Enunciado de un teorema: ¿único componente del significado del teorema?

Óscar Molina

Andrés: Por fin entendí el Teorema Localización de Puntos.

María: Uy, ¿cómo así?

Andrés: Sí. Leí y leí el enunciado y ya lo entendí.

María: Mmm. Entonces ven me ayudas a hacer este ejercicio. ¿Recuerdas que el profesor dijo que tocaba usar ese Teorema?

[Varios minutos después]

María: ¿No dizque entendías el Teorema? ¿Cómo resolvemos el problema…?

¿Reconoce en sus experiencias escolares, como profesor o estudiante, un diálogo similar al anterior? Si su respuesta es afirmativa, cabe preguntarse: si entendemos el enunciado de un teorema, ¿por qué no podemos emplear el teorema en la resolución de un ejercicio, o en la demostración de otro teorema, por ejemplo?, ¿será suficiente entender el enunciado de un teorema para comprender el teorema o tener un significado más o menos amplio de él? De otro modo, cuando en su rol, un profesor universitario le dice a sus estudiantes: "¿Entienden el teorema?", ¿tendrá claridad sobre lo que pretende que los estudiantes conozcan del teorema mismo y tendrán claridad los estudiantes sobre lo que deben saber del teorema para que su profesor quede satisfecho?

La comunidad de educadores en matemáticas ha puesto de presente algunos aspectos que se deben considerar, en momentos oportunos de la trayectoria escolar, a la hora de introducir a los estudiantes en la práctica de demostrar enunciados matemáticos. Concretamente, sugieren que tal práctica se favorece si los estudiantes entienden: i) aspectos de la lógica (lenguaje y esquemas de razonamiento); ii) el enunciado del teorema que se va a demostrar, en lo concerniente a la identificación de su hipótesis y su tesis; y iii) otros elementos del sistema teórico (postulados, definiciones y otros teoremas) para hacerlos operables en la demostración, etc., (Selden, 2012). No obstante, no es usual que en la literatura especializada se presente una descripción más o menos completa de lo que significa "entender el enunciado de un teorema" o "entender un teorema". Este artículo se concentra en hacer una tal descripción a través de los elementos que, desde nuestro punto de vista, integran el significado de la expresión *tener un significado amplio de un teorema*[1]: (i) estructura y contenido del enunciado, (ii) demostración, (iii) relación con otros elementos teóricos (comparación de enunciados de postulados u otros teoremas y sus respectivas demostraciones) y (iv) uso experto del teorema en diversos contextos. Ejemplificamos la descripción con el Teorema Localización de Puntos (TLP).

El reconocimiento y caracterización de estos elementos es consecuencia de los resultados obtenidos en el proyecto de investigación *Conjeturas y organización del contenido matemático en clase*, específicamente en lo que tiene que ver con el análisis realizado para identificar los significados que los estudiantes tienen del TLP cuando uno de ellos lo emplea como garantía en el marco de la justificación de un procedimiento donde su uso **no** es pertinente. Este análisis nos permitió precisar aspectos del Teorema que los estudiantes o el profesor intentan poner en juego en interacciones cuyo objetivo es precisar por qué el uso de tal Teorema no es adecuado en la situación.

1 Por *teorema* entendemos el sistema ternario conformado por: *enunciado*, su *demostración* y el *sistema teórico* que la soporta (Mariotti, 1997).

Elementos que integran un significado amplio de *teorema*

En las siguientes secciones, describimos e ilustramos los elementos que integran un significado amplio de teorema. En primera instancia, precisamos los rasgos característicos de los elementos y luego las ejemplificamos a la luz del Teorema Localización de Puntos como protagonista; no obstante, en ocasiones usamos otros teoremas para ejemplificar de mejor manera la descripción hecha.

Estructura del enunciado de un teorema y su contenido geométrico

Un primer elemento del significado de un teorema está conformado por la estructura lógica de su enunciado y el contenido geométrico expuesto en el mismo. La estructura lógica del enunciado refiere a la hipótesis y la tesis de la proposición condicional que lo conforma. El contenido geométrico del teorema refiere tanto a los objetos geométricos involucrados en el enunciado y las propiedades de interés, como la relación de dependencia que liga a dichos objetos y propiedades.

Para el caso del TLP, cuyo enunciado es:

> Dados un rayo *CT* y un número positivo *z*, existe un único punto *X* tal que *X* pertenece al rayo *CT* y la distancia de *C* a *X* es *z*,

el texto subrayado corresponde a la hipótesis y el no subrayado, a la tesis. La hipótesis menciona un *rayo* cualquiera (sin propiedad especial alguna) y un *número positivo* cualquiera. La tesis afirma la existencia de un *punto X* en el rayo, cuya *distancia* al extremo del rayo dado es precisamente el número dado. Parafraseando el enunciado, la dependencia entre hipótesis y tesis se describe de la siguiente manera: siempre que se tenga un número positivo y un rayo, es posible encontrar un punto en el rayo tal que la distancia al extremo del rayo sea el número dado. Los objetos involucrados en el teorema, destacados en letra cursiva, son: un rayo, un número positivo, un punto y una distancia entre puntos; y el teorema garantiza la existencia de un punto con dos rasgos (el objeto al que pertenece y su distancia a un punto específico). Esto último hace que el TLP se constituya en un teorema de existencia, si bien no de un objeto geométrico con un nombre especial (es decir un objeto que previamente se haya definido, como es el caso del punto medio de un segmento), sí de un objeto con propiedades específicas (un punto en un rayo que dista de su extremo un número dado). Con la descripción hecha, es posible concluir que el TLP es útil en contextos de distancia entre puntos (necesaria para determinar la medida de longitud de segmentos); de manera general, se usa en casos en los que sea necesario construir un segmento congruente a uno dado mediante la localización de un punto que será uno de sus extremos.

