LOS CINCO PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN 1.656

Diego Díaz
Universidad del Valle (Colombia)
diegoden09@gmail.com

Uno de los precursores del cálculo de probabilidades aparte de Blaise Pascal y Pierre de Fermat, fue el holandés Christian Huygens. Cada uno de estos ingresó por sus propios méritos a la Historia de la Ciencia, la joya más preciada de Occidente. Luego de una estadía en Paris, Huygens retorna a su natal Holanda y resuelve por sus propios métodos una serie de 'nuevos' problemas planteados entre Fermat y Pascal y los envía a revisión a van Schooten, incluyendo otros problemas de la misma naturaleza y que vendrían a establecerse en 1656, como el primer tratado sobre probabilidad publicado: Ratiociniis in ludo Aleae. Al final de éste, Huygens propone 5 problemas finales que se constituyeron en un verdadero reto durante los siguientes 60 años. Se mostrará la forma de resolverlos y lo novedoso de su estructura utilizando los argumentos establecidos para la época.

PALABRAS CLAVE

Probabilidad, esperanza matemática, método analítico, método recursivo.

INTRODUCCIÓN

El proceso de sensibilizar a la comunidad educativa respecto a la historia de la probabilidad y estadística, como línea de investigación dentro de la Educación Matemática es uno de los fines de esta conferencia. Además, esta investigación hace parte del trabajo de grado de maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle, consolidándose como pionero en esta línea de Historia dentro del campus. Si bien es cierto que la línea de investigación en Historia de las Matemáticas tiene una necesidad de seguir bogando mar adentro en Colombia, este tipo de mirada hacia los aspectos históricos probabilísticos, está aún en un terreno inhóspito. La sola idea de sumergirse en los elementos subyacentes a la probabilidad como son: suerte, moral, prudente, aleatorio, incertidumbre, esperanza; lleva a un maremágnum de eventos, pensamientos y personajes, para comprender cómo ha sido esta historia, el devenir, posturas filosóficas, su valor pragmático, aciertos y desaciertos, el impacto en lo político, social, económico, cultural, su lugar y tiempo, sin perder de vista la naturaleza de los objetos puestos en acción para ver el surgir de la ya institucionalizada, mas no acabada, teoría de la probabilidad. Con la presentación de esta conferencia, se pretende mostrar además el tratamiento que tuvo el concepto de esperanza matemática utilizada como herramienta de valor esperado justo en los juegos de azar. Se considera importante dar a conocer la visión externalista que tuvo el surgimiento de la probabilidad y hacerla explicita a la comunidad académica.

MARCO DE REFERENCIA

Es insoslayable dentro de la investigación en Educación Estocástica, mencionar a aquellos valientes que tomaron la firme decisión de abordar ciertos objetos probabilísticos durante gran parte del siglo XVII en Europa y cuyo legado aún prevalece en unos pocos que se interesan por esta génesis de la probabilidad. Estos personajes y sus modos de hacer, determinan en gran medida, el hilo conductor de esta conferencia, evidenciándose entre estos más que distancias, complementariedades alrededor de la noción que se fue tejiendo en las mentes de algunos y que fue utilizada inicialmente como método de solución en problemas de juegos de azar y posteriormente en problemas de tipo social, económicos, demográficos, morales, jurídicos, entre otros; denominado actualmente como esperanza matemática.

Los elementos que cobran vida presentes en la historia de la estadística y probabilidad están cargados de una herencia intelectual, conjeturas, paradojas y problemas desafiantes, mostrando que en muchas ocasiones la intuición, los aspectos filosóficos, teológicos, políticos y sociales han jugado un papel importante en la constitución de los objetos probabilísticos y a su vez, en la dinámica de la toma de decisiones de las comunidades.

Dentro del no determinismo inmerso en la probabilidad, hay que añadirle una propiedad que resulta tensa siendo esta una fuente inagotable de indagar: el carácter dual de la probabilidad. Es ya reconocido por filósofos e historiadores de la ciencia como Hacking (1995) y Hald (1990), que esta dualidad es inherente y necesaria al tratar de conceptualizar los elementos subyacentes a la probabilidad y en consecuencia a lo que se estaba utilizando hasta el momento como método de resolución a mediados del siglo XVII: expectatio.

