

Una perspectiva de análisis de las transformaciones geométricas en curvas de la función $f(x) = e^{ax}$ utilizando el GeoGebra

A perspective analysis of geometric transformations in curves of the function $f(x) = e^{ax}$ using GeoGebra

LUIS ANDRÉS CASTILLO BRACHO¹
RAFAEL ENRIQUE GUTIÉRREZ ARAUJO²
JUAN LUIS PRIETO GONZÁLEZ³

Resumen

Con el propósito de superar algunas dificultades de los profesores en la integración de tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, se presenta una secuencia de análisis de las transformaciones geométricas de la función exponencial natural, definida por $f(x) = e^{ax}$, que se apoya en el uso del GeoGebra. Tal secuencia permite caracterizar familias de curvas asociadas a la expresión anterior, a partir del análisis de las transformaciones geométricas “deformación” y “reflexión” experimentadas por estas curvas tras la variación del parámetro a . En el diseño de la secuencia se tomó en cuenta aspectos teóricos, instrumentales y didácticos, que se consideran pertinentes para realizar el análisis. El uso de esta secuencia favorece el desarrollo de las capacidades para la integración eficiente de las tecnologías en la enseñanza de la Matemática.

Palabras clave: Función exponencial; transformaciones; GeoGebra.

Resumo

A fim de superar algumas dificuldades de professores na integração da tecnologia no ensino de matemática, se apresenta uma sequência de análise das transformações geométricas da função exponencial natural, definida por $f(x) = e^{ax}$, que se apoia no uso de GeoGebra. Tal sequência permite caracterizar famílias associadas com a expressão acima, a partir da análise das transformações geométricas "deformação" e "reflexão" experimentadas por estas curvas mediante a variação do parâmetro a . Ao projetar a sequência se levou em conta aspectos teóricos, instrumentais e didáticos, que são considerados relevantes para a análise. O uso desta sequência pode promover o desenvolvimento das capacidades para a integração eficiente da tecnologia no ensino de Matemática.

Palavras-chave: Função exponencial; transformações; GeoGebra.

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre la enseñanza de las funciones reales en el nivel medio han revelado una serie de dificultades y obstáculos de aprendizaje vinculados al tratamiento

¹Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática. Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI)-LUZ, Venezuela, Edo. Zulia – luis.castillo@aprenderenred.com.ve

² Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática. Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI)-LUZ, Venezuela, Edo. Zulia – rafael.gutierrez@aprenderenred.com.ve

³ Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática. Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI)-LUZ, Venezuela, Edo. Zulia – juan.prieto@aprenderenred.com.ve

del concepto de función desde un punto de vista más algebraico y estático, basado en la manipulación de fórmulas y la descripción de técnicas que son aplicadas de forma algorítmica (DOORMAN y DRIJVERS, 2011; REZENDE, PESCO y BORTOLOSSI, 2012). Por ejemplo, en el caso de la función cuadrática, los profesores suelen tratar la cuestión de los puntos de corte con el *eje x* sólo a través de la aplicación de la fórmula conocida como la “resolvente”, expresión usada para determinar los ceros de la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$, dejando así de lado las bondades de los registros gráficos para dotar de sentido a tales puntos.

Situaciones como ésta limitan las posibilidades del alumno para apropiarse de un conocimiento matemático relativo al concepto de función que le facilite el estudio de sus características y propiedades esenciales desde sus diferentes registros de representación (BAYAZIT, AKSOY y ALP İLHAN, 2010). En particular, se sabe que los alumnos presentan dificultades para comprender los efectos geométricos que produce la variación de los parámetros asociados a la fórmula de una función sobre la familia de curvas asociadas a ésta (DARMAWAN e IWAN, 2011; TITO, SAN MIGUEL y GAY, 2013). Superar estas dificultades coloca a los alumnos en una posición favorable frente al reto que supone reconocer las características y propiedades de las funciones mediante la coordinación de múltiples registros.