Como se verá en las próximas secciones, identificar la estructura del enunciado de un teorema y precisar su contenido geométrico son acciones necesarias para promover los demás elementos que integran el significado del teorema, en particular, para comparar el teorema con otros.

Demostración del teorema

Como se dijo antes, uno de los elementos constitutivos de un teorema es su demostración. Al involucrarse en el proceso de construir la demostración de un teorema, es importante determinar su estructura; esto es, distinguir los pasos clave de la demostración y, con ello, estudiar las consecuencias que puede tener, durante su desarrollo, una decisión respecto a asuntos teóricos. En tal sentido, vale la pena mencionar que el proceso no discurre meramente generando paso a paso los argumentos que se encadenan y que juntos componen la demostración; es imprescindible, para no quedarse dando palos de ciego, ir analizando el efecto que podrían tener, a mediano plazo, algunas decisiones que se toman en aquellos pasos en los que se tienen opciones para luego escoger el camino correcto.

En la tabla de la subsección titulada “Comparación y analogía entre demostraciones”, se muestra la estructura de la demostración del TLP. Específicamente, se exponen aquellos aspectos clave de la demostración (que redundan en los pasos -argumentos- clave de la misma) y el propósito de cada uno de los aspectos destacados. Es, precisamente, en la descripción de estos propósitos donde se establece el resultado del análisis del efecto que tendría la toma de algunas decisiones: por ejemplo, en el aspecto asociado a “Asignar coordenadas al origen del rayo (C) y al punto que lo determina (T)", si convenientemente asignamos como coordenadas de C y T, a 0 y a $t > 0$, respectivamente, cuando llegue el momento de usarlas, la demostración se facilita en los siguientes términos: i) la coordenada del punto X sería el mismo número z y, con ello, la distancia entre X y C sería z (una de las propiedades que se debe demostrar); y ii) los casos de desigualdades entre las coordenadas de los puntos C, T y Z son solo dos ($c < t \leq z$ o $c < z \leq t$) y no cuatro como se muestra en la tabla.

Identificar los aspectos resaltados no es asunto fácil. La experticia para hacerlo depende de haber realizado demostraciones que tengan una estructura análoga y de conocer muy bien el sistema teórico con el que se cuenta, para poder emplear con pertinencia sus elementos (en otras palabras, usar de manera experta otros teoremas, definiciones o postulados del sistema). En la siguiente sección, damos luces al respecto de estos asuntos.

Relación de teoremas: comparación entre sus respectivos enunciados o demostraciones

Otro elemento del significado de un teorema es su relación con otros elementos de una teoría. Es usual que esta relación se plantee en términos de una consecuencia lógica dentro del sistema teórico (e. g., un teorema implica a otro) o en términos de relaciones del enunciado con otro según su estructura (e. g., el enunciado de un teorema es el recíproco de otro). En este artículo, no queremos hacer una descripción de una relación de este tipo; más bien, pretendemos centrarnos en una relación de teoremas del mismo sistema caracterizada por la comparación entre sus respectivos enunciados o demostraciones. Presentamos lo que caracteriza a cada una de tales comparaciones y la utilidad de hacerlas en términos de enriquecer el significado de un teorema.

Comparación de enunciados

Comparar los enunciados de dos proposiciones del sistema teórico requiere hacer uso del contenido geométrico de cada cual, aspecto imprescindible para develar y caracterizar las situaciones en las cuales el teorema se puede usar de manera pertinente. Para ejemplificar esto, presentamos la comparación de los enunciados del TLP y el Postulado Rayos - Número (PRYN). Tal comparación se suele hacer en el curso Geometría Plana del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, cuando se introduce el PRYN en el sistema teórico de la clase; en ese momento se considera prudente hacer dicha comparación, con el propósito de que los estudiantes hagan una analogía entre uno y otro, identifiquen los objetos geométricos involucrados en cada cual y precisen situaciones generales en las cuales se pueden usar.

A continuación exponemos el enunciado del PRYN. El texto subrayado indica la hipótesis del Postulado; el texto no subrayado, la tesis del mismo:

> <u>Dados una recta *AB* y un punto *C* que no pertenece a la recta, y el conjunto de los números reales entre 0 y 180</u>. Se puede establecer una correspondencia de <u>todos los rayos de extremo *A* y un punto en el semiplano determinado por la recta *AB* en el que está *C*</u> con el mencionado conjunto de números tal que:
>
> i) A cada rayo le corresponde un único número.
> ii) A cada número le corresponde un único rayo.
> iii) Al rayo *AB* le corresponde 0.
> iv) Al rayo opuesto al rayo *AB* le corresponde 180.

Iniciemos la comparación analizando las respectivas hipótesis. Aunque ambas aluden al mismo objeto geométrico (rayo) y a números reales, tienen condiciones diferentes. En el TLP, el objeto geométrico es un único rayo cualquiera, mientras que en el PRYN se alude a todos los rayos contenidos en un mismo semiplano determinado por una recta, y de extremo en dicha recta (i. e., tienen una condición). En cuanto a las condiciones del número, algo similar ocurre: en el TLP se menciona un solo número real con la única condición de ser positivo, mientras que el PRYN alude a todos los números reales positivos menores que 180. En resumen, el PRYN es más exigente que el TLP en lo que tiene que ver con las condiciones de los objetos involucrados en la hipótesis. Cabe anotar que en el enunciado del PRYN, detrás de la caracterización de la correspondencia entre rayos y números se esconde la generación de ángulos y la determinación de su medida.

