Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa

Leonor Camargo y Carmen Samper

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las definiciones en geometría son asuntos polémicos, aun a nivel universitario. Desde la década de 1970, Freudenthal (1978) objetó abiertamente la práctica tradicional de proporcionar definiciones de manera directa a los estudiantes, dado que ello no necesariamente conduce a la conceptualización de los objetos definidos. Argumentando a favor de la idea de Freudenthal, Vinner y Hershkowitz (1980), Vinner (1991) y de Villiers (1998) revelaron datos empíricos que mostraron que conocer la definición de un objeto no es garantía para entenderlo. Probablemente bajo la influencia de Lakatos (1978) para quien la construcción de una definición es el resultado de un proceso investigativo de conceptualización, varios investigadores han buscado opciones para involucrar a los estudiantes en procesos de construcción de definiciones. Incluso, como lo señalan Calvo (2001) y Ouvrier-Buffet (2006), actualmente se reconoce que el proceso de definir tiene importancia similar al proceso de demostrar, razón por la cual es un campo de investigación fructífero.

El propósito de este artículo es presentar varias aproximaciones a la enseñanza de las definiciones, todas ellas basadas en la siguiente premisa: las definiciones en geometría contribuyen a la construcción significativa de conocimiento, en la medida en que se usen para algo más que para asociar un nombre a un conjunto de representaciones gráficas; este uso depende del reconocimiento de la bicondicionalidad de la relación entre un conjunto de propiedades de un objeto[1] y el nombre que se le asigna al objeto que cumple dichas propiedades. Este reconocimiento se logra en un proceso paulatino que comienza con actividades de construcción de definiciones e identificación de las características incluidas en una definición y culmina cuando se hacen operativas las definiciones en la producción de cadenas deductivas.

Las ideas que presentamos sobre cómo aprovechar las definiciones para construir significado provienen de nuestra experiencia docente e investigativa centrada en el aprendizaje de la geometría, en dos cursos de nivel universitario de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas.

En el primer curso, Elementos de Geometría, la intención es complementar la formación secundaria con el propósito de preparar a los alumnos para que puedan acceder con bases firmes al estudio teórico de la geometría euclidiana. Se busca proporcionar, en un ambiente activo y constructivo, herramientas necesarias para la formación de conceptos, para el establecimiento de propiedades geométricas a partir de la exploración, y para el uso eficaz de técnicas, métodos y lenguaje geométricos. Mediante un acercamiento informal que invita a los alumnos a hacer conjeturas con base en la exploración empírica, se propicia el desarrollo de procesos de visualización, construcción de conceptos, argumentación y justificación. En este contexto, se involucra a los estudiantes en procesos de definir objetos geométricos con el objetivo de ampliar el significado que de ellos puedan tener inicialmente y de lo que es una definición.

En el segundo curso, Geometría Plana, se hace la primera aproximación teórica a la geometría. Para ello, se involucra a los estudiantes en procesos de resolución de problemas abiertos, con el apoyo de un programa de geometría dinámica, que los llevan a formular conjeturas y a validarlas con definiciones, postulados o teoremas de un sistema geométrico teórico que se conforma gradualmente en el curso, siguiendo la pauta sugerida por George Birkhoff (1884-1944), pero con variaciones propias de las dinámicas de producción colectiva del sistema a partir de las conjeturas que formulan los estudiantes. En este curso, los estudiantes participan en la evaluación de definiciones construidas en el curso anterior, cuando los objetos definidos hacen parte de los

1 Con el término "objeto" nos referimos a los entes o relaciones de interés matemático, de índole geométrica.

problemas propuestos, y en hacer operativas las definiciones, para usarlas en demostraciones.

Acercamiento constructivo a las definiciones

Dos propósitos del curso Elementos de Geometría tienen que ver con las definiciones: uno, aprender a definir objetos geométricos y dos, aprender a extraer información de una definición. En el primer caso, se trata de poder construir un enunciado verbal que determine de manera clara, precisa y sin redundancias, un objeto geométrico a partir de un conjunto de propiedades. En el segundo caso, se trata de poder sacar conclusiones derivadas de una definición para, por ejemplo, producir un argumento deductivo. En esta sección nos referimos a ambos propósitos.

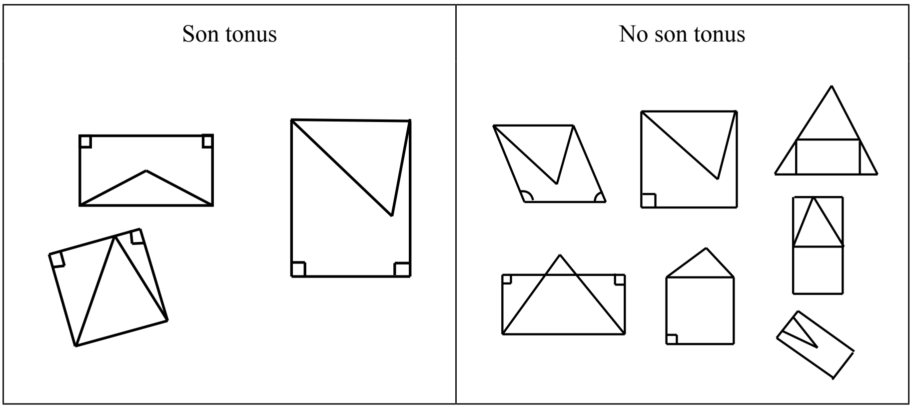
Construcción de una definición a partir de ejemplos y no-ejemplos