Algunas propuestas de análisis de las funciones desde un enfoque de coordinación de registros gráficos y algebraicos que se apoyan en el uso del GeoGebra (CASTILLO, GUTIÉRREZ y PRIETO, 2013; CERVANTES y PRIETO, 2013; GUTIÉRREZ y PRIETO, 2013) colocan la atención en las facilidades que ofrece esta herramienta para relacionar los aspectos gráficos y algebraicos de un mismo objeto matemático, favoreciendo con ello el estudio de las transformaciones geométricas que experimentan las gráficas de funciones y la consecuente mejora en la comprensión de los alumnos (HOHENWARTER, 2006). Hoy día el GeoGebra es considerado como una herramienta didáctica de fácil acceso y manipulación, respaldada por una comunidad de educadores y profesores de matemática en franco aumento (FIORITI, 2012). Por medio de este programa es posible dibujar, manipular y explorar las gráficas de funciones con cierta precisión, vinculándolas con otras formas de representaciones equivalentes, tales como las fórmulas algebraicas y las tablas de valores.

A pesar de las ventajas que de usar el GeoGebra en clases de funciones, aún es escasa la información referida a las formas de integrar eficientemente esta herramienta en las

prácticas matemáticas de los alumnos. Con el propósito de hacer aportes al respecto, a continuación se describe una secuencia para establecer relaciones entre la variación del parámetro a de la expresión $f(x) = e^{ax}$ que define a la función exponencial natural (su base es el número e) y las transformaciones experimentadas por las curvas asociadas, utilizando el GeoGebra. La secuencia se basa en consideraciones de tipo conceptual (relativas a las transformaciones), instrumentales (referidas a las opciones del GeoGebra que hacen posible representar las transformaciones) y didácticas (referidas a la forma de usar el GeoGebra para tratar lo conceptual).

1. TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Las transformaciones que sufren las gráficas de funciones reales se deben a cambios sobre las expresiones algebraicas que las definen. Por ejemplo, si multiplicamos a la expresión que define a una función $r(x)$ por un valor no nulo, digamos a , obtenemos una nueva función $f(x) = a \cdot r(x)$ cuya gráfica ha sufrido un cambio en su aspecto, con respecto a la gráfica de $r(x)$. No obstante, es importante resaltar la existencia de una familia funciones reales que no son producto de transformación alguna, tales como $r(x) = x$, $r(x) = x^2$, $r(x) = a^x$, entre otras, las cuales son denominadas “funciones prototipo” por CONFREY y SMITH (1991). Al respecto, BORBA (1993) afirma que las funciones prototipo son las representantes de las distintas clases de funciones y que, en la mayoría de los casos, llegan a actuar como referentes de las transformaciones aplicadas a funciones.

LARSON, HOSTLER y EDWARDS (2008) definen y clasifican las transformaciones de funciones en dos tipos:

1.1. TRANSFORMACIONES RÍGIDAS

La gráfica de una función real sufre una transformación rígida cuando cambia de posición en el plano coordenado, manteniendo la misma forma que posee su referente. Las transformaciones rígidas más comunes son:

Traslación: Este tipo de transformación consiste en desplazar la gráfica de la función por el plano coordenado, esto es, todos y cada uno de los puntos de la curva se desplazan en la misma dirección, sentido y longitud. Si a la expresión algebraica de una función real $r(x)$ le sumamos o restamos un valor real positivo no nulo, digamos c , obtenemos otra función $f(x) = r(x) \pm c$, cuya gráfica se ha trasladado verticalmente c

unidades hacia arriba (al sumar) o hacia abajo (al restar), respecto a la gráfica de $r(x)$. Similarmente, si a la variable x de una función real $r(x)$ le sumamos o restamos un valor real positivo no nulo, digamos c , obtenemos otra función $f(x) = r(x \pm c)$, cuya gráfica se ha trasladado horizontalmente c unidades hacia la derecha (al restar) o hacia la izquierda (al sumar), respecto a la gráfica de $r(x)$.