Ahora, con respecto a las condiciones necesarias que plantean las respectivas tesis, precisamos lo siguiente: el enunciado del TLP afirma la posibilidad de determinar un único punto (e. g., *X*) en un objeto muy bien determinado (un rayo –e. g., rayo *CT*) con una condición de distancia (e. g., *z*) dada a un punto previamente establecido (el extremo del rayo). Por su lado, el PRYN afirma también la posibilidad de determinar un objeto; sin embargo, la determinación mencionada es más compleja que en el caso del TLP, por cuanto precisa las relaciones que pueden presentarse entre los números y los rayos a los que hace referencia la hipótesis. Así, plantea que a cada rayo (con las condiciones específicas) se le puede asignar un único número entre 0 y 180, que a cada uno de tales números se le puede asignar un único rayo de los mencionados, y que a los rayos que conforman la recta se les asigna 0 y 180, según el caso. En síntesis, precisando un rayo (e. g., rayo *AD*) con puntos en el semiplano mencionado en el antecedente (e. g. el determinado por recta *AB*), se puede garantizar la existencia de un único número entre 0 y 180 que le corresponde (e. g., *s*). En el otro caso, especificando un número entre 0 y 180 (e. g., *s*), se puede garantizar la existencia de un único rayo (e. g., rayo *AD*) con puntos en el semiplano mencionado en el antecedente (el determinado por recta *AB*) al cual le corresponde ese número especificado (*s*)[2]. En cualquiera de los dos casos, ese número *s* termina siendo la medida del ángulo *DAB* (al usar la definición de medida de un ángulo[3]).

La anterior descripción de las tesis permite concluir que el TLP, como se dijo antes, es útil en casos en los que se requiera construir un segmento congruente a uno dado mediante la localización de un punto que será uno de sus extremos. Por su parte, el PRYN es útil en contextos donde interviene la medida de amplitud de ángulos; de manera general, en situaciones en las que se requiere construir un ángulo congruente a uno dado mediante la determinación

2 Nótese que el PRYN no declara la existencia de los números reales entre 0 y 180, o de los rayos en un semiplano específico. Estos objetos ya existen *a priori*. Lo que se quiere decir es que existe un número en el conjunto (0, 180) que le corresponde a un rayo con las condiciones dichas en el enunciado del Postulado, y que existe un rayo con tales condiciones que le corresponde a un número dado del conjunto (0, 180).

3 La **medida de un ángulo** se define como el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de los rayos que lo conforman (las coordenadas son los números que les corresponden según el PRYN).

de un rayo que será uno de sus lados. En esencia, más allá de las diferencias específicas entre ambos, los hechos geométricos tienen similitudes: ambos proveen la existencia de sendos objetos (un punto y un rayo, respectivamente) que finalmente proporcionan objetos necesarios para determinar una relación de congruencia, entre segmentos para el caso del TLP y entre ángulos para el caso del PRYN.

Hecha la anterior comparación, es usual que en clase se formule el Teorema Construcción de Ángulos (TCA)[4], cuya demostración se fundamenta principalmente en el PRYN. El enunciado de tal Teorema es el siguiente:

> Sean un rayo *AB* en un plano α y un número real *r* tal que $0 < r < 180$. Entonces existe un único rayo *AD* tal que *D* está en alguno de los semiplanos determinados por la recta *AB* en α y la medida del ángulo *DAB* es *r*.

Como el lector puede darse cuenta, el enunciado del TCA es mucho más parecido al del TLP que el mismo PRYN. Igual que como sucede con tal Postulado, los objetos geométricos involucrados en las tesis de los Teoremas son diferentes, aspecto que determina los contextos en los cuales se pueden utilizar. El análisis comparativo de estos enunciados es similar al presentado antes en relación con el PRYN, razón por la cual no se expone aquí. No obstante, hacemos referencia al TCA pues será importante para lo que sigue.

Comparación y analogía entre demostraciones

Se enseñó ya que comparar los enunciados permite decantar similitudes o diferencias entre los mismos. Cuando dos enunciados de teoremas se parecen (aun cuando involucran objetos diferentes y se usan en contextos distintos) es sensato pensar que su demostración también es similar: en este punto, adquiere otro sentido hacer una comparación entre enunciados. Cuando aludimos a demostraciones parecidas o análogas, nos referimos a que las mismas

4 Sean el rayo *AB* en un plano α y un número real *r* tal que $0 < r < 180$. Entonces existe un único rayo *AD* tal que *D* está en alguno de los semiplanos determinados por la recta *AB* en α y la medida del ángulo *DAB* es *r*.

tienen una misma estructura más allá de las diferencias inherentes a los objetos geométricos involucrados. Para ejemplificar lo dicho presentamos una comparación, a manera de paralelo, entre las demostraciones de tres teoremas de existencia (Teorema Existencia Punto Medio (TPM)[5], TCA y TLP) protagonistas en el curso en cuestión.

En los enunciados de los tres Teoremas, la respectiva tesis alude a la existencia de un objeto geométrico; en dos de ellos (TPM y TLP), a la existencia de un punto que cumple dos propiedades, interestancia[6] con unos puntos dados y distancia a uno o más puntos dados; en el otro enunciado (TCA), a un rayo con una posición especial que conforma un ángulo con otro dado, tal ángulo con una medida específica. La siguiente tabla resalta diferencias y similitudes en los detalles de las respectivas demostraciones, según aspectos fundamentales de estas.

<table>
<tr><th colspan="2">Teorema
Aspecto</th><th>TPM</th><th>TLP</th><th>TCA</th></tr>
<tr><td colspan="2">Conjunto al que debe pertenecer el punto que se busca:</td><td>Segmento AB.</td><td>Rayo CT.</td><td>Uno de los semiplanos (H) determinados por la recta AB en α.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Qué se usa y su propósito</td><td>PRN i)[7]</td><td>Asignar coordenadas a y b a los extremos A y B del segmento, respectivamente.</td><td>Asignar coordenadas al origen del rayo (C) y al punto que lo determina (T).</td><td></td></tr>
<tr><td>PRYN iii)</td><td></td><td></td><td>Asignar coordenada 0 al rayo AB.</td></tr>
</table>

5 **Teorema del Punto Medio:** Dado el segmento *AB*, entonces existe un único punto medio, *M*, del segmento *AB*.