Uno de los acercamientos constructivos a las definiciones consiste en proporcionar a los estudiantes un conjunto de representaciones gráficas que son ejemplos de un objeto que se quiere definir y un conjunto de representaciones gráficas que no son ejemplos del objeto (no-ejemplos). Se trata de que el estudiante describa de la manera más completa posible cada ejemplo, elabore una lista de las propiedades en cada caso y compare las listas para identificar qué propiedades son comunes a todos los ejemplos y cuáles son específicas de solo algunos de ellos; estas últimas propiedades deben ser catalogadas como irrelevantes para la definición. Al obtener una lista de propiedades comunes se describe el objeto, sin ambigüedades, a partir de las propiedades necesarias. Al revisar los no-ejemplos, es probable que en cada muestra se identifiquen algunas propiedades relevantes, pero no todas, hecho que justifica que la representación no sea un ejemplo y se reafirme el conjunto de propiedades necesarias. A partir de la identificación de las propiedades necesarias se puede proponer una definición. La definición debe incluir las propiedades necesarias y suficientes para definir el objeto, es decir, sin que falten o sobren propiedades. Nos referimos a propiedades necesarias como aquellas que obligatoriamente deben estar incluidas en la definición. Por ejemplo, al definir cuadrado es necesario decir que es un cuadrilátero (o un tipo particular de cuadrilátero). La suficiencia se refiere a que no esté incluida una propiedad que se pueda deducir de alguna necesaria. Por ejemplo, es suficiente decir que un paralelogramo tiene diagonales congruentes, para definir rectángulo, sin mencionar ángulos rectos.

El éxito de la actividad está en la riqueza de los ejemplos y no-ejemplos con base en los cuales se construye la definición. Los ejemplos deben ser diversos, lo que implica que además de todas las propiedades que caracterizan el objeto, deben tener otras propiedades no relevantes y diferentes. Así mismo, los no-ejemplos deben ser escogidos cuidadosamente para no proponer representaciones obvias, sino aquellas que demanden un análisis cuidadoso para revisar qué propiedades necesarias faltan por identificar.

La construcción de definiciones a partir de ejemplos y no-ejemplos es útil para el caso en el que la definición involucre dos o más propiedades, pues ello favorece la elaboración del conjunto de ejemplos y no-ejemplos. También es conveniente poner en juego este acercamiento tanto con objetos que sean familiares a los estudiantes como con objetos desconocidos, incluso inventados. Las definiciones de cuadrilátero, paralelogramo, ángulos que son par lineal, altura, mediana, punto medio, etc. pueden construirse por esta vía.

A manera de ejemplo, presentamos el caso de la construcción de la definición de los objetos "tonu" y mediana de un triángulo, ejercicios que proponemos a estudiantes del curso Elementos de Geometría (Figura 1).



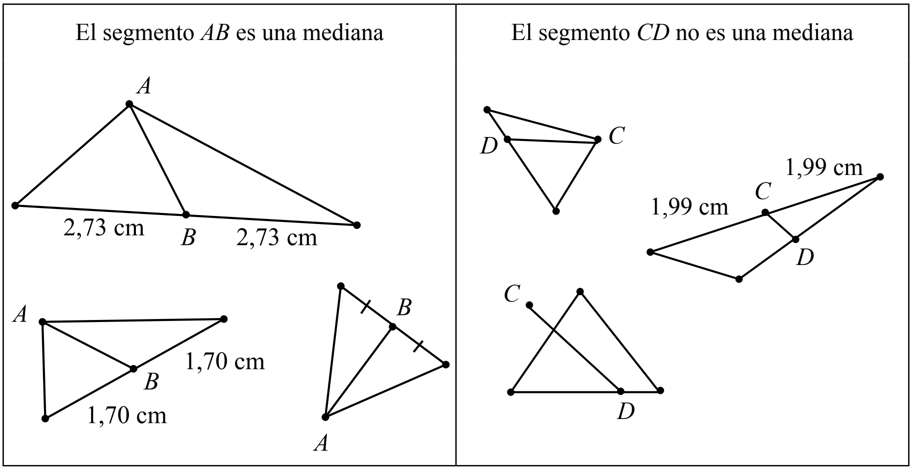


Figura 1: Ejemplos y no-ejemplos de tonu y mediana

Con respecto al tonu, generalmente los estudiantes se refieren inicialmente a rasgos como: tiene al menos dos ángulos rectos consecutivos, hay un cuadrilátero y un triángulo, un lado del triángulo es un lado del cuadrilátero, el cuadrilátero y el triángulo comparten un lado pero no es el que contiene los vértices de los ángulos rectos, el vértice del triángulo está en el interior del cuadrilátero o en el lado del cuadrilátero determinado por los vértices de los ángulos rectos. A partir de tales caracterizaciones se proponen diversas definiciones, usualmente extensas, pero poco a poco se puede llegar a la siguiente definición que reúne las propiedades necesarias y suficientes.

> **Definición de tonu**: Es la unión de un cuadrilátero y dos segmentos de recta; el cuadrilátero tiene dos ángulos rectos consecutivos; los dos segmentos tienen un extremo común el cual está en el interior del cuadrilátero o sobre el lado del cuadrilátero que contiene los vértices de los ángulos rectos, y el otro extremo de cada segmento es un vértice del cuadrilátero que no corresponde a los ángulos rectos consecutivos.

Esta definición, como cualquiera otra, la interpretan los estudiantes de acuerdo al significado de los otros objetos que se mencionan en ella. En este caso, puede ser problemático el significado de ángulos consecutivos por lo cual conviene acordar a qué se está haciendo referencia, para el caso de ángulos internos de un polígono convexo. En ciertos textos, los ángulos internos de un polígono cuyos vértices son extremos de un mismo lado de la figura también son llamados ángulos adyacentes.

En cuanto a la definición de mediana de un triángulo, es posible que los estudiantes quieran expresarla en términos del punto medio, lo cual lleva a la necesidad de introducir la definición de punto medio de un segmento; pero se puede definir sin hacer uso de tal término.