Tan solo un vistazo a Pascal con su aporte a la probabilidad y se puede presenciar el aroma de la controversia respecto a esta dualidad, apreciado ampliamente por el Círculo de Roannez y la Port Royal (quienes apoyaban los métodos matemáticos utilizados por éste), pero acusado por los Jesuitas (siendo Pascal jansenista, alejado de ciertos dogmas y preceptos religiosos, utilizó la matemática para decidir sobre cuestiones morales). Tuvo que afrontar cabalmente en su interior esta dualidad y mostrar la estirpe de la que gozaba. Se está hablando del problema del reparto (probabilidad aleatoria) y la apuesta, también conocida como la apuesta de Pascal, (probabilidad epistémica o Bayesiana), dos celebres problemas relacionados con la probabilidad, cada uno desde una naturaleza distinta y que fueron resueltos por Pascal, mostrando así la tensión que produce la dualidad de la probabilidad.

En virtud de este conglomerado de circunstancias, se hace necesario hilar delgado y someter esta propuesta a las siguientes preguntas que apuntan, en cierto sentido, a establecer el derrotero de la esperanza matemática, comúnmente filiada a la probabilidad:

¿El surgimiento de la esperanza matemática surge a través de un contexto operatorio o es el resultado del paradigma de axiomatización de las matemáticas? ¿Cómo influyó el pensamiento determinista en el Siglo XVII para la aparición de los objetos probabilísticos? ¿Por qué fue necesaria la introducción de la esperanza matemática en la década de 1650 en Europa? ¿Cómo se pueden interrelacionar los aspectos de azar, suerte y probabilidad con la esperanza matemática? ¿Quiénes contribuyeron a la consolidación de la esperanza matemática en la década de 1650? ¿Cuál fue su impacto inmediatamente posterior? ¿Cómo llegó a constituirse la esperanza matemática como método de justificación en la solución de problemas de azar a mediados del siglo XVII?

La solución a este interrogante abarcando todo lo que subyace a él, como el análisis del texto de Huygens (1956), *Ratiociniis in ludo aleae*, la dualidad de la probabilidad presente en los métodos de solución de la época, los avances y contradicciones sobre este nuevo campo de la matemática del azar; es de un significativo impacto para la comunidad académica, tanto formadores de docentes y estudiantes de ciencias y licenciaturas permitiendo ver a la esperanza matemática como objeto de explicación a ciertos fenómenos en donde el azar está presente. Es por ello que se hace necesario indagar sobre los desafíos presentes en la época de publicación del Raticioniis de Huygens (1956) y establecer las formas de solución y razonamiento de aquellos cinco problemas que se convirtieron en retos de grandes probabilistas como Montmort, Bernoulli, Moivre y Struyck.

DESARROLLO DEL TEMA

La esperanza matemática como valor del juego en el *Ratiociniis in ludo aleae*

Nacido en una muy destacada familia holandesa, Christian Huygens recibió todo el sustento económico de su padre para su exitosa formación en ciencias (matemáticas y físicas) y humanidades (leyes). Influenciado bajo la tutoría en matemáticas de Frans van Schooten, fiel discípulo de Descartes, elaboró trabajos relacionados con la filosofía y matemática cartesiana, en particular el programa mecanicista defendido hasta los últimos años de su vida, pese a alejarse en ocasiones de posturas hermanadas por los Principiae Philosophiae. En 1655, a los veintiséis años, este matemático, astrónomo, constructor de lentes y relojes de péndulo, visita Paris por primera vez, considerada como la ciudad intelectual por excelencia y en donde los prominentes científicos de la época, con el talento y la ambición de Huygens no podían dejar de visitar para terminar su formación. Huygens había leído acerca de una correspondencia entre dos ya reconocidos matemáticos franceses: Pascal y Fermat. Tenía interés en conversar con Pascal acerca del problema de los puntos, que fue por un tiempo objeto de siete cartas en total. Sin embargo, durante este primer viaje no se estableció el contacto personal que intentaba realizar. En la época de este primer viaje Fermat tenía 44 años y Pascal, apenas con 32 años y enfermo, ya había sufrido una dolorosa 'transformación mística' que lo llevó a ocuparse durante el poco tiempo de vida que le quedaba, a sus reflexiones religiosas y filosóficas. Cabe aclarar que Huygens no conocía ni las soluciones ni los métodos utilizados por este par de eruditos respecto a estos problemas relacionados con el los juegos de azar. Estos tres protagonistas tenían un profundo interés por la geometría y por la física. Cada uno de ellos ingresó por sus propios méritos a la Historia de la Ciencia, la joya más preciada de occidente.