6 **Definición de Interestancia:** El punto *B* está entre los puntos *A* y *C*, si: i) *A*, *B* y *C* son colineales, y ii) la suma de las distancias de *A* a *B* y de *B* a *C* es igual a la distancia de *A* a *C*.

7 **Postulado Puntos de Recta - Números Reales (PRN):** Dada una recta, se puede establecer una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales tales que: i) a cada punto de la recta le corresponde exactamente un número real, ii) a cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta. El número que le corresponde al punto *A* se denomina coordenada de *A*, y se denota con c(*A*).

<table>
<tr><th colspan="2">Teorema / Aspecto</th><th>TPM</th><th>TLP</th><th>TCA</th></tr>
<tr><td colspan="2">Propósito de la determinación de un número real relacionado con las coordenadas escogidas:</td><td>Satisfacer la equidistancia del punto que se busca a los extremos del segmento.</td><td>Satisfacer que la distancia del origen del rayo al punto buscado sea z.</td><td>Satisfacer que la medida del ángulo conformado con el rayo buscado y el dado sea r.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Condiciones, en términos de las coordenadas asignadas, del número que permite determinar el objeto buscado:</td><td>Es el promedio de las coordenadas asignadas a los extremos.</td><td>Es un número x que depende de la relación de orden entre c(C) y c(T) y del hecho de que la distancia[8] del punto buscado al extremo del rayo sea z. Específicamente, el número x es la suma o la diferencia de c(C) y z, según si c(T) es mayor o menor que c(C).</td><td>Es un número entre 0 y 180 tal que el valor absoluto de la diferencia entre la coordenadas que se asignen a los rayos que conforman al ángulo sea r. Específicamente, como la coordenada del rayo AB es 0, el número buscado es el mismo r.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Qué se usa y cómo:</td><td>PRN ii) tal que:</td><td>M sea el punto que se le asigna al número obtenido anteriormente.</td><td>X sea el punto que se asigna al número obtenido anteriormente.</td><td></td></tr>
<tr><td>PRYN ii) tal que:</td><td></td><td></td><td>Rayo AD sea el rayo en H que se asigna al número obtenido anteriormente.</td></tr>
</table>

8 La **distancia entre dos puntos** se define como el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de los puntos (las coordenadas son los números que les corresponden según el Postulado Puntos de Recta - Números Reales).

Aspecto		TPM	TLP	TCA
Qué se usa, cómo y propósito:	Teorema Orden - Interestancia[9]	Si el promedio de a y b es mayor que a y menor que b, o, mayor que b y menor que a, entonces M está entre A y B.	Si [$c < t \leq c + z$ o $c < c + z \leq t$] o [$t \leq c - z < c$ o $c - z \leq t < c$] entonces (T está entre C y X) o (X está entre C y T) o (T es igual a X).	
		Inferir interestancias que posibiliten deducir que el punto pertenece al conjunto requerido usando el orden de las coordenadas.		
	Definición del objeto geométrico (rayo[10]) al cual debe pertenecer el punto buscado:	M pertenece al segmento AB.	X pertenece al rayo CT.	
Determinar distancia o medida según el caso	Determinar la distancia deseada que debe tener el punto buscado con los puntos dados.	En cualquier caso, distancia de A a M es igual a distancia de B a M.	En cualquier caso, distancia de C a T es z.	
	Determinar la medida deseada del ángulo que se conforma.			Medida de ángulo DAB es r.
Finalizar la demostración según la definición del objeto buscado si aplica; si no, hacer solo la respectiva conjunción:		Se usa la definición de punto medio para inferir que M es punto medio del segmento AB.	Se hace la conjunción de los dos últimos pasos: X pertenece al rayo CT y la distancia de C a T es z.	Se hace la conjunción de los dos últimos pasos: rayo AD contenido en H y medida del ángulo DAB es r.

La tabla anterior ilustra la gran similitud que tienen las demostraciones desde un punto de vista estructural, hecho que se evidencia en la primera columna. Esta presenta los aspectos clave de las demostraciones en términos

9 **Teorema Orden - Interestancia:** Dados tres puntos A, B y C de la recta m, si $c(A) < c(B) < c(C)$ o $c(A) > c(B) > c(C)$, entonces B está entre A y C.

10 **Definición de Rayo:** Dados A y B dos puntos de una recta, el rayo AB es la unión del segmento AB con el conjunto de puntos X de la recta para los cuales B está entre A y X.

de aquellas propiedades que están en la tesis del enunciado, que como se observa, es trasversal a cada enunciado más allá de los hechos geométricos que se usan para cada caso (según los objetos involucrados). Las demás columnas muestran el desarrollo particular de cada demostración y con ello, la relación del teorema en cuestión con otros elementos del sistema teórico útiles para producirla.

Con los ejemplos presentados buscamos ilustrar cómo al notar las diferencias o similitudes de los enunciados de los teoremas es posible, con base en la demostración de uno de ellos, dilucidar las de los demás siguiendo un esquema análogo. Es una manera de intepretar lo que Selden (2012) refiere como *tener un amplio repertorio de ejemplos y usarlos apropiadamente*, en este caso para construir la demostración de un teorema.

Uso experto de teoremas (postulados o definiciones) en diversos contextos

Uno de los propósitos de determinar el contenido geométrico del enunciado de un teorema es develar y caracterizar las situaciones o contextos donde se puede utilizar. Además de precisar la temática general en la que se puede utilizar, reconocemos otros dos contextos mucho más específicos:

- en la justificación teórica de un procedimiento de construcción de un objeto geométrico con alguna propiedad especial, cuando se emplea como garantía de un paso en tal procedimiento; o
- en la demostración de otro teorema, cuando se usa como garantía de una afirmación en un paso de dicha demostración.

Ahora bien, develar y caracterizar los contextos donde es pertinente usar un teorema no es suficiente, también hay que saber usarlo. Pero ¿qué significa saber usar un teorema? Con dos ejemplos[11], intentaremos ilustrarlo.