> **Definición de Mediana de un Triángulo**: es un segmento con un extremo en un vértice del triángulo y el otro extremo en un punto del lado opuesto que determina, en este, dos segmentos congruentes cuyos extremos no comunes son los otros dos vértices del triángulo.

Al ir aumentando el número de objetos estudiados, las definiciones se pueden ir modificando para incluir nuevos objetos. Además, algunos objetos que inicialmente se usan de acuerdo a la acepción informal, también se pueden definir, como el caso de "segmento".

Según de Villiers (1994), el proceso de elaborar una definición puede ser descriptivo o constructivo. Es descriptivo cuando, a partir de diversos ejemplos y no-ejemplos se determina un subconjunto de las propiedades que tiene el objeto, al cual se le asigna el nombre escogido. Implica poder reconocer qué propiedades se pueden deducir de otras y decidir el conjunto mínimo de propiedades que lo definen. Es constructivo cuando, a partir de un objeto bien caracterizado, se toma la decisión de alterar el conjunto de propiedades que lo definen, bien sea suprimiendo o agregando propiedades, y se construyen ejemplos y no-ejemplos del nuevo objeto. Este proceso lleva a construir relaciones de contenencia de objetos definidos. Por ejemplo, si la definición de triángulo equilátero como triángulo con tres lados congruentes, la modificamos para considerar un triángulo con dos lados congruentes, diremos que el triángulo equilátero es un caso especial de este último objeto, que puede ser nombrado como triángulo isósceles.

Las definiciones se pueden enunciar de dos maneras diferentes según que su estructura lingüística sea explícita o implícita (Kublikowski, 2009). En una *definición explícita* (completa) se incluyen un término para el objeto que se va a definir y las propiedades que determinan el objeto que se está definiendo. El término y las propiedades del objeto están conectados por expresiones como: *es* o *si y solo si* cuando lo que se define está expresado verbalmente.

Ejemplos de definiciones explícitas son: "Un rombo es un cuadrilátero con cuatro lados congruentes" y "Dos circunferencias son concéntricos si y solo si están en el mismo plano y tienen el mismo centro". Una *definición implícita* (parcial) se presenta en la forma de una proposición condicional "p si q". Es el modo habitual de expresar una definición que, a pesar de ser una proposición bicondicional, se expresa como condicional. Por ejemplo: "Dos ángulos son adyacentes si son coplanares, tienen en común uno de sus lados y no tienen puntos interiores en común".

Construcción de una definición a partir de la caracterización de lugares geométricos

Un segundo acercamiento constructivo a las definiciones se hace a partir de la construcción de un lugar geométrico de puntos y la identificación de los invariantes de tal lugar, es decir, de aquellas propiedades geométricas comunes a todos los puntos. Este acercamiento se favorece con el uso de instrumentos de trazo que permiten la construcción de muchos puntos del lugar, como los programas de geometría dinámica; sin embargo, con unos cuantos puntos también se puede hacer.

La construcción de la definición de circunferencia se puede hacer a partir de la representación de ejemplos o casos particulares del lugar geométrico, por diversas vías. Bien sea con regla no graduada y compás o con un programa de geometría dinámica, se puede pedir a los estudiantes que i) construyan un conjunto de puntos del plano que equidisten de un punto fijo (para centrar la atención en la distancia entre los puntos y el centro) o ii) que construyan el lugar geométrico del extremo de un segmento cuando este rota sobre el otro extremo, sin cambiar de longitud, en un plano (para centrar la atención en la congruencia de los segmentos cuyo extremo común es el centro). Una vez que hayan construido los casos particulares (ejemplos) de los dos lugares geométricos y los hayan relacionado con una circunferencia, se puede introducir la definición.

> **Definición de Circunferencia**: La circunferencia C con centro O, siendo O un punto de un plano, el conjunto de puntos P del plano que equidistan de O, es decir, para los cuales la distancia de O a P es constante.

La construcción de la definición de mediatriz de un segmento se puede hacer por una vía similar. Se pide a los estudiantes que construyan el conjunto de puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos (los extremos del segmento). La Figura 2 ilustra tres estrategias que se pueden seguir, si se usa un programa de geometría dinámica, para obtener el lugar geométrico de puntos que equidistan de los extremos del segmento *AB*.

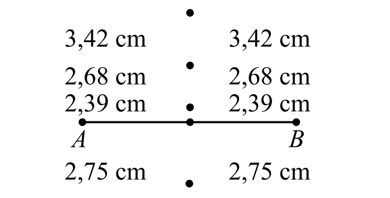
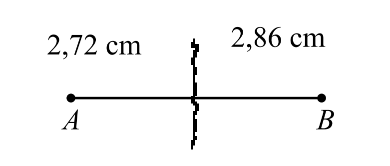
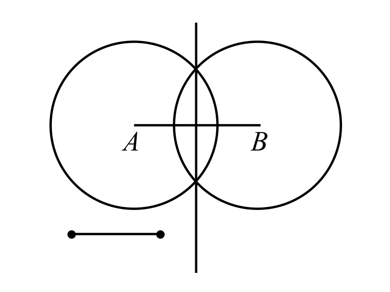
	Mediante la técnica del "hilvanado" construyendo varios puntos, uno por uno.
	Por arrastre, a partir de un punto que cumpla la condición, procurando mantener la equidistancia a los extremos. La traza del punto describe el lugar geométrico.
	Usando un segmento "control" como radio de circunferencias construidas usando los extremos como centro. Una vez construido el punto intersección de las circunferencias, se activa la traza de dicho punto y se varía la longitud del segmento.

Figura 2: Estrategias para construir la mediatriz como lugar geométrico

Cualquiera de de las estrategias da lugar a la representación gráfica de la mediatriz y a la búsqueda de propiedades geométricas que permitan caracterizarla. Se llega a dos posibles definiciones de mediatriz de un segmento.

