COMBINATORIA PARA LA ESCUELA

Benjamín Sarmiento y Felipe Fernández
Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)
bsarmiento@pedagogica.edu.co, fjfernandez@pedagogica.edu.co

Con este cursillo se pretende mostrar a los asistentes que el análisis combinatorio no es una temática exclusiva para los que se inician en el estudio de las probabilidades y que no se requiere llegar a ese nivel, para empezar a conocer los principios combinatorios y las reglas básicas de esta rama. Por eso se ha seleccionado un conjunto de problemas y situaciones que se puedan llevar a la escuela. A lo largo del cursillo se propondrán situaciones clásicas relacionadas con los principios y reglas básicas, y también se presentarán algunas situaciones más complejas donde se combinen las diferentes reglas de la combinatoria.

PALABRAS CLAVE

Principios combinatorios, técnicas de conteo.

PRINCIPIOS COMBINATORIOS

El análisis combinatorio es el estudio de los métodos que nos permiten determinar el número de elementos de un conjunto o la cantidad de posibles resultados de un experimento, sin recurrir a la enumeración directa. En el análisis combinatorio se cuenta con unos principios (Adición, multiplicación, correspondencia, Dirichlet, inclusión y exclusión y complementario) y unas técnicas de conteo (Permutaciones, variaciones y combinaciones).

Principio de adición

Supongamos que un procedimiento A se puede hacer de m maneras, y que un segundo procedimiento B se puede hacer de n maneras. Supongamos además que son mutuamente excluyentes. Entonces, el número de maneras como se puede hacer A o B es (m+n) maneras. En términos de conjuntos: Si A_1, A_2, A_3,…, A_n son conjuntos finitos no vacíos y disyuntos, entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n|.$$

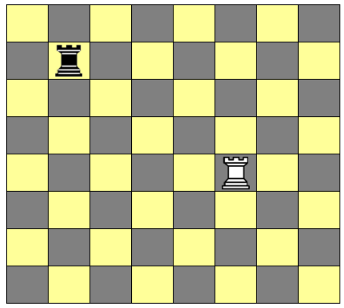
Situación 1. Un coleccionista de música de Fast Domino, James Browm y Etta James tiene la oportunidad de elegir un disco de regalo entre 5 discos de Domino, 8 de Browm y 6 de Etta, ¿de cuántas maneras puede seleccionar un disco?

Principio de multiplicación

También se conoce como el principio fundamental del conteo. Si una operación se puede ejecutar de n_1 maneras, y si para cada una de estas ejecuciones se puede llevar a cabo una segunda operación de n_2 formas, y si para cada una de las dos primeras operaciones se puede realizar una tercera operación de n_3 formas, y así sucesivamente, entonces, la serie de k operaciones se puede realizar de n_1 x n_2 x n_3

x…x n_k formas. En términos de conjuntos: Si A_1, A_2, A_3,…, A_n son conjuntos finitos no vacíos, entonces $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times |A_3| \times \ldots \times |A_n|$.

Situación 2. En la figura se muestra un tablero convencional de ajedrez con dos torres. ¿De cuántas maneras se pueden colocar las dos torres en el tablero de tal forma que no se ataquen entre sí?



Principio de correspondencia

Dos conjuntos finitos cuyos elementos pueden ponerse en correspondencia uno-uno, son del mismo tamaño. Cuando tenemos que calcular el tamaño de un conjunto, podemos encontrar otro de su mismo tamaño más fácil de medir.

Situación 3. En una liga de n equipos de fútbol se deben jugar partidos eliminatorios hasta que quede uno solo, que será el campeón ($n = 2^k$, k natural). Cada partido acaba con la victoria de un equipo, pues se llega si es necesario a los penaltis. ¿Cuántos partidos se deberán jugar en toda la liga?

Principio de Dirichlet (Palomar)

Si hay (n+1) perlas y n cajas, entonces alguna caja contendrá más de una perla. En general: si se colocan n objetos en m cajas, alguna caja tiene más de $[n/m]$ elementos, y existe alguna caja con a lo sumo $[n/m]$ elementos. Este principio es más usado para justificar proposiciones que para hacer conteos.

