciones se basan en aspectos lógicos, estructurales, relativos al campo específico de las matemáticas, relativos a la representación, y en propiedades relacionadas con los enunciados de las demostraciones” (p. 198; nuestra traducción).

En un curso formal de geometría euclidiana es necesario demostrar la existencia de muchos objetos como, por ejemplo, un punto entre dos puntos dados, el punto medio de un segmento, la bisectriz de un ángulo, la recta perpendicular a una dada por un punto externo, la recta paralela a una dada. De Guzmán, Hodgson, Robert y Villani (1998) indican que hay diversas razones por las cuales las demostraciones de existencia son particularmente difíciles para los estudiantes. Dada su experiencia escolar previa, no ven la necesidad de demostrar que algo existe; una tal demostración se contrapone a la práctica habitual en la que se plantean y resuelven problemas sobre objetos que

1 Aquí entendemos por *argumento* un enunciado oral o escrito, de estructura ternaria, que relaciona proposiciones particulares (datos y aserción) y una proposición general (garantía).

existen. Estos investigadores mencionan además que otra dificultad yace en tener que imaginarse el objeto matemático específico que debe ser construido. En esencia, la explicación de estas dificultades se puede encontrar en la brecha que hay entre la matemática escolar y la actividad matemática que se espera que haga un estudiante universitario.

Debido a la singular creatividad conceptual que se requiere para producir una demostración de existencia, es necesario que los estudiantes aprendan procedimientos especiales para ello. En consonancia con lo que se mencionó anteriormente, las demostraciones de teoremas de existencia difieren en términos de aspectos estructurales. En algunos casos, se debe usar el Axioma de Escogencia (e. g., demostrar que existe una base para los números reales como espacio vectorial sobre los números racionales); en otros, se debe producir una demostración por contradicción (e. g., demostrar que existen infinitos números primos). En la geometría elemental, demostrar la existencia de un objeto geométrico puede requerir la determinación de un objeto específico, considerando solo algunas propiedades del objeto cuya existencia se quiere demostrar; las demás propiedades de ese objeto tendrán que deducirse a partir de las asignadas inicialmente al objeto específico. Pero, ¿cómo se sabe cuáles propiedades asignar inicialmente?

En este artículo presentamos evidencia de la forma espontánea en que proceden los estudiantes para demostrar la existencia de un objeto geométrico caracterizado por dos propiedades. La estrategia empleada se aleja mucho de lo que acepta la comunidad del discurso matemático. Ilustramos la mediación semiótica del profesor durante la producción de la demostración.

La estrategia espontánea de los estudiantes y temas que enmarcan su tratamiento en el aula

Definición matemática y existencia del objeto definido

En el ámbito de la actividad matemática y, más puntualmente, de la actividad demostrativa es necesario entender que un objeto matemático no existe simplemente porque se haya dado una definición de este dentro de un sistema teórico. Es decir, la mayoría de las definiciones matemáticas conllevan solamente la posibilidad de existencia. Esto parece ser un asunto conceptual problemático desde la antigüedad. Aristóteles no solo lo menciona sino que provee una clasificación de las definiciones de acuerdo con este asunto. Él propone que hay definiciones, conocidas en la actualidad como nominales, en las que se da una lista de las características generales de un objeto o relación, y definiciones, denominadas reales, en las que se dan las condiciones bajo las cuales existe un objeto (Harari, 2004). Por ejemplo, una definición nominal establece que ángulo recto es aquel cuya medida es 90 grados sexagesimales, mientras que una definición real establece que es aquel para el cual existe un ángulo par lineal[2] con él y congruente a él. Aunque Euclides no se refiere explícitamente a este asunto, su obra refleja que lo toma en cuenta. Por ejemplo, define cuadrado (Definición 22, Libro I) pero no usa la definición hasta que justifica su existencia (Proposición 46, Libro I), a través de la validación de la construcción del cuadrado con regla y compás (Euclid, Densmore y Heath, 2003). Es decir, el cuadrado no existe gracias a su definición sino a que su construcción es no solamente una posibilidad sino un hecho.

Mediación semiótica del profesor

En un curso en el que el propósito principal es la construcción social de significado, el profesor busca la participación interactiva y genuina de los estudiantes. La aproximación metodológica de la enseñanza y el aprendizaje no consiste, por ejemplo, en enunciar un teorema y reproducir su demostración en frente de los estudiantes con la expectativa de que ellos la entiendan, la memoricen y extraigan elementos generales para aplicar en casos similares que se trabajen posteriormente. En cambio, se procura que los estudiantes generen ideas y las expongan ante la comunidad del aula para colaborar en la producción colectiva de la demostración, acción que favorece la construcción de significado y el progreso en la interpretación de lo que es el proceso de demostrar. Asuntos relacionados con la producción y reproducción de demostraciones han sido el tema de varios investigadores (e. g., Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou, 2007; Dreyfus, Nardi, y Leiking, 2012).