Definición de Mediatriz de un Segmento (1): Lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Definición de Mediatriz de un Segmento (2): Recta perpendicular al segmento, que contiene el punto medio de este.

La decisión de cuál definición adoptar depende del uso que se vaya a hacer de la misma. Generalmente, la primera es útil cuando se trata de construir otros lugares geométricos, mientras que la segunda se puede aprovechar en procesos deductivos que requieran justificar ciertas propiedades.

Una vez caracterizado el lugar geométrico de puntos del plano que equidistan de un punto dado, y el lugar geométrico de puntos que equidistan de dos puntos fijos dados, cabe preguntarnos cuál es el lugar geométrico de puntos del plano que equidistan de tres puntos fijos dados, *A, B* y *C*. Para resolver este problema, se puede aplicar inicialmente la condición a dos puntos, por ejemplo *A* y *B*, y construir la mediatriz correspondiente; luego, se aplica la condición a otros dos puntos, por ejemplo *B* y *C,* y se construye el lugar geométrico correspondiente; finalmente se encuentra la solución mediante la intersección de las mediatrices.

El acercamiento descrito se basa en la construcción de figuras representantes de los objetos que se quieren definir, usando diversos instrumentos de construcción. Es una vía de trabajo útil cuando se tiene cierta familiaridad con los objetos pero no se ha hecho un estudio cuidadoso de su definición. Es una propuesta sugerida, entre otros por Chassapis (1999), en la década de 1990, que puso en práctica supuestos socioculturales sobre el aprendizaje, como aquel que afirma que el conocimiento está mediado por los instrumentos que se tienen a disposición para acceder a él. La propuesta ha cobrado vigencia hoy por la posibilidad que se tiene de poner a disposición de los estudiantes diversos artefactos que hacen ostensivas diferentes propiedades de los objetos involucrados.

Construcción de definiciones a partir de propuestas de conjuntos de propiedades necesarias y suficientes y su contraste con representaciones

Esta estrategia es útil para el caso de objetos con los que los estudiantes estén familiarizados, por tener una correspondencia cercana con formas de objetos presentes en el ámbito social y cultural o porque se ha hecho un acercamiento escolar informal. Es el caso de la construcción de definiciones de figuras geométricas planas como triángulo, cuadrilátero, paralelogramo, rombo, cuadrado, rectángulo, ángulo, ángulos adyacentes, altura de un triángulo, tetraedro, prisma, cubo, etc. Además de favorecer un acercamiento constructivo a las definiciones, se promueve un cambio en la idea de que solo existe una definición para los objetos geométricos; por el contrario, la conceptualización es más rica entre mayor número de definiciones se conozcan, se identifique la equivalencia entre ellas (Zaskis y Leikin, 2008) y se establezcan relaciones entre las propiedades que se explicitan en una definición o en otra.

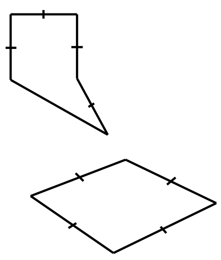
La estrategia consiste en pedir a los estudiantes que propongan definiciones del objeto geométrico y realicen un análisis colectivo detallado de las propuestas. Los estudiantes tienen que: representar ejemplos y no-ejemplos, identificar qué propiedades deben incluirse en ciertas definiciones para evitar generar no-ejemplos, seleccionar qué propiedades serían innecesarias por poderse deducir de otras. El análisis conduce a escoger las definiciones que realmente caracterizan el objeto y tienen la mínima cantidad de atributos necesarios.

El análisis de las definiciones propuestas conduce a la identificación de definiciones correctas, es decir, aquellas que mencionan las propiedades necesarias para que quede clara e inequívocamente determinado cuál es el objeto definido. Puede suceder que una definición sea correcta aunque tenga algunas propiedades innecesarias. Por ejemplo, se puede definir un rectángulo como un paralelogramo con cuatro ángulos rectos o como un paralelogramo con un ángulo recto. La primera definición es correcta aunque no sea necesario incluir que los cuatro ángulos son rectos; es suficiente mencionar tres ángulos rectos porque la propiedad de ser recto del otro ángulo se deriva de lo ya dicho. Aunque las dos definiciones son correctas, al ir avanzando en el nivel de escolaridad se privilegian las definiciones con el menor número de propiedades, para facilitar posteriores chequeos en representaciones y para favorecer el razonamiento deductivo. El análisis para determinar si alguna de las propiedades se puede eliminar es útil para comprender el papel de cada propiedad necesaria en la definición.

Las definiciones incorrectas son aquellas que no mencionan todas las propiedades necesarias o mencionan una propiedad que no puede tener el objeto, pues entra en contradicción con las propiedades necesarias. Por ejemplo, la definición de circunferencia como el conjunto de los puntos que equidistan de un punto fijo es incorrecta porque no contiene todas las propiedades necesarias. Falta agregar que todos los puntos, incluyendo en centro, están en un plano. Otro ejemplo de definición incorrecta es la de rectángulo como paralelogramo con un ángulo recto y diagonales no congruentes. Si el paralelogramo tiene un ángulo recto, no es posible que las diagonales no sean congruentes, por lo cual la definición es incorrecta.

El proceso descrito puede conducir a proponer definiciones para otros objetos, en la medida en que el análisis muestre que la caracterización corresponde a un objeto diferente, pero que a este último lo determina en forma precisa. Por ejemplo, si a la definición de cuadrado como cuadrilátero con sus ángulos rectos y sus lados congruentes se le quita la primera propiedad se genera la definición de rombo. Es un proceso que mencionamos previamente, que guarda cierta analogía con la propuesta de de Villers (1994) quien sugiere promover en el aula ejercicios de eliminación de propiedades en definiciones conocidas, para evaluar qué consecuencias se derivan de la definición reformulada e incluso llegar a proponer nuevos objetos.