Situación 4. ¿Cuál es el número mínimo de personas que debemos reunir para asegurarnos que hay dos de ellas que cumplen años en el mismo mes?

Principio de inclusión y exclusión

Para 2 conjuntos finitos este principio se define de la siguiente manera:
Si A y B son conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Para 3 conjuntos finitos este principio se define de la siguiente manera:
Si A, B y C son conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Para n conjuntos finitos este principio se define de la siguiente manera:
Si A_1, A_2, … , A_n son conjuntos finitos, y

$a_1 = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$

a2= $\left|A_1 \cap A_2\right| + \left|A_1 \cap A_3\right| + \ldots + \left|A_{n-1} \cap A_n\right|$

a3= $\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right| + \left|A_1 \cap A_2 \cap A_4\right| + \ldots + \left|A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n\right|$

. . .

an= $\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n\right|$

Entonces:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n\right| = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k.$$

Situación 5. ¿Cuántos números enteros hay entre 1 y 500 inclusive, que son divisibles por 2, por 3 o por 5?

Principio del complementario

Si X es un conjunto finito con n elementos, $Y \subset X$ con *m* elementos, entonces $|X - Y| = |X| - |Y| = n - m$.

Situación 6. Daniela extrae, con reemplazo, 5 cartas de una baraja francesa de 52 cartas. ¿Cuántas posibilidades tiene de sacar al menos una Jota?

TÉCNICAS DE CONTEO Y CONFIGURACIONES COMBINATORIAS

Las técnicas de conteo son las diferentes reglas que permiten contar de manera abreviada la cantidad de elementos que tiene un conjunto. En estas reglas aparecen con frecuencia los números factoriales y los números combinatorios o coeficientes binomiales. Por otra parte, se llaman configuraciones combinatorias a los diferentes objetos que se pueden formar con los elementos (iniciales) de un conjunto. Estas configuraciones pueden ser permutaciones, variaciones y combinaciones (con o sin permitir repeticiones de los elementos iniciales). Las técnicas de conteo son útiles para contar la cantidad de configuraciones construidas bajo ciertas condiciones.

Para describir las principales técnicas de conteo es importante tener presente una notación y vocabulario básico tal como la idea de factorial y coeficiente combinatorio binomial, que se explican a continuación.

Factorial de n. El factorial de *n* se define como el producto de los enteros positivos que son menores o iguales a *n*, y se simboliza n! = nx(n-1)x(n-2)x(n-3)x(n-4)x...x3x2x1. Además, se define 0! = 1.

Coeficiente binomial. El coeficiente binomial C_k^n se define como $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, (n≥k≥0).

El coeficiente binomial se puede interpretar de cuatro manera diferentes:

- Interpretación conjuntista: C_k^n representa la cantidad de subconjuntos de tamaño k que se pueden formar en un conjunto de tamaño *n*.
- Interpretación aritmética: C_k^n es el número que resulta de realizar las operaciones $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- Interpretación algebraica: $C_k^n = \binom{n}{k}$ se puede interpretar como el coeficiente de $x^k y^{n-k}$ en el desarrollo de $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
- Interpretación geométrica: En una cuadrícula de *n*–*k* filas por *k* columnas, C_k^n representa la cantidad de caminos ascendentes desde (0,0) hasta (*n*–*k*,*k*).

Permutación de *n* elementos diferentes

Son los diferentes arreglos que pueden formarse con los n elementos de un conjunto, de tal modo que dos arreglos difirieren entre sí porque sus elementos están en distinto orden. El número de permutaciones de n objetos distintos es Pn = n!

*Situación 7***.** Un grupo de 4 niños y 5 niñas van a formar una fila. ¿De cuántas maneras pueden organizarse, si deben ir alternados (por géneros)?

Permutación circular

Son los diferentes arreglos o grupos que pueden formarse con los elementos de un conjunto alrededor de un círculo, de tal modo que dos arreglos difirieren entre sí porque sus elementos están en distinto orden. El número de permutaciones de *n* objetos distintos agregados en un círculo es Cn=(n-1)!

Situación 8. ¿Dé cuántas maneras se pueden organizar en una estantería circular 4 prismas, 6 cilindros, 3 pirámides, 5 esferas y 4 cubos, si todos los sólidos del mismo tipo deben quedar juntos?