11 La producción de los estudiantes que se utiliza para configurar los ejemplos se toma de sesiones de clase que tuvieron lugar en el segundo semestre de 2013.

Ejemplo 1. En la justificación teórica de un procedimiento

En el curso Geometría Plana, se propone a los estudiantes el siguiente problema para cuya resolución deben usar un programa de geometría dinámica. Para ese momento, ellos cuentan con el PRN. El problema tiene el propósito de introducir el TLP en el sistema teórico:

> **Problema de los Cuatro Puntos**: Dados tres puntos no colineales *A*, *B* y *C*, ¿existe un punto *D* tal que los segmentos *AB* y *CD* se bisequen?

El procedimiento que usualmente emplean es el siguiente: i) construir tres puntos *A*, *B* y *C* no colineales; ii) construir el segmento *AB* y el punto medio *M* de este; iii) construir la recta *CM*; iv) construir la circunferencia de centro *M* y radio *CM*; v) marcar el punto *D* como la otra intersección de la recta y tal circunferencia. El punto *D* es el que se busca (Figura 1).

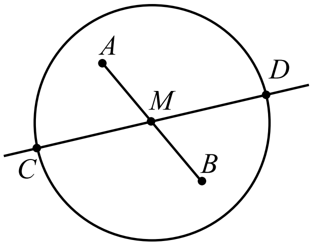

Figura 1

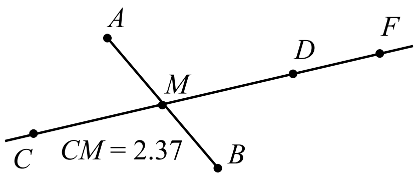

Figura 2

Cuando este procedimiento se expone ante la clase, el profesor pregunta sobre la justificación teórica de cada uno de los pasos de tal procedimiento. No hay dificultad alguna para justificar los tres primeros pasos, sí para justificar el cuarto: el objeto circunferencia no existe en el sistema y no se tiene la intención de introducirlo en ese momento, pues no es necesario desde un punto de vista teórico –como se verá en lo que sigue. Los estudiantes deben encontrar una manera de ajustar el procedimiento, más exactamente deben remplazar los pasos cuarto y quinto de manera que lleguen a determinar el punto *D* mediante acciones que puedan respaldar teóricamente. En el procedimiento inicial, ellos usan la circunferencia porque les permite "copiar" medidas de longitud; así que, los pasos cuarto y quinto se pueden remplazar por las siguientes acciones que sí se pueden respaldar teóricamente: iv) construir un punto *F* en la recta *CM* tal que *M* esté entre *C* y *F*; v) construir el rayo *MF*; vi) tomar la distancia de *C* a *M*; vii) emplear la herramienta *trasferencia de medidas* usando tal rayo y tal distancia; y viii) denominar el punto que surge en el rayo *MF* como *D* (Figura 2).

En esencia, este procedimiento provoca que el objeto circunferencia no se introduzca al sistema por cuanto no es necesario hacerlo, ya que lo que se quiere producir es consecuencia de un elemento teórico disponible: el PRYN. No obstante, se usa este episodio como pretexto para no aludir directamente a tal postulado (y con ello a las coordenadas), sino más bien crear un hecho geométrico que se ajusta más a la situación (usar un rayo y un número positivo para garantizar la existencia de un punto con una posición y distancia a otro punto especiales); en tal sentido, se propone construir el enunciado del TLP según las condiciones con las cuales se contaba y el resultado que se esperaba. Terminada esa labor, y con el propósito de usar el nuevo Teorema (TLP), enseguida se acoplaron los objetos que se tenían en los primeros tres pasos a las condiciones de la hipótesis del Teorema; esto es, construir un rayo –rayo *MF*– y un número positivo –distancia de *M* a *C*.

Ejemplo 2. En la justificación de otro teorema

Se pretende demostrar el Teorema ALA[12]. En términos generales, la demostración del Teorema descansa en una idea clave: hacer una construcción auxiliar, esto es, construir un triángulo congruente a uno de los dados (i. e., copiar el triángulo), utilizando partes (lados y ángulos) del otro triángulo dado, de tal manera que se acaba demostrando que los triángulos coinciden. Para ilustrar esta idea, pensemos que se dan los triángulos *ABC* y *DEF*; en tal sentido, se debería: i) construir, por ejemplo, el triángulo *AB'C* congruente con el triángulo *DEF* (Figura 3); y ii) determinar que los triángulos *AB'C* y *ABC* son el mismo; esto es para el caso particular expuesto antes, se debería deducir que *B'* y *B* son iguales.

12 **Teorema ALA**: Dada la correspondencia entre los triángulos *ABC* y *DEF* tal que los ángulos de vértices *A* y *D*, *C* y *F* y los segmentos *AC* y *DF* son congruentes, entonces los triángulos *ABC* y *DEF* son congruentes.

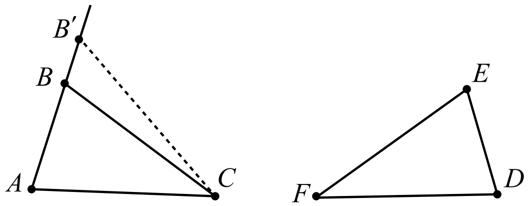

Figura 3

En este ejemplo, no se pretende exponer la demostración completa del Teorema –para ver un esquema general de la misma, consultar el libro *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje* (Samper y Molina, 2013); sí se pretende mostrar el uso del TLP como garantía en un paso de la demostración. Antes se dijo que uno de los pasos fundamentales en la demostración es construir el triángulo *AB'C* congruente con el triángulo *DEF* de forma tal que quede superpuesto al triángulo *ABC*. Como se debe determinar una congruencia de triángulos, los estudiantes deben aludir al Postulado LAL (único criterio que se tiene para determinar tal congruencia). Específicamente, ellos deben notar que para lograrlo, basta construir un segmento congruente con un lado –convenientemente escogido– del triángulo que se quiere "copiar"; así podrían usar tal Postulado, ya que con la hipótesis del enunciado del Teorema ALA, cuentan además con la congruencia de un par de ángulos y un par de lados correspondientes (ángulos de vértices *A* y *D*, y segmentos *AC* y *DF* congruentes, por ejemplo).