En la Tabla 1 presentamos algunas propuestas de definición de cuadrado sugeridas por estudiantes universitarios. En la segunda columna se indica si la definición es correcta (menciona todas las propiedades necesarias, lo cual permite separar en dos grupos cualquier colección de objetos: los que son instancias del objeto y los que no) o incorrecta (no incluye todas las propiedades necesarias o menciona una propiedad que no puede tener el objeto). En la tercera columna se presentan no-ejemplos o ejemplos, en los casos en los que la definición es incorrecta o es correcta, respectivamente. En la cuarta columna se precisa cuáles son las falencias de la definición propuesta en términos de las propiedades necesarias y suficientes.

Definición	Correcta/ Incorrecta	No ejemplos/Ejemplos	Falencias
Una figura geométrica cerrada con cuatro lados congruentes.	Incorrecta.		Son necesarias pero no son suficientes.

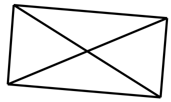
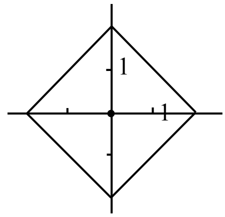
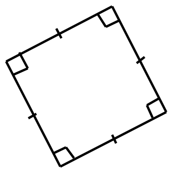
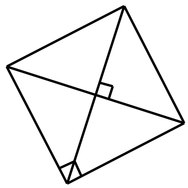
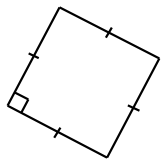
Un polígono que tiene diagonales de igual longitud.	Incorrecta.		Son necesarias, pero no son suficientes.
Un cuadrilátero cuyos vértices están colocados en (x, y) $(x+1, y)$ $(x, y+1)$ y $(x+1, y+1)$.	Incorrecta.		Es suficiente, pero no es necesaria.
Un cuadrilátero regular.	Correcta.		Ninguna.
Un rectángulo con diagonales perpendiculares.	Correcta.		Ninguna.
Un cuadrilátero con todos los lados congruentes y un ángulo de 90°.	Correcta.		Ninguna.

Tabla 1: Propuestas de posibles definiciones de cuadrado

El acercamiento a la construcción de definiciones se puede ampliar para, además de identificar si las definiciones mencionan propiedades necesarias y suficientes, analizar cuáles definiciones son equivalentes. Se trata de determinar si, dadas dos definiciones, el conjunto de ejemplos es el mismo (Winicki-Landman y Leikin, 2000) y de aprovechar el análisis detallado de cada definición para estudiar las implicaciones que tiene asumir una definición u otra en los procesos de justificación. Por ejemplo, las dos definiciones siguientes de ángulo recto son equivalentes porque determinan el mismo conjunto de ejemplos:

> **Definición de Ángulo Recto (1)**: Un ángulo recto es el que conforma con otro un par lineal[2] y es congruente a aquel.
>
> **Definición de Ángulo Recto (2)**: Un ángulo recto es un ángulo cuya medida es 90°.

También puede ser interesante estudiar si las definiciones adoptadas conducen a conformar conjuntos disyuntos de objetos o a que unos conjuntos de objetos sean subconjuntos de otros, según las relaciones de inclusión de las propiedades. De Villiers califica el primer tipo de definiciones como particionales y al segundo tipo como jerárquicas (de Villiers, 1994). Por ejemplo, si se define trapecio como el cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos paralelos, esta definición no incluye a los paralelogramos y se generan dos clases de objetos disyuntos (definición particional); pero si se define trapecio como el cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos, los paralelogramos son un tipo especial de trapecios (definición jerárquica).

Es importante identificar cuál es la funcionalidad de las definiciones jerárquicas. Por ejemplo, además de identificar que un cuadrado puede ser un rombo, según como se defina rombo, o que un triángulo equilátero puede ser isósceles, según como se defina triángulo equilátero, es importante entender que ese tipo de definiciones es útil cuando la información que se obtiene para un objeto se puede extender a otro. Por ejemplo, si por alguna vía se llega a identificar que las diagonales de un rombo son perpendiculares se puede usar tal información para garantizar que las diagonales del cuadrado también lo son, siempre y cuando se haya definido el rombo de tal suerte que incluya al cuadrado. Es decir, la posibilidad de establecer definiciones jerárquicas simplifica la conformación de sistemas teóricos que contengan el conjunto de propiedades que caracterizan los objetos definidos. En todo caso, el hecho de poder establecer una jerarquía en la clasificación de los objetos a través de las

2 **Definición Ángulos Par Lineal**: Si los rayos *AB* y *AD* son opuestos y *C* es un punto que no pertenece a la recta *AB*, entonces los ángulos *BAC* y *CAD* son par lineal.

definiciones muestra que estas son arbitrarias y que es el profesor o autor del texto quien aprovecha o no esa característica de una definición.

A medida que se avanza en el nivel de escolaridad, es importante ir perfeccionando las definiciones que se adoptan, pues ellas son útiles no solo para determinar un objeto sino porque ellas pueden ser eslabones de cadenas deductivas y, así, cumplirían un papel importante en la justificación matemática. Algunas características que conviene ir introduciendo paulatinamente en la escuela se listan a continuación. Una definición debería ser:

- Precisa: no menciona información innecesaria.
- Económica: menciona el conjunto mínimo de propiedades necesarias, no redundantes, que determinan el objeto.
- Concisa: encapsula varias propiedades en una sola aprovechando otras definiciones.
- Contingente: no necesaria, es una de varias definiciones posibles.
- Clara: incluye solo términos conocidos que refieren a otros objetos previamente definidos.