Permutación con repeticiones

Supóngase que un conjunto tiene n_1 elementos iguales, n_2 elementos iguales, n_3 elementos iguales,…, n_k elementos iguales, y que $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$. Entonces, las permutaciones con repeticiones son los diferentes grupos o arreglos que pueden formarse con los *n* elementos del conjunto, de tal manera que dos arreglos difieren entre sí porque sus elementos están en distinto orden.

El número de permutaciones de n objetos, de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales, . . . , n_k son iguales, es igual a $P\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Situación 9. En la primera vuelta de un campeonato de fútbol cada equipo juega un total de 15 partidos. Un equipo X terminó la primera vuelta con 17 puntos, producto de 4 victorias, 5 empates y 6 derrotas. ¿De cuántas maneras se pudieron dar estos resultados?

Desarreglos

Un desarreglo o desorden de *n* objetos, es una permutación de los n objetos tal que ninguno de ellos queda colocado en su posición original. El número total de desarreglos con *n* objetos es $D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$.

Situación 10. Se tienen 10 sobres marcados con sus respectivos destinatarios y se tienen las 10 cartas marcadas, una para cada destinatario. Se distribuyen las cartas al azar. ¿De cuantas maneras se pueden distribuir para que no haya una coincidencia?

Variaciones sin repeticiones

Son los diferentes arreglos que pueden formarse con los *n* elementos de un conjunto, tomados de *k* en *k*, de tal modo que dos arreglos difieren entre sí porque contienen elementos diferentes o sus elementos están en distinto orden. A estas configuraciones también se les llama k-permutación y se denotan por ${}_nP_k$, $P(n,k)$ o V_k^n. El número de variaciones sin repeticiones que se pueden formar de un conjunto de *n* elementos tomando *k* elementos, es:

$$V_k^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Situación 11. ¿Cuántas banderas de 3 colores se pueden obtener, si contamos con 12 colores diferentes?

Variaciones con repeticiones

Son los diferentes arreglos que pueden formarse con los *n* elementos de un conjunto, tomados de *k* en *k*, en los que pueden aparecer elementos repetidos, de tal modo que dos arreglos difieren entre sí porque contienen elementos diferentes o sus elementos están en distinto orden. El número de variaciones de este tipo es VR(n,k) = $VR_k^n = n^k$.

Situación 12. ¿Cuántas palabras de ocho letras se pueden formar utilizando sólo las 5 vocales?

Combinaciones sin repeticiones

Son los diferentes grupos que pueden formarse con los *n* elementos de un conjunto, tomados de *k* en *k*, de tal manera que dos grupos difieren entre sí cuando tienen al menos un elemento distinto. No se tiene en cuenta el orden. Es decir, una combinación de tamaño *k* de un conjunto de *n* elementos es cualquier subconjunto que tenga *k* elementos.

El número de combinaciones de *k* objetos distintos tomados de un conjunto de *n* objetos distintos es igual a ${}_nC_k$ = C(n,k) = $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Situación 13. ¿Cuántas diagonales tiene un octágono regular?

Reparticiones

Sea A un conjunto con *n* elementos, y sean $n_1, n_2, \ldots, n_k$ enteros positivos tales que $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$; entonces el número de reparticiones ordenadas diferentes de A de la forma ($A_1, A_2, \ldots, A_k$), donde A_1 contiene n_1 elementos, A_2 contiene n_2 elementos, . . . y A_k contiene n_k elementos, está dada por el coeficiente multinomial:

$$C\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\ldots\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

Situación 14. Los 8 integrantes de una familia se reúnen en un restaurante que tiene dos mesas disponibles, una mesa tiene 4 puestos y la otra 6 puestos. ¿De cuántas maneras se pueden repartir entre las dos mesas?

Combinaciones con repeticiones

Son los diferentes grupos que se pueden formar con los *n* elementos de un conjunto, tomados de *k* en *k*, en los que pueden aparecer elementos repetidos, de tal manera que dos grupos difieren entre sí cuando tienen al menos un elemento distinto.

El número de combinaciones de *k* objetos, con repeticiones, tomados de un conjunto de *n* objetos es igual a $CR_k^n = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k}$.