Con este panorama, y dado que hemos tomado las dos congruencias mencionadas, los estudiantes deben precisar que no tienen más opción que escoger el segmento *DE* para construir un segmento congruente con él. El paso siguiente es hacer la construcción del nuevo segmento, con la condición de usar lados o ángulos del otro triángulo (*ABC*). En este punto, los estudiantes deben evocar el TLP como recurso teórico pertinente en este contexto puesto que les permite hacer la construcción deseada. Ahora bien, deben *saber* usarlo, es decir:

- ajustar (o acoplar) los objetos geométricos con que cuentan según las condiciones dadas en la hipótesis del Teorema ALA, a las condiciones de la hipótesis del TLP; esto es, determinar el rayo *AB* con base en el segmento *AB* (hecho que se garantiza con el Teorema

Recta - Rayo - Segmento[13]) y un número positivo conveniente, para este caso, la medida de longitud del segmento *ED* (i. e., la distancia entre los puntos *E* y *D*), y

- determin ar el punto *B*' en el rayo *AB* con las distancias entre *A* y *B'* y *E* y *D* iguales, conclusión que se obtiene al usar como garantía el TLP.

Con los dos ejemplos se pretende ilustrar lo que entendemos por "usar apropiadamente" un teorema (en este caso, el TLP), que en términos de Bills y Tall (1998, citado en Selden, 2012) se conoce como *hacer operable* el teorema. En primera instancia, se evocó en situaciones donde era pertinente usarlo (construcción de un segmento congruente con otro). En segundo lugar, hubo un uso experto del TLP; esto es, fue necesario ajustar (o acoplar) a las propiedades mencionadas en la hipótesis del TLP, tanto un paso en el procedimiento de construcción (ver Ejemplo 1) como los objetos dados en la hipótesis de un Teorema que se quiere demostrar (ver Ejemplo 2), para poder usar el TLP como garantía en la justificación de tal procedimiento o de dicha demostración.

A manera de conclusión

Para terminar, presentamos unas reflexiones que son producto de la descripción realizada. En primera instancia, ponemos a disposición de la comunidad de educación matemática cuatro elementos que integran un significado amplio de un teorema. Consideramos que cada uno de esos elementos puede servirle al profesor de matemáticas en dos sentidos diferentes: i) como indicador para inferir el significado que, en un momento particular del proceso educativo, dan sus estudiantes a un teorema específico, y ii) como recurso didáctico para la planeación y gestión de clase cuyo propósito sea propiciar en el aula la construcción de significado de un teorema específico.

Como se evidencia en la descripción hecha de tales elementos, el primero de ellos se convierte en soporte de los otros tres; no se puede hacer uso experto de un teorema o hacer una comparación entre enunciados o demostraciones de teoremas, si no se ha entendido su enunciado en el sentido

13 **Teorema Recta - Rayo - Segmento:** Existe la recta *AB* si y solo si existe el segmento *AB* o el rayo *AB*. Existe el rayo *AB* si y solo si existe el segmento *AB* o la recta *AB*.

expuesto en párrafos anteriores. Con este panorama, nos atrevemos a sugerir entonces que, en un contexto educativo en el que se pretenda iniciar el camino de construcción del significado de un teorema, es necesario propiciar un espacio para que los estudiantes hagan un estudio juicioso de su enunciado, con el propósito de reconocer su estructura y explicitar su contenido geométrico. Insistimos que *cumplir* con este único indicador, no es suficiente –pero quizá sí necesario- para tener un significado más o menos completo de un teorema, por lo menos a nivel universitario. Los otros dos elementos deben ser parte de este camino, recorridos de manera paulatina pero con la suficiente conciencia de su importancia.

Una invitación

Nótese que hasta el momento hemos presentado elementos que integran un significado, relativamente amplio, de un teorema, una vez conocido su enunciado. Pero, desde un punto de vista didáctico, ¿por qué no pensar en la construcción de un significado tal, previo al conocimiento del enunciado por parte de un sujeto (i. e., un estudiante)? El grupo de investigación Æ · G, en el marco de la invitación sugerida en la pregunta anterior, está convencido de que si un estudiante participa en la producción del enunciado de un teorema, es posible que construya a su vez un significado del mismo en lo que respecta, por lo menos, a los elementos primero y cuarto expuestos en secciones anteriores. Este presupuesto se fundamenta en dos referentes: el enfoque sociocultural del aprendizaje, en particular, bajo la perspectiva participacionista (Sfard, 2008); y la teoría de signos propuesta por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012).

Asociado al primer referente, tal como se expone en Perry, Samper, Camargo y Molina (2013), concebimos *aprender* como un proceso gradual que ocurre principalmente en la comunidad del aula, mediante el cual los estudiantes van siendo capaces de participar en una actividad específica –para este caso, la producción de un teorema– con una disposición genuina o auténtica (i. e., asumen un papel de colaboradores o líderes por iniciativa propia, según lo permita y lo requiera la circunstancia), y un comportamiento autónomo (i. e., activan sus recursos intelectuales para hacer propuestas y sostenerlas, para considerar y tomar posición frente a las propuestas de los otros miembros de la comunidad del aula) y relevante (i. e., intervienen con aportes que son útiles aun si tienen errores). Asociado al segundo referente, entendemos por *construcción de significado* el proceso mediante el cual se producen y refinan las interpretaciones idiosincráticas sobre aspectos de un objeto matemático determinado, generadas en la mente del sujeto (estudiante, para este caso) cuando recibe un signo vehículo (e. g., gesto, palabra, gráfico, imagen mental) que hace explícito lo que pretende comunicar otro sujeto (para este caso, un profesor u otro estudiante) sobre el objeto; el propósito del proceso es que tales interpretaciones, a mediano o largo plazo, sean consonantes con el significado pretendido del profesor (y con ello, consonante con el significado del objeto referente en la comunidad del discurso matemático (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014).