Reflexión: Esta transformación rígida consiste en aplicar una simetría axial a la gráfica de una función real $r(x)$, obteniendo así la gráfica de otra función $f(x)$ cuyos puntos están en lados opuestos y a la misma distancia del eje de reflexión, con respecto a sus homólogos en $r(x)$ (BORBA, 1993). En el caso en que el *eje x* es el eje de reflexión, la expresión algebraica de la nueva función $f(x) = -r(x)$. Para el caso en el que el *eje y* es el eje de reflexión, la expresión que define ésta transformación es $f(x) = r(-x)$.

1.2. TRANSFORMACIONES NO RÍGIDAS

La gráfica de una función real sufre una transformación no rígida cuando sólo se produce una distorsión (modificación) en su forma, en relación a aquella que posee la curva referente del efecto. Por su naturaleza, este tipo de transformación recibe el nombre de “deformación” y la misma puede ser de dos tipos:

Deformación vertical: Esta deformación se produce al multiplicar la expresión algebraica de una función canónica $r(x)$ por un número real positivo a ($a > 0$), obteniendo así otra función $f(x) = a \cdot r(x)$. En el caso en que $a = 1$, ambas funciones son “idénticas” (esto es $f(x) = r(x)$) y, en consecuencia, no se aprecia deformación alguna sobre la gráfica de $f(x)$. Por esta razón, vale la pena caracterizar a la deformación en función de dos intervalos posibles de valores de a : $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$. Para el caso en que $0 < a < 1$, se tiene que la gráfica de $f(x)$ sufre una “contracción vertical”, mientras que cuando $a > 1$ se tiene que la gráfica de $f(x)$ sufre una “dilatación vertical”.

Deformación horizontal: Este tipo de transformación se produce al multiplicar la variable independiente de una función canónica $r(x)$ por un número real positivo a ($a > 0$), diferente de 1 (por razones obvias), obteniendo así la gráfica de otra función $f(x) = r(ax)$. Considerando nuevamente los intervalos $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$, en el caso en que $0 < a < 1$ se tiene que la gráfica de $f(x)$ sufre una “dilatación horizontal”, mientras que cuando $a > 1$ la gráfica de $f(x)$ sufre una “contracción horizontal”.

2. CONSIDERACIONES FUNDAMENTALES DEL DISEÑO

El diseño de esta secuencia se basa en tres tipos de conocimiento para la enseñanza de las funciones reales con GeoGebra: Teórico (referido a las transformaciones de funciones), instrumental (referido a las herramientas para representar las transformaciones con GeoGebra) y didáctico (referido a la forma de usar el GeoGebra para el estudio de las transformaciones).

2.1. CONSIDERACIONES TEÓRICAS

En primer lugar, hemos considerado que los cambios en los valores del parámetro de la función $f(x) = e^{ax}$ (con $a \neq 0$) producen dos tipos de transformaciones geométricas sobre las gráficas correspondientes, conocidas como “deformación” (de tipo horizontal) y “reflexión”. Ambos efectos son caracterizados a partir de las cualidades que posee alguna curva de la familia de $f(x) = e^{ax}$ que actúe como referente del efecto. En el caso de la deformación, la curva referente es la gráfica de la función canónica $r(x) = e^x$. En el caso de la reflexión, cada curva de la familia tiene su referente, de manera que sólo una de éstas es la reflexión de la función prototipo correspondiente, mientras que el resto de gráficas son la reflexión de curvas ya deformadas.

2.2. CONSIDERACIONES INSTRUMENTALES

En segundo lugar, consideramos que es posible manipular la variación del parámetro de la función $f(x) = e^{ax}$ (con $a \neq 0$) utilizando la herramienta “Deslizador” del GeoGebra. Un deslizador es una variable del GeoGebra que representa a un conjunto de valores reales o medidas angulares, el cual puede ser controlado y ajustado convenientemente por el usuario en un intervalo de valores que éste recorrerá (BASURDO y GALLARDO, 2011). Los deslizadores pueden ser asociados a los parámetros de expresiones algebraicas, tales como a en la función $f(x) = e^{ax}$, con el fin de visualizar los cambios que sufren las curvas asociadas a la expresión en la medida que el parámetro cambia de valor.