2 **Definición Ángulos Par Lineal**: Si los rayos *AB* y *AD* son opuestos y *C* es un punto que no pertenece a la recta *AB*, entonces los ángulos *BAC* y *CAD* son par lineal.

Bajo esta perspectiva de enseñanza y aprendizaje, cuando los estudiantes hacen un esfuerzo por conceptualizar el objeto matemático que se está tratando en clase, hay una interacción dialógica entre ellos y el profesor, conformada por una secuencia de signos de diferente naturaleza. Un signo es una expresión lingüística, gestual, pictórica o de otra especie que una persona pone en lugar de un objeto. Es decir, es una palabra, frase o argumento hablado o escrito, un gesto o gráfico con lo que la persona representa algún aspecto del objeto al cual alude en la comunicación. Ese signo, si es percibido e interpretado por otro, produce en la mente de ese intérprete una idea que posiblemente trata de comunicar. En el contexto descrito anteriormente, el profesor y los estudiantes que se involucran en la conversación tienen diferentes niveles de conocimiento respecto al objeto matemático y metas distintas. La meta del profesor es apoyar al estudiante en la construcción de significado del objeto mientras que la de los estudiantes debe ser la participación genuina en dicho proceso. Es decir, los estudiantes deben asumir su papel de colaboradores, activando sus recursos intelectuales relativos al tema de discusión para hacer propuestas, aunque puedan tener errores, y defenderlas, o argumentar matemáticamente su desacuerdo con ideas que otros presentan (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013). El profesor media semióticamente cuando evoca sus significados de ciertos aspectos del objeto matemático, foco de la conversación, y los usa en acciones que pueden ayudar a sus estudiantes a lograr mayor compatibilidad con el significado que la comunidad de discurso matemático acepta para tal objeto; cuando él identifica aspectos del objeto matemático en los cuales se debe enfocar para aclarar el significado, porque reconoce que la construcción de significado de sus estudiantes no se está desarrollando de manera aceptable. La mediación semiótica intencional del profesor son todas sus acciones deliberadas que buscan propiciar y guiar las ideas de los estudiantes para que evolucionen y converjan hacia el concepto del objeto matemático. Lo anterior muestra cómo, en un acto de interpretación de los signos de sus estudiantes, el profesor debe contemplar el objeto matemático desde dos perspectivas: la matemática y la didáctica (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014).

"Tomar al azar y forzar propiedad": estrategia espontánea de los estudiantes

Para entender en qué consiste la estrategia que, de manera espontánea, sugieren los estudiantes para demostrar la existencia de un objeto geométrico, imagínese la siguiente situación. El sistema teórico de geometría euclidiana que se usa está basado en el modelo propuesto por Birkhoff (1932) en el que se introducen como postulados los hechos que corporeizan la regla y el trasportador. Suponga que quiere afirmar y justificar válidamente que entre dos puntos dados *A* y *B*, siempre existe un punto *C*; es decir, existe un punto *C* que pertenece a la recta *AB* y para el cual la suma de las distancias de *A* a *C* y de *C* a *B* es igual a la distancia de *A* a *B*. Cuenta con el siguiente sistema teórico local (Tabla 1):

Definición	**Interestancia**: El punto *C* está entre *A* y *B* si: i) *A*, *B* y *C* son colineales, y ii) la suma de las distancias de *A* a *C* y de *C* a *B* es igual a la distancia de *A* a *B*.
Postulados	**Conjuntos de Puntos**: Las rectas y los planos son conjuntos no vacíos de puntos. **Recta - Números Reales**: Dada una recta, se puede establecer una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales tal que: i) a cada punto de la recta le corresponde exactamente un número real; ii) a cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta. El número real que le corresponde al punto *A* se llama la coordenada del punto y se denota por c(*A*). **Dos Puntos - Recta**: Si *A* y *B* son dos puntos, entonces existe una única recta *m* que los contiene.
Teoremas	**Interestancia - Orden**: *A*, *B* y *C* son tres puntos. Si *B* está entre *A* y *C*, entonces $c(A) < c(B) < c(C)$ o $c(A) > c(B) > c(C)$. **Orden - Interestancia**: Dados tres puntos *A*, *B* y *C* de la recta *m*, si $c(A) < c(B) < c(C)$ o $c(A) > c(B) > c(C)$, entonces *B* está entre *A* y *C*. **Recta - Infinitos Puntos**: Si *m* es una recta entonces existen infinitos puntos en *m*.