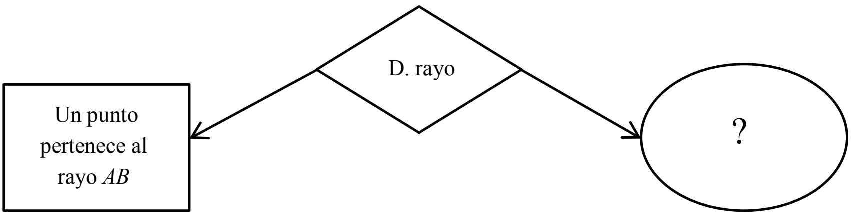
Uso de definiciones para obtener información

Además de aprender a construir definiciones como un aspecto de la conceptualización de objetos es importante aprender a usar definiciones conocidas para obtener información. Este aprendizaje es indispensable en situaciones específicas que requieren obtener información de carácter espacial o métrico, en las que puede estar incluido un objeto cuya definición se conoce.

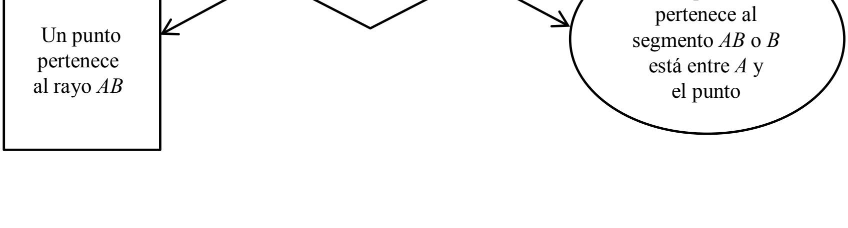
Para favorecer la obtención de información, sugerimos usar un tipo de diagrama que Perry, Samper, Camargo y Molina (2013) denominan diagrama-definición. Está constituido por tres marcadores de posición. Los marcadores de posición tienen diferentes formas para indicar funciones diferentes de las proposiciones que los pueden sustituir. Uno tiene forma de rombo y se destina para el nombre del objeto cuya definición se está considerando; sirve de puente entre las proposiciones que remplazan a otros dos marcadores de posición, uno de forma rectangular y otro con forma de óvalo. La elección de la forma de rombo lleva a evocar con relativa facilidad dos flechas opuestas que apuntan a los dos conjuntos de información conectados por la definición. Pretende poner de manifiesto la naturaleza bicondicional de una definición. Su colocación en un nivel diferente al del óvalo y el rectángulo indica que ha de recurrirse a la definición para poder obtener información. Los otros dos marcadores de posición se distinguen en su forma con el propósito de indicar que la información que cada uno de ellos refiere, aunque equivalente, juega una función diferente: en uno, se escriben las propiedades que se conocen o están dadas en la situación; en el otro, se consigna la información que se obtiene, gracias a poner en juego la definición. Veamos algunos ejemplos del uso del diagrama-definición.

Ejemplo 1. Sabemos que un punto pertenece al rayo *AB*, ¿qué información se puede concluir sobre el punto?

De acuerdo con la descripción del diagrama-definición se coloca en el rombo el nombre del objeto cuya definición se va a usar, rayo, precedido de una "D." con la que se pretende indicar que se trata de la "definición de". En el rectángulo, se escribe la información proporcionada.

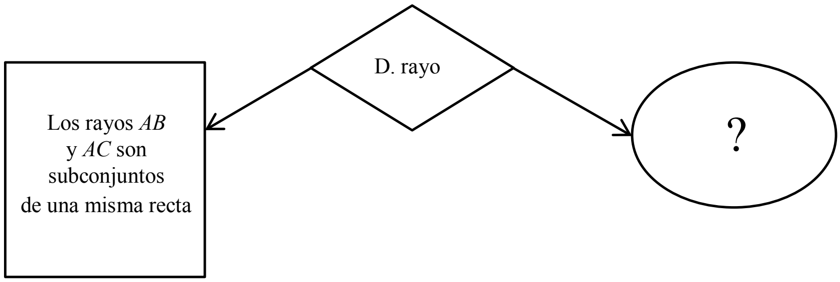


Al revisar la definición de rayo (i. e., Dada la recta *AB*, el rayo *AB* es la unión del segmento *AB* y todos los puntos *P* para los cuales *B* está entre *A* y *P*) podemos completar la información en el óvalo escribiendo información nueva sobre el punto: pertenece al segmento *AB* o *B* está entre *A* y el punto. Si se quiere, se puede asignar un nombre al punto, pero debe ser claro que en este caso la letra representa una variable, pues no no refiere a un punto específico. Es el contexto de la situación el que indica cuándo una letra denota un único punto y cuándo no. El diagrama se completaría así:

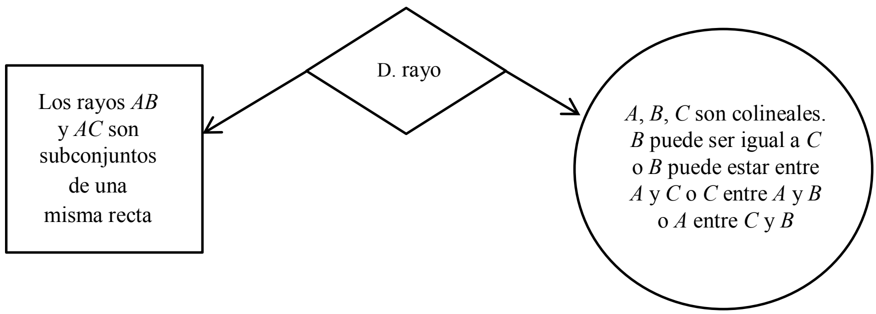


El diagrama se lee así: "como un punto pertenece al rayo *AB*, por la definición de rayo, el punto puede pertenecer al segmento *AB* o *B* puede estar entre *A* y el punto". Así, es la definición de rayo la que permite obtener la información.