2.3. CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS

Finalmente, dado que la variación del parámetro a produce dos tipos de transformaciones sobre las gráficas de $f(x) = e^{ax}$, el análisis de la deformación y reflexión se lleva a cabo por separado. En ambos casos, el estudio se basa en establecer los intervalos en donde el parámetro a debe variar para visualizar uno u otro efecto.

Estos intervalos guiarán los ajustes convenientes al deslizador con la intención de apreciar las correspondencias entre los valores que el parámetro toma y las transformaciones de las curvas que se muestran en la interfaz del GeoGebra.

3. DEFORMACIÓN EN LAS CURVAS DE $f(x) = e^{ax}$

La variación del parámetro a de la expresión $f(x) = e^{ax}$ en cada uno de los intervalos $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$, define a dos conjuntos particulares de curvas que son el producto de deformaciones de tipo “dilatación” y “contracción” horizontales, respecto a la gráfica de $r(x) = e^x$. Las curvas se dilatan horizontalmente cuando el parámetro a toma valores en el intervalo $(0, 1)$. La figura 1a muestra una representación gráfica de la familia de curvas dilatadas en relación a la gráfica de $r(x) = e^x$. Desde un punto de vista algebraico, la dilatación en estas curvas adquiere sentido al observar que la preimagen de cualquier valor de las imágenes de $f(x) = e^{ax}$ es siempre mayor a la preimagen del mismo valor, evaluada en $r(x) = e^x$. Geométricamente, la dilatación se aprecia al representar estas preimágenes por segmentos paralelos al *eje x* que van desde un valor k del rango de imágenes (con $k > 0$ y $k \neq 1$) hasta las gráficas de $f(x)$ y $r(x)$, observándose así que la longitud del primer segmento es mayor que la del segundo (ver Figura 1b).

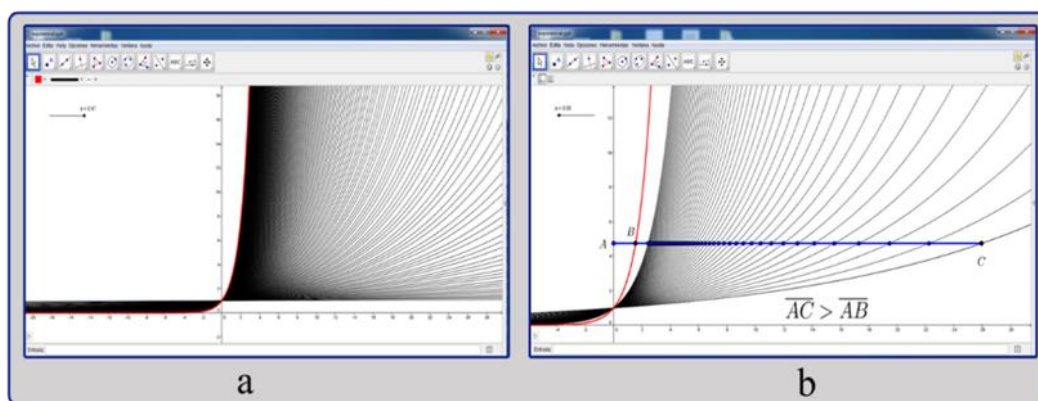


FIGURA 1: Familia de curvas dilatadas horizontalmente

FUENTE: Castillo, Gutiérrez y Prieto (2013)

Por su parte, las curvas de $f(x) = e^{ax}$ se contraen horizontalmente cuando a toma valores en el intervalo $(1, +\infty)$. En la figura 2a se observa a la familia de curvas contraídas, respecto a la gráfica de $r(x) = e^x$. Al igual que para la dilatación, este tipo de deformación puede entenderse desde lo algebraico y lo geométrico. En el primer caso, la contracción en estas gráficas se produce puesto que la preimagen de cualquier

valor de las imágenes de $f(x) = e^{ax}$ es siempre menor a la preimagen del mismo valor evaluada en $r(x) = e^x$. En el segundo caso, la contracción se da ya que la longitud del segmento asociado a la gráfica deformada es menor a la del segmento asociado con la curva canónica, como se ve en la figura 2b.