Tabla 1: Sistema teórico local (parte 1)

¿Cómo proceder? Para asegurar que existe un punto *C* entre los puntos *A* y *B* dados, es imprescindible poder señalar un punto y asegurar que tiene dos propiedades. ¿Cuál de las dos se abordará primero? ¿Es indistinto cuál se aborde primero? Si no, estamos ante una disyuntiva. ¿Cón qué criterio se tomará la decisión de cuál propiedad abordar primero? Hay dos posibles caminos. A continuación presentamos el esquema de dos estrategias, la primera de las cuales es típica de los estudiantes:

1) Crear la recta *m* que contiene los puntos dados *A* y *B* (usando el Postulado Dos Puntos - Recta). Tomar un punto *C* de la recta *m* (usando el Teorema Recta - Infinitos Puntos). Asignarle a los puntos *A*, *B* y *C* respectivamente las coordenadas x, y, z de tal manera que $x < y < z$ (usando el Postulado Recta - Números Reales i)). Concluir que *C* está entre *A* y *B* (usando el Teorema Orden - Interestancia).
2) Crear la recta *m* que contiene los puntos dados *A* y *B* (usando el Postulado Dos Puntos - Recta). Asignar coordenadas x y y respectivamente a los puntos *A* y *B* tal que $x < y$ (Postulado Recta - Números reales i)). Escoger un número z tal que ($x < z < y$) o ($x > z > y$) y asignarle el punto *C* de la recta *m* que le corresponda (Postulado Recta - Números Reales ii)). Concluir que *C* está entre *A* y *B* (usando el Teorema Orden - Interestancia).

¿En alguna de las estrategias anteriores se está “macheteando”? La respuesta está en el siguiente comentario del profesor:

> Si yo digo que existe un punto *C* en la recta, puedo ser muy de malas, pues ese punto *C* puede que esté por acá (ha dibujado la recta *AB* y ha marcado el punto *C* tal que *A* está entre *B* y *C*) porque no le he puesto condiciones; o puedo ser tan de malas que el punto *C* coincida con el punto *A* (marca a *C* coincidente con *A*). Entonces, ¿qué es lo que debemos hacer? Pues, determinar [al punto *C*] de manera que ya lleve consigo las propiedades que se quiere que tenga. Entonces, ¿qué hago primero? Estos [*A* y *B*] tienen unas coordenadas: x y y. Entonces, primero determino un número que cumpla una relación de orden (sobre la recta que ha trazado en el tablero escribe: $z < t < y$ o $z > t > y$), con eso cuando se escoja el punto (marca en la recta un punto que corresponde al número t), automáticamente tiene una condición muy especial, que es la que yo quiero. ¿Qué condición especial? Que esté entre los otros dos. ¿Por qué sé que *C* no va a estar ni por acá ni va a ser *A*? Porque ya tengo un teorema (señala el enunciado del Teorema Orden - Interestancia) que garantiza que una relación de orden entre coordenadas implica interestancia. ¿Ven el camino? Quiero ser muy claro en esto, porque siempre se presenta ese error.

> Toman el punto y después le asignan una coordenada especial para que cumpla la condición que yo quiero que tenga. Más bien, que el punto se determine con las propiedades que debe tener.

Con estas palabras, el profesor explica implícitamente, respecto a la primera estrategia, en qué consiste "machetear": **Tomar al Azar** un punto cualquiera y después **Forzar una Propiedad** en él (**TAFP**). Esta propuesta se aleja mucho de lo que acepta la comunidad del discurso matemático pues no hay cómo validar, desde una teoría consistente, la acción de obligar a un objeto **cualquiera** a tener una propiedad **especial**. Para exponer mejor la problemática, presentamos a continuación una escena de clase en la que se evidencia la mencionada estrategia y el esfuerzo del profesor por guiar a los estudiantes hacia la comprensión de la estrategia correcta para demostrar la existencia de un objeto geométrico. En este episodio de clase, que tuvo lugar en un curso universitario formal de geometría euclidiana, los estudiantes tienen que demostrar la existencia del punto medio de un segmento.

Demostración de la existencia del punto medio de un segmento

Precisamente en la clase siguiente a aquella en la que el profesor se refirió a la estrategia TAFP, él propuso la tarea de demostrar la existencia del punto medio del segmento AB. Para realizarla, además de los elementos que incluye la Tabla 1, los estudiantes contaban con los siguientes elementos teóricos (Tabla 2):

Definiciones	**Segmento**: Dados dos puntos A y B, el segmento AB es la unión del conjunto de los puntos A y B con el conjunto de todos los puntos que están entre A y B. **Punto Medio**: M es punto medio del segmento AB si: i) M está entre A y B, y ii) la distancia de A a M es igual a la distancia de B a M.
Teoremas	**Punto Entre**: Dados dos puntos A y B, existe un punto C entre ellos. **Punto a un Lado**: Sean A y B dos puntos. Existe un punto C tal que B está entre A y C.