Una combinación con repeticiones se puede describir como la selección de x_i objetos de tipo i, (i=1, 2, 3,..., *n*), donde cada x_i es un entero no negativo y $x_1+x_2+...+x_n = k$. Es decir, cada combinación con repeticiones de orden k, se corresponde con una solución entera no negativa de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.

También se puede decir que, si se quieren hallar *n* números enteros no negativos cuya suma sea *k*, hay $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k}$ soluciones.

*Situación 15***.** ¿Cuántas fichas tiene el juego de Dominó, si se sabe que en cada ficha van dos números que son elegidos del conjunto {0,1,2,3,4,5,6} y que estos números se pueden repetir?

Sumatorias. Algunas fórmulas que también son útiles para hacer conteos son las siguientes:

- Suma de los n primeros enteros positivos: $1+2+3+...+n = \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- Suma de los n primeros impares positivos: $1+3+5+...+2n-1 = \sum_{k=1}^{k=n} (2k-1) = n^2$
- Suma de los n primeros cuadrados: $1+4+9+...+n^2 = \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Suma de los n primeros cubos: $1+8+27+...+n^3 = \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- Suma geométrica: $1+x+x^2+...+x^{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$, si $|x|<1$.

Situación 16. La pared de un supermercado es decorada con 20 filas de bolas de chocolate, de tal forma que en la primera fila (arriba) se coloca una bola, en la segunda fila dos bolas, en la tercera fila tres bolas y así sucesivamente (Figura 1). ¿Cuántas bolas de chocolate se requieren para esta decoración?

*Situación 17***.** ¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez (Figura 2)?

*Situación 18***.** ¿Cuántos cubos se requieren para construir una pirámide de 8 niveles, si cada nivel tiene forma de cuadrado, y los niveles están por 1, 4, 9,... cuadrados, como se muestra en la Figura 3?

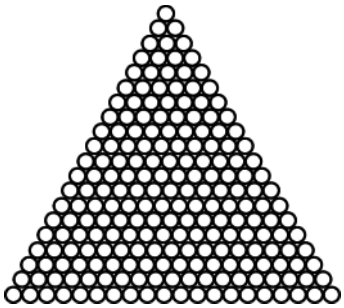


Figura 1.

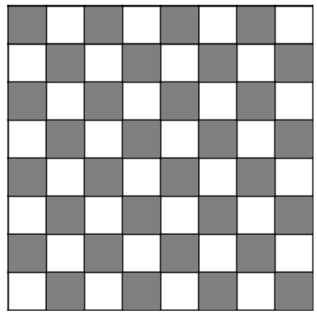


Figura 2.

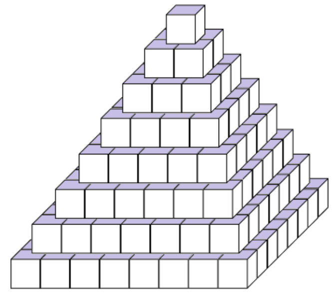


Figura 3.

Situación 19. A un cubo de lado 3 cm se le atraviesan 6 planos de tal forma que queda dividido en 27 cubos de lado 1 cm, como se muestra en la Figura 4. ¿Cuántos cubos nuevos se han formado?

*Situación 20***.** En la figura 5 se muestra un cuadrado de lado 2 cm que se ha dividido en cuatro partes y una de las partes se ha sombreado y otra de las partes se ha dividido en cuatro partes. Se sigue indefinidamente el proceso de dividir en cuatro partes y de sombrear una de las cuatro partes. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

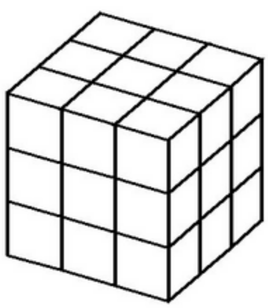


Figura 4.

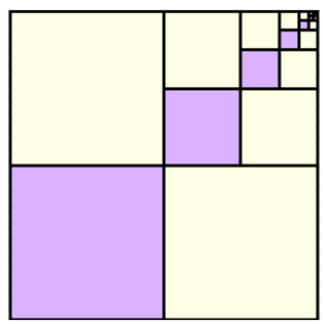


Figura 5.