En lo que sigue, describimos brevemente la *aproximación metodológica para la enseñanza*, mediante la cual intentamos propiciar que nuestros estudiantes participen en la producción de un enunciado matemático, y con ello construyan el respectivo significado cercano al pretendido por el profesor.

Aproximación metodológica para la enseñanza

Destacamos tres elementos sobre los que recae nuestro esfuerzo didáctico innovador para generar un entorno favorable para aprender a demostrar: las tareas matemáticas, el uso de la geometría dinámica y la interacción social en la clase[14].

Desde el momento mismo en que se inicia el desarrollo de un tema, se involucra a los estudiantes en la resolución de problemas abiertos[15] de índole geométrica (Samper, Molina, Camargo, Perry y Plazas, 2013) como medio para lograr que sean ellos quienes descubran, conjeturen y produzcan inicialmente justificaciones informales, todo con el objetivo de que puedan participar

14 El curso en el que se emplea esta aproximación metodológica no cuenta con libro de texto. La comunidad del aula desarrolla el contenido geométrico a lo largo de las sesiones de clase. El profesor sigue un modelo teórico (el de Birkhoff, 1932) y guía las conversaciones para que el sistema teórico que se produce en clase, se corresponda con aquel.

15 Los problemas abiertos se componen de la descripción de una situación y una pregunta que pide establecer una conjetura, como proposición condicional, que exprese relaciones entre propiedades de los objetos geométricos involucrados. Dicha pregunta de ninguna manera revela o sugiere una respuesta.

activamente en la introducción de nuevos enunciados en el sistema teórico en desarrollo. Creemos que en un ambiente como el esbozado antes, los estudiantes alcanzan un cierto grado de familiaridad con los objetos geométricos sobre los que versarán los enunciados que harán parte del sistema teórico en producción. Cabe mencionar que los estudiantes trabajan en forma individual o en grupos pequeños, apoyados en el uso de un programa de geometría dinámica (Geogebra o Cabri, por ejemplo). Incide en la ganancia de esta familiaridad la posibilidad de modelar una situación en un entorno en el cual están inmersos ciertos conocimientos geométricos; en consecuencia, las relaciones que los estudiantes descubren en la exploración de dicha situación se pueden modelar matemáticamente, esto es, existe teoría matemática que las explica (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri y Garuti, 1997).

Un ejemplo de problema que se les propone a los estudiantes es el Problema de los Cuatro Puntos, expuesto en una sección anterior.

Después de la resolución del problema se pide a los estudiantes presentar sus producciones –que, por lo general, son diversas– ante la comunidad del aula con el fin de revisarlas y concretarlas en enunciados e ideas que se convierten en material de trabajo de la comunidad para formar el sistema teórico. Específicamente, se les pide presentar: el procedimiento de construcción realizado en el programa de geometría dinámica, la validación de cada paso del procedimiento desde el sistema teórico del que disponen en el curso, y la formulación de una conjetura que sintetice el resultado establecido. En una sección anterior, ya se expuso un procedimiento de construcción sugerido y un bosquejo de la validación teórica dada por los estudiantes. Conjeturas asociadas al problema, que usualmente surgen de los estudiantes, son:

> Dados tres puntos no colineales A, B y C. Entonces existe un punto D tal que los segmentos AB y CD se bisecan.

> Dados tres puntos no colineales A, B y C. Si D pertenece al rayo CM, con M punto medio del segmento AB y las distancias de M a D y a C iguales, entonces los segmentos AB y CD se bisecan.

Respecto a la interacción social en la clase, destacamos dos tipos de conversación: la instruccional y la matemática (Perry, Samper, Camargo, y Molina, 2013). A través de una *conversación instruccional* del profesor con uno o varios estudiantes sobre las producciones presentadas, se favorece la construcción colectiva de significado que tiene lugar cuando los miembros más experimentados de una cultura instruyen a los menos experimentados. En esta conversación se llevan a cabo acciones como responder preguntas que ayudan a ganar familiaridad y comprensión de los objetos geométricos involucrados, aceptar o rechazar las conjeturas formuladas, revisar la formulación misma de las conjeturas, establecer la definición de un objeto que interviene en la situación, etc.

Siguiendo con el ejemplo que nos ha servido para ilustrar la aproximación metodológica, respecto al enunciado del Problema, el profesor genera una conversación instruccional en la que se aclaran definiciones de objetos o relaciones como: bisecar, punto medio y segmentos bisecados. Además, se estudian las conjeturas formuladas para aceptarlas o rechazarlas. Es así como el profesor invita a los estudiantes a precisar cuál de las dos conjeturas anteriores es "mejor". Ellos se inclinan por la segunda aduciendo que es mucho más completa que la primera por cuanto da información sobre las condiciones del punto *D* para que los segmentos *AB* y *CD* se bisequen.

En este punto, el profesor aclara que si bien se demostrará la segunda conjetura, cuando él pide la justificación de cada paso del procedimiento de construcción, lo que pretende es que se garantice la existencia del punto *D* con las condiciones que se mencionan en la hipótesis de tal conjetura. En la medida que los estudiantes no se percatan de dicho asunto, el comentario del profesor al respecto, hace parte también de la conversación instruccional.