Retornando a su natal Holanda, luego de su paso por Paris, Huygens resuelve por sus propios métodos lo que había escuchado acerca de estos 'nuevos' problemas planteados entre Fermat y Pascal y los envía a revisión a van Schooten (1656), incluyendo otros problemas de la misma naturaleza y que vendrían a establecerse en 1656, como el primer tratado sobre probabilidad publicado, *Ratiociniis in ludo Aleae*, el cual consta de 14 proposiciones con sus respectivas demostraciones y unos 5 últimos problemas al lector. En marzo de 1657, van Schooten envía la versión en latín para la aprobación de Huygens quien incluye la proposición IX y los 5 problemas al lector, dos de ellos de Fermat, uno propuesto por Pascal y dos de su autoría, problemas de gran reto que serían abordados por matemáticos tan notables como Jacques Bernoulli y Abraham de Moivre. Había nacido el cálculo de probabilidades.

El libro de Huygens puede considerarse también como el primer manual de un jugador en un sentido moderno: ¿cómo no caer en la trampa? Si se encuentra con un jugador que le entrega un dado (supongamos que es un dado legal) y le propone que si en tres lanzamientos sale un 6, entrego 1000 pesos, en caso contrario, me entrega 1000 pesos. ¿Sería de este modo un juego justo? ¿Aceptaría esta propuesta? Preguntas como estas, son las que se esbozaron hace más de tres siglos y medio.

Es entonces un breve y significativo tratado, similar en tamaño al *Tratado del triángulo aritmético* de Pascal, que consiste en una introducción, un postulado, 14 proposiciones y cinco problemas finales, dando la solución a tres de ellos y deja los demás como ejercicios para el lector. Una versión que tomaremos de referencia es la indicada por Todhunter (1865), quien cita a W. Brown (1714), y en ocasiones, nos remitiremos al tratado original en latín para realizar precisiones necesarias. La intención de Huygens entonces, es inducir al lector sobre cuestiones que sonaban misteriosas, atractivas y mágicas al tiempo.

Al final del tratado, aparecen estos cinco problemas al lector, siendo verdaderos retos tanto estos como las proposiciones, durante los siguientes 60 años a su publicación; se constituían como una verdadera prueba con la que se mostraba el ingenio de esta 'nueva' matemática. Matemáticos reconocidos, dieron solución posteriormente a estos problemas por métodos más robustos: Abraham de Moivre, Jacques Bernoulli, Nicholas Struyck, Pierre Rémond de Montmort y John Arbuthnot, Hudde, Spinoza e incluso Leibniz, figuran entre los que trataron este tipo de problemas.

El primer problema tiene la característica de ser una generalización de la proposición XIV del Ratiociniis. Mediante correspondencia con Carcavy (1656), quien se ofrece a darle a conocer los resultados e inquietudes de Huygens a Fermat se puede indagar sobre algunas ideas de solución:

Problema I

A y B juegan con un par de dados bajo estas condiciones: A gana si obtiene 6 puntos y B gana si obtiene 7 puntos. A toma el primer turno, luego lanza dos veces B y luego A dos veces y así sucesivamente hasta que alguno gane. ¿Cuál es la parte de los chances de A a B?

Sean x, y, z, y w los chances antes de lanzar según los turnos: ABBA, ABBA…En el texto de Huygens, al parecer se da por sentado que los lanzamientos son independientes y cada que un 'ciclo' termina, vuelve a empezar de nuevo con las esperanzas de ganar como se establecieron al principio, por tal motivo, solo tiene en cuenta estos cuatro momentos del juego que se traducen en esperanzas de los jugadores.