Tabla 2: Sistema teórico local (parte 2)

Como se mencionó anteriormente, un procedimiento general para demostrar la existencia de un objeto geométrico cuya definición incluye dos o más condiciones consiste en elegir o determinar mediante una construcción un objeto específico que satisfaga algunas de las condiciones en cuestión, unas que se puedan validar teóricamente de manera directa, y luego mostrar que el objeto así determinado también cumple las demás condiciones que la definición le impone al objeto cuya existencia se quiere demostrar. En el caso del Teorema Existencia del Punto Medio, se comienza la demostración determinando un punto M que satisface su equidistancia a los extremos A y B del segmento (Definición Punto Medio ii)) y luego se demuestra que el punto está entre A y B (Definición Punto Medio i)). La determinación del punto M se logra al: 1) crear la recta determinada por los puntos A y B; 2) asignar coordenadas a los puntos A y B (Postulado Recta - Números Reales i)); 3) determinar el promedio de esas coordenadas; 4) asignarle a ese número el punto M de la recta que le corresponde (Postulado Recta - Números Reales ii)). El último paso es demostrar que M está entre A y B, gracias a la propiedad de los números reales que asegura que el promedio de dos números está entre ellos, y al Teorema Orden-Interestancia.

Recuento y análisis del episodio en el que surge la estrategia TAFP

La presentación sucinta del episodio y el análisis de este se hacen considerando fragmentos transcritos de las interacciones entre quienes participaron en la producción de la demostración. Al exponer una cita de algún participante, indicamos, entre corchetes cuadrados, el número de la intervención en la transcripción completa. El propósito de esta información es dar una idea del flujo de la interacción a través de la cual ocurrió el episodio.

El primer paso de la demostración es tomar un punto entre *A* y *B*

Como de costumbre, el profesor comunica la tarea para la sesión de clase: "Vamos a justificar que si se tiene un segmento AB, entonces este tiene exactamente un punto medio" [1]. Enseguida solicita el primer paso de la demostración. Laura plantea: "Que existe un punto […] **En medio de** A y B..." [9, 11]. Ángela añade: "Tiene que haber un punto **entre** A y B" [12]. A la pregunta del profesor, "¿Cómo escribo eso?" [13], para impulsar que se formalice la propuesta, Laura responde: "Con el Teorema Punto Entre" [14]. Las alumnas repiten su propuesta mientras el profesor la consigna en el tablero. Él pregunta: "¿Por qué se les ocurre que podemos utilizar ese teorema?" [27], a lo que responde inicialmente Ángela: "Porque necesitamos un punto que esté entre esos dos (pulgar e índice de la mano derecha extendidos como para representar la separación entre los extremos de un segmento) para decir…" [28], idea que completa Laura "Para poder hallar el punto medio. Para decir que ese X está en medio de A y B" [29].

Las palabras que hemos destacado en letra negrilla nos llevan a pensar que las alumnas han evocado un segmento y su punto medio, y posiblemente la definición de punto medio de un segmento. Es claro que la expresión de Laura "en medio de" se refiere solo a tomar un punto entre los dos puntos dados. Al aludir al Teorema Punto Entre, claramente no piensan en asignarle al punto otra propiedad especial, lo cual nos indica que están convencidas de que inicialmente deben crear un punto que satisfaga la interestancia. Esto se confirma con las explicaciones que dan posteriormente del porqué usan el teorema mencionado.

Cabe notar que el profesor no indica de manera alguna si la propuesta de las estudiantes es la forma correcta de comenzar la demostración o no. Con sus preguntas y solicitud de explicación, ofrece a la clase la oportunidad de revisar y modificar la propuesta expuesta.

¿Se detecta algún problema en la propuesta?

Como se verá en lo que sigue, parece que el profesor tiene como hipótesis que las estudiantes van a incurrir en la estrategia TAFP, ya que la propuesta consiste en tomar un punto que satisfaga una interestancia y, de esa manera, la única opción posible es forzar la propiedad de equidistancia. Su siguiente intervención incluye no solo una expresión verbal sino también una ilustración de la situación. Su mediación comienza con la solicitud de proveer las condiciones requeridas para que un punto sea punto medio de un segmento. Varios estudiantes indican correctamente que son dos: interestancia y equidistancia. El profesor comenta: “Con esto que harían Laura y Ángela, ya tendríamos parte del asunto que necesitamos, la interestancia. Pero, yo quiero que ustedes me digan (mirada a todo el grupo) si esa forma de hacer la demostración está bien o no. Hasta ahí, ¿están ustedes de acuerdo con lo que ellas proponen o ven algún problemita con ello?” [33]. Como no recibe la respuesta deseable, pues los estudiantes creen que el problema está en la falta de formalismo teórico de la propuesta, él insiste: “En términos de representación gráfica lo que tenemos hasta el momento es algo como esto (en el tablero dibuja un segmento de extremos *A* y *B*), y después ellas proponen que exista un punto *X* que cumpla la relación *X* está entre *A* y *B*. ¿Qué creen ustedes?” [41].