Ejemplo 2. Determinar si la respuesta al siguiente interrogante es Sí, No, No se sabe y justificar la respuesta: Los rayos *AB* y *AC* son subconjuntos de una misma recta, ¿el punto *A* es la intersección de los dos rayos?



Con la información que se tiene y la definición de rayo podemos obtener la siguiente información: *A*, *B* y *C* son colineales; *B* puede ser igual a *C; B* puede estar entre *A* y *C* o *C* puede estar entre *A* y *B* o *A* puede estar entre *C* y *B*. Solo si *A* estuviera entre *C* y *B*, el punto *A* sería la intersección de los rayos. Por lo tanto la respuesta es: No se sabe.



Uso de definiciones en la producción de demostraciones

Uno de los aspectos centrales de la conceptualización de los objetos geométricos consiste en aprender a usar las definiciones en la producción de demostraciones. Tal uso y el de las definiciones en la resolución de problemas de geometría destacan la importancia de las definiciones en la actividad matemática.

En el uso de las definiciones en un proceso deductivo se aprovecha la bicondicionalidad de la relación entre el objeto nombrado que se define y las propiedades necesarias y suficientes que lo determinan. Dependiendo de que se tenga el término o las propiedades, las definiciones se usan en dos sentidos. En un sentido, se parte de un conjunto de propiedades, algunas dadas desde el inicio y otras que se van obteniendo en el curso de la demostración, y si se advierte que el objeto puede ser útil en el proceso que se está llevando a cabo, y su existencia se ha establecido previamente, se declara que se tiene tal objeto para valerse de él posteriormente. En el otro sentido, se parte de establecer como dado el objeto, y se hacen deducciones a partir de las propiedades que menciona la definición, poniendo en juego dichas propiedades. En las dos secciones que siguen explicamos y ejemplificamos ambos usos.

Tratamiento de las definiciones en demostraciones: De las propiedades al objeto

En el curso de la demostración de algunos teoremas, especialmente los de existencia, se van produciendo proposiciones válidas con respecto a un objeto específico en las que se establecen las propiedades que lo determinan como un cierto objeto, con lo cual es posible concluir que es un ejemplo de tal objeto. En ese caso, se procede de las propiedades al objeto definido.

Hay procesos demostrativos en los que no todas las propiedades necesarias de un objeto surgen en un flujo deductivo directo, pero se percibe la importancia de declarar que un objeto específico es ejemplo del objeto en cuestión; en esos casos, el curso de la demostración se ajusta para que en algunos pasos se declaren las propiedades faltantes y pueda usarse la definición de interés.

A continuación vamos a presentar un ejemplo del tratamiento que estamos describiendo. Corresponde a un teorema que se trabaja en el curso de Geometría Plana, en el que se demuestra que si se tienen tres puntos no colineales *A, B,* y *C,* es posible construir dos segmentos *AB* y *CD* que se bisecan.
Ejemplo. Como parte de la solución al problema, los estudiantes deben demostrar que el segmento *AB* biseca al segmento *CD* propuesto.

> **Definición de Bisecar**: Un objeto geométrico biseca a un segmento si es su punto medio o lo contiene.

En el desarrollo de la demostración, se tiene que justificar deductivamente que el punto de intersección, *M*, de los segmentos está entre *C* y *D*, y que la distancia de *C* a *M* es igual a la distancia de *M* a *D*, siendo *M* el punto medio del segmento *AB*. Una vez demostradas esas dos propiedades, por la definición de bisecar se puede concluir que el segmento *AB* biseca al segmento *CD.*

La definición de bisecar hace referencia a la definición de punto medio, la cual a su vez requiere haber asegurado que *M* equidista de *C* y *D* y que *M* está entre *C* y *D,* es decir que los tres puntos son colineales. Pero como se ha afirmado que es punto de intersección, ello garantiza la colinealidad.

Tratamiento de las definiciones en demostraciones: Del objeto a las propiedades

Otra situación se presenta cuando en las condiciones dadas inicialmente (hipótesis del enunciado que se va a demostrar) o en el curso de la demostración se declara que se tiene un objeto ("sea …"), cuya existencia se ha justificado previamente, y en la demostración se aprovecha esta información para elaborar nuevos pasos. Hemos denominado a este proceso "hacer operativa" la definición, en consonancia con Bills y Tall (1998, citado en Selden, 2012), quienes señalan que un estudiante hace operativa una definición si es capaz de usarla creativa y significativamente en un argumento formal.

A manera de ejemplo ilustrativo, vamos a explicar el proceso de hacer operativa la definición de rayo en el curso de la demostración del siguiente Enunciado (Figura 3):

> Dados tres puntos no colineales *A, B* y *C*, si *D* pertenece al rayo *CM*, *D* es diferente de *C, M* punto medio del segmento *AB*, y la distancia de *C* a *M* es igual a la distancia de *M* a *D*, entonces el segmento *AB* y el segmento *CD* se bisecan .

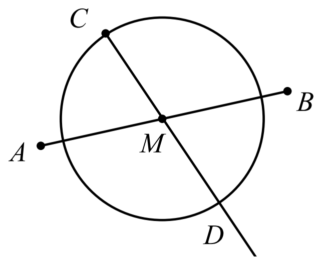


Figura 3. Representación del Enunciado

La demostración requiere justificar teóricamente que el punto *M* también es punto medio del segmento *CD* para así poder concluir que los segmentos *AB* y *CD* se bisecan. Ello exige demostrar que: i) *M* está entre *C* y *D* y ii) que la distancia de *C* a *M* es igual a la distancia de *M* a *D*. La segunda condición está dada. Falta solo demostrar la interestancia (*M* está entre *C* y *D*). Como en la hipótesis del Enunciado se menciona que *D* pertenece a un rayo, hay que valerse de la definición de rayo para poder asegurar que se tiene la mencionada interestancia. Para ello, se requiere hacer operativa la definición de rayo.