Problema II
Tres jugadores A, B y C toman 12 fichas, 4 de ellas son blancas y 8 negras; juegan bajo estos términos: el primero de ellos, escogiendo sin mirar, que saque una ficha blanca ganará, y que A tiene el primer turno, B a continuación, después C, luego otra vez A, y así sucesivamente, por turnos. Se pide la parte entre sus chances.

No solamente se ha mostrado que Huygens deja un gran aporte con su Ratiociniis como el primer libro impreso de probabilidad, sino también el legado de su característica única de solucionar los problemas en esta nueva matemática, además de su método analítico. Además, este problema en particular ya subraya un nuevo aporte, y es el de evidenciar el modelo de urnas con o sin remplazamiento que según Basulto y Camuñez (2007), también es la primera vez que se menciona este tipo de dispositivos.

Este problema aparece en la correspondencia con su gran amigo también holandés Hudde el cual puede ser leído en los trabajos de la Sociedad Holandesa de la Ciencia, bajo los apéndices de las obras de Huygens. Como bien lo puede notar un lector celoso por los aspectos de probabilidad, este problema puede tener tres interpretaciones como lo señalan, Montomort, Bernoulli (1713) y de Moivre, y fue a su vez, motivo de discusión mientras se elaboraba su solución a través de la correspondencia mencionada ya que Hudde, consideraba en la solución que el problema era bajo el supuesto 'sin remplazamiento'. Las tres situaciones son:

1. Cada jugador tiene una urna con las 12 bolas descritas y se extraen sin remplazamiento.
2. Se dispone de una sola urna de donde se sacan las bolas sin remplazamiento.
3. Las bolas son extraídas con remplazamiento.

Huygens considera la situación 3 (con remplazamiento), además, utiliza la palabra en holandés 'Kans' la cual es el equivalente a esperanza.

Problema III
A apuesta contra B, que de 40 cartas, diez de cada color, tomará del maso 4 de tal forma que obtenga una de cada color. La porción entre los chances de A y B es de 1000 a 8139.

Este problema fue propuesto por Fermat, gracias a la correspondencia que Huygens mantuvo con Carcavy y que como lo hemos indicado, se ofreció a ser intermediario con Fermat. La solución la da Huygens mediante esta correspondencia sin ninguna justificación sin embargo, diversos autores contemporáneos como Hald (1990) y Camuñez y Basulto (2011), dan un proceso al estilo de Huygens el cual será presentado durante la conferencia.

Problema IV
El jugador A apuesta contra el jugador B de tal forma que, de 12 fichas distribuidas en 4 blancas y 8 negras, él escogerá sin ver 7 fichas (una a una), de las cuales exactamente 3 serán blancas. Se pide así, la parte de la apuesta de A a B.
Inicialmente el problema tuvo algunas dificultades de interpretación. De la correspondencia entre Huygens y Hudde que puede ser seguida en las cartas 1374 y 1375 del 4 y 5 de abril de 1665, Huygens añade las palabras respecto a las 3 fichas

blancas; en niet meer, es decir, 3 fichas blancas y no más. La propuesta de solución se hará luego de la sexta extracción considerando los 'momentos' en donde A puede ganar.

Problema V

A y B tienen cada uno 12 fichas. Juegan con tres dados con la condición que si sale suma 11, A da una ficha a B. Si sale suma 14 B da una ficha al jugador A. El juego se gana en el momento en que alguno de los dos se queda con todas las fichas. Se trata de encontrar los chances de ganar de A a B. (Respuesta: 244140625 a 282429536481).

Este último problema propuesto por Huygens es conocido como el problema de la ruina del jugador. Se sabe a través de la correspondencia epistolar entre Pascal, Carcavy y Huygens; recuperada por la Sociedad Holandesa de las Ciencias, originariamente fue propuesto por Pascal y dio origen a grandes elogios como lo relata Todhunter (1865): "el último problema del Ratiociniis de Huygens es el más notable de todos".