Como vemos, el profesor no hace explícito que la estrategia propuesta sea errónea; en cambio, indaga con la intención de que sean los estudiantes los que reconozcan la acción TAFP. Pretendiendo ayudarlos, representa el segmento en el tablero esperando que los estudiantes plasmen la propuesta de Laura y Ángela en una imagen y visualicen que la posición de *X* en el segmento puede ser cualquiera.

El problema es la manera de determinar el punto *X*

Tras la insistencia del profesor en revisar la propuesta de Laura y Ángela, María tímidamente interviene: “Es que el *X* aparece como que… como **gratis**… aparece” [48]. El profesor le solicita aclarar su idea: “Apareció y cuando uno aparece, ¿dónde puede aparecer ese punto entre *A* y *B*?” [51]. Otro estudiante responde: “En cualquier parte del segmento” [52]. Esta respuesta da lugar a que el profesor se refiera de nuevo a la inaceptabilidad, desde la matemática, de la estrategia TAFP: “En cualquier parte del segmento. Entonces, ¿qué tal que *X* aparezca por acá? (En el segmento *AB* representado en el tablero, marca un punto *X* muy próximo a *A*.) O que *X* aparezca por acá (marca otro punto en el segmento). ¿Y queremos que aparezca por allí o queremos que *X* sea muy especial? ¿En dónde queremos que aparezca *X*? En términos gráficos, solamente como por aquí ¿sí o no? (señala en la figura del tablero) para que ese *X* sea efectivamente el punto medio. Si nosotros hacemos lo que tenemos acá (señala la propuesta de Laura y Ángela), entonces después ustedes a este punto que ya se tiene, lo van a obligar a que cumpla condiciones. ¿Se acuerdan? ¿Y, yo qué les decía ayer?” [53], y continúa con esta idea: “Que mejor que cuando se determinara el puntico ya se le asignaran las condiciones que queremos. ¿Ven el asunto lo distinto que es? Ayer yo les decía: van a cometer este error con frecuencia…" [55].

María interpreta la solicitud del profesor de examinar la propuesta de Laura y Ángela como objeción al contenido y no a la justificación que presentan ellas para su propuesta. Su uso de la palabra "gratis" parece indicar que reconoce que en la propuesta existe la libertad de tomar cualquier punto del segmento. Su objeción puede significar que entiende que, de continuar con lo que proponen Laura y Ángela, se llegaría a TAFP. La intervención del profesor nos lleva a pensar que él supone que los estudiantes han entendido que, debido a la posición aleatoria del punto *X* en el segmento, no se podrá deducir la equidistancia de tal punto a los puntos *A* y *B*, a partir de la interestancia.

Determinar el punto que tiene exactamente la coordenada que se necesita… ¿es eso "machetear"?

Descartada la propuesta de Laura y Ángela, el profesor da una idea general, con escasa explicación, del procedimiento para demostrar la existencia del punto medio: "Entonces, en algún momento efectivamente vamos a tener que encontrar la interestancia, en algún momento, pero este no es. Más bien, que la interestancia surja como producto de otra construcción que vamos a tener que hacer. Entonces, ese paso, por lo pronto, no (borra el tercer paso registrado en el tablero). Listo, entonces ¿cómo hacemos para construir este puntico *X* (señala en la figura del tablero el que sería el punto medio del segmento y borra los otros dos puntos que había marcado), para que tenga las condiciones que queremos que tenga? ¿Qué se les ocurre que podemos hacer? Que se determine con algo, con lo que quiero que tenga" [57]. Juan entiende que habiendo descartado la opción de comenzar asignando la propiedad de interestancia a un punto, no queda sino otra opción: "Ponerle la condición de que *AX* [la distancia de *A* a *X*] sea igual a *XB* [la distancia de *B* a *X*]" [58]. Así, Juan explicita la acción por hacer pero no dice cómo llevarla a cabo. Es Dina quien, con poca seguridad, propone: "Si se le asignan coordenadas a *A* y a *B*, cuando se determine el punto *X* se le da la característica… ¿sería como muy "macheteado"?"