Hacer operativa la definición de rayo implica tres instancias de intervención sobre la definición:

1. A partir de la definición de rayo (*CM* es un rayo si y solo si es la unión del segmento *CM* con el conjunto de los puntos *X* para los que *M* está entre *C* y *X*), la pregunta acerca de la pertenencia de un punto a un rayo conduce a reconocer que la definición está dada en términos de la unión de dos conjuntos disyuntos. Es decir, el punto *D* pertenece al rayo *CM* si y solo si *D* pertenece al conjunto unión del segmento *CM* y los puntos *X* tales que *M* está entre *C* y *X*.
2. En términos de disyunción de proposiciones, que surge de la definición de unión de conjuntos, la pertenencia de un punto a un rayo puede expresarse así: *D* pertenece al conjunto unión del segmento *CM* y los puntos *X* tales que *M* está entre *C* y *X* si y solo si *D* pertenece al segmento *CM* o *D* pertenece al conjunto de puntos *X* tales que *M* está entre *C* y *X*.
3. Con la identificación de la pertenencia de *D* a uno de los conjuntos surgen dos posibilidades de interestancia:
   (a) *D* pertenece al segmento *CM* si y solo si *D* pertenece a la unión del conjunto de puntos *Y* que están entre *C* y *M* con el conjunto de puntos *C* y *M*. Esto, a su vez se puede expresar en términos de disyunción de proposiciones, dando lugar a: *D* pertenece al conjunto de puntos *Y* que están entre *C* y *M* o *D* pertenece al conjunto de puntos *C* y *M*.
   (b) Al mencionar que *D* puede pertenecer al conjunto de puntos *X* tales que *M* está entre *C* y *X*, la interestancia está explícita.

Recapitulando, en términos del análisis anterior se tiene: (*M* está entre *C* y *D*) o (*D* está entre *C* y *M*) o (*D* puede ser *C*) o (*D* puede ser *M*). Este recorrido deja ver un aspecto de la conceptualización de rayo, derivada de su definición, y el posible uso de esta como garantía en un paso de demostración. En síntesis, el uso de la definición lleva a identificar las dos posibles interestancias que existen entre un punto cualquiera del rayo y los dos puntos que lo determinan.

El proceso de hacer operativa una definición no es sencillo para los estudiantes, aun si son de nivel universitario. Con frecuencia se tiende a considerar que basta mencionar que el punto *D* está en el rayo *CM* para asegurar la posibilidad de dos interestancias. Por ejemplo, en un experimento de enseñanza que se llevó a cabo con estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas (Camargo, Perry, Samper, Saénz-Ludlow, en prensa), el profesor preguntó a los estudiantes "¿Qué podemos decir si *D* pertenece al rayo *CM?*". Un estudiante respondió: "Que.. ¿hay interestancia?... *C, M, D,* o *C, D, M*". Posiblemente identifica en la representación gráfica del rayo *CM,* la posibilidad de ubicar al punto *D* en dos posibles lugares con respecto a *C* y a *M* y considera que la definición de rayo puede ser una herramienta teórica para concluir directamente las posibles interestancias. Esta respuesta conduce al profesor a guiar a los estudiantes para que hagan operativa la definición, paso a paso, tal como se explicó previamente. Con la intención de guiar el acercamiento de los estudiantes a los objetos matemáticos presentes en la interacción comunicativa, el profesor aprovecha la oportunidad que brinda la demostración del Enunciado para contribuir a la evolución de la conceptualización de rayo, haciendo operativa su definición.

En esta última sección enfocamos uno de los aspectos centrales relativos a las definiciones y su papel en la conceptualización, en el marco de la actividad demostrativa. Se trata del uso de las definiciones en la producción de demostraciones. Desde nuestro punto de vista, este uso promueve la conceptualización de los objetos. Esto se logra al ir más allá de su aproximación como objetos figurales que deben ser diferenciados de otros, para aprovechar la riqueza que brinda la proposición bicondicional que los define; así se garantizan propiedades útiles en pasos de demostración. Este acercamiento es fundamental en el nivel universitario si el trabajo se lleva a cabo en el marco de sistemas teóricos donde las definiciones tienen un papel central en la construcción de cadenas deductivas.

Debido a la inherente complejidad del proceso de definir, parece irrazonable esperar que los estudiantes lleguen por sus propios medios a las definiciones formales, a menos que ellos sean guiados didácticamente a través de ejemplos del proceso de definir, el cual puedan ellos después usar como modelo para hacer sus propios intentos. Más aun, la construcción de definiciones es una actividad matemática de no menor importancia que otros procesos como la resolución de problemas, la formulación de conjeturas, la generalización, la demostración, etc. Es inexplicable que haya sido ignorado en muchas enseñanzas de las matemáticas.

Referencias

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral* (Tesis doctoral). Universitat Autónoma de Barcelona, Bellaterra, Barcelona.

Camargo, L., Perry, P., Samper, C. y Sáenz-Ludlow, A. (en prensa). Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de rayo al operacionalizar su definición. *Enseñanza de las Ciencias.*

Chassapis, D (1999). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *37*(3), 275-293.

de Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

de Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), Proceedings of the 22th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp. 248-255). Stellenbosch, Sudáfrica: University of Stellenbosch:.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holanda: Reidel.

Kublikowski, R. (2009). Definition within the structure of argumentation. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, *16*(29) 229-244.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid, España: Alianza Universidad.

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(3), 259-282.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). El enunciado condicional: actuaciones problemáticas y diagramas para abordarlas. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 35-56). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study* (pp. 391-420). Dordrecht, Holanda: Springer.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. *Proceedings of the 4th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). Berkeley, EUA: PME.

Winicki-Landman, G. y Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: Part 1. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 17-21.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). *Exemplifying definitions: A case of a square*. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 131-148.