Además, los grandes matemáticos posteriores como De Moivre, Lagrange y Laplace, se sirvieron de éste, para analizar y resolver problemas relacionados con la duración del juego. Una primera versión del problema se encuentra en la carta de Carcavy a Huygens el 28 de Septiembre de 1656, esta versión traducida aparece en la revista *SUMA* titulada 'La ruina del jugador':

> Dos jugadores juegan con esta condición de que la chance del primero sea 11, y la del segundo 14, un tercero lanza los tres dados para ellos dos, y cuando sale 11 el 1º marca un punto y cuando sale 14, el segundo marca uno de su parte. Juegan a 12 puntos, pero con la condición de que si aquel que lanza los dados consigue 11, y así el primero marca un punto, si ocurre que los dados hacen 14 en el lanzamiento posterior, el segundo no marca un punto, sino que resta uno del primero, y así recíprocamente, de manera que si los dados llevan seis veces 11, con lo que el primero ha marcado seis puntos, si después los dados sacan tres veces seguidas 14, el segundo no marcará nada sino que restará tres puntos del primero, si después también ocurre que los dados hacen seis veces seguidas 14, no le quedará nada al primero, y el segundo tendrá tres puntos, y si aparece aún ocho veces seguidas 14, sin aparecer 11 entre medio, el segundo tendrá 11 puntos y el primero nada, y si ocurre cuatro veces seguidas 11, el segundo no tendrá más que siete puntos, y el otro nada, y si ocurre 5 veces seguidas 14 él habrá ganado.
>
> La cuestión pareció tan difícil al señor Pascal que dudó si el señor de Fermat lo llevaría a cabo, pero él me envió en el acto esta solución. Aquél que tiene la chance de 11 contra el que tiene la chance de 14 puede apostar 1156 contra 1, pero no 1157 contra 1. Y que así la verdadera razón del reparto estaría entre ambas, pero como el señor Pascal ha sabido que el señor de Fermat ha resuelto muy bien lo que le había sido propuesto, me ha dado los verdaderos números para enviárselos, y para testimoniarle de su parte que él no habría propuesto una cosa que no hubiese resuelto antes. Helos aquí.
>
> 150094635296999122. 129746337890625.
>
> Pero lo que encontraréis más considerable es que el citado señor de Fermat tiene la demostración, como también el señor Pascal de su parte, aunque hay apariencia de que se están sirviendo de métodos diferentes.

Veinte años más tarde aparece un manuscrito de Huygens, incluido en la edición de sus Obras Completas mediante el apéndice VI, en donde deja ver parte de su método de solución para este problema que no tiene inicialmente una cota en cuanto a la duración del juego. Según Shafer (1996) algo importante de reconocer en esta solución, es que se encuentra por primera vez en la historia de la probabilidad diagramas de árbol de probabilidad para resolver problemas de este tipo.

CONCLUSIONES

Se hace evidente el hecho que Huygens, instaura el Ratiociniis en medio de experiencias cercanas a su realidad, es decir el surgimiento de la expectatio como método de solución dentro de un campo de problemas particulares (o lo que hoy se conoce como esperanza matemática) alrededor de 1656, se debe a aspectos externalistas. Un hecho claro es el lenguaje y la intencionalidad de su obra; el libro está dedicado a todos aquellos seres que pasan largo tiempo en los casinos, practicando juegos de azar como medio para tener equidad en los premios y apuestas. Tuvo conocimiento del problema del reparto y lo resolvió a su estilo mediante la proposición IV de su libro, empleando la recursividad. Establece las tres primeras proposiciones que le sirven de soporte y genera una cantidad de situaciones que le permiten a través del álgebra cartesiana y una singular estrategia de intercambio de billetes de lotería dar con las soluciones a los desafíos planteados al final de su libro. De esta forma, se convierte Huygens en el precursor de la justificación de la esperanza matemática como método para valuar juegos de azar.