[62]. Cuando el profesor le pregunta exactamente en qué consiste el “machete”, ella dice: “Darle a *X* la distancia exacta entre *A* y *B*” [64].

De las intervenciones de Juan y Dina inferimos que su interpretación de punto medio de un segmento incluye la equidistancia a los extremos del segmento y que el uso de coordenadas es el medio para determinar el punto *X*. Sin embargo, para Dina proceder de este modo es asignar una propiedad muy exigente al punto, razón por la cual duda de la pertinencia de su propuesta. Una vez aceptada la propuesta de determinar al punto *X* con una condición específica de distancia, se alude a qué coordenadas asignarle a los puntos dados *A* y *B* (Postulado Recta - Números Reales i)), y se discute cómo determinar convenientemente, a partir de esas coordenadas, el número que a su vez determine precisamente al punto *X* (Postulado Recta - Números reales ii)).

Demostración de la existencia de la bisectriz de un ángulo

En una sesión de clase ocurrida tres meses después de aquella en la que tuvo lugar el episodio anteriormente relatado, se aborda la tarea de demostrar la existencia de la bisectriz de un ángulo. Surge la tarea debido a que tal objeto fue mencionado por algún grupo de estudiantes en la resolución del problema en que se les pedía construir, con geometría dinámica, dos ángulos adyacentes congruentes y justificar teóricamente las acciones realizadas en la construcción. Comienzan por enunciar como definición de bisectriz de ángulo, la siguiente:

> **Bisectriz de un Ángulo**: Dado el ángulo *ABC*, el rayo *BD* es su bisectriz si: i) los ángulos *ABD* y *DBC* son congruentes, y (ii) el punto *D* pertenece al interior del ángulo *ABC* .

Enseguida, tiene lugar una interacción dialógica entre estudiantes y profesor. Él inicia el proceso de producción de la demostración diciendo: “El ángulo *ABC* es dado. Seguimos con el segundo paso. ¿Cuál sería el segundo paso? ¿Qué es lo que necesitamos que aparezca?”. De esta manera, el profesor pretende insinuarles que deben tener en cuenta cómo van a determinar el objeto geométrico sobre el cual versará la demostración de existencia. Algunos estudiantes responden que se necesita un rayo con un punto en el interior del ángulo y que además determine, con los lados del ángulo original, dos ángulos adyacentes congruentes, es decir, mencionan las dos condiciones involucradas en la definición de bisectriz de un ángulo. Según su respuesta, parecen haber interpretado la pregunta como "qué objeto queremos tener al final de la demostración" y no "de qué objeto vamos a partir para hacer la demostración". Entonces el profesor pregunta: "¿Qué hacemos para determinar ese rayo con esas propiedades? ¿Qué debemos hacer?". Ángela responde y explica, por solicitud del profesor, que se tiene que "Crear el punto *D*. Entonces existe el punto *D*, tal que… que pertenezca al interior del ángulo", respuesta que el profesor interpreta como una instancia de TAFP. Interpretamos esto a partir de su reacción: "¡Ah, de una vez! Vamos a decirlo de una vez. Pues, de chévere, y listo, tomamos el punto que esté en el interior. ¿Qué hacemos con él?", palabras que acarrean un sentimiento de inconformidad con la propuesta. El silencio prolongado de los estudiantes podría indicar que no ven cómo desarrollar esa propuesta de forma teóricamente válida. Molly expresa esto al decir: "Por ahí no sería. Porque *D* quedaría en cualquier lugar del interior del ángulo".

Al igual que la definición de punto medio de un segmento, la definición de bisectriz de un ángulo se formula en términos de la conjunción de dos propiedades. Desde el punto de vista de la lógica, la demostración podría comenzar enfocándose en cualquiera de las dos propiedades, con lo cual surgen dos estrategias para la demostración: i) proseguir como propone Ángela, tomando cualquier punto *D* en el interior del ángulo o ii) localizar, usando el teorema[3] que lo permite, un rayo *AD* tal que la medida del ángulo *DAB* sea la mitad de la medida del ángulo *ABC*. En el primer caso, habría que forzar al punto para que quedara en una posición tal que el rayo de extremo en *B* y determinado por el mencionado punto diera lugar a un ángulo cuya medida fuera un medio de la medida del ángulo *ABC*. Esto es "machetear". En el segundo caso, se debería demostrar que el rayo *AD* localizado tiene puntos en el interior del ángulo *ABC.* Desarrollar esta estrategia es exigente, pero con ella no se "machetea". Además los estudiantes ya contaban con todos los elementos teóricos necesarios.