En el marco de una *conversación matemática*, considerada como el diálogo entre el profesor y los estudiantes (o entre los estudiantes) sobre un tema matemático específico, las ideas se comunican, se comentan y se critican. No nos referimos a esta interacción como una discusión matemática porque ella implica que los estudiantes tengan una posición definida con respecto a una idea matemática y que puedan confrontarla con otras; en nuestro caso, esto no ocurre pues para los estudiantes de ese nivel, la exigencia de esta tarea está por encima de su madurez matemática actual. Consideramos que en una conversación matemática, la participación estudiantil se hace más autónoma, auténtica y relevante, lo que permite que el profesor actúe como un miembro más de la comunidad en aspectos relacionados con contenido matemático. En esta conversación, la responsabilidad de culminar con éxito una tarea recae en toda la comunidad. El papel del profesor se enfoca en administrar las propuestas de los estudiantes, controlar el uso correcto de los elementos del sistema teórico, e institucionalizar el conocimiento.

En el marco de la actividad de clase que tuvo lugar a partir del Problema de los Cuatro Puntos, la conversación matemática se generó principalmente en dos momentos: al justificar teóricamente el procedimiento de construcción y al justificar la conjetura misma. La descripción realizada en este escrito cuando se presentó un procedimiento de construcción asociado al Problema (véase el Ejemplo 1 de la sección "Uso experto de teoremas (postulados o definiciones) en diversos contextos") alude al primero de estos momentos. Como se dijo allí, en el marco de la justificación de uno de los pasos de la construcción (el que da origen al punto D), el profesor tiene el propósito de introducir el TLP; sin embargo, en tal sección no se hizo referencia a lo complejo del proceso que tuvo lugar para construir el enunciado de dicho Teorema. Este proceso estuvo permeado por una conversación matemática; a continuación presentamos una breve descripción de la misma. En primera instancia, para determinar el punto D, los estudiantes usan un objeto geométrico (la circunferencia) que el profesor aún no quiere introducir al sistema. Él asevera que ese objeto no es necesario para hacer dicha construcción; así que, luego intentan usar el PRN y, con ello, usar coordenadas. Se presentan varias dificultades al intentar dilucidar qué coordenadas deben tener los puntos C y M (después de construida la recta que los contiene), para precisar luego el número x que daría la existencia del punto D buscado en tal recta. Tras una conversación instruccional para precisar las coordenadas de tales puntos y el número x, finalmente se establece que una asignación conveniente es cero y m respectivamente para los puntos C y M, y x igual a $2m$. Con esto establecido, haciendo uso del PRN y del Teorema Orden - Interestancia, se garantizan respectivamente la existencia del punto D (que le corresponde al número x) y el hecho de que M está entre C y D. Los estudiantes entonces han determinado que existe un punto D con las condiciones impuestas en la conjetura, y se percatan de que ello es producto de la justificación del paso de construcción respectivo (se da sentido al último comentario relativo a la conversación instruccional).

Se inicia en ese momento una actividad de clase, quizá la más compleja durante el proceso de producir el enunciado del TLP: con base en la experiencia vivida, sintetizar en una proposición condicional que no haga uso de coordenadas ni de una recta, y sí de un rayo y de un número positivo, un hecho geométrico que posibilite la construcción del punto D. El profesor pretende con ello que los estudiantes sustituyan el PRN que exige varios elementos (números, recta, puntos) por una proposición más sencilla que recoja sintéticamente el ítem ii) del Postulado; es decir, que produzcan un enunciado más operable en diferentes situaciones. Con el objetivo de que sean los estudiantes quienes formulen tal enunciado, el profesor pregunta: qué es lo que, en esencia, es requisito para construir el punto *D*. Los estudiantes, interpretan la pregunta asociando la respuesta a las condiciones del PRN; se refieren entonces a coordenadas, recta, etc., pero no a lo que el profesor quiere escuchar: el rayo del cual se debe partir y el número positivo (doble de la distancia de *M* a *C*) que representa una distancia y con el que se determina el punto *D.* Fueron fallidos los intentos del profesor para que autónomamente se produjera tal explicitación por parte de los estudiantes. Fue el profesor quien llamó la atención sobre este hecho e hizo un recuento de lo sucedido en el proceso de construcción del punto *D*. Así, aunque los estudiantes no formularon el enunciado del TLP, sí vivieron la manera en como este se puede producir y experimentaron la necesidad de introducirlo al sistema con su uso en acto: determinar un punto en un rayo que esté a una cierta distancia de otro, lo cual finalmente termina generando dos segmentos congruentes.

Con la descripción y ejemplificación de nuestra aproximación metodológica para la enseñanza –empleada en nuestros cursos de Geometría Plana con el firme propósito de que los estudiantes experimenten actividad demostrativa y participen en la construcción de un sistema teórico como lo propone Freudenthal (1973, citado en de Villiers, 1986)–, quisimos mostrar de qué manera es posible que los estudiantes vivan un proceso de producción de hechos geométricos susceptibles de ser enunciados de teoremas. En cualquiera de los dos contextos, bien sea porque el enunciado es respuesta a un problema específico (caso de las conjeturas que proveen la solución a dicho problema) o porque se constituye en una necesidad teórica para poder justificar un paso de construcción relativa a tal solución, es altamente probable que los estudiantes le den un significado al Teorema en términos de su contenido geométrico y de su utilidad en ciertas situaciones.

Referencias

Birkhoff, G. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics*, *33*(2), 329-345. Disponible en http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/uami/ahg/1932_Birkhoff.pdf

de Villiers, M. (1986). *The role of axiomatisation in mathematics and mathematics teaching*. Stellenbosch, Sudáfrica: RUMEUS, University of Stellenbosch. Disponible en http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/axiom.pdf

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finlandia: Universidad de Helsinki.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. IV , pp. 409-416). Vancouver, Canada: PME

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th ICME*. Disponible en http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip

Samper, C. y Molina, Ó. (2013). *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L., Perry, P. y Plazas, T. (2013). Problemas abiertos de conjeturación. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 167-170). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study* (pp. 391-420). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.