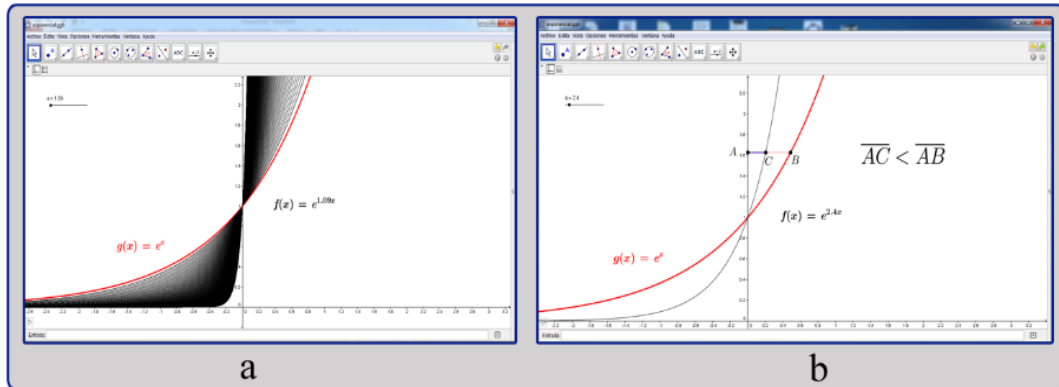


FIGURA 2: Familia de curvas contraídas horizontalmente
FUENTE: Castillo, Gutiérrez y Prieto (2013)

4. REFLEXIÓN EN LAS CURVAS DE $f(x) = e^{ax}$

La variación del parámetro a de $f(x) = e^{ax}$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ define a una familia de curvas caracterizadas por ser la reflexión de las curvas deformadas que genera $f(x) = e^{ax}$ cuando $a > 0$. En otras palabras, las curvas que son alguna reflexión se derivan de la aplicación de una simetría axial a las gráficas asociadas a $f(x) = e^{ax}$, siendo el eje de simetría el *eje y*. Cada curva reflejada lo es con respecto a sólo una gráfica de $f(x) = e^{ax}$ (con $a > 0$), de manera que cada una de éstas posee una única curva referente de la transformación (ver Figura 3).

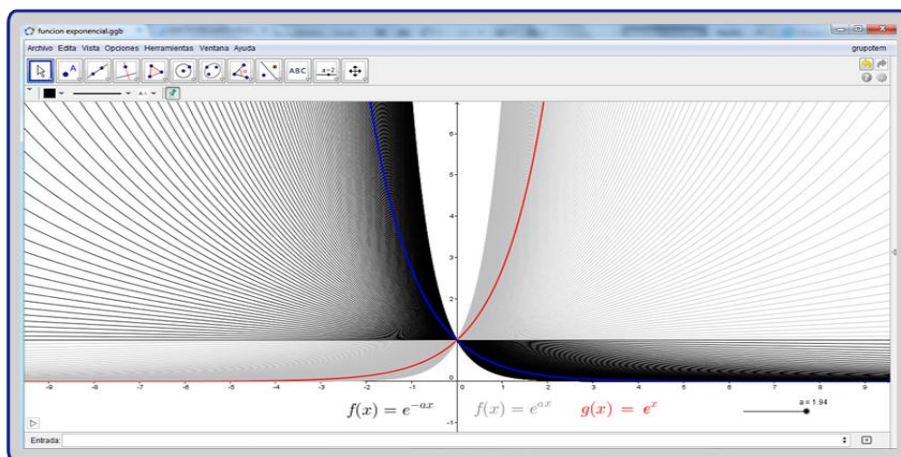


FIGURA 3: Familia de curvas reflejadas
FUENTE: Castillo, Gutiérrez y Prieto (2013)