3 **Teorema Construcción de Ángulo**: Sean un rayo *AB*, en un plano α, y r un número real tal que $0 < r < 180$. Entonces existe un único rayo *AD* tal que *D* está en alguno de los semiplanos determinados por la recta *AB* en α, y la medida del ángulo *DAB* es r.

Al comparar superficialmente acciones de los participantes en el intercambio dialógico de los dos episodios es notorio que en ambos es Ángela quien propone la estrategia TAFP; pero en el segundo es Molly, no María, quien identifica por qué la estrategia es errónea. En el segundo episodio, en su intervención el profesor no explicita que la propuesta de Ángela sea errónea, pero al parecer Molly interpreta las palabras del profesor como una indicación de que no es la forma de proceder, razón por la cual explica por qué la propuesta de Ángela no es correcta.

Consideraciones finales

Hay varios asuntos que queremos destacar, relacionados con las demostraciones de existencia en el ámbito de la geometría, la estrategia TAFP empleada espontáneamente por los estudiantes y la mediación del profesor.

Un examen de las dos propiedades que conforman la definición de punto medio de un segmento muestra que la equidistancia es matemáticamente más exigente que la interestancia en el sentido de que aquella es una característica puntual mientras que la interestancia conlleva libertad pues hay infinidad de puntos que cumplen esa propiedad. Así mismo, en la situación de la bisectriz de un ángulo, localizar el rayo para que se determine un ángulo de una medida específica es darle una propiedad más exigente que simplemente tomar un punto en el interior del ángulo. Es bastante probable que de alguna manera, consciente o no tanto, los estudiantes que comienzan a abordar y a entender el procedimiento para hacer demostraciones de existencia se hagan preguntas como, por ejemplo: En una demostración de existencia, ¿se puede partir de un objeto que comparte propiedades tan fuertes con aquel cuya existencia se quiere demostrar? ¿Cuáles y cuántas de las propiedades se pueden asumir desde un principio? Por nuestra parte, como investigadores, nos preguntamos al respecto: ¿Es esta preocupación la que lleva a los estudiantes a **Tomar al Azar** un objeto para luego **Forzarlo** a tener otra **Propiedad**? ¿Por qué ellos no consideran que esta estrategia sea "machetear" pero sí consideran que es "machetear" la asignación de propiedades más determinantes? Quizá la dificultad que encaran los estudiantes tiene que ver con el dilema cognitivo respecto a cuáles propiedades asignar y cuáles tratar de demostrar.

Otra causa para el dilema de los estudiantes puede residir en la lógica que hay detrás de una conjunción. Siendo conmutativa la conjunción, ¿por qué esa propiedad no parece ser útil cuando se quiere demostrar un enunciado cuyo consecuente involucra una conjunción? Además, ¿cómo entender que, contrario a lo que sucede en la mayoría de las demostraciones, donde la tesis del teorema es el último paso de la demostración, en el caso de una demostración de existencia algunas de las propiedades incluidas en la tesis se le asignan desde un principio a un objeto? Es indispensable entender que no se atribuyen libremente las propiedades sino que se determinan uno o más objetos específicos con esas propiedades bajo la condición de que sea posible validar teóricamente tal asignación.

La complejidad que encierran las consideraciones hechas nos permite ver claramente la necesidad de la mediación semiótica del profesor en el aula. Difícilmente hubieran podido los estudiantes descubrir por sí solos la estrategia para demostrar teoremas de existencia, como lo ilustra lo anteriormente expuesto, pues la estrategia está basada en cuestiones matemáticas que requieren mayor conocimiento de la lógica, de lo que es un sistema axiomático y de cómo se trabaja ceñido a este, conocimiento con el que no contaban en ese momento. Además, ¿cuánto tardó la comunidad matemática en configurar la estrategia que en la actualidad acepta como apropiada para demostrar existencia de objetos geométricos? y ¿qué nos hizo pensar que los estudiantes podían recorrer por sí solos de manera exitosa ese camino en unas pocas sesiones de clase? Cuando el curso se realiza bajo el supuesto de que aprender significa adoptar comprensivamente formas de actuar históricamente establecidas para modificar y extender el discurso sobre objetos y procedimientos matemáticos (Ben-Zvi y Sfard, 2007), entonces aprender cómo proceder para demostrar la existencia de un objeto matemático definido a través de más de una propiedad debe hacerse con la orientación explícita del profesor. Debe haber conversaciones sobre la diferencia entre tratar una conjunción en cuanto operación entre proposiciones, en la cual el orden es irrelevante, y usar la conjunción para expresar fenómenos y acciones en los que la temporalidad, la causalidad y la dependencia están presentes. Los estudiantes deben poder ver que la conjunción tiene una dimensión lógica y otra semántica. En el caso que nos ocupa, para demostrar una conjunción que garantice existencia, no se puede partir indistintamente de una u otra propiedad. La razón es que una propiedad tiene que ser inferida de la otra para que sea una demostración válida. No hay forma de saber todo esto sin la interacción explícita con un experto (Ben-Zvi y Sfard, 2007).