Un segundo aspecto concluyente respecto al Ratiociniis y los cinco problemas finales, es considerar a Huygens como defensor de la probabilidad aleatoria. Es claro que el valor justo de una apuesta ocupa un lugar importante para él, haciendo alusión a lo prudente y a la justicia del juego, sin embargo, la manera de resolverlo a través de la sistematización de la esperanza matemática durante las 14 proposiciones lo ubican con mayor tendencia hacia el tipo de probabilidad aleatoria.

Huygens establece 'el método analítico' en la proposición XIV, determinante para la solución a problemas con un horizonte indeterminado. Esto permite, la implementación de un álgebra elemental basado en sistemas de ecuaciones para la solución a problemas de probabilidad. De esta forma, se plantea útil un acercamiento de este tipo, de nuevo reforzando la idea de presentar la esperanza matemática vía natural y cercana a la experiencia. El método analítico para resolver problemas de este género (entre ellos, los 3 primeros problemas propuestos al final del Ratiociniis) es poco conocido, muestra de ello se da en la escasa literatura asociada a este.

Es necesario crear grupos de investigación en Educación Estadística más robustos y desde diferentes líneas de investigación con el fin de generar una disciplina más singular en su quehacer, en virtud que los objetos tratados en este área tienen la presencia de la incertidumbre y variabilidad para la toma de decisiones y por ello, los problemas que se plantean deben tener una metodología particular. La historia de la probabilidad, así como la probabilidad de manera general está cargada de hechos, conjeturas y problemas desafiantes, mostrando que en muchas ocasiones, a pesar de tener amplio conocimiento desde la estadística y probabilidad, la intuición nos puede engañar frente a la toma de decisiones. Los conceptos en la historia de la probabilidad no fueron lineales ni aceptados objetivamente desde su constitución, sino que han evolucionado. Una vez replicados estos conceptos en el aula, se presentan obstáculos que deben ser tratados a la luz de los aspectos históricos y epistemológicos, en el sentido de Batanero y Serrano (1998):

> Las cuestiones epistemológicas ocupan un lugar fundamental en la reflexión de las personas interesadas por el aprendizaje de las matemáticas. Ello es debido a que los obstáculos surgidos históricamente en la formación de los conceptos se reproducen, con cierta frecuencia, en los alumnos. Otras veces, los estudios de tipo epistemológico pueden ayudar a comprender las dificultades de los alumnos en el uso de los conceptos para la resolución de problemas.

Se espera que este tipo de abordajes desde la historia de la probabilidad y estadística tengan mayor presencia dentro de los distintos eventos que se realizan a nivel nacional en Educación Matemática, ya que en ocasiones la mirada se ha centrado solo en la parte didáctica o tecnológica, dejando atrás toda una enriquecedora historia que puede potenciar el tratamiento de estos objetos.

REFERENCIAS

Basulto, J. y Camuñez, J.A. (2007). El problema de los dados del caballero de Meré: soluciones publicadas en el siglo XVII. *SUMA*, (56), 43-54.

Batanero, C. y Serrano, L. (1998). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas, revista. *UNO, 5*, 15-28

Bernoulli, J. (1713). *Ars Conjectandi.* Basilea: Thurnisiorum.

Camuñez, R. y Basulto, J. (2011). *Cristiaan Huygens (1629-1695): La consolidación del cálculo de probabilidades.* España: Septem Ediciones.

Carcavy, (1656). Carta a Huygens de 28 de septiembre de 1656*.* En de M.S. Mora Charles, (1989), *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad. Siglos XVI y XVII* (pp. 012-104). San Sebastián: Servicio Editorial del País Vasco.

Hald, A. (1990). *A history of probability and statistics and their applications before 1750*. New York: Wiley.

Hacking, I. (1995). El Surgimiento de la Teoría de la Probabilidad. Barcelona: Gedisa.

Huygens, C. (1657). *De ratiociniis in ludo alea, en Oeuvres Complètes*. Société Hollandaise des Sciences (vol. XIV, pp. 1-179, 1888-1950). La Haya, The Netherlands: Nijhoff.

Shafer, G. (1996). *The art of causal conjecture*. Cambridge, MA: MIT Press.

Schooten, F., van (1656). Exercitationum mathematecarium. Elsevirii, Leiden.

Todhunter, I. (1865). *A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace.* London: MacMillan.