5. TRANSFORMACIONES EN UN ENTORNO DE GEOGEBRA

5.1. DEFORMACIÓN

Para visualizar la deformación en las gráficas de $f(x) = e^{ax}$ ($a \neq 0$), sin que intervenga la reflexión, es necesario ajustar el deslizador asociado al parámetro a en el intervalo $(0, +\infty)$, haciendo al valor mínimo igual a 0 y el máximo igual a cualquier entero positivo, tan grande o pequeño como lo amerite el análisis y lo permita el programa. En este intervalo se encuentra el valor 1, a partir del cual es posible dividir el estudio en dos casos:

Caso 1: Dilatación Horizontal en el intervalo $(0, 1)$

Para observar la deformación producida en este intervalo es necesario ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador en 0 y 1, respectivamente. Luego de seleccionar las opciones “Activa rastro” sobre la gráfica de $f(x) = e^{ax}$ y “Animación activada” al deslizador, es posible apreciar la familia de curvas que se han dilatado horizontalmente, con respecto a la curva canónica correspondiente a $r(x) = e^x$. Más aún, tras la animación puede concluirse que la dilatación en las curvas es más notable cuando el valor que toma el parámetro es más cercano a 0. En otras palabras, las curvas vinculadas a $f(x) = e^{ax}$ con $0 < a < 1$ tienden a ser próximas a la recta $y = 1$ en la medida que el valor del parámetro se acerca al mínimo del intervalo (ver Figura 4a).

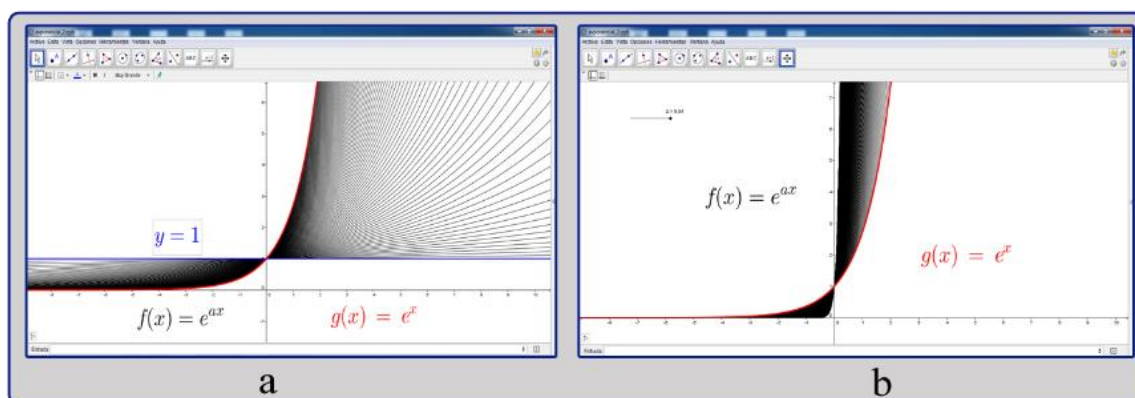


FIGURA 4: Deformación de tipo dilatación y contracción horizontales sobre $g(x) = e^x$
FUENTE: Castillo, Gutiérrez y Prieto (2013)

Un aspecto importante del análisis radica en la cantidad de curvas que pueden visualizarse para caracterizar este efecto. En este sentido, es posible apreciar un conjunto amplio de curvas dilatadas horizontalmente al ajustar el “incremento” del deslizador en valores “pequeños”, tal como lo es 0.01. Debido a lo reducido del intervalo $(0, 1)$, se torna complicado posar el deslizador en un valor en particular,

situación que puede resolverse al ampliar su “longitud” y, de esta manera, colocar el deslizador en cualquier valor dentro del intervalo.

Caso 2: Contracción Horizontal en el intervalo $(1, +\infty)$

Para caracterizar las curvas generadas por este tipo de deformación es necesario ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador en 1 y otro entero mayor que éste, respectivamente. Pero, ¿qué tan mayor debe ser este valor? Una respuesta admisible puede obtenerse al observar la deformación producida luego de activar rastro a la gráfica de $f(x) = e^{ax}$ y “Animación activada” con distintos valores máximos del deslizador, tales como 5, 11 y 63. La animación en cada caso permite apreciar la familia de curvas que se han contraído horizontalmente respecto a la curva canónica, siendo el efecto más notable en el caso que el máximo del deslizador sea 63, como se aprecia en la figura 5b.