En cuanto a la mediación del profesor, privilegió la participación de los estudiantes para que fueran ellos quienes aportaran las ideas, muchas veces a través de preguntas relacionadas con lo que decían los estudiantes. No proporcionó información para impulsar a los estudiantes a modificar sus propuestas, ni indicó cómo debían proceder sino que guió el flujo del intercambio. Dejó que se expresaran ideas, a sabiendas de que no eran las adecuadas, solicitó la exposición clara de las ideas, y, por medio de preguntas, sembró duda e hizo evidente la necesidad de ser críticos ante lo que se propone. Esperó hasta que algún estudiante descubriera la inconsistencia de la propuesta. Sin embargo, esas acciones no parecen haber tenido un efecto notorio y en la dirección deseable con respecto a la construcción de significado de la estrategia apropiada para demostrar existencia. Dos semanas después de ocurrido el primer episodio, algunos estudiantes volvieron a proponer pasos, en otras demostraciones, que llevan a TAFP, y finalizando el semestre todavía ese era un asunto problemático. El hecho de que Ángela haya propuesto la estrategia TAFP en las dos ocasiones nos indica que ella requería más mediación y quizá una mediación de índole más decididamente semiótica. Probablemente, se habría beneficiado de acciones del profesor como la exigencia de expresar sus ideas completas, y de continuar con la producción de la demostración hasta que ella misma se diera cuenta de que se estanca el desarrollo de esta pues no hay forma, matemáticamente válida, de demostrar la segunda propiedad del objeto, en cada caso. Además, en ese momento habría sido oportuna una intervención del profesor en la que expusiera explícitamente dos asuntos: la invalidez matemática de TAFP y la explicación tanto de la estrategia adecuada como de su validez.

Ahora bien, la situación habría podido ser muy distinta. Podría ser que la interpretación que el profesor hiciera de los signos de Ángela en los dos episodios no se correspondiera con lo que ella hubiera querido comunicar. Podría ser que ella hubiera querido resaltar que el dominio de los posibles candidatos a punto medio y a bisectriz están restringidos respectivamente al segmento y a los rayos con puntos en el interior del ángulo. Pero esto es apenas una especulación que para tratar de dilucidarla requeriría que se le hubiera dado la oportunidad a la estudiante de desarrollar su idea sobre el procedimiento completo para demostrar la existencia de los objetos en cuestión.

Es posible que el profesor haya experimentado un dilema en torno a cuánto decir y en qué momento intervenir, ante la presunta ocurrencia de TAFP, dada la metodología participativa que quiere implementar. Consideramos que el manejo de este dilema implica diversos factores, entre los cuales podemos citar: la asignación de más tiempo para los aportes de los estudiantes; la atención del profesor para escuchar todo lo que el estudiante tiene que decir en un momento determinado; la reflexión y habilidad del profesor para distinguir sus interpretaciones de las de los estudiantes; y la previsión que le permita planear, de manera informada, acciones y momentos de intervención en el aula.

Referencias

Ben-Zvi, D. y Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, Daedalus' wings, and the learner's autonomy. *Education & Didactique*, *1*(3), 117-134.

Birkhoff, G. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics*, *33*(2), 329-345. Disponible en: http://www.jstor.org/stable /1968336

de Guzmán, M., Hodgson, B., Robert, A. y Villani, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. *Documenta Mathematica* (*extra volume*): *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (vol. III, pp. 747-762). Berlin.

Dreyfus, T., Nardi, E. y Leikin, R. (2012). Forms of proof and proving in the classroom. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study* (pp. 191-214). Dordrecht, Holanda: Springer.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Euclid, Densmore, D. (Ed.) y Heath T. L. (Tr.) (2003). *Euclid's Elements: All thirteen books complete in one volume*). Santa Fe, New Mexico: Green Lion Press.

Harari, O. (2004). *Knowledge and demonstration. Aristotle´s Posterior Analysis*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. IV, pp. 409-416). Vancouver, Canada: PME.

Sáenz-Ludlow, A. y Athanasopoulou, A. (2007). Playfulness and proof, sense perception and inference. En C. E. Vasco y A. L. Gómez (Eds.), *Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje* (pp. 137-168). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital.

Selden, A. y Selden, J. (2011). Mathematical and non-mathematical university students' proving difficulties. En L. R. Wiest y T. D. Lamburg (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 675-683). Reno, EUA: University of Nevada, Reno.