5.3. REFLEXIÓN

Para visualizar y analizar esta transformación es necesario ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador asociado al parámetro de $f(x) = e^{ax}$ en cualquier entero negativo y 0, respectivamente. De manera similar al análisis de la deformación, en este intervalo se encuentra un valor notable, el -1 , puesto que la gráfica de $f(x)$, cuando $a = -1$, corresponde al reflejo de la curva canónica. Por tal motivo, hemos dividido el estudio de la reflexión en dos casos:

Caso 1: Reflexión en el intervalo $(-1, 0)$

En este caso debe ajustarse los valores mínimo y máximo del deslizador en -1 y 0 , respectivamente. Luego de activar el rastro a la gráfica de $f(x) = e^{ax}$ y la animación al deslizador, es posible visualizar la familia de curvas que se caracterizan por ser el reflejo de gráficas que se han dilatado horizontalmente previamente (ver Figura 5a).

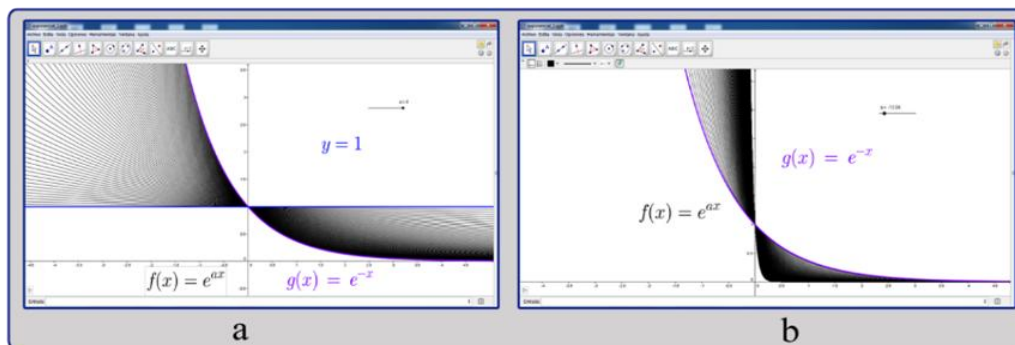


FIGURA 5: Efecto de reflexión para los intervalos $(-1, 0)$ y $(-\infty, -1)$

FUENTE: Castillo, Gutiérrez y Prieto (2013)

Caso 2: Reflexión en el intervalo $(-\infty, -1)$

Para caracterizar la reflexión en este intervalo se debe ajustar el mínimo del deslizador en un entero negativo menor que -1 y el máximo en este último valor. Pero ¿qué tan menor debe ser el valor del mínimo? La respuesta puede encontrarse tras observar la reflexión que se produce luego de activar rastro a la gráfica de $f(x) = e^{ax}$ y la respectiva animación al deslizador con diferentes valores mínimos, por ejemplo -4 , -12 y -60 . Tras la animación es posible apreciar la familia de curvas que se caracterizan por ser el reflejo de gráficas que previamente se han contraído horizontalmente y, para el caso que se elija el valor de -60 como mínimo, la reflexión es más “marcada”, por así decirlo (ver Figura 5b).

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha descrito una secuencia para caracterizar la familia de curvas correspondiente a la función $f(x) = e^{ax}$, en relación a los efectos de geométricos de deformación y reflexión visualizados tras la variación del parámetro a contenido en la expresión de la función, utilizando el GeoGebra. Mediante el uso adecuado de un deslizador se logró establecer relaciones entre los valores del parámetro (en intervalos establecidos convenientemente) y las curvas representadas en la vista gráfica del programa, lo que hace posible dotar de sentido a las transformaciones analizadas en la secuencia. Lo anterior es una prueba más de la capacidad evidente que el GeoGebra posee al momento de establecer conexiones entre las principales representaciones de las funciones (expresiones algebraicas y gráficas) utilizadas en la secuencia, lo que conlleva a desarrollar la comprensión de los efectos analizados con mayor profundidad (BAYAZIT y AKSOY, 2010; HOHENWARTER, 2006).

Puesto que las representaciones gráficas de una función son las más tratadas en la dinámica escolar (BASURTO y GALLARDO, 2011) resulta provechoso para el profesorado de Educación Media apoyarse en una secuencia de estudio de las transformaciones de funciones como la que se propone en este trabajo, ya que ésta permite desarrollar la capacidad de anticiparse al comportamiento geométrico de las curvas correspondientes a la expresión $f(x) = e^{ax}$ a partir de la forma de su expresión algebraica.

Por último, consideramos que el profesor de Matemática mejorará su comprensión en relación a este tópico al involucrarse en procesos de diseño y puesta en práctica de

secuencias instruccionales como la descrita en este trabajo, haciendo posible con ello la integración de las tecnologías en su práctica profesional y el logro de un aprendizaje verdaderamente significativo entre sus estudiantes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASURTO, E.; GALLARDO, A. (2011). *El estudio de los parámetros por medio de tecnologías híbridas*. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV*, 287-296. Ciudad Real: SEIEM.

BAYAZIT, İ.; AKSOY, Y. (2010). Connecting representations and mathematical ideas with GeoGebra. *Geogebra International Journal of Romania*, N.1, v.1. 93-106.

BAYAZIT, İ.; AKSOY, Y.; ALP İLHAN, O. (2010). GeoGebra as an instructional tool to promote students' operational and structural conception of function. *The First North American GeoGebra Conference 2010*, Ithaca (Nueva York, USA).

BORBA, M. (1993). *Student's understanding of transformation of functions using multi-representational software*. Tesis (Doctorado en Filosofía). Universidad de Cornell.

CASTILLO, L.; GUTIÉRREZ, R.; PRIETO, J. (2013). Análisis de los efectos relacionados con la variación de los parámetros en la función cuadrática utilizando tecnologías. *Congreso Internacional Pedagogía 2013*, La Habana (Cuba).

CERVANTES, A.; PRIETO, J. (2013). Variación de los parámetros de la función afín y sus efectos geométricos: una propuesta de análisis con GeoGebra. *Congreso Internacional Pedagogía 2013*, La Habana (Cuba).

CONFREY, J.; SMITH, E. (1991). A framework for functions: Prototype, Multiples Representations and Transformations. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Proceedings of the Annual Meeting 13th*, October, Virginia. v.1, 57 – 63.

DARMAWAN, D.; IWAN, P. (2011). On the teaching of analyzing the effects of parameter changes on the graph of function. *Fourth National Conference on Mathematics Education*, Julio, Yogyakarta.

DOORMAN, M.; DRIJVERS, P. (2011). Algebra in function. In P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown*. Rotterdam: Sense. 119 –136.

FIORITI, G. (2012). Prólogo. En R. Ferragina (Ed.) *GeoGebra entra al aula de matemática*. (1a.ed.). Argentina: Miño y Davila.

GUTIÉRREZ, R.; PRIETO, J. (2013). Deformación y reflexión con GeoGebra: Una caracterización de las parábolas definidas por la expresión $f(x) = ax^2$. *VIII Congreso Venezolano de Educación Matemática (2013)*, Santa Ana de Coro (Venezuela).

HOHENWARTER, M. (2006). Dynamic investigation of functions using GeoGebra. *Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education*, Julio, Dresden.

LARSON, R.; HOSTLER, R.; EDWARDS, B. (2008). Shifting, Reflecting, and Stretching Graphs. *Precalculus: A Graphing Approach, 5th Edition*. New York: Houghton Mifflin Company. 127 – 132

REZENDE, W. M.; PESCO, D. U.; BORTOLOSSI, H. J. (2012). Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*. N.1 v.1, 74 – 89.

TITO, M. J.; SAN MIGUEL, S.; GAY, M. (2013). Estudio de funciones de variable real en el entorno dinámico que ofrece GeoGebra. *VIII Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*.